

Persistence des stratifications de laminations normalement dilatées

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 22 juin 2007

pour l'obtention du

Doctorat de l'université Paris-Sud – Orsay
(spécialité mathématiques)

par

Pierre Berger

Composition du jury

Président : ...

Rapporteurs : Christian Bonatti
Marcelo Viana

Examineurs : ...

...

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

J'ai eu l'honneur et le privilège de bénéficier de l'encadrement exceptionnel de Jean-Christophe Yoccoz durant ma thèse.

Il m'a fait partager sa vision large des systèmes dynamiques, m'a ainsi montré les grandes lacunes de notre science et m'a offert des problématiques sûrement très fertiles.

Je le remercie aussi pour m'avoir généreusement dévoilé sa façon de chercher, sa façon de comprendre et sa façon de corriger.

Je réalise aujourd'hui sa qualité de maître, qui dans son exigence formelle, a émancipé mon propre style mathématique.

Je ferai mon possible pour être à la hauteur de son enseignement.

Marcelo Viana m'accueilli chaleureusement de nombreuses fois à l'IMPA, pendant une durée qui se somme à près d'un an. Je le remercie pour de nombreuses discussions, pour les très bonnes conditions de travail qui m'ont permis de prendre goût aux mathématiques brésiliennes, dont ce travail inonde. Je le remercie aussi d'avoir honoré ce travail en sa qualité de rapporteur, dans une période de grande indisponibilité.

Christian Bonatti a effectué un travail de rapporteur remarquable, je le remercie d'avoir pris le temps de s'intéresser à ce travail et de m'avoir exposé des erreurs.

Je remercie aussi Enrique Pujal, Frédéric Le Roux et David Trotman pour avoir, entre autre, accepté de faire partie de ce jury de thèse.

Pierre Pansu s'est montré très disponible et, dans sa connaissance encyclopédique de la géométrie, m'a beaucoup aidé. Je remercie tout autant Frédéric Paulin qui, de plus, à su me guider dans ma scolarité à l'ENS, ainsi que René Martel pour son initiation mathématique.

Claudio Murolo m'a expliqué par correspondance la théorie des stratifications, je souhaite le remercier pour ces longs mails.

Pierre-Yves Fave a réalisé les plus belles représentations 3D de ce travail. Je le remercie pour son aide.

Je remercie aussi enfin tous les (apprentis) mathématiciens d'Orsay, de l'Impa ou d'ailleurs, avec qui j'ai discuté, j'ai appris, j'ai aimé les mathématiques et son ambiance.

Je remercie enfin mon entourage proche : famille, amis et amie pour leur soutien et leur aide le long de ces études.

Table des matières

Introduction		1
1	Motivations	1
2	Stratifications de laminations normalement dilatées	3
3	Exemples de stratifications de laminations normalement dilatées et persistantes	5
3.1	Persistence des sous-variétés à bord en tant que stratifications	5
3.2	Persistence des sous-variétés à coins en tant que stratifications	5
3.3	Laminations invariantes de l'application de Viana dans $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$	6
3.4	Produit de fractions rationnelles hyperboliques	6
3.5	Fibré normalement axiome A	7
4	Une condition suffisante pour la persistance des stratifications de laminations normalement dilatées	8
5	Plan	12
Chapitre 1		
Persistance de laminations		
1.1	Cadre des laminations	13
1.1.1	Définition d'une lamination	13
1.1.2	Morphismes de laminations	15
1.1.3	Métrique riemannienne sur une lamination	15
1.1.4	Classes d'équivalence des morphismes	16
1.2	Persistance d'une lamination normalement dilatée	16
1.2.1	Dilatation normale	16
1.2.2	Persistence des immersions de laminations normalement dilatées	18
1.2.3	Persistence des plongements de laminations normalement dilatés	21
1.3	Preuve de la proposition 1.1	23
1.4	Fibré vectoriel ayant pour base une lamination	26
1.4.1	\mathcal{L} -fibré vectoriel	26
1.4.2	Connexion	26

1.4.3	Topologies sur les espaces des sections	27
1.5	Démonstration du théorème 1.2	28
1.6	Preuve du lemme 1.5.1	30
1.6.1	Notations et conventions	31
1.6.2	Préimage d'une perturbation de i	31
1.6.3	Action de $S_{f'}$ sur les normes	35

<p>Chapitre 2</p> <p>Persistence de stratifications de laminations</p>
--

2.1	Géométrie sur les stratifications de laminations	43
2.1.1	Stratifications de laminations	43
2.1.2	Structure de treillis de laminations sur un espace stratifié	48
2.1.3	Des structures géométriques sur certains espaces stratifiés	58
2.2	Persistence des stratifications de laminations normalement dilatées	61
2.2.1	Persistence des stratifications de laminations normalement dilatées de façon contrôlée	61
2.2.2	Un exemple de stratification normalement dilatée non topologiquement persistante	62
2.3	Applications du théorème de persistence 2.1	65
2.3.1	Prolongement de la continuation hyperbolique d'un compact répulsif invariant	65
2.3.2	Produit de stratifications de laminations	67
2.3.3	Exemples de stratifications de laminations persistantes en dynamique produit.	68

<p>Chapitre 3</p> <p>Persistence de sous-variétés</p>

3.1	Variétés à bord normalement dilatées	71
3.1.1	Persistence des sous-variétés à bord normalement dilatées en tant que stratification a -régulière	71
3.1.2	Preuve du théorème 3.1	72
3.2	Variétés à coins normalement dilatées	76
3.2.1	Rappels sur les variétés à coins	76
3.2.2	Théorème de persistence des variétés à coins normalement dilatées en tant que stratifications a -régulières	77
3.2.3	Preuve du théorème 3.2	78

Chapitre 4**Fibré normalement axiome A**

4.1	Théorèmes de persistance	91
4.2	Preuve de la persistance	94
4.2.1	Stratifications de laminations et structures de treillis persistantes	95
4.2.2	Voisinages tubulaires des feuilles de \mathcal{L}	96
4.2.3	Hypothèse de récurrence	97
4.2.4	Étape $j=N$	97
4.2.5	Étape $i + 1 \rightarrow i$	98

Chapitre 5**Preuve de la persistance des stratifications**

5.1	Préliminaires	103
5.1.1	Convention et notations	103
5.1.2	Construction de fibrés	104
5.1.3	Construction d'une filtration adaptée	106
5.1.4	Uniformité locale des chaînes sortantes	108
5.2	Démonstration du corollaire 2.2	109
5.3	Démonstration par récurrence du théorème 2.1	110
5.3.1	Propriété fondamentale de la dynamique sur K_p	110
5.3.2	Démonstration du théorème 2.1 à partir de la propriété fondamentale	111
5.3.3	Rang $p=N$	113
5.3.4	Rang $p+1 \Rightarrow$ Rang p	113
5.3.5	Preuve du lemme 5.3.4 préimage d'une perturbation de \mathcal{L}_p	125
5.3.6	Preuve du lemme 5.3.5 : construction d'une structure algébrique locale	129

Annexe A**Analyse sur les laminations et les treillis**

A.1	Partition de l'unité	135
A.1.1	Partition de l'unité sur une lamination	135
A.1.2	Partition de l'unité contrôlée sur une stratification de laminations	138
A.2	Densité des relèvements lisses d'une application lisse	140
A.2.1	Densité des relèvements lisses d'un morphisme d'une lamination dans un fibré en variétés	141
A.2.2	Densité des relèvements lisses d'un morphisme contrôlés dans un fibré en variétés	141
A.3	Fibré induit par une section de la grassmannienne	142

A.3.1 Fibré induit par une section de la grassmannienne au-dessus d'une lamination 142

A.3.2 Fibré induit par une section \mathcal{T} -contrôlée de la grassmannienne 143

Annexe B Expansivité par plaques

Bibliographie **149**

Table des figures

1.1	Définition par transversalité de S^0	32
1.2	Valeur de la l'application Ψ	33
2.1	Une structure de treillis	51
2.2	Plongement contrôlé d'une stratification exotique sur le cylindre	52
2.3	Une structure de treillis sur un cube	53
2.4	Plongement contrôlé d'un cube	54
2.5	Stratification normalement dilatée et non persistante	63
2.6	Expérimentation numérique de l'exemple 2.3.3.2	69
5.1	Compacts $(C_k)_k$ pour la stratification simpliciale d'un carré, munie de la structure de treillis représentée figure 2.1	107

Introduction

L'exploration des systèmes dynamiques en dimension supérieure débute souvent au voisinage d'un produit de systèmes dynamiques bien compris. On espère alors entrevoir les dynamiques avoisinantes en trouvant des structures géométriques persistantes dans le produit : les supports induisent une partition qui code l'espace des phases et leur structure ramène à l'étude de systèmes dynamiques de plus petite dimension. Les théorèmes de persistance sont alors généralisés, pour sortir du cadre de la dynamique produit.

1 Motivations

En 1977, M. Hirsch, C. Pugh et M. Shub [11] ont élaboré une théorie qui s'avéra extrêmement utile dans les systèmes dynamiques hyperboliques. Le point central de leur travail était la preuve de la persistance des sous-variétés, des feuilletages et plus généralement des laminations normalement hyperboliques et expansives par plaques¹.

On rappelle qu'une lamination est dite *normalement hyperbolique* par un difféomorphisme f , si f préserve la lamination et si l'espace normal aux feuilles est décomposé en deux sous-espaces, que Tf contracte (ou dilate) plus que l'espace tangent aux feuilles. L'expansivité par plaques est une généralisation de l'expansivité au contexte des laminations. La persistance d'une telle lamination signifie qu'étant donnée une perturbation C^1 de la dynamique, il existe une lamination, proche de la première, qui est préservée par la nouvelle dynamique et telle que la dynamique induite sur l'espace de feuilles soit la même.

Une application directe de cette théorie fut la construction d'un exemple de difféomorphisme stablement transitif mais non-Anosov. Au même moment, beaucoup d'idées de leur travail furent reprises notamment par C. Robinson [22] pour montrer la stabilité structurelle des Axiomes A vérifiant la condition de transversalité forte. De nos jours encore, la théorie de Hirsch-Pugh-Shub

¹Un difféomorphisme (resp. endomorphisme) est dit expansif par plaques si, pour tout $\epsilon > 0$ assez petit, pour toutes ϵ -pseudo-orbites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ telles que, $f(x_n)$ et x_{n+1} d'une part, ainsi que $f(y_n)$ et y_{n+1} d'autre part sont dans une même plaque de diamètre inférieur à ϵ , si x_n et y_n sont ϵ -proches pour tout $n \in \mathbb{Z}$ (resp. $n \geq 0$) alors x_0 et y_0 appartiennent à une même petite plaque.

est extrêmement utile et intervient dans de nombreuses branches mathématiques (dynamique générique, dynamique différentiable, théorie des feuilletages, en théorie des groupes de Lie).

Cependant, cette théorie n'est pas optimale. Il existe des laminations, qui ne sont pas normalement hyperboliques, mais qui sont persistantes. Par exemple, on considère la dynamique produit de l'identité sur une variété compacte N avec la dynamique nord-sud sur une sphère S . On montre facilement que la lamination sur \mathcal{L} sur $N \times S$, dont les feuilles sont les fibres de la projection canonique $N \times S \rightarrow S$, est persistante pour des C^1 -perturbations de la dynamique produit. On remarque au passage que la fonction de Morse sur S induit canoniquement deux stratifications sur S formées par respectivement les variétés stables et instables.

Par ailleurs, dans sa thèse [25], M. Shub a montré qu'étant donné une variété M et un C^1 -endomorphisme f de M , tout compact dilaté par f est structurellement stable. Aussi, M. Viana a utilisé une lamination de (co-)dimension un, normalement dilatée, quand il a construit une application robustement non-uniformément dilatante [30]. Cependant, à notre connaissance, aucun travail ne démontre que toute lamination normalement dilatée est stable, bien que cela semble naturel. Ce résultat semble pourtant fondamental dans l'étude des endomorphismes et pourrait aider à amoindrir l'écart de compréhension entre les endomorphismes et les difféomorphismes (stabilité structurelle, existence de nouvelles applications non-uniformément dilatantes).

Enfin, depuis le travail de thèse de R. Mañé [15], nous savons qu'une sous-variété compacte de classe C^1 est persistante et uniformément localement maximal (il existe un voisinage U de la sous-variété N tel que pour une C^1 perturbation de la dynamique le maximal invariant inclus de U est une sous-variété C^1 proche de N), si et seulement si elle est normalement hyperbolique. Cependant, l'hyperbolicité uniforme n'est pas nécessaire pour que cette sous-variété, décomposée en une autre stratification, soit persistante et uniformément localement maximal. Par exemple, on considère un difféomorphisme du plan possédant un point fixe hyperbolique P , dont la variété stable X est de dimension 1. On suppose que la variété stable privée de P est incluse dans le bassin de répulsion d'un point fixe répulsif R . L'ensemble \mathbb{S} , égal à l'union de X et de $\{R\}$, est homéomorphe à un cercle. On peut même le munir d'une structure stratification, formée des strates X et $\{R\}$. On montre facilement que, pour toute C^1 -perturbation de la dynamique, il existe un point hyperbolique P' proche de P dont la variété stable X' privée de P' appartient au bassin de répulsion d'un point fixe R' proche de R . En particulier, il existe une stratification $(X', \{R'\})$ sur $\mathbb{S}' := X' \cup \{R'\}$, préservée par la perturbation de la dynamique, telle que X' est C^1 -proche de X , R' est proche de R et \mathbb{S}' est un cercle topologiquement proche de \mathbb{S} . On vérifie aussi facilement l'uniforme et locale maximalité.

Pour ces trois raisons, il semble aussi utile que naturel de se poser la question de la persistance des stratifications de laminations normalement dilatées. Le concept de stratification de laminations étant nouveau, on va préciser rigoureusement les termes associés à cet intitulé. Puis, on donnera plusieurs applications de la théorie développée dans ce travail. Enfin, on donnera les

conditions (ouvertes) nécessaires à l'application de cette théorie.

2 Stratifications de laminations normalement dilatées

On rappelle qu'une lamination est un espace métrique séparable modelé (via des cartes compatibles) sur le produit de \mathbb{R}^d avec un espace localement compact. Par C^1 -endomorphisme d'une variété M , on entend une application de classe C^1 de M dans M n'étant *a priori* ni injective ni surjective et pouvant avoir des singularités.

Soit (L, \mathcal{L}) une lamination plongée et identifiée à son image dans une variété riemannienne (M, g) . Soit f un C^1 -endomorphisme de M , préservant la lamination (L, \mathcal{L}) . Soit $T\mathcal{L}$ le sous-fibré de $TM|_L$ dont les fibres sont les espaces tangents aux feuilles de (L, \mathcal{L}) . Soit p la projection orthogonale de $TM|_L$ sur $T\mathcal{L}^\perp$. On dit que f *dilate normalement* (L, \mathcal{L}) s'il existe $\lambda > 1$ et une fonction continue positive C sur L tels que, pour tout $x \in L$, tous vecteurs unitaires $v_0 \in T_x\mathcal{L}$ et $v_1 \in (T_x\mathcal{L})^\perp$, tout $n \geq 0$, on a :

$$\|p \circ Tf^n(v_1)\| \geq C(x) \cdot \lambda^n \cdot (1 + \|Tf^n(v_0)\|)$$

Quand L est compact, on retrouve la définition usuelle de la dilatation normale en remplaçant C par son minimum.

Un premier résultat est :

Théorème 0.1. *Soit (L, \mathcal{L}) une lamination plongée dans une variété riemannienne M . Soit f un C^1 -endomorphisme de M expansif par plaques² et dilatant normalement (L, \mathcal{L}) . Soit L' une partie relativement compacte et ouverte de L dont l'adhérence est envoyée par f dans L' . Alors la restriction de (L, \mathcal{L}) à L' est persistante.*

Autrement dit, pour f' C^1 -proche de f , il existe un plongement de la restriction de (L, \mathcal{L}) à L' dont l'image est préservée par f' et tel que la dynamique induite par f' sur l'espace des feuilles s'identifie à celle de f .

En particulier, on montre la persistance des laminations compactes normalement dilatées et expansives par plaques. La démonstration se fait grâce à une méthode de point fixe, suivant d'autres techniques que [11]. On montre aussi, dans un résultat similaire, la persistance des laminations immergées et normalement dilatées.

On définit maintenant les stratifications de laminations. D'après les travaux de J. Mather, un *espace stratifié* est la donnée d'un espace métrique séparable A et d'une partition localement

²La définition de l'expansivité par plaques est donnée dans la partie 1.2.3

finie Σ de A en sous-ensembles localement fermés, vérifiant la condition de frontière suivante :

$$\forall (X, Y) \in \Sigma^2, \text{adh}(X) \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow \text{adh}(X) \supset Y$$

On note alors $X \geq Y$

Le couple (A, Σ) est appelé *espace stratifié* de support A et de stratification Σ .

Tout comme H. Whitney, R. Thom ou J. Mather, on rajoute une structure géométrique sur chaque strate. On munit chaque strate X d'une structure de lamination dont la topologie est celle induite par A , et telle que si $\text{adh}(X)$ intersecte une strate Y , alors la dimension de X est supérieure ou égale à celle de Y . L'espace stratifié obtenu (A, Σ) est dit *laminaire* et Σ est une *stratification de laminations*. Un *plongement (stratifié)* de cet espace dans une variété M est un homéomorphisme sur son image qui, restreint à chaque strate X , est un plongement (de lamination) de X dans M . On identifie souvent l'espace stratifié (A, Σ) avec son image via le plongement i .

Par exemple, une stratification de Whitney est une stratification de laminations. De façon plus inattendue, étant donné un axiome A vérifiant la condition de transversalité forte, si l'on note (Λ_i) la décomposition spectrale de l'ensemble non-errant et $X_i := W^s(\Lambda_i)$ la structure de lamination canonique sur l'ensemble stable de chaque Λ_i , la partition $(X_i)_i$ est une stratification de laminations.

Étant données une variété M , une stratification de laminations Σ sur $A \subset M$ et une application f de classe C^1 de M , on dira que f préserve (A, Σ) si f préserve chacune des laminations $X \in \Sigma$. On dira que f dilate normalement (A, Σ) si, de plus, elle dilate normalement chaque strate $X \in \Sigma$.

Une stratification de laminations (A, Σ) préservée par $f \in C^1(M, M)$ est *persistante*, si pour une application f' C^1 -proche de f , il existe un plongement (stratifié) i' proche de l'inclusion canonique i tel que f' préserve la stratification (A, Σ) plongée par i' et tel que la dynamique induite par f' sur l'espaces des feuilles de chaque strate de Σ est la même que celle induite par f .

Le but de ce travail est de montrer que, sous certaines conditions expliquées ci-dessous, les stratifications de laminations normalement dilatées sont persistantes. On va maintenant donner des exemples de stratifications de laminations dont la persistance découle du théorème principal.

3 Exemples de stratifications de laminations normalement dilatées et persistantes

3.1 Persistance des sous-variétés à bord en tant que stratifications

Théorème 0.2. *Soient une variété riemannienne (M, g) et N une sous-variété à bord compacte de M . Soit f un C^1 -endomorphisme de M préservant et dilatant normalement le bord ∂N et l'intérieur $\overset{\circ}{N}$ de N . Alors la stratification $(\overset{\circ}{N}, \partial N)$ sur N est persistante.*

Autrement dit, pour toute application f' C^1 -proche de f , il existe deux sous-variétés $\partial N'$ et $\overset{\circ}{N}'$ telles que :

- $\overset{\circ}{N}'$ (resp. $\partial N'$) est préservée par f' , difféomorphe et C^1 -proche de $\overset{\circ}{N}$ (resp. ∂N) pour la topologie compact-ouverte.
- Le couple $(N' := \overset{\circ}{N}' \cup \partial N', (\overset{\circ}{N}', \partial N'))$ forme une stratification (de laminations) et N' est l'image de N par un plongement C^0 -proche de l'inclusion canonique de N dans M .

En général, N' n'est pas une sous-variété à bord de classe C^1 , mais est toujours une sous-variété topologique à bords.

3.2 Persistance des sous-variétés à coins en tant que stratifications

On rappelle qu'une variété à coins N compacte est une variété différentiable compacte modélée sur \mathbb{R}_+^d . On note $\partial^{0k}N$ l'ensemble des points de N qui, vus dans une carte, ont exactement k coordonnées nulles. Le couple $(N, \Sigma := \{\partial^{0k}N\}_k)$ est un espace stratifié. Soit i un plongement de classe C^1 de N dans une variété riemannienne (M, g) , via lequel N sera identifiée à son image dans M .

Théorème 0.3. *Soit f un C^1 -endomorphisme de M , qui préserve et dilate normalement l'espace stratifié (N, Σ) . Alors, la stratification (de laminations) $\Sigma := \{\partial^{0k}N\}$ est persistante.*

Autrement dit, pour toute application f' C^1 -proche de f , il existe des sous-variétés $(\partial^{0k}N')_k$ telles que :

- pour chaque k , $\partial^{0k}N'$ est préservée par f' , difféomorphe et C^1 -proche de $\partial^{0k}N$ pour la topologie compact-ouverte,
- $(N' := \cup_k \partial^{0k}N', (\partial^{0k}N')_k)$ forme une stratification (de laminations) et N' est l'image de N par un plongement C^0 -proche de l'inclusion canonique de N dans M .

Bien que le théorème 0.3 implique le théorème 0.2, on a préféré donner indépendamment les énoncés et la preuve de chacun de ces deux résultats, en espérant d'une part aider le lecteur dans la compréhension de ce travail et d'autre part ne pas obliger le lecteur à lire la preuve de

la persistance des variétés à coins, qui est beaucoup plus difficile, si celui-ci n'est intéresser que par celle des variétés à bord.

Le résultat principal permet de montrer la persistance de nombreuses stratifications de laminations normalement dilatées en dynamique produit telles que exposées ci-dessous.

3.3 Laminations invariantes de l'application de Viana dans $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$

Soit $V : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{R}$

$$(z, h) \mapsto (z^2, h^2 + c)$$

L'application $z \mapsto z^2$ est dilatante sur le cercle unité \mathbb{S}^1 et préserve l'intérieur du disque unité \mathbb{D} . On munit \mathbb{S}^1 et \mathbb{D} d'une structure de lamination de dimension 0 et 2 respectivement.

On fixe $c \in]-2, 1/4[$. Ainsi, le complémentaire du bassin d'attraction de l'infini de $h \mapsto h^2 + c$ est un segment I dont le bord ∂I est dilaté. De plus, l'intérieur $\overset{\circ}{I}$ de I est stable par $h \mapsto h^2 + c$. On munit ∂I d'une structure de lamination de dimension 0 et $\overset{\circ}{I}$ de la structure de lamination de dimension 1. On stratifie $adh(\mathbb{D}) \times I$ par les laminations :

- $X_0 := \mathbb{S}^1 \times \partial I$ de dimension 0,
- $X_1 := \mathbb{S}^1 \times \overset{\circ}{I}$ de dimension 1,
- $X_2 := \mathbb{D} \times \partial I$ de dimension 2,
- $X_3 := \mathbb{D} \times \overset{\circ}{I}$ de dimension 3.

Soit Σ la stratification de laminations formée de ces strates sur $C := adh(\mathbb{D}) \times I$. On remarque que V préserve cette stratification de laminations et la dilate normalement. La persistance de cette stratification résulte de notre théorème principal.

Elle signifie que, pour un C^1 -endomorphisme V' proche de V , il existe un homéomorphisme i' de $adh(\mathbb{D}) \times I$ sur son image dans $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$, proche de l'inclusion canonique, tel que pour chaque strate $X_k \in \Sigma$:

- la restriction $i'|_{X_k}$ est un plongement de la lamination, proche de l'inclusion canonique de X_k dans $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$,
- la lamination $i'(X_k)$ est préservée par V' , et pour $x \in X_k$, le point $V' \circ i'(x)$ appartient à l'image par i' de la feuille de X_k contenant $V(x)$.

3.4 Produit de fractions rationnelles hyperboliques

Soit $f : \hat{\mathbb{C}}^n \rightarrow \hat{\mathbb{C}}^n$

$$(z_i)_i \mapsto (R_i(z_i))_i$$

où pour chaque i , R_i est une fraction rationnelle hyperbolique de la sphère de Riemann : cela signifie que son ensemble de Julia K_i est un compact répulsif et que son complémentaire X_i est une union finie de bassins d'attraction d'orbites périodiques attractives.

Soient $J \subset \{1, \dots, n\}$ et Y_J la lamination de dimension $2\#J$, de support :

$$\prod_{j \in J} X_j \times \prod_{j \in J^c} K_j$$

et dont les feuilles de cette lamination sont de la forme $\prod_{j \in J} C_j \times \prod_{j \in J^c} \{k_j\}$, avec C_j une composante connexe de X_i et k_j un élément de K_j .

Alors $\{Y_J\}_{J \subset \{1, \dots, n\}}$ est une stratifications de laminations sur $\hat{\mathbb{C}}^n$ dont la persistance résulte du théorème principal de ce travail.

Un résultat similaire existe pour des produits de polynômes réels hyperboliques.

3.5 Fibré normalement axiome A

Rappelons qu'un difféomorphisme vérifie *l'axiome A et la condition de transversalité forte (ATF)* si :

- l'ensemble non errant Ω est hyperbolique,
- les points périodiques sont denses dans Ω ,
- les variétés stables et instables des points de Ω s'intersectent transversalement.

On rappelle qu'un difféomorphisme f d'une variété est dit *C^1 -structurellement stable* si toute C^1 -perturbation de f est conjuguée à f via un homéomorphisme.

Les travaux de Smale [27], Palis [20], de Melo [6], Mañé [16], Robbin [21] et Robinson [22] ont abouti au théorème suivant :

Théorème 0.4. *Les difféomorphismes C^1 -structurellement stables d'une variété compacte sont exactement les difféomorphismes ATF.*

Ce dernier théorème montre que, pour les laminations de dimension 0 supportés par toute la variété ambiante, les hypothèses du théorème d'Hirsch-Pugh-Shub de persistance des laminations normalement hyperboliques ne sont pas optimales.

En effet, l'espace des feuilles d'une lamination de dimension 0 sur une variété M s'identifie à l'espace topologique M , ainsi la persistance d'une telle lamination est équivalente à la stabilité structurelle de M .

Dans la recherche d'un énoncé optimal sur la persistance des laminations sur une variété qui sont préservées par un difféomorphisme, le résultat principal de ce travail permet d'obtenir le théorème suivant :

Théorème 0.5. *Soient M une variété riemannienne compacte et S une surface compacte. Soit $p : M \rightarrow S$ une submersion de classe C^1 . Soit \mathcal{L} la structure de lamination sur M dont les feuilles sont les composantes connexes des fibres de p .*

Soit f_b un difféomorphisme ATF de S . Soit f un difféomorphisme de M tel que :

– le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ & M \rightarrow M & \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ & S \rightarrow S & \\ & f_b & \end{array}$$

– le difféomorphisme f est normalement hyperbolique sur $\mathcal{L}|_{p^{-1}(\Omega_b)}$, avec Ω_b l'ensemble non errant de f_b .

Alors, la lamination \mathcal{L} sur M est persistante pour des C^1 -perturbations de f .

On pense que le résultat ci-dessus est vrai même quand S est une variété compacte de dimension quelconque. On s'est restreint au cas des surfaces car la preuve de de Melo [6] de la stabilité structurelle des difféomorphismes ATF d'une surface est plus simple à utiliser que celle de de Robinson [22] qui montre le cas général. On espère prouver bientôt le cas général.

4 Une condition suffisante pour la persistance des stratifications de laminations normalement dilatées

Dans la partie 2.2.2, on construit un exemple simple de stratification normalement dilatée qui n'est pas persistante. Ainsi des conditions supplémentaires sont requises pour assurer la persistance d'une stratification de laminations normalement dilatées.

Pour appliquer le théorème principal à une stratification de laminations Σ sur un compact A , on demande l'existence d'un *voisinage tubulaire* (L_X, \mathcal{L}_X) pour chaque strate X : il s'agit d'une lamination \mathcal{L}_X supportée par un voisinage ouvert L_X de X dans les strates supérieures à X , dont la lamination X est une restriction et telle que toute feuille de \mathcal{L}_X soit incluse dans exactement une feuille d'une strate de Σ .

L'existence d'une telle structure a déjà été conjecturée de façon locale par H. Whitney dans le cadre des variétés analytiques singulières. Elle a aussi été construite par W. de Melo et par C. Robinson (de façon locale) dans la preuve de la stabilité structurelle des difféomorphismes axiomes A vérifiant la condition de transversalité forte (pour la stratification de laminations définie par chaque ensemble stable des pièces basiques de la décomposition spectrale).

Il existe des stratifications qui contiennent des strates sans voisinage tubulaire. C'est le cas par exemple de la stratification normalement dilatée et non persistante présentée dans ce travail.

Une famille $\mathcal{T} := (L_X, \mathcal{L}_X)_{X \in \Sigma}$ de voisinages tubulaires est appelée *treillis de laminations*, si la condition suivante est vérifiée : pour toutes strates $X \leq Y$ de Σ , chaque petite plaque de \mathcal{L}_Y incluse dans $L_X \cap L_Y$ supporte un feuilletage de classe C^1 dont les feuilles sont des plaques de \mathcal{L}_X .

Un plongement stratifié p de (A, Σ) dans une variété M est dit \mathcal{T} -contrôlé, si pour chaque strate $X \in \Sigma$, la restriction de p à L_X est un plongement de la lamination \mathcal{L}_X dans M . On identifie alors le support A , ainsi que les laminations de Σ et de \mathcal{T} à leur image par p dans M . La restriction à A d'une application f de classe C^1 de M qui préserve la stratification plongée (A, Σ) est dite \mathcal{T} -contrôlée si, pour chaque strate $X \in \Sigma$, il existe un voisinage ouvert V_X de X dans L_X tel que chaque plaque de \mathcal{L}_X incluse dans V_X soit envoyée par f dans une plaque de \mathcal{L}_X . Une telle famille de voisinages $\mathcal{V} := (V_X)_{X \in \Sigma}$ est dite *adaptée à f* .

Pour présenter notre théorème principal, il ne reste plus qu'à introduire une dernière définition : étant donné $\epsilon > 0$, une ϵ -pseudo-orbite de V_X qui respecte \mathcal{L}_X est une suite $(x_n)_{n \geq 0} \in V_X^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \geq 0$ $f(x_n)$ et x_{n+1} appartiennent à une plaque de \mathcal{L}_X de diamètre plus petit que ϵ .

Voici une version restreinte ³ du résultat principal (théorème 2.1) de ce travail :

Théorème 0.6. *Soient (M, g) une variété riemannienne, ainsi que (A, Σ) un espace stratifié compact supportant une structure de treillis \mathcal{T} .*

Soient $f \in C^1(M, M)$ et p un plongement \mathcal{T} -contrôlé de (A, Σ) dans M . On identifie, via p , l'espace stratifié (A, Σ) à son image dans M . On suppose que :

- i. f préserve (A, Σ) et sa restriction à A est \mathcal{T} -contrôlée,*
- ii. f dilate normalement l'espace stratifié (A, Σ) ,*
- iii. il existe une famille de voisinages \mathcal{V} adaptée à f et $\epsilon > 0$, tels que, pour chaque strate $X \in \Sigma$, toute η -pseudo-orbite de V_X qui respecte \mathcal{L}_X est contenue dans X ,*
- iv. f est expansive par plaques sur les strates de Σ .*

Alors, pour toute application f' C^1 -proche de f , il existe un plongement \mathcal{T} -contrôlé p' de (A, Σ) dans M , proche de p , tel que f' vérifie les propriétés (i), (ii), (iii) et (iv) énumérées ci-

³Le cadre d'application du théorème 2.1 est plus général : il montre la persistance des immersions \mathcal{T} -contrôlées (sans l'hypothèse iv)) et s'applique aux espaces stratifiés non compacts comme dans le théorème 0.1. Enfin, on peut changer la métrique de chaque L_X (tout en préservant sa topologie) pour que les conditions iii) et iv) soient vérifiées.

dessus, pour l'identification de (A, Σ) via le plongement p' .

En particulier, f' préserve la stratification de laminations Σ , plongée par p' et, de plus, la dynamique induite sur l'espace des feuilles de chaque strate est la même que celle de f . Autrement dit, la stratification de laminations (A, Σ) est persistante.

Remarque : Les conclusions du théorème principal affirme de plus l'existence d'un voisinage V'_X de chaque strate $X \in \Sigma$, tel que pour toute application f' proche de f et $x \in V'_X$, les points $p^{-1} \circ f \circ p(x)$ et $p'^{-1} \circ f' \circ p'(x)$ appartiennent à une même plaque de \mathcal{L}_X de diamètre inférieur à ϵ .

Cette dernière remarque est fondamentale dans la démonstration de la persistance des fibrés normalement axiome A, ainsi que dans l'exemple qui suit.

Exemple : Soit f un C^1 -endomorphisme d'une variété compacte connexe M et K un compact f -invariant ($f^{-1}(K) = K$) et dilaté. Alors K muni de sa structure de lamination de dimension 0 et $X := M \setminus K$ muni de sa structure de variété forme une stratification (K, X) sur M , de laminations normalement dilatées par f . De plus, si \mathcal{L}_K est la structure de lamination de dimension 0 sur un voisinage ouvert L_K de K , alors $((L_K, \mathcal{L}_K), X)$ forme une structure de treillis de laminations, telle que les hypothèses i), ii), iii) et iv) sont facilement vérifiées.

La remarque ci-dessus donne l'existence d'un voisinage V'_K de K tel que, pour tout endomorphisme f' C^1 -proche de f , il existe un homéomorphisme p' de M , proche de l'identité, dont la restriction à $M \setminus K$ est un difféomorphisme sur $M \setminus p(K)$ et tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 & f' & \\
 & M \rightarrow M & \\
 p \uparrow & & \uparrow p \\
 & V'_K \rightarrow M & \\
 & f &
 \end{array}$$

En effet, pour $x \in V'_K$, le point $p'^{-1} \circ f' \circ p'(x)$ appartient à l'unique plaque $\{f(x)\}$ de \mathcal{L}_K contenant $f(x)$.

Cette exemple étend donc à un voisinage l'homéomorphisme conjuguant du théorème de Shub [25] sur la stabilité structurelle des compacts dilatés (quand ils sont invariants).

La propriété iii) et iv) sont classiques et on ne sait pas si elles sont toujours vérifiées, dans leur version générale, quand les propriétés i) et ii) le sont. Cependant, dans les exemples que l'on a rencontrés, elles ont toujours été simples à vérifier. Ainsi, la difficulté principale pour appliquer le théorème est de construire une structure de treillis \mathcal{T} qui contrôle p et $f|_A$.

Cependant, en dynamique produit, le théorème 0.6 peut être très facile à utiliser. Tout

4. *Une condition suffisante pour la persistance des stratifications de laminations normalement dilatées*

d'abord, on remarque qu'étant donnés deux espaces stratifiés (A, Σ) et (A', Σ') , la partition $\Sigma \times \Sigma' := (X \times X')_{(X, X') \in \Sigma \times \Sigma'}$ forme une stratification sur $A \times A'$. Dans le cadre de son application, la proposition suivante construit alors une structure de treillis sur l'espace stratifié produit, qui est suffisante pour prouver sa persistance :

Proposition 0.7. *Soient (M, g) et (M', g') deux variétés riemanniennes, ainsi que Σ et Σ' deux stratifications de laminations sur des compacts A et A' de M et M' respectivement. On suppose que (A, Σ) et (A', Σ') admettent des structures de treillis \mathcal{T} et \mathcal{T}' respectivement.*

Soient $f \in C^1(M, M)$ et $f' \in C^1(M', M')$ vérifiant les hypothèses i), ii), iii) et iv) pour (A, Σ) et (A', Σ') respectivement.

Si la dynamique produit (f, f') sur $M \times M'$ dilate normalement la stratification produit $(A \times A', \Sigma \times \Sigma')$, alors (f, f') vérifie les propriétés i), ii) iii) et iv) du théorème, pour une certaine structure de treillis de laminations $\mathcal{T}_{\text{prod}}$ sur l'espace stratifié produit.

En particulier, la stratification $(A \times A', \Sigma \times \Sigma')$ est persistante.

L'exemple élémentaire du compact dilaté et invariant, joint à la proposition 0.7 permet d'obtenir la persistance des stratifications de laminations de l'application de Viana ou du produit des fractions rationnelles hyperboliques, exposés auparavant.

5 Plan

Le chapitre 1 étudie les laminations. Il commence, dans la partie 1.1, par introduire les structures de laminations et les notions qui leur sont associées. La partie 1.2 donne l'énoncé du théorème 0.1 de persistance des laminations plongées et sa version plus générale au cas des laminations immergées normalement dilatées. Ces deux premières parties sont ainsi fondamentales pour l'ensemble de ce travail. La partie 1.3 montre l'existence d'une métrique adaptée à la dilatation normale sur un compact stable d'une lamination, dans le cadre des endomorphismes. Les parties 1.4, 1.5 et 1.6 constituent la preuve du théorème de persistance des laminations. Les notions techniques introduites dans ces sous-parties, ne seront utiles que dans la preuve du théorème 0.6 et la preuve de la persistance des sous-variétés à bord.

Le deuxième chapitre donne l'essentiel des résultats abstraits sur les stratifications de laminations. La partie 2.1 définit les stratifications de laminations et les structures de treillis, ainsi que les morphismes de ces structures. La partie 2.2 donne l'énoncé du résultat principal (théorème 2.1) sur la persistance des stratifications de laminations, plongées ou immergées, généralisant le théorème 0.6. Un contre-exemple d'une stratification normalement dilatée et non persistante y est aussi développé. La partie 2.3 applique le théorème de persistance aux exemples issus de dynamiques produits et démontre la proposition 0.7.

Le troisième chapitre énonce et démontre la persistance des variétés à bord et à coins en tant que stratifications. Il commence par donner un exemple d'une sous-variété à bord non persistante en tant que sous-variété. Puis, il démontre la persistance de ces sous-variétés en utilisant un lemme technique du premier chapitre ainsi que le résultat principal. Enfin il énonce et démontre la persistance des variétés à coins en utilisant seulement le résultat principal de ce travail.

Le quatrième chapitre motive et prouve le théorème 0.5 de persistance des fibrés normalement axiome A, grâce au résultat principal et au travail de thèse de W. de Melo.

Le cinquième chapitre est la preuve du résultat principal. Il s'appuie sur tout le premier chapitre et les deux premières parties du deuxième chapitre.

L'annexe A est consacré à des résultats techniques. L'annexe B adapte et développe les résultats connus sur l'expansivité par plaques pour les laminations normalement dilatées par un C^1 -endomorphisme.

Persistence de laminations

Sommaire

1.1	Cadre des laminations	13
1.1.1	Définition d'une lamination	13
1.1.2	Morphismes de laminations	15
1.1.3	Métrique riemannienne sur une lamination	15
1.1.4	Classes d'équivalence des morphismes	16
1.2	Persistence d'une lamination normalement dilatée	16
1.2.1	Dilatation normale	16
1.2.2	Persistence des immersions de laminations normalement dilatées	18
1.2.3	Persistence des plongements de laminations normalement dilatés	21
1.3	Preuve de la proposition 1.1	23
1.4	Fibré vectoriel ayant pour base une lamination	26
1.4.1	\mathcal{L} -fibré vectoriel	26
1.4.2	Connexion	26
1.4.3	Topologies sur les espaces des sections	27
1.5	Démonstration du théorème 1.2	28
1.6	Preuve du lemme 1.5.1	30
1.6.1	Notations et conventions	31
1.6.2	Préimage d'une perturbation de i	31
1.6.3	Action de $S_{f'}$ sur les normes	35

1.1 Cadre des laminations

1.1.1 Définition d'une lamination

On considère un espace métrique séparable et localement compact L recouvert par des ouverts $(U_i)_i$ que nous appellerons *ouverts distingués* munis d'homéomorphismes h_i de U_i sur $V_i \times T_i$, où

V_i est un ouvert de \mathbb{R}^d et T_i un espace métrique. On dit que les *cartes* $(U_i, h_i)_i$ définissent un *atlas* d'une structure de lamination sur L de dimension d si les *changements de cartes* $h_{ij} = h_j \circ h_i^{-1}$ peuvent s'écrire sous la forme :

$$h_{ij}(x, t) = (\phi_{ij}(x, t), \psi_{ij}(x, t))$$

où ϕ_{ij} est à valeurs dans \mathbb{R}^d , $\partial_x \phi_{ij}$ existe continûment en tout point où h_{ij} est définie et $\psi_{ij}(\cdot, t)$ est localement constante.

Deux atlas sont équivalents si leur réunion est un atlas. Une *lamination* est un espace métrique L munie d'un atlas maximal \mathcal{L} .

Soit V_i^0 une composante connexe de V_i ; on appelle *plaque* un ensemble de la forme $h_i^{-1}(V_i^0 \times \{t\})$. Une plaque contenant $x \in L$ sera notée \mathcal{L}_x ; l'union des plaques contenant x et de diamètre strictement inférieur à $\epsilon > 0$ sera notée \mathcal{L}_x^ϵ . En général, l'ensemble \mathcal{L}_x^ϵ n'est pas homéomorphe à une variété; cependant pour tout compact K de L , pour tout ϵ assez petit, pour tout $x \in K$ l'ensemble \mathcal{L}_x^ϵ est une plaque.

Les *feuilles* de \mathcal{L} sont les plus petits ensembles qui contiennent toutes les plaques qu'ils rencontrent.

On dit qu'une partie P de L est *saturée* si c'est une réunion de feuilles. Si elle est de plus localement compacte, elle est dite *\mathcal{L} -admissible*. Alors les cartes de \mathcal{L} restreintes à P et à l'image de leur restriction forment une structure de lamination sur P . On nomme cette structure la *restriction de \mathcal{L} à P* et on la note $\mathcal{L}|_P$. De la même manière, si V est un ouvert de L , l'ensemble des cartes $(U, \phi) \in \mathcal{L}$ telles que $U \subset V$ forme une structure de lamination sur V que l'on note $\mathcal{L}|_V$. Une partie P de L qui est $\mathcal{L}|_V$ -admissible pour un certain ouvert V de L est dite *\mathcal{L} -localement admissible*, on note alors $\mathcal{L}|_P$ sa structure de lamination $\mathcal{L}|_{V|_P}$. On rappelle que les parties localement compactes d'un espace métrique localement compact sont les intersections d'un ouvert et d'un fermé.

Exemples de laminations

- Une variété de dimension d est une lamination de la même dimension.
- Un feuilletage C^1 d'une variété connexe induit une structure de lamination.
- Un espace métrique localement compact définit une lamination de dimension zéro.
- Si K est une partie localement compacte quelconque de \mathbb{S}^1 , alors la structure de variété du cercle \mathbb{S}^1 induit sur $\mathbb{S}^1 \times K$ une structure de lamination où les feuilles sont données par $\mathbb{S}^1 \times \{k\}$, $k \in K$.
- Le feuilletage stable d'un difféomorphisme Anosov induit une structure de lamination dont les feuilles sont les variétés stables.
- Plus généralement, si (L, \mathcal{L}) et (L', \mathcal{L}') sont deux laminations, alors $L \times L'$ est munie d'une structure de lamination dite produit, dont les produits d'une plaque de \mathcal{L} et d'une plaque

de \mathcal{L}' sont des plaques. On note $\mathcal{L} \times \mathcal{L}'$ cette structure.

Si ces deux laminations ont la même dimension, on note $(L \cup L', \mathcal{L} \cup \mathcal{L}')$ la structure de lamination sur l'union disjointe de L et de L' , munie de la structure de lamination définie par la réunion des deux atlas \mathcal{L} et \mathcal{L}' .

1.1.2 Morphismes de laminations

Une application f est un *morphisme (de laminations)* de (L, \mathcal{L}) dans (L', \mathcal{L}') , si c'est une application continue de L dans L' telle que vue à travers des cartes h et h' , elle peut s'écrire sous la forme : $h' \circ f \circ h^{-1}(x, t) = (\phi(x, t), \psi(x, t))$ où ϕ est à valeur dans \mathbb{R}^d , $\partial_x \phi$ existe continûment et $\psi(\cdot, t)$ est localement constante. Si, de plus, l'application linéaire $\partial_x \phi(x, t)$ est toujours injective, alors on dit que f est une *immersion (de lamination)*. Un *isomorphisme (de laminations)* est un morphisme de laminations bijectif dont l'inverse est aussi un morphisme de laminations. Un *plongement de laminations* est une immersion qui est de plus un homéomorphisme sur son image. Les *endomorphismes de (L, \mathcal{L})* sont les morphismes de (L, \mathcal{L}) dans elle-même.

On note par :

- $Mor(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$ l'ensemble des morphismes de \mathcal{L} dans \mathcal{L}' ,
- $Im(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$ l'ensemble des immersions de \mathcal{L} dans \mathcal{L}' ,
- $Iso(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$ l'ensemble des isomorphismes de \mathcal{L} sur \mathcal{L}' ,
- $Pl(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$ l'ensemble des plongements de \mathcal{L} dans \mathcal{L}' ,
- $End(\mathcal{L})$ l'ensemble des endomorphismes de \mathcal{L} .

On note $T\mathcal{L}$ le fibré vectoriel sur L dont la fibre en x , notée $T_x\mathcal{L}$, est l'espace tangent en x à sa feuille. Si $f \in Mor(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$, on note Tf le morphisme de fibrés de $T_x\mathcal{L}$ vers $T_{f(x)}\mathcal{L}'$ au-dessus f correspondant à la différentielle de f le long des feuilles de \mathcal{L} .

1.1.3 Métrique riemannienne sur une lamination

Remarquons que l'on peut toujours munir (L, \mathcal{L}) d'une certaine *métrique riemannienne* g , c'est-à-dire d'un produit scalaire g_x sur chaque espace tangent dépendant continûment du point base x .⁴

Une métrique g riemannienne induit de façon standard une métrique sur chaque feuille : pour deux éléments x et y appartenant à une même feuille de (L, \mathcal{L}) , la distance x à y est définie par :

$$d_g(x, y) = \inf_{\{\gamma \in Mor([0,1], \mathcal{L}); \gamma(0)=x, \gamma(1)=y\}} \int_0^1 \sqrt{g(\partial_t \gamma(t), \partial_t \gamma(t))} dt$$

⁴Le fibré tangent n'étant que continu, on ne peut pas définir le flot géodésique sur les feuilles. Il existe cependant une structure de lamination de classe C^∞ , compatible avec la structure de classe C^1 , pour laquelle on peut définir le flot géodésique sur les feuilles pour une métrique lisse. Pour le démontrer, on peut adapter la preuve du théorème 2.9 dans [12] avec les techniques d'analyse de l'annexe A.1.1.

1.1.4 Classes d'équivalence des morphismes

On dira que f et f' dans $Mor(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$ (resp. $Im(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$ et $End(\mathcal{L})$) sont équivalents si pour tout $x \in L$, $f'(x)$ et $f(x)$ sont dans la même feuille de \mathcal{L}' . La classe d'équivalence de f sera notée $Mor_f(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$ (resp. $Im_f(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$ et $End_f(\mathcal{L})$).

Étant donnée une métrique riemannienne g sur (L', \mathcal{L}') , on munit la classe d'équivalence de f de la topologie compacte-ouverte C^1 . Précisons les ouverts élémentaires qui engendrent cette topologie :

Soit K un compact de L , tel que K et $f(K)$ sont inclus dans des ouverts distingués munis de cartes (h, U) et (h', U') ,

$$\text{on pose } h' \circ f \circ h^{-1} = (\phi, \psi) \text{ sur } h(K)$$

Soit $\epsilon > 0$. L'ensemble suivant sera un ouvert élémentaire de notre topologie :

$$\Omega := \{f' \in Mor_f(\mathcal{L}, \mathcal{L}') : f'(K) \subset U', \text{ et avec } \phi' \text{ définie par}$$

$$h' \circ f' \circ h^{-1} = (\phi', \psi), \text{ on a } \max_{h(K)} (\|\phi - \phi'\| + \|\partial_x \phi - \partial_x \phi'\|) < \epsilon\}$$

Comme, l'espace des applications de classe C^1 de M dans M , que l'on note $C^1(M, M)$, est aussi l'espace des (C^1) -endomorphismes de M , la topologie sur $C^1(M, M)$ est la topologie compact-ouverte C^1 (classique).

1.2 Persistance d'une lamination normalement dilatée

1.2.1 Dilatation normale

Soient (L, \mathcal{L}) une lamination et (M, g) une variété riemannienne C^∞ . Soient $i \in Im(\mathcal{L}, M)$ et $f \in C^1(M, M)$ qui préserve l'immersion de (L, \mathcal{L}) par i . Comme on a pas supposé que i est un plongement, on suppose de plus l'existence de $f^* \in End(\mathcal{L})$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} & & f \\ & & \downarrow \\ M & \rightarrow & M \\ i \uparrow & & \uparrow i \\ L & \rightarrow & L \\ & & f^* \end{array}$$

On identifie, grâce à l'injection donnée par i , le fibré $T\mathcal{L} \rightarrow L$ à un sous-fibré de $\pi : i^*TM \rightarrow L$. On munit donc \mathcal{L} de la métrique riemannienne i^*g . Par commutativité du diagramme ci-dessus, l'endomorphisme i^*Tf de $i^*TM \rightarrow L$, au-dessus de f^* , préserve le sous-fibré $T\mathcal{L}$. Passé

au quotient $i^*TM/T\mathcal{L}$, l'endomorphisme i^*Tf est noté :

$$[i^*Tf] : i^*TM/T\mathcal{L} \rightarrow i^*TM/T\mathcal{L}$$

On remarque que le quotient $i^*TM/T\mathcal{L}$ est le fibré normal de \mathcal{L} . On le munit de la norme induite par la métrique riemannienne de M : la norme d'un $u \in i^*TM/T\mathcal{L}$ est celle de son représentant dans i^*TM qui est orthogonal à TL .

On dira que f dilate normalement la lamination (L, \mathcal{L}) immergée par i (au-dessus de f^*), s'il existe une fonction C sur L et $\lambda < 1$ tels que pour tout $v \in i^*TM/T\mathcal{L} \setminus \{0\}$, on a pour tout $n \geq 0$:

$$\max(1, \|T_{\pi(v)}f^{*n}\|) \cdot \|v\| < C(x) \cdot \lambda^n \cdot \|[i^*Tf]^n(v)\|$$

Remarques

- Usuellement, on prend L compact et la fonction C constante, ce qui est possible dans cette caractérisation en prenant le maximum de C sur L .
- Si la fonction C est bornée, on dira que f dilate uniformément normalement la lamination (L, \mathcal{L}) .
- Quand (L, \mathcal{L}) est plongée par i (et donc identifiée à son image dans M), la définition de la dilatation normale ci-dessus est équivalente à la suivante :

Il existe $\lambda > 1$ et une fonction continue strictement positive C sur L tels que, pour tout $x \in L$, tous vecteurs unitaires $v_0 \in T_x\mathcal{L}$ et $v_1 \in (T_x\mathcal{L})^\perp$, tout $n \geq 0$, on a :

$$\|p \circ Tf^n(v_1)\| \geq C(x) \cdot \lambda^n \cdot (1 + \|Tf^n(v_0)\|)$$

avec p égal à la projection orthogonale de $TM|_L$ sur $T\mathcal{L}^\perp$.

- Il existe des laminations immergées et préservées par un difféomorphisme telles que la dynamique induite sur l'image ne se relève pas en un endomorphisme de la lamination. Par exemple, on considère le tore $\mathbb{T}^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \times \{0\}$ canoniquement plongé dans $M := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}$. Soit (L, \mathcal{L}) la structure de lamination canonique sur le revêtement du tore $\{0, 1\} \times [0, 1]^2 / \sim$ avec \sim la relation d'équivalence engendrée par $(1, u, 1) \sim (0, u, 0)$, $(0, u, 1) \sim (1, u, 0)$ et $(\delta, 0, u) \sim (\delta, 1, u)$, pour tout $u \in [0, 1]$. Soit f le difféomorphisme de M induit par l'application linéaire de \mathbb{R}^3 dont la matrice est :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Remarquons que le tore \mathbb{T}^2 est normalement dilaté par le difféomorphisme f .

Soit i la projection canonique de (L, \mathcal{L}) sur \mathbb{T}^2 . L'application i est un revêtement à deux feuillets du tore et donc une immersion. Supposons l'existence d'un endomorphisme $f^* \in$

$End(\mathcal{L})$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & f & & \\
 & & M & \rightarrow & M \\
 i & \uparrow & & & \uparrow & i \\
 & & L & \rightarrow & L \\
 & & f^* & & &
 \end{array}$$

Comme f préserve le point $(0,0,0) \in \mathbb{T}^2$, l'endomorphisme f^* préserve la fibre $\{0,1\} \times \{(0,0)\}$. Etant donné deux entiers (a,b) , on note $hol_{(a,b)}$ la bijection de la fibre $\{0,1\} \times \{(0,0)\}$ obtenue par holonomy le long d'un lacet \mathbb{T}^2 pointé en 0 et tangent au vecteur $(a,b,0)$. Ainsi $hol_{(1,0)}$ est l'identité. Par commutativité des diagrammes, On a :

$$f^* = f^* \circ hol_{(1,0)} = hol_{(2,1)} \circ f^* = hol_{(0,1)} \circ f^*$$

Comme $hol_{(0,1)}$ est la permutation non triviale de cette fibre, on aboutit à une contradiction.

Proposition 1.1. *Soient (L, \mathcal{L}) une lamination et (M, g) une variété riemannienne C^∞ . Soient $f \in C^1(M, M)$, $i \in Im(\mathcal{L}, M)$ et $f^* \in End(\mathcal{L})$.*

Si f dilate normalement la lamination \mathcal{L} immergée par i au-dessus de f^ , pour tout compact K de L stable par f^* , il existe une métrique riemannienne g' sur M et $\lambda' < 1$, tels que pour cette nouvelle norme sur i^*TM et tout $v \in (i^*TM/T\mathcal{L})|_K \setminus \{0\}$, on a :*

$$\max(1, \|T_{\pi(v)}f^*\|) \cdot \|v\| < \lambda' \cdot \|[i^*Tf](v)\|$$

On dira que g' est une métrique adaptée à la dilatation normale de f sur K .

On montrera cette proposition dans la partie 1.3.

1.2.2 Persistance des immersions de laminations normalement dilatées

Le théorème ci-dessous est un cas particulier du résultat principal (théorème 2.1) de ce travail. A notre connaissance, il n'a jamais été démontré sous ces hypothèses, où les endomorphismes ne sont pas forcément inversibles et la lamination n'est pas forcément compacte. Cependant, ce théorème rentre dans le cadre de la théorie développée notamment par M. Hirsh, C. Pugh et M. Shub, prouvant la stabilité des laminations compactes normalement hyperboliques pour des difféomorphismes [11].

Théorème 1.2. *Soient (L, \mathcal{L}) une lamination et M une variété C^∞ munie d'une métrique riemannienne. Soient $f \in C^1(M, M)$, $i \in Im(\mathcal{L}, M)$ et $f^* \in End(\mathcal{L})$ tels que :*

$$\begin{array}{ccc}
 & f & \\
 M & \longrightarrow & M \\
 i \uparrow & & \uparrow i \\
 L & \longrightarrow & L \\
 & f^* &
 \end{array}$$

ii) f dilate normalement la lamination (L, \mathcal{L}) immergée par i .

Soit L' un ouvert relativement compact de L vérifiant $f^*(adh(L')) \subset L'$. Il existe alors un voisinage V_f de f dans $C^1(M, M)$ et une application continue :

$$V_f \rightarrow \text{End}_{f^*}(\mathcal{L}) \times \text{Im}(\mathcal{L}, M)$$

$$f' \mapsto (f'^*, i(f'))$$

avec $i(f) = i$ et tel que pour $f' \in V_f$, on a $f'^*(adh(L')) \subset L'$ et le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 & f' & \\
 M & \longrightarrow & M \\
 i(f') \uparrow & & \uparrow i(f') \\
 L' & \longrightarrow & L' \\
 & f'^* &
 \end{array}$$

Il existe enfin un voisinage compact W de L' dans L tel que, pour $f' \in V_f$, $i(f')$ et f'^* coïncident avec i et f^* respectivement, sur le complémentaire de W .

Remarques

- On rappelle qu'un endomorphisme f'^* appartient à $\text{End}_{f^*}(\mathcal{L})$ si f^* et f'^* sont équivalents, c'est-à-dire que la dynamique induite par f'^* sur l'espace des feuilles de \mathcal{L} est la même que celle de f^* .

Comme dans la conclusion de ce théorème, les endomorphismes f'^* et f^* coïncident sur le complémentaire d'un compact indépendant de f' C^1 -proche de f , d'après la topologie définie sur l'espace $\text{End}_{f^*}(\mathcal{L})$, les différentielles $\partial_{T\mathcal{L}}f'^*$ et $\partial_{T\mathcal{L}}f^*$ sont uniformément proches et, pour la métrique induite par i^*g sur chaque feuille de \mathcal{L} , les points $f'(x)$ et $f^*(x)$ sont uniformément proches pour $x \in L$.

- En fait, on démontre plus dans la preuve du théorème 1.2 : sous les hypothèses du théorème 1.2, si L' est un ouvert relativement compact de L , ne vérifiant pas forcément que $f^*(adh(L')) \subset L'$, mais qu'il existe $\lambda < 1$ et une métrique g sur M tels que :

$$\forall v \in (i^*TM/T\mathcal{L})|_{L'} \setminus \{0\}, \quad \max(1, \|T_{\pi(v)}f^*\|) \cdot \|v\| < \lambda \cdot \|[i^*Tf](v)\|$$

Il existe alors un voisinage V_f de f dans $C^1(M, M)$ et une application continue :

$$V_f \rightarrow \text{End}_{f^*}(\mathcal{L}) \times \text{Im}(\mathcal{L}, M)$$

$$f' \mapsto (f'^*, i(f'))$$

avec $i(f) = i$ et le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} & f' & \\ & M \longrightarrow M & \\ i(f') \uparrow & & \uparrow i(f') \\ & L' \longrightarrow L & \\ & f'^* & \end{array}$$

Exemples d'application du théorème 1.2

- Si f est un C^1 -endomorphisme de M qui préserve une sous-variété compacte N de M et qu'elle est dilate normalement l'injection canonique de N , alors N est persistante. Autrement dit, pour toute application f' C^1 -proche de f , il existe une sous-variété N' difféomorphe et C^1 -proche de N , qui est préservée par f' .

Autoriser L à être non compact est nécessaire pour les deux exemples qui suivent :

- Soit f un difféomorphisme sur une variété ayant un point fixe x hyperbolique. Alors la variété stable (entière) est un k -plan immergé injectivement qui est normalement dilaté par f . De plus, il existe une boule de ce k -plan centrée en x arbitrairement grande et dont l'adhérence est envoyée par f dans elle-même. Cette boule est donc persistante.
- Soient f un difféomorphisme d'une variété M et K un compact hyperbolique. Alors l'union $W^s(K)$ des variétés stables des éléments de K est l'image d'une lamination (L, \mathcal{L}) immergée injectivement et normalement dilatée par f . De plus, L est une union croissante d'ouverts relativement compacts L' de cet espace, dont l'adhérence est envoyée par f^* dans eux-mêmes. Donc, pour des perturbations de f , la lamination immergée $(L', \mathcal{L}|_{L'})$ est persistante (de plus l'immersion reste injective). Autrement dit, pour toute application f' C^1 -proche de f , il existe une immersion i' de $(L', \mathcal{L}|_{L'})$ dans M , proche de i pour la topologie de $\text{Im}(\mathcal{L}|_{L'}, M)$ et telle que f' préserve l'image par i' de $(L', \mathcal{L}|_{L'})$.

Preuve :

On munit M d'une métrique d_M adaptée au compact hyperbolique K . Pour un petit $\epsilon > 0$, on appelle variété stable locale de diamètre ϵ de $x \in K$, l'ensemble des points dont la trajectoire est à une distance de celle de x strictement inférieure à ϵ . Soit $W_\epsilon^s(K)$ l'union de ces variétés stables locales de diamètre ϵ

des points de K . Pour ϵ assez petit, l'adhérence de $W_\epsilon^s(K)$ est envoyée dans lui-même par f et supporte une structure de lamination canonique \mathcal{L}_0 qui est normalement dilatée par f . Soit C l'ensemble $W_\epsilon^s(K) \setminus f^2(\text{adh}(W_\epsilon^s(K)))$. Pour $i > 0$, on note C_i l'ensemble $f^{-i}(C)$ et C_0 l'ensemble $W_\epsilon^s(K)$. L'union $\cup_{n \geq 0} C_n$ est donc égale à $W^s(K)$. Aussi, pour $k, l \geq 0$, si C_k intersecte C_l alors $|k - l| \leq 1$. On va construire une métrique sur $W^s(K)$ telle que $\cup_{n \geq 0} C_n$ soit un recouvrement ouvert et que la topologie qu'elle induit sur C_n soit celle induite par M . Pour $(x, y) \in W^s(K)^2$, on note $d(x, y)$:

$$\inf \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} d_M(x_i, x_{i+1}); n > 0, (x_i)_i \in W^s(K)^n, x_1 = x, x_n = y, \forall i \exists j : (x_i, x_{i+1}) \in C_j^2 \right\}$$

qui définit bien une distance aux propriétés annoncées. L'espace métrique L sera alors $W^s(K)$ muni de cette distance. Pour $i > 0$, l'ouvert C_i supporte la structure de lamination \mathcal{L}_i dont les cartes sont les composées à droite par f^i des cartes de $\mathcal{L}_{0|C}$. Comme f est un difféomorphisme, les structures $(\mathcal{L}_i)_{i \geq 0}$ sont deux à deux équivalentes restreintes à l'intersection de leur support. L'union de ces atlas engendre donc une structure de lamination \mathcal{L} sur L . Celle-ci est normalement dilatée par f car \mathcal{L}_0 est uniformément normalement dilatée. Enfin pour $k \geq 0$, l'union $L'_k := \cup_{i \leq k} C_i$ est un ouvert de L dont l'adhérence est envoyée par f dans lui-même. Comme $(C_i)_i$ recouvre L , il en est de même pour $(L'_k)_k$.

1.2.3 Persistance des plongements de laminations normalement dilatés

Expansivité par plaques Soient (L, \mathcal{L}) une lamination, f un endomorphisme de (L, \mathcal{L}) , ainsi que ϵ une fonction continue et positive sur L . La famille $(p_n)_{n \geq 0} \in L^{\mathbb{N}}$ est une ϵ -pseudo-orbite qui respecte \mathcal{L} si pour chaque n , p_{n+1} et $f(p_n)$ sont dans une même plaque de \mathcal{L} de diamètre inférieur à $\epsilon(p_{n+1})$.

L'endomorphisme f est ϵ -expansif par plaques si pour toute fonction continue η inférieure à ϵ , ainsi que pour toutes η -pseudo-orbites $(p_n)_{n \geq 0}$ et $(q_n)_{n \geq 0}$ qui respectent \mathcal{L} , telles que $d(p_n, q_n) < \eta(p_n)$ pour chaque n , alors p_0 et q_0 sont dans une même plaque de diamètre inférieur à $\eta(p_0)$. L'endomorphisme est *expansif par plaques* s'il est ϵ -expansif par plaques pour un certaine fonction ϵ continue et strictement positive.

Remarque Usuellement, le support L de la lamination est compact et la fonction ϵ constante. Notre définition de l'expansivité par plaques est alors équivalente en remplaçant ϵ par son minimum sur L . Dans le cas non compact, on peut aussi se ramener à une fonction ϵ constante en modifiant la métrique de L sans modifier la topologie de L .

Corollaire 1.3. *Sous les hypothèses du théorème 1.2, si de plus $f|_L^*$ est expansif par plaques et i est un plongement, alors, pour $f' \in V_f$, on a de plus $f'|_L^*$ qui est expansif par plaques et $i(f')|_L$ qui est un plongement.*

Questions Sous les hypothèses du corollaire 1.3, l'expansivité par plaques est-elle automatique? L'hypothèse d'expansivité par plaques est-elle nécessaire pour ce corollaire? Dans le cas où f est un difféomorphisme normalement hyperbolique sur une lamination compacte, M. Hirsch, C. Pugh et M. Shub ont déjà formulé ces questions [11].

Dans l'annexe B, on donne des conditions qui garantissent l'expansivité par plaques.

Démonstration du corollaire 1.3

Par compacité de $K := \text{adh}(L')$, il suffit de montrer que $i(f')|_K$ est injective pour montrer que c'est un homéomorphisme sur son image.

Soit \hat{K} un voisinage compact de $f^*(K)$ dans L' . On suppose que $f'_{|L'}$ est ϵ -expansif par plaques. On note η le minimum de la fonction ϵ sur \hat{K} .

Quitte à restreindre V_f , on peut supposer que pour $f' \in V_f$:

- pour $(x, y) \in K^2$ si $i(f')(x) = i(f')(y)$ alors $d(x, y) < \eta$,
- pour $z \in K$, $f'^*(z)$ appartient à une plaque $\mathcal{L}_{f'^*(z)}$ de diamètre inférieur à η ,
- $i(f')$ est injectif sur les plaques de diamètre inférieur à η qui rencontrent K .

Soit alors $(x, y) \in K^2$ tels que $i(f')(x) = i(f')(y)$. On définit les suites $(p_n)_n$ et $(q_n)_n$ suivantes de $K^{\mathbb{N}}$: pour $n \geq 0$, soient $p_n = f'^{*n}(x)$ et $q_n = f'^{*n}(y)$. Par commutativité du diagramme et continuité de $i(f')$, f'^* et f' , pour tout $n \geq 0$, $i(f')(p_n) = i(f')(q_n)$.

Quitte à réduire V_f , on peut supposer que p_n et q_n appartiennent à \hat{K} pour tout $n \geq 1$. On a donc :

- $d(p_n, q_n) \leq \eta$, pour $n \geq 0$.
- $(p_n)_{n \geq 1}$ et $(q_n)_{n \geq 1}$ sont des η -pseudo-orbites pour f^* qui respecte \mathcal{L} .

De l'expansivité par plaques de f^* , on conclut que $f'^*(x)$ et $f'^*(y)$ sont dans une même plaque de diamètre inférieur à η . Mais comme $i(f')$ est injectif sur ces plaques, $f'^*(x)$ est égal à $f'^*(y)$.

Donc x et y sont deux éléments η -proche de K envoyés par f^* sur une même plaque de diamètre inférieur à 2η .

Par dilatation normale de f^* , pour η assez petit (indépendamment de x , y et f'^*), les points x et y appartiennent alors à une même plaque de diamètre η . Ainsi x et y sont égaux.

L'expansivité par plaques de f'^* est donnée par la continuité de $f' \mapsto f'^*$, quitte à réduire V_f .

Exemples

- Soient f un difféomorphisme d'une variété M et K un compact hyperbolique. Si la lamination canonique (L, \mathcal{L}) supportée par $W^s(K)$ ne s'accumule pas sur K , alors elle est canoniquement plongée dans M . On peut alors identifier L et $W^s(K)$. De plus, f préserve cette lamination, est expansive par plaques et dilate normalement cette lamination.

Ainsi, pour tout ouvert relativement compact L' de $W^s(K)$, dont l'adhérence est envoyée dans L' par f , le corollaire 1.3 implique que, pour des perturbations C^1 de f , la lamination plongée $(L', \mathcal{L}_{|L'})$ est persistante. Autrement dit, pour toute application f' C^1 -proche de f , il existe un plongement i' de $(L', \mathcal{L}_{|L'})$ dans M , proche de i pour la topologie de $Pl(\mathcal{L}_{|L'}, M)$ et tel que f' préserve l'image par i' de $(L', \mathcal{L}_{|L'})$.⁵

⁵On a vu que L est une union croissante d'ouverts relativement compacts L' de cet espace, dont leur adhérence est envoyée par f^* dans eux-mêmes.

Dans le cas d'un dérivé d'Anosov f sur le tore bidimensionnel, possédant une source S , l'ensemble errant privé de cette source est un compact hyperbolique attractif, dont les variétés stables forment une lamination plongée. Cette lamination est donc préservée par f , normalement dilatée et ϵ -expansif par plaques. Cependant une telle fonction ϵ ne peut jamais être choisie constante.

On suppose par l'absurde que ϵ est constante. Comme les feuilles de cette lamination s'accumulent en S , il existe deux ϵ -pseudo orbites respectant les plaques, qui restent dans le $\epsilon/(2\|Tf\|)$ -voisinage de S , qui sont ϵ -proches et qui ne débutent pas dans les mêmes feuilles.

- On considère maintenant l'application de Viana généralisée de la façon suivante :

$$\text{Soit } V : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$$

$$(\theta, y) \mapsto (16 \cdot \theta, y^2 + c)$$

Pour $c \in]-2, 1/4[$, le bassin d'attraction de l'infini de $y \mapsto y^2 + c$ est bordé par un point fixe répulsif β et sa préimage $-\beta$. Alors pour $\epsilon > 0$ assez petit, l'ouvert $L' = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times]-\beta + \epsilon, \beta - \epsilon[$ contient l'adhérence de son image par V . De plus, V dilate normalement la lamination plongée canoniquement, dont les feuilles sont $\{\theta\} \times]-\beta, \beta[$, pour $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. L'application V est aussi expansive par plaques sur cette lamination. On peut donc utiliser le corollaire 2.2, pour montrer la stabilité de cette lamination restreinte à L' pour des perturbations C^1 de V .

La stabilité de ce feuilletage vertical a été utilisée par M. Viana pour montrer l'existence d'exposants de Lyapounov positifs pour certains paramètres c et certaines perturbations de f [30].

1.3 Preuve de la proposition 1.1

L'existence d'une métrique adaptée quand f est un difféomorphisme a été prouvée récemment par Nikolaz Gourmelon [9]. La preuve exposée ci-dessous s'inspire beaucoup de ce travail.

On commence par montrer que si $(x, y) \in K^2$ ont la même image par i , alors les images par Ti de $T_x\mathcal{L}$ et $T_{x'}\mathcal{L}$ sont égales. En effet, sous l'action de Tf , par dilatation normale en x , les vecteurs de $Ti(T_y\mathcal{L}) \setminus Ti(T_x\mathcal{L})$ croissent exponentiellement plus vite que ceux de $Ti(T_x\mathcal{L})$ et par dilatation normale en y , les vecteurs de $Ti(T_x\mathcal{L}) \setminus Ti(T_y\mathcal{L})$ croissent exponentiellement plus vite que ceux de $Ti(T_y\mathcal{L})$. Donc les vecteurs de $Ti(T_y\mathcal{L}) \setminus Ti(T_x\mathcal{L})$ croissent à la fois exponentiellement plus vite et moins vite que ceux de $Ti(T_x\mathcal{L}) \setminus Ti(T_y\mathcal{L})$. Ainsi les espaces $Ti(T_x\mathcal{L})$ et $Ti(T_y\mathcal{L})$ sont égaux.

Soit B le compact $i(K)$ de M et F le fibré vectoriel $TM|_B \rightarrow B$. En tout point $y \in B$, il existe donc un unique sous-espace F'_y de T_yM tel que si $x \in K$ est envoyé par i en y , alors

$Ti(T_x\mathcal{L}) = F'_y$. Par compacité de K , l'application $y \mapsto F'_y$ est une application continue de B dans la grassmannienne de TM . Soit F' l'union des sous-espaces $(F'_x)_{x \in B}$. La projection canonique de F' sur B définit donc un sous-fibré de F . On munit ces deux fibrés de la norme issue de la métrique riemannienne sur M .

On note T la restriction de Tf au fibré F , qui est un morphisme de fibrés au-dessus de f . Comme T préserve le sous-fibré F' , cette application définit un morphisme, noté $[T]$, sur le fibré quotient F/F' au-dessus de B .

Pour $x \in B$ et $n \geq 0$, on note :

$$m([T]^n(x)) := \min_{u \in (F/F')_x, \|u\|=1} (\|[T]^n(u)\|)$$

Par dilatation normale et compacité de B , il existe $N > 0$ et $a < 1$ tels que pour tout $x \in B$:

$$\max(1, \|T_{|F'}^N(x)\|) < a^{2N} \cdot m([T]^N(x))$$

Il existe donc une fonction r sur B , continue et strictement supérieure à 1, telle que pour tout $x \in B$:

$$\frac{1}{a} \sqrt[N]{\|T_{|F'}^N(x)\|} < r(x) < a \cdot \sqrt[N]{m([T]^N(x))}$$

On note R_n la fonction continue sur B définie par :

$$R_n := x \mapsto \prod_{i=0}^n r(f^i(x))$$

On utilise maintenant le lemme suivant que l'on démontrera à la fin de cette partie :

Lemme 1.3.1. *Il existe $c > 0$ tel que pour $x \in B$ et $n \geq 0$, on ait :*

$$\frac{\|T_{|F'}^n(x)\|}{R_n(x)} \leq c \cdot a^n \quad \text{et} \quad \frac{m([T]^n(x))}{R_n(x)} \geq c^{-1} \cdot a^{-n}$$

Il existe donc $M \geq 0$ tel que, pour $x \in B$, $\frac{m([T]^{M+1}(x))}{R_{M+1}(x)}$ est strictement supérieur à $\frac{1}{r(x)}$. Pour tout $(x, u) \in F$, soit u_1 la projection orthogonale de u sur F'_x et u_2 la classe de $u - u_1$ dans $(F/F')_x$. D'après le lemme 1.3.1, la norme euclidienne suivante est bien définie et dépend continûment de (x, u) :

$$\|(x, u)\|'^2 := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|T^n(x, u_1)\|^2}{R_n(x)^2} + \sum_{n=0}^M \frac{\|[T]^n(x, u_2)\|^2}{R_n(x)^2}$$

On remarque que l'on a :

$$\|T(x, u_1)\|'^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|T^{n+1}(x, u_1)\|^2}{R_n(f(x))^2} = r(x)^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|T^n(x, u_1)\|^2}{R_n(x)^2} \leq r(x)^2 \cdot \|(x, u_1)\|'$$

donc la norme induite par $\|\cdot\|'$ de $T|_{F'_x}$ est inférieure à $r(x)^2$

Et si u_2 est non nul, on a :

$$\begin{aligned} \|[T](x, u_2)\|'^2 &= \sum_{n=0}^M \frac{\|[T]^{n+1}(x, u_2)\|^2}{R_n(f(x))^2} = r(x)^2 \cdot \sum_{n=1}^{M+1} \frac{\|[T]^n(x, u_2)\|^2}{R_n(x)^2} \\ &= r^2(x) \cdot \left(\|(x, u_2)\|'^2 + \frac{\|[T]^{M+1}(x, u_2)\|^2}{R_{M+1}(x)^2} - \frac{\|(x, u_2)\|^2}{r(x)^2} \right) > r^2(x) \cdot \|(x, u_2)\|'^2 \end{aligned}$$

Donc le réel $\|[T](x)^{-1}\|'^{-1}$ est strictement supérieur à $r(x)^2 > 1$.

Il résulte de ces deux dernières conclusions que, pour tout $x \in B$:

$$\|[T](x)^{-1}\|' \cdot \max(1, \|T|_{F'}(x)\|') < 1$$

Par compacité de B , il existe un majorant $\lambda' < 1$ tel que pour $x \in B$, on a :

$$\|[T](x)^{-1}\|' \cdot \max(1, \|T|_{F'}(x)\|') < \lambda'$$

On étend cette métrique euclidienne sur $F = TM|_B$ en une métrique riemannienne g'' continue sur TM . On choisit alors une métrique riemannienne g' de classe C^∞ sur M , assez proche de g'' pour avoir, avec la norme issue de g' sur i^*TM :

$$\forall v \in (i^*TM/T\mathcal{L})|_K \setminus \{0\}, \quad \max(1, \|T_{\pi(v)}f^*\|) \cdot \|v\| < \lambda' \cdot \|[i^*Tf](v)\|$$

Ce qu'il fallait démontrer.

preuve du lemme 1.3.1 :

$$\text{Soient } C := \max_{x \in B} \left(\|T|_{F'}(x)\|, \|[T](x)^{-1}\|, r(x), \frac{1}{r(x)} \right) > 1 \quad \text{et} \quad c := C^{3N} \cdot a^{-N}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soient $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, \dots, N-1\}$ tels que $n = q \cdot N + r$. Pour $x \in B$, on a alors :

$$R_n(x) = \prod_{i=0}^{N-1} \prod_{j=0}^{q-1} r(f^{i+jN}(x)) \cdot \prod_{k=0}^r r(f^{qN+k}(x))$$

La première inégalité du lemme est obtenue par le calcul suivant :

$$\begin{aligned} R_n(x) &\geq \prod_{i=0}^{N-1} \prod_{j=0}^{q-1} \frac{\sqrt[N]{\|T|_{F'}^N(f^{i+jN}(x))\|}}{a} \cdot C^{-N} \geq \prod_{i=0}^{N-1} \frac{\sqrt[N]{\|T|_{F'}^{qN}(f^i(x))\|}}{a^q} \cdot C^{-N} \\ \Rightarrow R_n(x) &\geq \prod_{i=0}^{N-1} \frac{\sqrt[N]{\|T|_{F'}^n(x)\|}}{a^q \cdot C^2} \cdot C^{-N} \geq C^{-3N} \cdot a^N \frac{\|T|_{F'}^n(x)\|}{a^n} = c^{-1} \cdot \frac{\|T|_{F'}^n(x)\|}{a^n} \end{aligned}$$

Et la deuxième inégalité du lemme est obtenue par le calcul suivant :

$$\begin{aligned} R_n(x) &\leq \prod_{i=0}^{N-1} \prod_{j=0}^{q-1} \left(a \cdot \sqrt[N]{m([T]^N(f^{i+jN}(x)))} \right) \cdot C^N \leq \prod_{i=0}^{N-1} \left(a^q \cdot \sqrt[N]{m([T]^{qN}(f^i(x)))} \right) \cdot C^N \\ \Rightarrow R_n(x) &\leq \prod_{i=0}^{N-1} \left(a^q \cdot C^3 \cdot \sqrt[N]{m([T]^n(x))} \right) \cdot C^N \leq c \cdot a^n \cdot m([T]^n(x)) \end{aligned}$$

1.4 Fibré vectoriel ayant pour base une lamination

Pour démontrer le théorème 1.2, on aura besoin de travailler sur des fibrés au-dessus d'une lamination.

1.4.1 \mathcal{L} -fibré vectoriel

Soit (L, \mathcal{L}) une lamination. Un \mathcal{L} -fibré vectoriel est la donnée d'un fibré vectoriel $\pi : F \rightarrow L$ et d'une structure de lamination \mathcal{F} sur F vérifiant la condition de compatibilité suivante : pour tout $x \in L$, en désignant par F_x la fibre de x , il existe un voisinage ouvert U de x et une trivialisaton

$$\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F_x$$

de F au-dessus de U telle que ϕ soit un isomorphisme de la lamination $\mathcal{F}|_{\pi^{-1}(U)}$ sur $\mathcal{L}|_U \times F_x$. Ainsi, les feuilles de \mathcal{F} sont les préimages par π des feuilles de \mathcal{L} .

Si (F, \mathcal{F}) est un \mathcal{L} -fibré, une norme sur F est une famille continue de normes sur chaque fibre.

Notations Si $\pi : F \rightarrow L$ est un fibré vectoriel normé, on note $\Gamma^0 F$ l'espace vectoriel des sections continues de ce fibré et $\Gamma_b^0 F$ l'ensemble des sections continues et bornées. Étant donné un compact W de L , on note $\Gamma_W^0 F$ l'ensemble des sections continues à support dans W . Les espaces $\Gamma_b^0 F$ et $\Gamma_W^0 F$ sont des espaces de Banach pour la norme uniforme. Si de plus, (F, \mathcal{F}) est un \mathcal{L} -fibré vectoriel, on note ΓF (resp. $\Gamma_W F$) le sous-espace de $\Gamma^0 F$ (resp. $\Gamma_W^0 F$) constitué des sections qui sont continûment différentiables le long des feuilles.

1.4.2 Connexion

Soit (F, \mathcal{F}) un \mathcal{L} -fibré vectoriel. Une *connexion* est une application \mathbb{R} -bilinéaire

$$\nabla : \Gamma^0 T\mathcal{L} \times \Gamma F \rightarrow \Gamma^0 F$$

$$(X, \sigma) \mapsto \nabla_X \sigma$$

qui vérifie :

1. $\nabla_{f \cdot X} \sigma = f \cdot \nabla_X \sigma$ si $f \in C^0(L, \mathbb{R})$
2. $\nabla_X (f \cdot \sigma) = f \cdot \nabla_X \sigma + (Tf \circ X) \cdot \sigma$ si $f \in Mor(\mathcal{L}, \mathbb{R})$

Propriété 1.4.1. *Sur tout \mathcal{L} -fibré (F, \mathcal{F}) , il existe une connexion sur (F, \mathcal{F}) .*

Preuve

On fixe un recouvrement localement fini de L par des ouverts trivialisant $(U_i)_i$. Par l'annexe A.1.1, il existe une partition de l'unité $(\rho_i)_i$ associée à $(U_i)_i$. Pour chaque i , soit $x_i \in U_i$. Via une trivialisaton, on identifie $F|_{U_i}$

à $U_i \times F_{x_i}$. Soit p_2 la projection de $U_i \times F_{x_i}$ sur F_{x_i} . On remarque que l'application suivante est une connexion sur $F|_{U_i}$:

$$\nabla^i : (X, \sigma) \mapsto \left[x \mapsto \left(x, T(p_2 \circ \sigma)(X(x)) \right) \right]$$

ainsi l'application $\nabla := \sum_i \rho_i \cdot \nabla^i$ définit une connexion sur F .

Propriété 1.4.2. *Soit (F, \mathcal{F}) un \mathcal{L} -fibré. Pour $x \in L$, $X \in \Gamma^0 T\mathcal{L}$ et $\sigma \in \Gamma F$, le vecteur $\nabla_X \sigma(x)$ ne dépend que de $X(x)$ et de $T_x \sigma$.*

Preuve

Par l'annexe A.1.1, il existe une fonction $f \in Mor(\mathcal{L}, \mathbb{R})$ valant 1 au voisinage de x et à support dans un ouvert U trivialisant pour les fibrés $T\mathcal{L}$ et F . En utilisant 1) et 2), on a :

$$\nabla_X \sigma(x) = \nabla_{fX}(f\sigma)(x)$$

Cela implique que $\nabla_X \sigma$ ne dépend que de σ et de X sur ce voisinage U . Il existe une base $(e_i)_i$ de $F|_U$, une base $(l_j)_j$ de $T\mathcal{L}|_U$, des fonctions $(\sigma_i)_i$ et $(l_j)_j$ sur U , tels que $\sigma|_U$ est égale à $\sum_i \sigma_i \cdot e_i$ et $X|_U$ est égal à $\sum_j X_j \cdot l_j$. En utilisant 1) et 2), on a :

$$\nabla_X \sigma = \nabla_{\sum_j X_j \cdot l_j}(\sum_i \sigma_i \cdot e_i) = \sum_j X_j \nabla_{l_j}(\sum_i \sigma_i \cdot e_i) = \sum_{i,j} X_j \cdot \sigma_i \cdot \nabla_{l_j} e_i + X_j \cdot T_{l_j} \sigma_i \cdot e_i$$

Comme $(X_j(x), T_{l_j} \sigma_i(x), \sigma_i(x))$ ne dépendent que de $X(x)$ et $T\sigma(x)$, il en est de même pour $\nabla_X \sigma(x)$.

1.4.3 Topologies sur les espaces des sections

Soient (L, \mathcal{L}) une lamination munie d'une métrique riemannienne g , (F, \mathcal{F}) un \mathcal{L} -fibré vectoriel normé et ∇ une connexion sur F . Pour chaque $x \in L$, on munit l'espace des applications linéaires de $T\mathcal{L}_x$ dans F_x , noté $T\mathcal{L}_x^* \otimes F_x$, de la norme subordonnée à $(T_x \mathcal{L}, g_x)$ et $(F_x, \|\cdot\|)$, c'est-à-dire :

$$\forall \ell \in T\mathcal{L}_x^* \otimes F_x, \quad \|\ell\| = \max_{u \in T_x \mathcal{L}, \|u\| \leq 1} \|\ell(u)\|$$

La topologie *compacte-ouverte* sur ΓF est engendrée par la base $\{\mathcal{O}(\sigma, K, \epsilon)\}$, où σ parcourt ΓF , ϵ est un réel strictement positif, K est un compact de L et l'ouvert $\mathcal{O}(\sigma, K, \epsilon)$ est égal à :

$$\{\sigma' \in \Gamma F : \forall x \in K, \|(\sigma - \sigma')(x)\| + \|\nabla(\sigma - \sigma')(x)\| < \epsilon\}$$

On montre que cette topologie est égale à la topologie induite par $Mor_{0_F}(\mathcal{L}, \mathcal{F})$.

Si L n'est pas compact, cette topologie ne provient pas d'une norme. Pour un compact W de L , l'ensemble $\Gamma_W F$ des sections à support inclus dans W est un espace de Banach, muni de la norme :

$$\|\sigma\|^\nabla = \max_{x \in L} \|\sigma(x)\| + \max_{x \in L} \|\nabla \sigma(x)\|$$

Propriété 1.4.3. Soient ∇' une autre connexion sur (F, \mathcal{F}) , alors pour $\sigma \in \Gamma F$ et $x \in L$, $(\nabla - \nabla')\sigma(x)$ ne dépend que de $\sigma(x)$. De plus, pour tout compact W , il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall \sigma \in \Gamma F, \max_W \|\nabla\sigma - \nabla'\sigma\| < C \cdot \max_W \|\sigma\|$$

Preuve

Par compacité de W et la propriété 1.4.2, il suffit de montrer cette propriété quand ce compact est inclus dans un ouvert trivialisant. Soit alors $(e_i)_i$ une base du fibré restreint à cette ouvert. Pour $\sigma \in \Gamma F$, on note par $(\sigma_i)_i$ ses coordonnées dans la base $(e_i)_i$. On a alors :

$$\nabla\sigma = \sum_i T\sigma_i \cdot e_i + \sigma_i \nabla e_i, \quad \nabla'\sigma = \sum_i T\sigma_i \cdot e_i + \sigma_i \nabla' e_i$$

donc $(\nabla - \nabla')\sigma(x)$ est nulle si x n'appartient pas à W et sinon est égale à $\sum_i \sigma_i (\nabla e_i - \nabla' e_i)$, qui ne dépend que de $\sigma(x)$.

On montre maintenant la fin de cette propriété. Par équivalence des normes en dimension finie, il existe C_0 tel que :

$$\begin{aligned} \max_{i,W} |\sigma_i| &\leq C_0 \cdot \max_W \|\sigma\| \\ \text{Soit } C &:= C_0 \cdot \max_W \sum_i \|\nabla e_i - \nabla' e_i\| \end{aligned}$$

On a donc :

$$\max_W \|\nabla\sigma - \nabla'\sigma\| \leq \max_W \sum_i \|\sigma_i (\nabla e_i - \nabla' e_i)\| \leq C \cdot \max_W \|\sigma\|$$

Par équivalence des normes en dimension finie et la propriété 1.4.3, on remarque que les normes $\|\cdot\|^\nabla$ sont toutes équivalentes sur $\Gamma_W F$. Aussi notre topologie sur $\Gamma_W F$ ne dépend ni de la connexion ∇ , ni de la norme sur le fibré F .

1.5 Démonstration du théorème 1.2

On commence par définir un \mathcal{L} -fibré (F, \mathcal{F}) :

Soient d la dimension de \mathcal{L} et n celle de M . Par l'annexe A.2.1, il existe un relèvement N de i , dans le fibré de la grassmannienne des $n - d$ -plans de TM , qui est un morphisme de la lamination \mathcal{L} dans cette grassmannienne et qui est proche de $x \mapsto Ti(T_x \mathcal{L})^\perp$ pour la topologie C^0 -forte. Le relèvement N vérifie ainsi en tout point $x \in L$:

$$Ti(T_x \mathcal{L}) \oplus N(x) = T_{i(x)} M$$

Par l'annexe A.3.1, ce morphisme N définit alors canoniquement un \mathcal{L} -fibré

$$\pi : (F, \mathcal{F}) \rightarrow (L, \mathcal{L})$$

dont la fibre en x est $F_x := N(x)$. Ce fibré s'identifie au fibré normal de (L, \mathcal{L})

Soit g une métrique riemannienne complète sur M . On note par \exp l'application exponentielle associée à cette métrique. L'application suivante est un morphisme de (F, \mathcal{F}) dans M , dont

la restriction à un voisinage de la section nulle de F est une immersion.

$$\text{Exp} : F \rightarrow M$$

$$(x, v) \mapsto \exp_{i(x)}(v)$$

On va maintenant utiliser le lemme suivant.

Lemme 1.5.1. *Sous les hypothèses du théorème 1.2, soient $((F, \mathcal{F}), \pi)$ un \mathcal{L} -fibré vectoriel normé de dimension $n - d$ et ∇ une connexion sur F .*

Soit W un voisinage compact de $K := \text{adh}(L')$. Il existe alors un voisinage V_f de f dans $C^1(M, M)$, un voisinage fermé V_σ de la section nulle dans ΓF et une application continue :

$$V_f \times V_\sigma \rightarrow \text{End}_{f^*}(\mathcal{L}) \times V_\sigma$$

$$(f', \sigma) \mapsto (f'_\sigma, S_{f'}(\sigma))$$

tels que :

1. $f_{0_F}^* = f^*$ et $S_f(0_F) = 0_F$
2. Il existe $\eta > 0$, tel que pour $x \in K$, $f' \in V_f$ et $\sigma \in V_\sigma$, le point $\text{Exp} \circ S_{f'}(\sigma)(x)$ est l'unique point d'intersection de l'image par Exp de la boule $B_{F_x}(0, \eta)$ avec la préimage par f' de $\text{Exp} \circ \sigma(\mathcal{L}_{f^*(x)}^\eta)$.
3. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & f' & & \\ & & \downarrow & & \\ & M & \longrightarrow & M & \\ \text{Exp} \circ S_{f'}(\sigma) & \uparrow & & \uparrow & \text{Exp} \circ \sigma \\ & K & \longrightarrow & L & \\ & & f'_\sigma & & \end{array}$$

De plus, $S_{f'}(\sigma) \in \Gamma_W F$ et f'_σ coïncide avec f^* sur le complémentaire de W .

4. Pour $f' \in V_f$ et $\delta > 0$, il existe $N \geq 0$ et $V_{f'} \subset V_f$ un voisinage de f' tels que, pour $f'' \in V_{f'}$, le diamètre de $S_{f''}^N(V_\sigma)$ est inférieur à δ .

On démontrera ce lemme dans la partie 1.6.

On utilise ce lemme avec F et Exp définis au début de la partie 1.5. Comme $(\Gamma_W F, \|\cdot\|_\nabla)$ est un espace complet, par la conclusion 4 du lemme, pour $f' \in V_f$, $\bigcap_{n \geq 0} \text{adh}(S_{f'}^n(V_\sigma))$ est une intersection décroissante d'ensembles dont les diamètres tendent vers 0. D'après le théorème des segments emboîtés, cette intersection est donc réduite à un singleton $\{\sigma_{f'}\}$ stable par $S_{f'}$. Donc pour $f' \in V_f$, l'application $S_{f'}$ possède un unique point fixe $\sigma_{f'}$. De plus, pour $f' \in V_f$ et $\delta > 0$, il

existe un voisinage $V_{f'}$ de f' et $N \geq 0$ tel que pour $f'' \in V_{f'}$, le diamètre de $S_{f''}^N(V_f)$ est inférieur à δ et contient $\sigma_{f''}$. Par continuité de $f'' \mapsto S_{f''}^N$, quitte à réduire $V_{f'}$, pour $f'' \in V_{f'}$, $\sigma_{f''}$ est 3δ -proche de $\sigma_{f'}$. Ainsi $f' \mapsto \sigma_{f'}$ est continue.

On note alors $i(f')$ l'application $Exp \circ \sigma_{f'}$ et f'^* l'application $f'^*_{\sigma_{f'}}$. Elles dépendent toutes les deux continûment de f' et prennent la bonne valeur en f . Quitte à réduire V_f , $f'^*(L')$ est inclus dans L' , pour $f' \in V_f$. Par la conclusion 3 du lemme 1.5.1, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} & f' & \\ M & \longrightarrow & M \\ i(f') \uparrow & & \uparrow i(f') \\ L' & \longrightarrow & L' \\ & f'^* & \end{array}$$

Cela termine la preuve du théorème 1.2.

1.6 Preuve du lemme 1.5.1

On va démontrer ce lemme sous des hypothèses un peu plus générales que celle du théorème 1.2 : on ne réclame plus que L' soit stable par f^* . Aussi, on ne supposera plus que f^* est un endomorphisme de (L, \mathcal{L}) , mais que c'est un morphisme de la lamination \mathcal{L} restreinte à un ouvert V de L dans \mathcal{L} . Cette généralité supplémentaire sera utile dans la suite.

Lemme 1.6.1. *Soient (L, \mathcal{L}) une lamination de dimension d , (M, g) une variété riemannienne de dimension n et (F, \mathcal{F}) un \mathcal{L} -fibré vectoriel normé de dimension $n - d$.*

*Soit ∇ une connexion sur F . On considère aussi une application $f \in C^1(M, M)$ et un morphisme $Exp \in Mor(\mathcal{F}, M)$ dont la restriction à un voisinage de la section nulle est une immersion. On pose $i := Exp \circ 0_F$ et on munit (L, \mathcal{L}) de la métrique riemannienne i^*g .*

Soit alors K un compact ayant un voisinage compact W lui-même inclus dans un ouvert V de L . Soit enfin $f^ \in Mor(\mathcal{L}|_V, \mathcal{L})$. On suppose que le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ M & \longrightarrow & M \\ i \uparrow & & \uparrow i \\ V & \longrightarrow & L \\ & f^* & \end{array}$$

*On identifie $T\mathcal{L}$ à un sous-fibré de i^*TM grâce à l'injection donnée par i . On suppose enfin que l'application $i^*Tf \in C^0(i^*TM|_V, i^*TM)$ passée sur le quotient $[i^*Tf] : (i^*TM/T\mathcal{L})|_V \rightarrow i^*TM/T\mathcal{L}$ vérifie :*

$$\exists \lambda < 1, \forall u \in (i^*TM/T\mathcal{L})|_K, u \neq 0,$$

$$\max\{1, \|T_{\pi(u)}f^*\| \} \cdot \|u\| < \lambda \cdot \|[i^*Tf(u)]\| \quad (1.1)$$

Il existe alors un voisinage V_f de $f \in C^1(M, M)$ et un voisinage fermé V_σ de la section nulle dans ΓF , ainsi qu'une application continue :

$$\begin{aligned} V_f \times V_\sigma &\rightarrow \text{Mor}_{f^*}(\mathcal{L}|_V, \mathcal{L}) \times (V_\sigma \cap \Gamma_W F) \\ (f', \sigma) &\mapsto (f'_\sigma, S_{f'}(\sigma)) \end{aligned}$$

qui vérifie les conclusions 1-2-3-4 du lemme 1.5.1.

Pour se ramener à l'énoncé du lemme 1.5.1, on prend V égal à L et on munit M d'une métrique g adaptée à la dilatation normale de f sur K , ainsi l'inégalité (1.1) sera vérifiée.

1.6.1 Notations et conventions

Via l'application tangente de Exp en la section nulle de F , pour chaque $x \in L$, la fibre F_x s'identifie à l'orthogonal de $T_x \mathcal{L}$ dans $T_{i(x)}M$. On peut donc munir F_x de la norme induite par g sur cet orthogonal. On munit (F, \mathcal{F}) d'une métrique riemannienne.

Pour $x \in L$, la différentielle $T_{0_x}Exp$ est un isomorphisme. Par le théorème d'inversion locale, il existe $\epsilon_x > 0$, tel que la restriction de Exp à $\mathcal{F}_{0_x}^{\epsilon_x}$ soit un difféomorphisme sur son image. On note I_x^{-1} l'application $Exp|_{\mathcal{F}_{0_x}^{\epsilon_x}}^{-1}$. On peut alors définir pour f' appartenant à un voisinage de f , et v appartenant à voisinage du graphe de la section nulle de $F|_W$, l'application

$$\hat{f}'(v) := I_{f^* \circ \pi}^{-1} \circ f' \circ Exp(v) \quad (1.2)$$

1.6.2 Préimage d'une perturbation de i

Par compacité de W , il existe $\eta > 0$ tel que, pour $x \in W$, pour σ proche de la section nulle et pour f' proche de f , la boule $B_{F_x}(0, \eta)$ est plongée par Exp , la restriction de f' à $Exp(B_{F_x}(0, \eta))$ est un difféomorphisme sur son image et cette image rencontre transversalement en un unique point d'intersection l'image par $Exp \circ \sigma$ de la plaque $\mathcal{L}_{f^*(x)}^\eta$. En écrivant ce point d'intersection sous la forme

$$f' \circ Exp(v) = Exp \circ \sigma(x')$$

$$\text{On pose } \begin{cases} f'_\sigma(x) = x' \\ S_{f'}^0(\sigma)(x) = v \end{cases}$$

Ces application seront modifiées et prolongées, de manière appropriée en dehors d'un voisinage de K , pour obtenir f'_σ et $S_{f'}(\sigma)$. On va étudier la régularité de S^0 en utilisant le théorème des

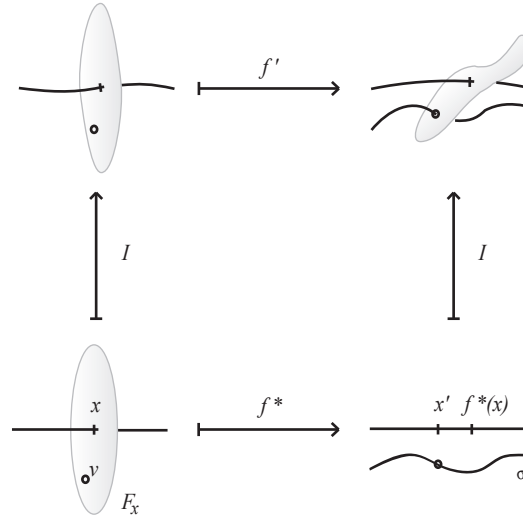


FIG. 1.1 – Définition par transversalité de S^0

fonctions implicites.

Ce dernier théorème nécessite de travailler avec des espaces de Banach, ce qui n'est pas le cas de ΓF . Cependant, pour σ proche de la section nulle et pour f' proche de f , la section $S_{f'}^0(\sigma)$ ne dépend de σ que sur un compact $K' \subset L$. Autrement dit, pour toute application f' proche de f et tout couple de sections $(\sigma, \sigma') \in \Gamma F^2$ proches de la section nulle et dont les restrictions à K' sont égales, la section $S_{f'}^0(\sigma)$ est égale à $S_{f'}^0(\sigma')$. On considère alors un voisinage compact C de K' dans L . On va travailler avec l'espace de Banach $\Gamma_C F$.

On fixe $x_0 \in K$ et (U_1, ϕ) une carte de $\mathcal{L}|_V$ d'un voisinage de ce point inclus dans W , telle que si ϕ_1 et ϕ_2 sont les coordonnées de ϕ , on a :

$$\phi : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^d \times T \quad \text{et} \quad \phi_1(x_0) = 0$$

On suppose que U_1 est assez petit pour que F soit trivial au-dessus d'un voisinage relativement compact de $\text{adh}(U_1)$ et d'un voisinage relativement compact U_2 de $\text{adh}(f^*(U_1))$. On fera les identifications suivantes :

$$\pi^{-1}(U_1) \cong U_1 \times \mathbb{R}^{n-d}, \quad \pi^{-1}(U_2) \cong U_2 \times \mathbb{R}^{n-d}$$

Soit p_2 la projection de $U_2 \times \mathbb{R}^{n-d}$ sur \mathbb{R}^{n-d} .

On note par $C^0(T, \mathbb{R}^{n-d})$ l'espace vectoriel des applications continues et bornées de T dans \mathbb{R}^{n-d} qui, muni de la norme uniforme, est un espace de Banach. Pour toute application f' proche de f , on définit :

$$\begin{aligned} \Psi_{f'} : \Gamma_C F \times \mathbb{R}^d \times C^0(T, \mathbb{R}^{n-d}) &\longrightarrow C^0(T, \mathbb{R}^{n-d}) \\ (\sigma, u, l) &\longmapsto [t \mapsto p_2(v) - p_2 \circ \sigma \circ \pi(v)] \end{aligned}$$

Où $x := \phi^{-1}(u, t)$ et $v := \hat{f}'(x, l(t))$.

L'application Ψ est bien définie sur un voisinage de $(f, 0, 0, 0)$ et mesure la distance entre le rond et le triangle dans la figure 1.2.

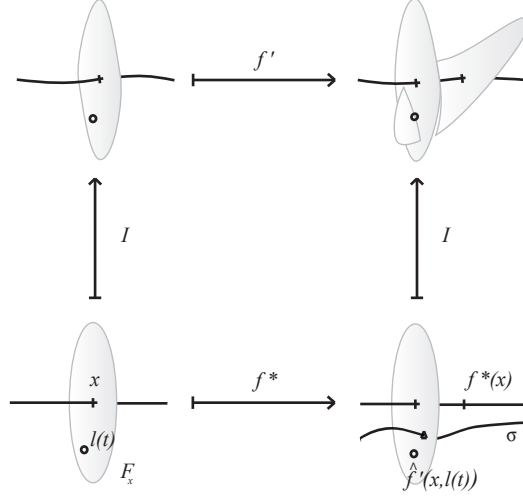


FIG. 1.2 – Valeur de la l'application Ψ

On remarque que $\Psi_{f'}$ est une application de classe C^1 dépendant continûment de f' , car toutes ses dérivées partielles existent et sont continues. De plus $\Psi_f(0, 0, 0)$ est nul. On veut maintenant démontrer que $\partial_l \Psi_f(0, 0, 0)$ est inversible. Avec $x_t := \phi^{-1}(0, t)$, on a :

$$\partial_l \Psi_f(0, 0, 0)(l)(t) = T_{0_{x_t}}(p_2 \circ \hat{f})(l(t))$$

Pour chaque t , $\partial_{F_{x_t}}(p_2 \circ \hat{f})(0_{x_t})$ est une application de F_{x_t} dans $F_{f^*(x_t)}$. Ces fibres s'identifient isométriquement à l'orthogonal de $T_{x_t} \mathcal{L}$ dans $T_{i(x_t)} M$ et à l'orthogonal de $T_{f^*(x_t)} \mathcal{L}$ dans $T_{i \circ f^*(x_t)} M$. Donc par l'inégalité (1.1), $\partial_{F_{x_t}}(p_2 \circ \hat{f})(0_{x_t})$ est inversible pour chaque t et, vue dans des trivialisations de F , son inverse varie continûment avec t . Donc $\partial_l \Psi_f(0, 0, 0)$ est un isomorphisme d'espace de Banach. On peut donc utiliser le théorème des fonctions implicites qui nous donne l'existence de voisinages V_f de f dans $C^1(M, M)$, V_σ^0 de 0_F dans $\Gamma_C F$, V_l de 0 dans $C^0(T, \mathbb{R}^{n-d})$, V_u de 0 dans \mathbb{R}^d et enfin d'une application de classe C^1 dépendant continûment de $f' \in V_f$:

$$\rho_{f'} : V_\sigma^0 \times V_u \xrightarrow{C^1} V_l \quad \text{vérifiant :}$$

$$\rho_f(0, 0, 0) = 0$$

$$\text{et } \forall (f', \sigma, u, l) \in V_f \times V_\sigma^0 \times V_u \times V_l$$

$$\Psi_{f'}(\sigma, u, l) = 0 \iff l = \rho_{f'}(\sigma, u)$$

On observe que pour $f' \in V_f$, $\sigma \in V_\sigma^0$ et $x \in U'_1 := \phi^{-1}(V_u \times T)$:

$$S_{f'}^0(\sigma)(x) = \rho_{f'}(\sigma, \phi_1(x))(\phi_2(x)). \quad (1.3)$$

Par compacité de K , on peut choisir V_f et V_σ^0 pour qu'ils conviennent à un nombre fini d'ouverts U'_1 recouvrant un voisinage $W' \subset W$ de K . On peut supposer W' assez petit pour que (1.1) ait lieu pour tout $u \in (i^*TM/T\mathcal{L})|_{W'} \setminus \{0\}$.

On va maintenant étendre cette nouvelle formulation à un voisinage V_σ de 0_F dans ΓF .

Soit $\rho_\sigma \in Mor(\mathcal{L}, \mathbb{R})$ une fonction valant 1 sur K' et à support dans le compact C .

L'espace ΓF s'envoie continûment dans l'espace de Banach $\Gamma_C F$ par l'application suivante :

$$\sigma \mapsto \tilde{\sigma} := \rho_\sigma \cdot \sigma$$

Soit V_σ la préimage de V_σ^0 par cette application.

Par définition de C , on a pour $\sigma \in V_\sigma$ et $x \in U'_1 := \phi^{-1}(V_u \times T)$

$$S_{f'}^0(\sigma)(x) = S_{f'}^0(\tilde{\sigma})(x) = \rho_{f'}(\tilde{\sigma}, \phi_1(x))(\phi_2(x)) \quad (1.4)$$

Par l'annexe A.1.1, il existe $r \in Mor(\mathcal{L}, [0, 1])$, valant 1 sur un voisinage de K et 0 sur W'^c . On définit alors pour $f' \in V_f$ et $\sigma \in V_\sigma$,

$$S_{f'}(\sigma) := x \mapsto \begin{cases} r(x) \cdot S_{f'}^0(\sigma)(x) & \text{si } x \in W' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme $S_{f'}(\sigma)$ et $S_{f'}^0(\sigma)$ coïncident sur un voisinage de K , il résulte de la définition de $S_{f'}^0(\sigma)$ que la conclusion 2 du lemme est vérifiée.

On veut montrer que $S_{f'}(\sigma)$ appartient à $\Gamma_W F$, pour $f' \in V_f$ et $\sigma \in V_\sigma$. Comme r appartient à $Mor(\mathcal{L}, \mathbb{R})$, il suffit de prouver que $S_{f'}^0(\sigma)$ appartient à $\Gamma(F|_{W'})$. Par transversalité, $S_{f'}^0(\sigma)$ est clairement continue ; il s'agit de démontrer que $S_{f'}^0(\sigma)$ est continûment différentiable tangentiellement aux plaques de \mathcal{L} . Dans un ouvert U'_1 comme précédemment, $S_{f'}^0(\sigma)$ vérifie la formule (1.4) et grâce à la régularité de ρ , on a :

$$\partial_{T_x \mathcal{L}} S_{f'}^0(\sigma) = \partial_u \rho_{f'}(\tilde{\sigma}, \phi_1(x))(\phi_2(x)) \circ \partial_{T_x \mathcal{L}} \phi_1(x),$$

qui est bien définie et varie continûment avec x .

On prouve ainsi la continuité de $(f', \sigma) \mapsto S_{f'}(\sigma)$. La transversalité implique cette continuité pour la topologie C^0 sur ΓF . Comme r appartient à $Mor(\mathcal{L}, \mathbb{R})$, que l'application $\sigma \mapsto \tilde{\sigma}$ est continue et que l'application $f' \mapsto \rho_{f'}$ est continue de V_f dans les applications de classe C^1 , la continuité des dérivées suit.

On définit maintenant f'_σ . Soit p le morphisme de la restriction de $\mathcal{L} \times M$ à un voisinage du graphe de i , à valeur dans \mathcal{L} et égale à

$$p := (x, y) \mapsto \pi \circ I_x^{-1}(y)$$

On note par \exp l'application exponentielle de M associée à sa métrique riemannienne.

Quitte à réduire V_f , de la restriction de $\mathcal{L} \times M$ à un voisinage du graphe de i et à valeur dans M , pour tout $f' \in V_f$, le morphisme suivant est bien défini et dépend continûment de f' :

$$\tilde{f}' := (x, y) \mapsto \begin{cases} \exp_{i \circ f^*(x)}(r(x) \cdot \exp_{i \circ f^*(x)}^{-1} \circ f'(y)) & \text{si } x \in W \\ f(y) & \text{sinon} \end{cases}$$

Quitte à réduire V_f et V_σ , l'application suivante est donc bien définie et continue :

$$\begin{aligned} V_f \times V_\sigma &\rightarrow \text{Mor}_{f^*}(\mathcal{L}|_V, \mathcal{L}) \\ (f', \sigma) &\longmapsto \left[x \mapsto f'_\sigma(x) := p\left(f^*(x), \tilde{f}'(x, \text{Exp} \circ S_{f'}(\sigma)(x))\right) \right] \end{aligned}$$

On remarque que pour $x \in K$, $\sigma \in V_\sigma$ et $f' \in V_f$, on a :

$$\sigma \circ f'_\sigma(x) = \sigma \circ \pi \circ \hat{f}' \circ S_{f'}(\sigma)(x) = \hat{f}' \circ S_{f'}(\sigma)(x).$$

Donc la conclusion 3 du lemme est vérifiée. De plus, la conclusion 1 du lemme est bien obtenue pour nos deux applications.

1.6.3 Action de $S_{f'}$ sur les normes

On va d'abord démontrer que $S_{f'|V_\sigma^0}$ est λ -contractante pour la norme C^0 , pour chaque $f' \in V_f$. Pour cela, il suffit de prouver la λ -contractivité de $S_{f'|V_\sigma^0}^0$ car, pour $\sigma \in V_\sigma^0$, la norme C^0 de $S_{f'}(\sigma)$ est inférieure à $S_{f'}^0(\tilde{\sigma})$. On revient à notre formulation implicite locale de S^0 donnée par l'application Ψ considérée ci-dessus. On rappelle que, pour $x \in U_1'$, $f' \in V_f$ et $\sigma \in V_\sigma^0$, on a par (1.3) :

$$\begin{aligned} S_{f'}^0(\sigma)(x) &= \rho_{f'}(\sigma, u)(t), \quad \text{où } \phi(x) =: (u, t) \\ \text{avec } \partial_\sigma \rho_f(0, u)(t) &= -(\partial_l \Psi_f(0, u, 0)^{-1} \circ \partial_\sigma \Psi_f(0, u, 0))(t) \\ \text{et } \begin{cases} \partial_\sigma \Psi_f(0, u, 0)(\sigma)(t) &= -\sigma \circ f^*(x) \\ \partial_l \Psi_f(0, u, 0)(l)(t) &= T_{0_x}(p_2 \circ \hat{f})(l(t)) = p_F \circ \partial_{F_x} \hat{f}(l(t)) \end{cases} \end{aligned}$$

Avec p_F la projection de l'espace tangent de \mathcal{F} , en la section nulle de F , sur F .

$$\Rightarrow \partial_\sigma S_f^0(0)(x) = (p_F \circ \partial_{F_x} \hat{f}(0_x))^{-1} \circ \sigma \circ f^*(x)$$

On a muni le fibré F d'une norme qui l'identifie isométriquement à $i^*TM/T\mathcal{L}$. donc par l'inégalité (1.1), on a pour $x \in W'$:

$$\|(p_F \circ \partial_{F_x} \hat{f}(0_x))^{-1}\| < \lambda$$

$$\Rightarrow \|\partial_\sigma S_f^0(0)(x)\|_{C^0} < \lambda \cdot \|\sigma \circ f^*(x)\| \leq \lambda \cdot \|\sigma\|_{C^0}$$

Par continuité de $\partial_\sigma S^0$, quitte à réduire V_f et V_σ^0 , pour $f' \in V_f$ et $\sigma \in V_\sigma^0$, on a :

$$\|\partial_\sigma S_{f'}^0(\sigma)\|_{C^0} \leq \lambda \cdot \|\sigma\|_{C^0}.$$

Donc, par le théorème des accroissement finis, $S_{f'}^0|_{V_\sigma^0}$ est bien λ -contractante pour la norme C^0 .

Pour la suite, on note \hat{V}_σ l'intersection de V_σ avec $\Gamma_C F$. On rappelle que C est un voisinage compact de K' .

On va montrer qu'un voisinage $V_f \times V_\sigma$ arbitrairement petit est envoyé par S dans V_σ . Pour cela, il suffit de prouver que l'on peut choisir $V_f \times \hat{V}_\sigma$ arbitrairement petit et envoyé par S dans \hat{V}_σ . En effet, par continuité de S , quitte à restreindre V_f , son produit avec un petit voisinage V_σ^1 de 0 dans ΓF est envoyé par S dans \hat{V}_σ . Donc le produit de V_f avec le voisinage $V_\sigma := \hat{V}_\sigma \cup V_\sigma^1$ est envoyé par S dans \hat{V}_σ .

On revient à notre formulation implicite locale de S^0 donnée sur un ouvert U'_1 par l'application Ψ considérée ci-dessus. On rappelle que F est trivial au-dessus d'un voisinage du compact $\text{adh}(U'_1)$ et d'un voisinage U_2 de $f^*(\text{adh}(U_1))$. On rappelle que l'on note p_2 les deux projections sur \mathbb{R}^{n-d} , provenant des trivialisations du fibré F , au-dessus de U_2 et du voisinage de $\text{adh}(U'_1)$. Pour $i \in \{1, 2\}$, on note ∇^i la connexion sur $\Gamma F|_{U_i}$ qui à $\sigma \in \hat{V}_\sigma$ associe $Tp_2 \circ T\sigma$.

On suppose \hat{V}_σ assez petit pour qu'il soit inclus dans V_σ^0 . On note $o(1)$ une quantité qui est proche de 0, quand f' est proche de f dans V_f et quand $\|\sigma\|_{C^0}$ est petite. On va montrer que, pour $\sigma \in \hat{V}_\sigma$ et $f' \in V_f$, on a :

$$\|\nabla^1 S_{f'}^0|_{U'_1}(\sigma)\|_{C^0} < \lambda \|\nabla^2 \sigma|_{U_2}\|_{C^0} + o(1) \quad (1.5)$$

On fixe $\sigma \in \hat{V}_\sigma$ et $f' \in V_f$. On a alors pour $x \in U'_1$, $(u, t) := \phi(x)$ et en identifiant $T_x \mathcal{L}$ avec l'espace tangent en u de \mathbb{R}^d :

$$\nabla^1 S_{f'}^0(\sigma)(x) = -\partial_l \Psi_{f'}(\sigma, u, \rho_{f'}(\sigma, u))^{-1} \circ \partial_u \Psi_{f'}(\sigma, u, \rho_{f'}(\sigma, u))(t)$$

$$\text{Avec } \begin{cases} \partial_u \Psi_{f'}(\sigma, u, l)(t) = (Tp_2 - \nabla^2 \sigma \circ T\pi) \circ \partial_u \hat{f}'(x, l(t)) \\ \partial_l \Psi_{f'}(\sigma, u, l)(t) = (Tp_2 - \nabla^2 \sigma \circ T\pi) \circ \partial_{F_x} \hat{f}'(x, l(t)) \end{cases}$$

Ainsi, $\nabla^1 S_{f'}^0(\sigma)(x)$ est égal à :

$$-\left((Tp_2 - \nabla^2 \sigma \circ T\pi) \circ \partial_{F_x} \hat{f}'(S_{f'}^0(\sigma)(x)) \right)^{-1} \circ (Tp_2 - \nabla^2 \sigma \circ T\pi) \circ \partial_u \hat{f}'(S_{f'}^0(\sigma)(x)) \quad (1.6)$$

On pose :

$$\begin{aligned} A &:= Tp_2 \circ \partial_{F_x} \hat{f}' \circ S_{f'}^0(\sigma)(x), & B &:= T\pi \circ \partial_{F_x} \hat{f}' \circ S_{f'}^0(\sigma)(x), \\ C &:= Tp_2 \circ \partial_u \hat{f}' \circ S_{f'}^0(\sigma)(x), & D &:= T\pi \circ \partial_u \hat{f}' \circ S_{f'}^0(\sigma)(x). \end{aligned}$$

On a donc :

$$\nabla^1 S_{f'}^0(\sigma)(x) = -(A - \nabla^2 \sigma \circ B)^{-1} \circ (C - \nabla^2 \sigma \circ D) \quad (1.7)$$

Par transversalité, $\|S_{f'}^0(\sigma)\|_{C^0}$ est proche de 0 quand f' est proche de f dans V_f et $\sigma \in \hat{V}_\sigma$ est proche de 0 pour la topologie C^0 .

D'une part, par commutativité du diagramme, quand $S_{f'}^0(\sigma)(x)$ est proche de 0 et quand f' est proche de f dans V_f , l'application C est proche de 0. Enfin, pour $f' \in V_f$, l'application $\partial_l \Psi_{f'}^{-1}$ est bornée sur $(V_\sigma^0 \times V_u \times V_l)$. Donc, pour $\sigma \in V_\sigma$ et $f' \in V_f$, on a :

$$\|(A - \nabla^2 \sigma \circ B)^{-1} \circ C\| = o(1) \quad (1.8)$$

D'autre part, pour V_f et \hat{V}_σ assez petit, $\|D\|$ est proche de $\|Tf^*(x)\|$ et $\|(A - \nabla^2 \sigma \circ B)^{-1}\|$ est proche de $\|(p_F \circ \partial_{F_x} \hat{f}(0_x))^{-1}\|$ qui est égal à $\|[\hat{i}^* T f(x)]^{-1}\|$, par définition de la norme de F . Donc, par l'hypothèse (1.1), quitte à restreindre V_f et \hat{V}_σ , pour $x \in U_1'$, on a :

$$\|(A - \nabla^2 \sigma \circ B)^{-1}\| \cdot \|D\| < \lambda \quad (1.9)$$

et

$$\|(A - \nabla^2 \sigma \circ B)^{-1} \circ \nabla^2 \sigma \circ D\| < \lambda \|\nabla^2 \sigma\|_{C^0} \quad (1.10)$$

Par les équations (1.7), (1.8) et (1.10), on obtient l'équation (1.5). Comme $\nabla^1 S_{f'}(\sigma)$ est égal à $r \cdot \nabla^1 S_{f'}^0(\sigma) + S_{f'}^0(\sigma) \cdot dr$, on a :

$$\|\nabla^1 S_{f'}(\sigma)\| < \lambda \|\nabla^2 \sigma\| + o(1)$$

Par la propriété 1.4.3 de la partie 1.4.3, on a donc :

$$\|\nabla S_{f'}(\sigma)\| < \lambda \|\nabla \sigma\| + o(1)$$

Ainsi, étant donné $\eta_1 > 0$ assez petit, il existe $\eta_0 > 0$ assez petit et V_f un voisinage de f tels que

$$\hat{V}_\sigma := \{\sigma \in \Gamma_{C^0} F; \|\nabla \sigma\|_{C^0} \leq \eta_1, \|\sigma\|_{C^0} \leq \eta_0\}$$

soit envoyé par $S_{f'}$ dans lui-même, pour $f' \in V_f$.

L'image de S étant incluse dans $\Gamma_W F$, cela implique que

$$\{\sigma \in \Gamma_W F; \|\nabla \sigma\|_{C^0} \leq \eta_1, \|\sigma\|_{C^0} \leq \eta_0\}$$

est envoyé dans lui-même par $S_{f'}$, pour tout $f' \in V_f$.

Pour finir de montrer la conclusion 4) du lemme, il suffit de prouver que, pour $f' \in V_f$ et $\delta > 0$, il existe $N > 0$ et un voisinage $V_{f'}$ de f' tel que pour $f'' \in V_{f'}$:

$$\sup_{(\sigma, \sigma') \in S_{f''}^N(V_\sigma')^2} \|\nabla \sigma - \nabla \sigma'\| < \delta$$

Pour cela, on va travailler avec les sections de la grassmannienne de (F, \mathcal{F}) . On remarque que, pour $\sigma \in \Gamma F$, l'application $\nabla\sigma$ est une section du fibré vectoriel normé $T^*\mathcal{L} \otimes F$ au-dessus de L .

Soit G le fibré vectoriel sur F induit par $T^*\mathcal{L} \otimes F$ via l'application π . Cela signifie que la fibre de G en $y \in F$ est égale à $T_{\pi(y)}^*\mathcal{L} \otimes F_{\pi(y)}$. Ce fibré se plonge dans la grassmannienne des d -plans de $T\mathcal{F}$, via l'application qui à $(y, l) \in G \subset F \times (T^*\mathcal{L} \otimes F)$ associe l'espace tangent en y de l'image, contenant y , d'une section σ telle que $(\nabla\sigma) \circ \pi(y) = l$. Via ce plongement, ce fibré est identifié à son image ouverte dans la grassmannienne.

On rappelle que l'on note r la fonction sur L telle que $S = r \cdot S^0$ et dont le support est inclus dans W' . De plus, W' est inclus dans l'intérieur de W . On ne perd pas en généralité à supposer que C est un voisinage compact de $W \cup f^*(W)$.

Soient quatre petits réels $\eta_0 > \eta'_0 > 0$ et $\eta_1 > \eta'_1 > 0$ tels que

$$V'_\sigma := \{\sigma \in \Gamma_W F; \|\nabla\sigma\|_{C^0} \leq \eta'_1, \|\sigma\|_{C^0} \leq \eta'_0\}$$

$$\text{et } \hat{V}_\sigma := \{\sigma \in \Gamma_C F; \|\nabla\sigma\|_{C^0} \leq \eta_1, \|\sigma\|_{C^0} \leq \eta_0\}$$

sont inclus dans V_σ et sont envoyés dans eux-même par $S_{f'}$, pour $f' \in V_f$.

Soient F_1 l'adhérence $\cup_{\sigma \in V'_\sigma} \sigma(W)$ et F_0 l'adhérence de $\cup_{\sigma \in \hat{V}_\sigma} \sigma(C)$. On suppose V_f et η'_0 assez petit pour que l'image de F_1 par chaque \hat{f}' , $f' \in V_f$, soit incluse dans l'intérieur de F_0 . Soit alors F_2 l'adhérence de $\cup_{\sigma \in S_{f'}(V'_\sigma), f' \in V_f} \sigma(W')$. Par λ -contractivité de S_f pour la norme C^0 , quitte à réduire V_f , le compact F_2 est inclus dans l'intérieur de F_1 . De plus, F_0 est compact. Il existe donc une fonction continue r' sur F_0 valant 0 sur $F_0 \setminus F_1$ et 1 sur F_2 .

Soit V_χ la boule fermée de l'espace des sections bornées de $G|_{F_0}$ de centre 0 et de rayon η_1 .

Soit χ_0 la section de $G|_{F_0}$ qui à $y \in F_0$ associe $y \cdot d_{\pi(y)}r$.

Par transversalité, pour tout $f' \in V_f$, pour tout $y \in F_1$ et $\chi \in V_\chi$ (vue comme une section de la grassmannienne), l'espace $Tf'^{-1}(\chi \circ \hat{f}'(y))$ est un espace de dimension d , qui s'identifie à un élément de G_y . On note $f'^{\#}\chi$ la section de $G|_{F_1}$ qui à y associe $Tf'^{-1}(\chi \circ \hat{f}'(y))$.

Soient $y \in F_0$, (f', σ) appartenant au domaine de définition de S et $\chi \in V_\chi$ tels que y appartient à l'image de σ et $\chi(y)$ est égal à $\nabla\sigma \circ \pi(y)$. Pour $f' \in V_f$, en utilisant la définition de $S_{f'}^0$ et en identifiant V_χ à un ouvert de la grassmannienne, on a

$$\nabla S_{f'}^0(\sigma) = f'^{\#}\chi \circ S_{f'}^0(\sigma).$$

De l'expression de S en fonction de S^0 , on déduit alors :

$$\begin{aligned} \nabla S_{f'}(\sigma) &= \begin{cases} (\chi_0 + r \circ \pi \cdot f'^{\#}\chi) \circ S_{f'}^0(\sigma) & \text{sur } W' \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \\ \nabla S_{f'}(\sigma) = x \mapsto &\begin{cases} (\chi_0 + r \circ \pi \cdot f'^{\#}\chi) \left(\frac{S_{f'}(\sigma)(x)}{r(x)} \right) & \text{si } r(x) \neq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Ceci nous invite à considérer l'application :

$$\begin{aligned} \tau_{f'} : V_\chi &\longrightarrow \Gamma^0 G|_{F_0} \\ \chi &\longmapsto y \mapsto \begin{cases} (r' \cdot \chi_0 + r' \cdot r \circ \pi \cdot f'^{\#} \chi)\left(\frac{y}{r \circ \pi(y)}\right) & \text{si } y \in O \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Ici O est l'ensemble des éléments de F_0 où la fonction suivante est définie et ne s'annule pas :

$$y \mapsto (r' \cdot r \circ \pi) \left(\frac{y}{r \circ \pi(y)} \right).$$

Par l'équation (1.11), la définition V_χ et la stabilité de \hat{V}_σ par $S_{f'}$, l'application $\tau_{f'}$ envoie V_χ dans lui-même. On admet pour l'instant que $\tau_{f'}$ est λ -contractante, pour tout $f' \in V_f$.

On va montrer que $\tau_{f'}$ préserve l'espace des sections continues de V_χ , pour tout $f' \in V_f$. Soit $\chi \in V_\chi$ une section continue. Sur O et sur l'intérieur du complémentaire de O , l'application $\tau_{f'}(\chi)$ est clairement continue. On considère donc un élément y appartenant à la frontière de O . Cela implique que $\tau_{f'}(\chi)(y)$ est nul. Soit $(y_n)_n$ une suite de points de $F_0 \cap O$, qui tend vers y . Cela implique que $(z_n := y_n/r \circ \pi(y_n))_n$ est bornée. Donc $r'(y_n/r \circ \pi(y_n)) \cdot \chi_0(y_n)$, qui est égal à $(r' \cdot dr \circ \pi)(y_n/r \circ \pi(y_n)) \cdot y_n$ tend vers 0. De plus, $f'^{\#}(\chi)$ est bornée sur F_1 , donc $\tau_{f'}(\chi)(y_n)$ tend vers 0. Cela prouve que l'espace des sections continues est stable par $\tau_{f'}$.

Comme V_χ est un fermé d'un espace de Banach, l'application $\tau_{f'}$ admet une unique section fixe $\chi_{f'}$, qui est continue.

On note χ_σ la section de V_χ telle que $\chi(y)$ est égal à $\nabla \sigma \circ \pi(y)$, si y appartient à l'image de σ , et égale à 0 sinon.

Il existe $N_0 \geq 0$ tel que, pour tout $f' \in V_f$ et $\sigma \in S_{f'}^{N_0}(V_\sigma)$, l'image de $\sigma|_{W'}$ est incluse dans F_2 . Ainsi, par l'inégalité (1.11), pour $n \geq 0$, on a alors :

$$\nabla S_{f'}^n(\sigma)|_{W'} = \tau_{f'}^n(\chi_\sigma) \circ S_{f'}^n(\sigma)|_{W'}$$

On admet de plus, pour tout $f' \in V_f$ et $\delta > 0$, qu'il existe $N \geq 0$ et un voisinage $V_f' \subset V_f$ de f' , tel que le diamètre de l'union $\cup_{f'' \in V_f'} \tau_{f''}^N(V_\chi)$ est inférieur à $\delta/3$.

Par compacité de F_0 et continuité de $\chi_{f'}$, il existe $\eta > 0$ tel que deux éléments $(y, y') \in F_0^2$, qui sont η -proches, vérifient :

$$d(\chi_{f'}(y), \chi_{f'}(y')) < \frac{\delta}{3}$$

Quitte à considérer N plus grand, par λ -contractivité de $(S_{f''})_{f''}$ pour la topologie C^0 , le diamètre C^0 de $S_{f''}^N(V_\sigma)$ est plus petit que η pour $f' \in V_f'$. Donc, pour $(\sigma, \sigma') \in S^N(V_\sigma)^2$, on a :

$$\|\nabla S_{f''}^N(\sigma) - \nabla S_{f''}^N(\sigma')\| \leq \frac{2\delta}{3} + \|\chi_{f'} \circ S_{f''}^N(\sigma) - \chi_{f'} \circ S_{f''}^N(\sigma')\| \leq \delta$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Il ne nous reste plus qu'à montrer la λ -contractivité de $\tau_{f'}$ et qu'il existe $N \geq 0$ et un voisinage $V'_f \subset V_f$ de f' , tel que le diamètre de l'union $\cup_{f'' \in V'_f} \tau_{f''}^N(V_\chi)$ est inférieur à $\delta/3$. On va commencer par montrer la seconde assertion.

Soit \mathcal{K} le fibré sur F_0 dont la fibre en $y \in F_0$ est l'ensemble des compacts non vides de G_y muni de la distance de Hausdorff. On va montrer par récurrence sur $n \geq 0$, que la section $[\tau_{f'}^n(V_\chi)]$ qui à $x \in F_0$ associe le compact $\cup_{\sigma \in \tau_{f'}^n(V_\chi)} \{\sigma(x)\}$ est une section continue de \mathcal{K} , dépendant continûment de $f' \in V_f$.

Pour $n = 0$, cela résulte de la forme de V_χ . Soit $n \geq 0$, on suppose l'hypothèse de récurrence vérifiée à ce rang. Pour $f' \in V_f$ et $y \in O$, la valeur de la section $[\tau_{f'}^{n+1}(V_\chi)]$ en y est l'image par une application continue du compact $[\tau_{f'}^n(V_\chi)](\hat{f}'(y/r \circ \pi(y)))$ qui, via l'identification issue d'une trivialisaton de G de deux fibres proches de G , dépend continûment de y et f' . Comme $\tau_{f'}$ est une application continue qui est nulle sur les G -fibres $F_0 \setminus O$, la section $\tau_{f'}^{n+1}(V_\chi)$ est continue et dépend continûment de f' .

Soient $f' \in V_f$ et $\delta > 0$. Par λ -contractivité de $\tau_{f'}$, il existe $N \geq 0$ tel que $\tau_{f'}^N(V_\chi)$ a un diamètre inférieur à $\delta/12$. Par continuité, il existe un voisinage $V_{f'}$ de f' , tel que, pour $f'' \in V_{f'}$ et $y \in F_0$, le compact $[\tau_{f''}^N(V_\chi)](y)$ est dans le $\delta/12$ -voisinage de $[\tau_{f'}^N(V_\chi)](y)$. Ainsi le diamètre de l'union $\cup_{f'' \in V_{f'}} \tau_{f''}^N(C)$ est inférieur à $\delta/3$.

Pour montrer la λ -contractivité de $\tau_{f'}$, il suffit de montrer que, pour tout $(\chi, \chi') \in V_\chi^2$, $f' \in V_f$ et $y \in O$, on a

$$\|\tau_{f'}(\chi)(y) - \tau_{f'}(\chi')(y)\| \leq \lambda \|\chi - \chi'\|$$

On pose $y' := y/r \circ \pi(y)$, qui appartient à F_1 . Par définition de V_χ et de F_1 , quitte à réduire V_f , il existe deux sections $\sigma, \sigma' \in \hat{V}_\sigma$ telles que leur image contient $\hat{f}'(y')$. Il suffit donc de montrer que l'on a :

$$\|(\nabla S_{f'}(\sigma) - \nabla S_{f'}(\sigma')) \circ \pi(y)\| \leq \lambda \|(\nabla \sigma - \nabla \sigma') \circ \pi \circ \hat{f}'(y')\|$$

On revient, comme précédemment, à des ouverts distingués U'_1 et U_2 , avec $\pi^{-1}(U'_1)$ qui contient y . On a $\sigma \circ \pi \circ \hat{f}'(y') = \hat{f}'(y') = \sigma' \circ \pi \circ \hat{f}'(y')$ et, par définition de $S_{f'}$, les points $S_{f'}(\sigma) \circ \pi(y)$, y et $S_{f'}(\sigma') \circ \pi(y)$ sont égaux. Par la propriété 1.4.3, il suffit donc de montrer que

$$\|(\nabla^1 S_{f'}(\sigma) - \nabla^1 S_{f'}(\sigma')) \circ \pi(y)\| \leq \lambda \|(\nabla^2 \sigma - \nabla^2 \sigma') \circ \pi \circ \hat{f}'(y')\| \quad (1.12)$$

On pose à nouveau $A := Tp_2 \circ \partial_{F_x} \hat{f}'(y')$, $B := T\pi \circ \partial_{F_x} \hat{f}'(y')$, $C := Tp_2 \circ \partial_u \hat{f}'(y')$ et $D := T\pi \circ \partial_u \hat{f}'(y')$.

L'équation (1.7) affirme que :

$$\begin{cases} \nabla^1 S_{f'}(\sigma) \circ \pi(y) = -\left(A - \nabla^2 \sigma \circ B\right)^{-1} \circ (C - \nabla^2 \sigma \circ D) \\ \nabla^1 S_{f'}(\sigma') \circ \pi(y) = -\left(A - \nabla^2 \sigma' \circ B\right)^{-1} \circ (C - \nabla^2 \sigma' \circ D) \end{cases}$$

Donc $\|\nabla^1 S_{f'}(\sigma) \circ \pi(y) - \nabla^1 S_{f'}(\sigma') \circ \pi(y)\|$ est plus petit que

$$\left\| (A - \nabla^2 \sigma \circ B)^{-1} \circ (\nabla^2 \sigma' - \nabla^2 \sigma) \circ D \right\| + \|(A - \nabla^2 \sigma B)^{-1} - (A - \nabla^2 \sigma' \circ B)^{-1}\| \cdot \|C - \nabla^2 \sigma' \circ D\|$$

Par l'équation (1.9), le premier terme de cette dernière somme est inférieur à $\lambda' \|(\nabla^2 \sigma - \nabla^2 \sigma') \circ \pi \circ \hat{f}'(y')\|$, avec $\lambda' < \lambda$. On a déjà remarqué que $\|C\|$ est petit quand \hat{V}_σ et V_f ont un petit diamètre, ainsi que $\|D\|$ est bornée. Donc, pour V_f et \hat{V}_σ petits, $\|C - \nabla^2 \sigma' \circ D\|$ est petit. Enfin, par le théorème des accroissements finis, $\|(A - \nabla^2 \sigma \circ B)^{-1} - (A - \nabla^2 \sigma' \circ B)^{-1}\|$ est dominée par $\|(\nabla^2 \sigma - \nabla^2 \sigma') \circ \pi \circ \hat{f}'(y')\|$. Donc, on a bien l'équation (1.12) qui implique la λ -contractivité de $\tau_{f'}$, pour $f' \in V_f$.

□

Persistence de stratifications de laminations

Sommaire

2.1 Géométrie sur les stratifications de laminations	43
2.1.1 Stratifications de laminations	43
2.1.2 Structure de treillis de laminations sur un espace stratifié	48
2.1.3 Des structures géométriques sur certains espaces stratifiés	58
2.2 Persistence des stratifications de laminations normalement dilatées	61
2.2.1 Persistence des stratifications de laminations normalement dilatées de façon contrôlée	61
2.2.2 Un exemple de stratification normalement dilatée non topologiquement persistante	62
2.3 Applications du théorème de persistence 2.1	65
2.3.1 Prolongement de la continuation hyperbolique d'un compact répulsif invariant	65
2.3.2 Produit de stratifications de laminations	67
2.3.3 Exemples de stratifications de laminations persistantes en dynamique produit.	68

2.1 Géométrie sur les stratifications de laminations

2.1.1 Stratifications de laminations

Le concept de stratification intervient dans plusieurs domaines mathématiques. Sa définition est sujette à variation d'un domaine à l'autre et, au sein d'un même domaine, d'un auteur à l'autre. L'une des définitions les plus générales d'une stratification a été formulée par J. Mather

[17]⁶ :

Une *stratification* d'un espace métrique séparable A est une partition Σ de A en sous-ensembles, appelés *strates*, vérifiant les conditions suivantes :

1. Chaque strate est localement fermée, *i.e.*, c'est l'intersection d'un ouvert et d'un fermé de A .
2. La partition Σ est localement finie.
3. (Condition de frontière) Pour tout couple de strates $(X, Y) \in \Sigma^2$ vérifiant $Y \cap \text{adh}(X) \neq \emptyset$, on a $Y \subset \text{adh}(X)$. On note alors $Y \leq X$.

Le couple $\chi = (A, \Sigma)$ est appelé *l'espace stratifié de support A et de stratification Σ* .

Propriété 2.1.1. *La relation \leq est une relation d'ordre partiel sur Σ .*

Preuve

La réflexivité et la transitivité ne posent aucune difficulté. Pour montrer l'antisymétrie, on choisit deux strates $(X, Y) \in \Sigma$ vérifiant $X \leq Y$ et $Y \leq X$. Cela signifie que $X \subset \text{adh}(Y)$ et $Y \subset \text{adh}(X)$, ainsi $\text{adh}(X)$ est égale à $\text{adh}(Y)$. Comme X et Y sont localement fermées, ces deux strates s'intersectent forcément et comme Σ est une partition de A , ces deux strates sont égales.

Stratifications analytiques et différentiables Parmi les domaines où interviennent les stratifications, on peut citer la géométrie analytique et la géométrie différentielle. On va préciser nos définitions de stratification dans chacun de ces domaines :

- En géométrie analytique, on rappelle qu'une variété analytique singulière est l'ensemble des zéros d'une applications analytique de \mathbb{C}^n dans \mathbb{C}^m .

Dans ce travail, on appellera *espace stratifié analytique* un espace stratifié dont le support est une variété analytique (singulière) et dont les strates sont des variétés analytiques non singulières de dimension constante qui vérifient :

$$\forall (X, Y) \in \Sigma^2, \quad \text{si } X \leq Y \text{ alors } \dim(X) \leq \dim(Y)$$

La stratification d'un tel espace revient alors à la définition de H. Whitney [31] des stratifications, dans ce contexte de géométrie analytique.

- En géométrie différentielle, suivant les travaux de J. Mather [17] et R. Thom [28], C. Murolo et D. Trotman [19] définissent une stratification comme étant un espace stratifié dont les strates, munies de la topologie induite par le support, sont des variétés connexes et vérifiant :

$$\forall (X, Y) \in \Sigma^2, \quad \text{si } X < Y \text{ alors } \dim(X) < \dim(Y)$$

⁶Dans l'article de Mather, l'objet de la définition est appelé préstratification. Cela correspond en fait à la stratification telle qu'elle est entendue ici.

Dans ce travail, on appellera ce type d'espace stratifié un *espace stratifié différentiable*.

Un tel objet intervient notamment dans l'étude des singularités ou des zéros d'une application générique ([28], [17]).

De façon similaire, on introduit la notion d'*espace stratifié laminaire* : un espace stratifié (A, Σ) dont les strates, munies de la topologie induite par A , sont des laminations et vérifient :

$$\forall (X, Y) \in \Sigma^2, \quad \text{si } X \leq Y \text{ alors } \dim(X) \leq \dim(Y)$$

Comme un espace stratifié analytique ou différentiable est un espace stratifié laminaire, par abus de langage, *un espace stratifié désignera un espace stratifié laminaire*, pour toute la suite.

En général, les espaces stratifiés différentiables sont utilisés avec des conditions de régularité supplémentaire : soit en les supposant plongés, avec une certaine régularité, dans une variété ; soit en les munissant d'une structure géométrique plus fine.

On va commencer par définir les plongements, ce qui permettra d'introduire quelques exemples d'espaces stratifiés. Dans la partie 2.1.2 sera introduite une structure géométrique, le treillis de laminations, existant sur certains espaces stratifiés.

Un *plongement* p d'un espace stratifié (A, Σ) dans une variété est un homéomorphisme sur son image qui, restreint à chaque strate, est un plongement de laminations. On dira que le plongement p est a -régulier si pour $(X, Y) \in \Sigma^2$ tel que $X < Y$ et pour $(x_n)_n \in Y^{\mathbb{N}}$ tendant vers $x \in X$, l'espace $Tp(T_x X)$ est inclus dans toute valeur d'adhérence de $Tp(T_{x_n} Y)$.

Quand un espace stratifié est plongé, on identifiera souvent l'espace stratifié et son image par le plongement. Si ce dernier est a -régulier, on dira par abus de langage que *la stratification (de laminations) est a -régulière*.

La définition de la a -régularité est due à H. Whitney, qui a démontré que toute variété analytique singulière supporte une stratification analytique a -régulière [32]. Cette définition est aussi tout à fait standard dans l'étude des espaces stratifiés différentiables.

Exemples de stratifications de laminations

1. Étant donnée une sous-variété à bord, les composantes connexes de son bord et de son intérieur munis de leur structure de variété forment une stratification (différentiable) (a -régulière).

2. L'ensemble $\{0\} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \{0\}$ supporte une stratification (différentiable) à deux strates, dont la première est $\{0\}$ et la deuxième de dimension un est $\{0\} \times \mathbb{R}^* \cup \mathbb{R}^* \times \{0\}$. Cette stratification est canoniquement plongée dans \mathbb{R}^2 (a -régulièrement).
3. Si M est une variété, K un compact d'intérieur vide de M , alors K muni de la structure de lamination de dimension 0 et $M \setminus K$ muni de la structure de variété induite par M , forment une stratification de laminations (a -régulière) à deux strates.
4. Soient respectivement \mathbb{S}^1 et \mathbb{D} , le cercle unité et le disque unité ouvert du plan complexe \mathbb{C} . Soit A le sous-espace topologique $adh(\mathbb{D}) \times \{1\} \cup \{1\} \times \mathbb{S}^1$ de \mathbb{C}^2 , que l'on stratifie en une lamination de dimension 2 supportée par $\mathbb{D} \times \{1\}$, ainsi qu'en trois laminations de dimension 0 supportées par $\mathbb{S}^1 \times \{1\} \setminus \{(1, 1)\}$, $\{1\} \times \mathbb{S}^1 \setminus \{(1, 1)\}$ et $\{(1, 1)\}$. L'espace stratifié obtenue est canoniquement plongée (a -régulièrement) dans \mathbb{C}^2 .
5. Soit $f \in C^1(M, M)$ est un difféomorphisme axiome A vérifiant la condition de transversalité forte. Si l'on note $(\Omega_i)_i$ la décomposition spectrale de l'ensemble non errant Ω , alors $(W^s(\Omega_i))_i$ forme une stratification de laminations (a -régulière) sur M . On ne fera pas la preuve ici, mais c'est une conséquence de l'existence d'une famille compatible de disques instables ([rob] thm. 5.1).
6. Soient (A_1, Σ_1) et (A_2, Σ_2) deux espaces stratifiés. Soit $(A_1 \times A_2, \Sigma_1 \times \Sigma_2)$ l'espace stratifié de support $A_1 \times A_2$ et dont les strates sont

$$\Sigma_1 \times \Sigma_2 = \{X_1 \times X_2 ; X_1 \in \Sigma_1 \text{ et } X_2 \in \Sigma_2\}$$

La vérification que $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ définit un espace stratifié est élémentaire :

Pour tout $(X_1 \times X_2, Y_1 \times Y_2) \in (\Sigma_1 \times \Sigma_2)^2$,

$$X_1 \times X_2 \cap adh(Y_1 \times Y_2) \neq \emptyset \Leftrightarrow X_1 \cap adh(Y_1) \neq \emptyset \text{ et } X_2 \cap adh(Y_2) \neq \emptyset$$

donc pour chaque $i \in \{1, 2\}$, on a $X_i \subset adh(Y_i)$ et $dim(X_i) \leq dim(Y_i)$. ainsi $X_1 \times X_2 \subset adh(Y_1 \times Y_2)$ et $dim(X_1 \times X_2) \leq dim(Y_1 \times Y_2)$.

On vérifie aussi que, si p_1 et p_2 sont des plongements de (A_1, Σ_1) et (A_2, Σ_2) dans M_1 et M_2 respectivement, l'application $p := (p_1, p_2)$ est un plongement de $(A_1 \times A_2, \Sigma_1 \times \Sigma_2)$ dans $M_1 \times M_2$. Ce plongement p est a -régulier si et seulement si p_1 et p_2 le sont.

7. Soient (A, Σ) un espace stratifié et U un ouvert de A . L'ensemble des strates $X \in \Sigma$, qui rencontrent U , restreintes à $U \cap X$ forme une stratification de laminations sur U , que l'on note $\Sigma|_U$.

Morphismes stratifiés Soient (A, Σ) et (A', Σ') deux espaces stratifiés.

Une application continue f de A dans A' est un *morphisme stratifié* (resp. une *immersion stratifiée*) si chaque strate $X \in \Sigma$ est envoyée dans une strate $X' \in \Sigma'$ et la restriction $f|_X$ est un morphisme (resp. une immersion) de laminations de X dans X' . On dira aussi que f est un morphisme (resp. une immersion) de (A, Σ) dans (A', Σ') .

Dans le cas particulier des espaces stratifiés différentiables, on retrouve la définition usuelle de morphisme stratifié.

Un *endomorphisme d'un espace stratifié* (A, Σ) est un morphisme stratifié qui préserve chaque strate.

On notera respectivement $Mor(\Sigma, \Sigma')$, $Im(\Sigma, \Sigma')$ et $End(\Sigma)$ l'ensemble des morphismes, immersions et endomorphismes stratifiés .

Deux morphismes stratifiés f et f' seront *équivalents* s'ils envoient chaque strate $X \in \Sigma$ dans une même strate $X' \in \Sigma'$ et leurs restrictions à X sont équivalentes en tant que morphismes de laminations de X dans X' . On note $Mor_f(\Sigma, \Sigma')$ la classe d'équivalence de f que l'on munit de la topologie induite par celle du produit :

$$C^0(A, A') \times \prod_{X \in \Sigma, f(X) \subset X' \in \Sigma'} Mor_{f|_X}(X, X')$$

Dilatation normale d'une stratification immergée Soit i une immersion d'un espace stratifié (A, Σ) dans une variété riemannienne (M, g) . Soient $f \in C^1(M, M)$ et $f^* \in End(\Sigma)$ tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ M & \rightarrow & M \\ \uparrow i & & \uparrow i \\ A & \rightarrow & A \\ & f^* & \end{array}$$

Ainsi f préserve l'immersion de chacune des strates de Σ .

On dira que f *dilate normalement l'espace stratifié immergé* (A, Σ) si f dilate normalement l'immersion de chaque strate de Σ .

Persistence d'une stratification de laminations plongée On suppose de plus que i est un plongement. On dira que *la stratification de laminations Σ est persistante* si, pour tout C^1 -

endomorphisme f' proche de f , il existe un plongement stratifié i' de (A, Σ) dans M et un endomorphisme $f'^* \in \text{End}_{f^*}(\Sigma)$, tous les deux proches de i et f^* respectivement, et tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} & f' & \\ M & \rightarrow & M \\ \uparrow i' & & \uparrow i' \\ A & \rightarrow & A \\ & f'^* & \end{array}$$

On suppose de surcroît que i est un plongement a -régulier. Si le plongement i' , pour tout C^1 -endomorphisme f' proche de f , est a -régulier, on dira que la stratification a -régulière Σ est persistante.

Le but principal de ce travail est de montrer la persistance de certaines stratifications a -régulières normalement dilatées. Or la régularité de ces stratifications n'est pas suffisante pour garantir leur stabilité, même dans le cas d'une stratification différentiable compacte (on donnera un contre exemple dans la partie 2.2.2). On va introduire une condition de régularité intrinsèque plus forte : supporter une structure de treillis. Pour l'étude des espaces stratifiés différentiables, d'autres auteurs avaient considéré d'autres conditions intrinsèques ([17], [28], [19]).

2.1.2 Structure de treillis de laminations sur un espace stratifié

Cette structure nécessite les définitions qui suivent :

Cohérence et compatibilité de deux laminations Soient L_1 et L_2 deux parties d'un espace métrique L , munies respectivement des structures de laminations \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 . Supposons, par exemple, que la dimension de \mathcal{L}_1 est inférieure ou égale à la dimension de \mathcal{L}_2 .

Les laminations \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 seront dites *cohérentes* si pour $x \in L_1 \cap L_2$, il existe une plaque de \mathcal{L}_1 contenant x incluse dans une plaque de \mathcal{L}_2 .

Les laminations \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 seront dites *compatibles* si pour $x \in L_1 \cap L_2$, la feuille de \mathcal{L}_1 contenant x est incluse dans une feuille de \mathcal{L}_2 .

Feuilletage d'une lamination Soient (L_1, \mathcal{L}_1) et (L_2, \mathcal{L}_2) deux laminations de dimensions respectives $d_1 \leq d_2$. On dira que \mathcal{L}_1 est un feuilletage de \mathcal{L}_2 si $L_1 = L_2$ et si, pour $x \in L_2$, il existe un voisinage U de x et une carte (U, ϕ) qui appartient à \mathcal{L}_1 et à \mathcal{L}_2 . Autrement dit, il existe des ouverts U_1 et U_2 de \mathbb{R}^{d_1} et $\mathbb{R}^{d_2-d_1}$ respectivement, tels que :

$$\left(\phi : U \rightarrow U_1 \times \underbrace{U_2 \times \widehat{T_2}}_{\text{espace transverse de } \mathcal{L}_1} \right) \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$$

espace transverse de \mathcal{L}_2

On remarque que les laminations \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 sont alors cohérentes.

Exemples de feuilletages de laminations

- Si dans cette définition \mathcal{L}_2 est une variété différentiable, alors \mathcal{L}_1 est un feuilletage C^1 (classique) de cette variété de dimension d_1 .
- Soit K un espace métrique localement compact, $L_1 = L_2 = \mathbb{R}^{d_2} \times K$ et \mathcal{L}_2 la structure de lamination de dimension d_2 canonique sur L_2 . Soient $d_1 \leq d_2$, $\phi \in C^0(K, \text{Diff}^1(\mathbb{R}^{d_2}, \mathbb{R}^{d_2}))$ et \mathcal{L}_1 la structure de lamination sur L_1 dont les feuilles sont

$$\{\phi(k)(\mathbb{R}^{d_1} \times \{t\}) \times \{k\}, (k, t) \in K \times \mathbb{R}^{d_2-d_1}\}$$

alors \mathcal{L}_1 est un feuilletage de \mathcal{L}_2 .

Propriété 2.1.2. *Soient M une variété et (L, \mathcal{L}) une lamination plongée dans M identifiée à son image. Soit \mathcal{F} un feuilletage C^1 d'un voisinage de L dans M dont les feuilles sont transverses aux feuilles de \mathcal{L} . Alors la lamination dont chaque plaque est l'intersection d'une plaque de \mathcal{L} avec une plaque de \mathcal{F} est un feuilletage de \mathcal{L} . On notera $\mathcal{L} \pitchfork \mathcal{F}$ ce feuilletage de lamination.*

Preuve

L'énoncé étant une propriété locale, il suffit de le démontrer au voisinage de tout point $x \in L$. Via une carte du feuilletage \mathcal{F} , un voisinage U de x dans M s'identifie à \mathbb{R}^n , et \mathcal{F} s'identifie au feuilletage de dimension d associé à la décomposition $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ l'espace correspondant à $T_x \mathcal{L}$. Par transversalité, il existe un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ supplémentaire à E dans \mathbb{R}^n . Quitte à réduire U , l'intersection des feuilles de \mathcal{L} avec U s'identifie à une famille continue de graphes disjoints d'applications C^1 de E dans F . Soit $(\rho_t)_{t \in T}$ une telle famille d'applications. On remarque que l'application suivante :

$$\begin{aligned} \phi_0 : \mathbb{R}^n \cap L &\rightarrow E \times T \\ (u + \rho_t(u)) &\mapsto (u, t) \end{aligned}$$

est une carte de \mathcal{L} . Soit d' la dimension de \mathcal{L} et donc de E . Pour $(e, t) \in E \times T$, la préimage par ϕ_0 de $(E \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\}) + e) \times \{t\}$ est l'intersection d'une plaque de \mathcal{F} avec une plaque de \mathcal{L} . En effet cette variété est de dimension $d + d' - n$, incluse dans la plaque $\phi_0^{-1}(E \times \{t\})$ de \mathcal{L} et inclus dans la plaque $\mathbb{R}^d \times \{0\}^{n-d} + e$ de \mathcal{F} car $\rho_t(E) \subset F \subset \mathbb{R}^d \times \{0\}$.

Soit enfin ψ un isomorphisme linéaire de E sur $\mathbb{R}^{d'}$ qui envoie $E \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$ sur $\mathbb{R}^{d'+d-n} \times \{0\}$. Soit

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^n \cap L &\rightarrow \mathbb{R}^{d'+d-n} \times \mathbb{R}^{n-d} \times T \\ (u, \rho_t(u)) &\mapsto (\psi(u), t) \end{aligned}$$

ϕ est une carte de \mathcal{L} et de $\mathcal{L} \cap \mathcal{F}$. La lamination $\mathcal{L} \pitchfork \mathcal{F}$ est donc un feuilletage de la lamination \mathcal{L} .

Voisinage tubulaire Soient (A, Σ) un espace stratifié et X une strate de Σ . Un *voisinage tubulaire* de X est une lamination (L_X, \mathcal{L}_X) telle que :

- L_X est un voisinage ouvert de X inclus dans les strates supérieures à X ,
- la strate X est la restriction de \mathcal{L}_X à une partie \mathcal{L}_X -admissible,
- la lamination (L_X, \mathcal{L}_X) est cohérente avec les strates de Σ .

Structure de treillis Une *structure de treillis (de laminations)* sur un espace stratifié (A, Σ) est la donnée d'une famille localement finie de voisinages tubulaires $\mathcal{T} = (L_X, \mathcal{L}_X)_{X \in \Sigma}$ vérifiant, pour $X \leq Y$, que $(L_X \cap L_Y, \mathcal{L}_{X|L_X \cap L_Y})$ est un feuilletage de $(L_X \cap L_Y, \mathcal{L}_{Y|L_X \cap L_Y})$.

Remarques

- Si (A, Σ) est une variété M , alors M est aussi l'unique structure de treillis sur l'espace stratifié (A, Σ) .
- Étant donnée une structure de treillis sur un espace stratifié (A, Σ) , la condition de feuilletage implique que les voisinages tubulaires sont cohérents entre eux.

La propriété suivante implique en particulier qu'un voisinage tubulaire d'une stratification est compatibles avec toutes les strates.

Propriété 2.1.3. *Soient (A, Σ) un espace stratifié et \mathcal{L} une structure de lamination sur une partie L incluse dans l'union des strates de Σ de dimension supérieure à celle de \mathcal{L} . Si la lamination (L, \mathcal{L}) et les strates de Σ sont cohérentes, pour tout $X \in \Sigma$, l'ensemble $X \cap L$ est \mathcal{L} -admissible.*

Preuve

Par cohérence, les plaques de \mathcal{L} rencontrent les feuilles des strates de Σ en des parties ouvertes des feuilles de \mathcal{L} . Chaque plaque connexe ne rencontre donc qu'une de ces feuilles. Ainsi chaque feuille de \mathcal{L} est incluse dans une feuille d'une strate. Donc $X \cap L$ est \mathcal{L} -saturé. Comme l'intersection de deux espaces localement compacts est localement compact, $X \cap L$ est \mathcal{L} -admissible.

Propriété 2.1.4. *Si (A, Σ) un espace stratifié supportant une structure de treillis \mathcal{T} , alors A est localement compact.*

Preuve

Le support des voisinages tubulaires de \mathcal{T} est un recouvrement ouvert de A . Comme chacun de ces supports est localement compact, il en est de même pour A .

Étant données une variété M et une structure de treillis \mathcal{T} sur un espace stratifié (A, Σ) , un plongement p de (A, Σ) dans M est \mathcal{T} -contrôlé si c'est un homéomorphisme sur son image tel que, pour $X \in \Sigma$, la restriction $p|_{L_X}$ appartient à $Mor(\mathcal{L}_X, M)$.

Propriété 2.1.5. *Soient M une variété et (A, Σ) un espace stratifié supportant une structure de treillis \mathcal{T} . Alors tout plongement \mathcal{T} -contrôlé p est un plongement stratifié a -régulier.*

Preuve

Soient $(X, Y) \in \Sigma^2$ avec $X \leq Y$, $x \in X \cap \text{adh}(Y)$ et $(x_n)_n \in Y^{\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers x . Pour n assez grand, x_n appartient à L_X et $Tp(T_{x_n}Y)$ contient $Tp(T_{x_n}\mathcal{L}_X)$ qui tend vers $Tp(T_xX)$.

Comme nous le verrons dans les parties 2.1.3 et 2.2.2, il existe des espaces stratifiés qui n'admettent pas de structure de treillis. Dans la partie 2.3, nous verrons cependant des conditions qui garantissent l'existence d'une telle structure.

Exemples d'espace stratifié admettant une structure de treillis

0. On considère la stratification (X_0, X_1, X_2) sur un carré formée par sa décomposition simpliciale : la lamination X_0 est formée des sommets du carré, la lamination X_1 est de dimension 1 et supportée par les arêtes du carré, enfin la lamination X_2 est de dimension 2 et supportée par l'intérieur du carré.

Soit \mathcal{L}_{X_0} la lamination de dimension 0 sur 4 petits voisinages dans le carré des sommets de celui ci. Soit \mathcal{L}_{X_1} la lamination de dimension 1 sur l'union disjointe de voisinages de chaque arête du carré, dont les feuilles sont parallèles à l'arête associée au voisinage qui la contient.

Alors les laminations $((L_{X_0}, \mathcal{L}_{X_0}), (L_1, \mathcal{L}_1), X_2)$ forment une structure de treillis de laminations sur (A, Σ) , que l'on illustre figure 2.1.

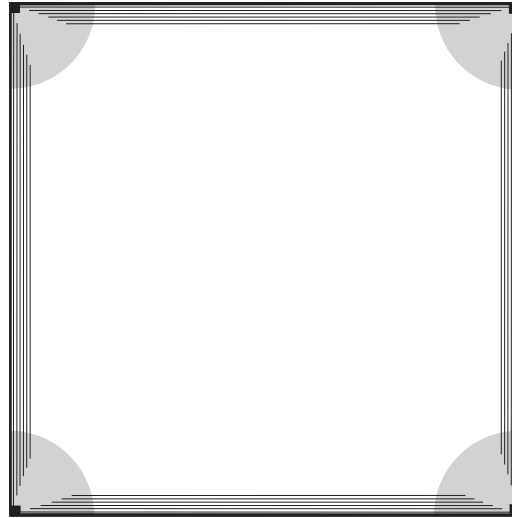


FIG. 2.1 – Une structure de treillis

1. On considère le cylindre plein et fermé C de \mathbb{R}^3 défini par

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } z \in [-1, 1]\}$$

Ce cylindre C supporte la stratification de laminations Σ constituée de :

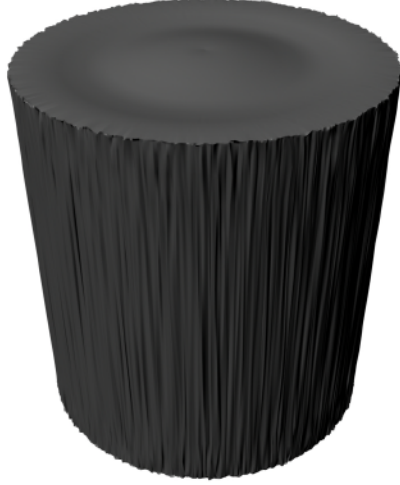


FIG. 2.2 – Plongement contrôlé d’une stratification exotique sur le cylindre

- une lamination X_0 de dimension 0 supportée par $\mathbb{S}^1 \times \{-1, 1\}$
- une lamination X_1 de dimension 1 supportée par $\mathbb{S}^1 \times]-1, 1[$ et dont les feuilles sont verticales
- une lamination X_2 de dimension 2 supportée par $\mathbb{D} \times \{-1, 1\}$
- une lamination X_3 de dimension 3 supportée par l’intérieur de C .

Cette stratification de laminations est canoniquement plongée a -régulièrement dans \mathbb{R}^3 .

On va maintenant montrer que cet espace stratifié admet une structure de treillis. Soit L_{X_0} un ouvert de C contenant X_0 . On munit L_{X_0} de sa structure de lamination de dimension 0. Soient L_{X_1} et L_{X_2} des ouverts disjoints de C contenant respectivement X_1 et X_2 . On munit L_{X_1} de la structure de lamination \mathcal{L}_{X_1} de dimension 1 dont les feuilles sont verticales. On munit L_{X_2} de la structure de lamination \mathcal{L}_{X_2} dont les feuilles sont horizontales. Soit enfin $\mathcal{L}_{X_3} := X_3$ la structure de lamination de dimension 3 sur l’intérieur de C . On remarque que $\mathcal{T} := (L_{X_i}, \mathcal{L}_{X_i})_{i=0}^3$ est une structure de treillis sur notre espace stratifié (C, Σ) .

La figure 2.1 représente aussi une coupe d’un de ces treillis selon un plan contenant l’axe de révolution (O_z) . Dans la figure 2.2, on a représenté un plongement \mathcal{T} -contrôlé de cet espace stratifié dans \mathbb{R}^3 , différent de l’inclusion canonique.

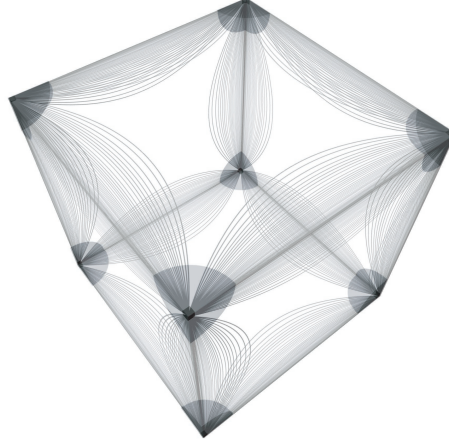


FIG. 2.3 – Une structure de treillis sur un cube

2. Avec les conventions de la figure 2.1, la figure 2.3 donne une structure de treillis sur la stratification canonique d'un cube, c'est à dire sa décomposition en sommets, arrêtes et faces. Un plongement contrôlé par ce treillis dans \mathbb{R}^3 est représenté dans la figure 2.4.

3. Soient \mathcal{T} une structure de treillis sur un espace stratifié (A, Σ) et U un ouvert de A . Alors la famille de toutes les laminations $(L, \mathcal{L}) \in \mathcal{T}$ restreinte à U forme une structure de treillis sur $(U, \Sigma|_U)$, que l'on note $\mathcal{T}|_U$.

4. Soient (A, Σ) et (A', Σ') deux espaces stratifiés. Si chacun de ces espaces admet une structure de treillis, il existe alors une structure de treillis sur l'espace stratifié produit $(A \times A', \Sigma \times \Sigma')$.

Preuve

On a déjà vu, dans la partie 2.1.1, que $(A, \Sigma) \times (A', \Sigma')$ est un espace stratifié et que l'ordre partiel qu'il induit sur $\Sigma \times \Sigma'$ vérifie :

$$\forall X \times X' \in \Sigma \times \Sigma', \forall Y \times Y' \in \Sigma \times \Sigma', \quad X \times X' \leq Y \times Y' \Leftrightarrow (X \leq Y \text{ et } X' \leq Y')$$

On applique alors la propriété suivante pour l'espace stratifié $(A \times A', \Sigma \times \Sigma')$ muni de cet ordre partiel.

Lemme 2.1.6. *Pour tout espace stratifié (A, Σ) , il existe une famille d'ouverts $(W_X)_{X \in \Sigma}$ telle que X soit inclus dans W_X et que les ouverts W_X et W_Y s'intersectent si et seulement si X et Y sont comparables.*

Preuve du lemme 2.1.6

Soient $X \in \Sigma$ et χ la partie de Σ qui n'est pas comparable à X . On a alors

$$X \cap \text{adh}\left(\bigcup_{Y \in \chi} Y\right) = X \cap \left(\bigcup_{Y \in \chi} \text{adh}(Y)\right) = \bigcup_{Y \in \chi} (X \cap \text{adh}(Y)) = \emptyset$$

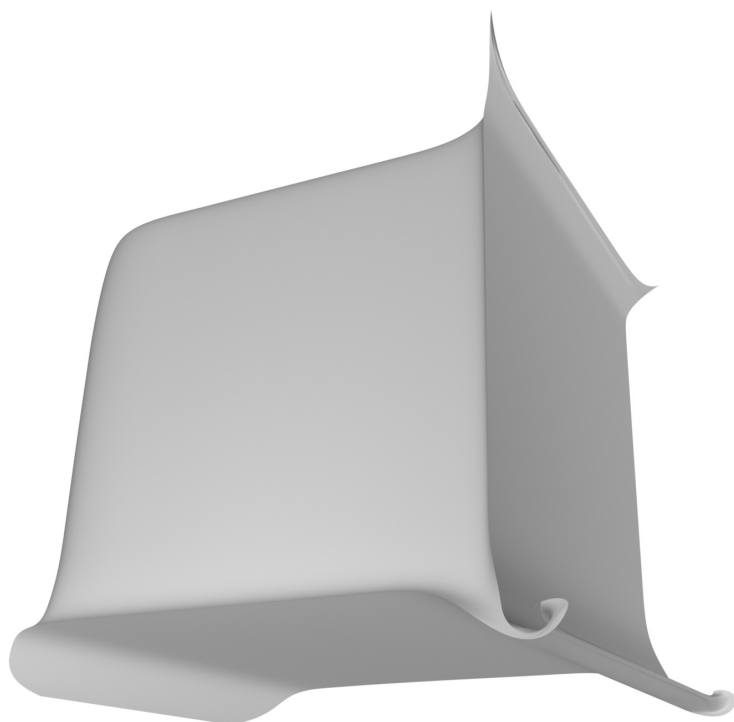


FIG. 2.4 – Plongement contrôlé d'un cube

Aussi, pour $x \in X$, la distance de x à $\cup_{Y \in \mathcal{X}} Y$ est non nulle.

$$\text{Soit alors } W_X := \bigcup_{x \in X} B\left(x, \frac{d(x, \cup_{Y \in \mathcal{X}} Y)}{2}\right)$$

L'ouvert W_X est donc un voisinage de X . Soit $Y \in \mathcal{X}$; on note Υ la partie de Σ qui n'est pas comparable à Y . Soient $x \in X$ et $y \in Y$; on a donc $x \in \cup_{Z \in \Upsilon} Z$ et $y \in \cup_{Z \in \mathcal{X}} Z$; ce qui implique

$$B\left(x, \frac{d(x, \cup_{Z \in \mathcal{X}} Z)}{2}\right) \cap B\left(y, \frac{d(y, \cup_{Z \in \Upsilon} Z)}{2}\right) = \emptyset$$

Ainsi W_X et W_Y sont disjoints.

On a ainsi une famille d'ouverts $(W_{X \times X'})_{(X, X') \in \Sigma \times \Sigma'}$ vérifiant :

$$\begin{aligned} W_{X \times X'} &\supset X \times X' \\ W_{X \times X'} \cap W_{Y \times Y'} &\neq \emptyset \Rightarrow X \times X' \leq Y \times Y' \text{ ou } X \times X' \geq Y \times Y' \end{aligned}$$

On note $(L_X, \mathcal{L}_X)_{X \in \Sigma}$ et $(L_{X'}, \mathcal{L}_{X'})_{X' \in \Sigma'}$ les structures de treillis sur les espaces stratifiés (A, Σ) et (A', Σ') .

Soit alors $L_{X \times X'}$ le voisinage ouvert $(L_X \times L_{X'}) \cap W_{X \times X'}$ de $X \times X'$, que l'on munit de la structure de lamination $\mathcal{L}_{X \times X'} := (\mathcal{L}_X \times \mathcal{L}_{X'})|_{L_{X \times X'}}$.

Comme X et X' sont des parties admissibles de respectivement (L_X, \mathcal{L}_X) et $(L_{X'}, \mathcal{L}_{X'})$, la strate $X \times X'$ est une restriction à une partie admissible de $\mathcal{L}_{X \times X'}$.

De plus, si $L_{X \times X'} \cap L_{Y \times Y'}$ n'est pas vide, alors $W_{X \times X'}$ intersecte $W_{Y \times Y'}$. Donc $X \times X'$ et $Y \times Y'$ sont comparables. Quitte à permuter les notations, supposons que $X \times X' \leq Y \times Y'$. Ce qui est équivalent à $X \leq Y$ et $X' \leq Y'$. La lamination $(L_X \cap L_Y, \mathcal{L}_{X|L_X \cap L_Y})$ est un feuilletage de lamination de $(L_X \cap L_Y, \mathcal{L}_{Y|L_X \cap L_Y})$, et $(L_{X'} \cap L_{Y'}, \mathcal{L}_{X'|L_{X'} \cap L_{Y'}})$ est un feuilletage de lamination de $(L_{X'} \cap L_{Y'}, \mathcal{L}_{Y'|L_{X'} \cap L_{Y'}})$. Comme un produit de feuilletages de lamination est un feuilletage de lamination, la restriction $(L_{X \times X'} \cap L_{Y \times Y'}, \mathcal{L}_{X \times X'|L_{X \times X'} \cap L_{Y \times Y'}})$ est un feuilletage de lamination de $(L_{X \times X'} \cap L_{Y \times Y'}, \mathcal{L}_{Y \times Y'|L_{X \times X'} \cap L_{Y \times Y'}})$.

Ainsi $\mathcal{T}_{prod} := (L_{X \times X'}, \mathcal{L}_{X \times X'})_{X \times X' \in \Sigma \times \Sigma'}$ est une structure de treillis sur $S \times S'$.

Structure de la réunion des strates de même dimension La propriété suivante éclaire la façon dont les strates et les voisinages tubulaires de même dimension se rassemblent.

Propriété 2.1.7. *Soit (A, Σ) un espace stratifié muni d'une structure de treillis \mathcal{T} . Soit $(d_p)_{p \geq 0}$ l'ensemble des dimensions des strates de Σ , ordonné de façon strictement croissante avec p . Pour chaque $p \geq 0$, on a :*

1. *L'union des strates de dimension d_p forme une lamination X_p . Chaque strate de Σ de cette dimension est alors la restriction de X_p à une partie admissible.*
2. *L'union des voisinages tubulaires des strates de dimension d_p forme une lamination (L_p, \mathcal{L}_p) .*
3. *X_p est la restriction de \mathcal{L}_p à une partie admissible.*

4. Pour $q \leq p$, $\text{adh}(X_p) \cap X_q$ est une partie X_q -admissible.

5. $\text{adh}(X_p) \subset \cup_{q \leq p} X_q$.

Preuve

2) Soit $\Sigma_p \subset \Sigma$ l'ensemble des strates de dimension d_p . Pour $(X, Y) \in \Sigma_p^2$, la lamination $\mathcal{L}_{X|L_X \cap L_Y}$ est un feuilletage de lamination de $\mathcal{L}_{Y|L_X \cap L_Y}$ de codimension nulle, donc les structures de laminations $\mathcal{L}_{X|L_X \cap L_Y}$ et $\mathcal{L}_{Y|L_X \cap L_Y}$ sont engendrées par des atlas équivalents et sont donc égales. Ainsi peut-on définir une structure de lamination \mathcal{L}_p sur $L_p := \cup_{X \in \Sigma_p} L_X$ engendrée par les cartes de \mathcal{L}_X pour $X \in \Sigma_p$.

1)-3) Chaque voisinage tubulaire de Σ_p est cohérent avec les strates de Σ et leur union forme un recouvrement ouvert de L_p . La lamination \mathcal{L}_p est donc cohérente avec Σ . Par la propriété 2.1.3, pour tout $X \in \Sigma_p$, le support de $X = X \cap L_p$ est \mathcal{L}_p -admissible. Comme la stratification est localement finie, l'union X_p des supports des strates de Σ_p est \mathcal{L}_p -admissible. On munit X_p de la structure de lamination $\mathcal{L}_{p|X_p}$, ce qui donne 3). Comme chaque strate $X \in \Sigma_p$ est \mathcal{L}_p -admissible et que X est incluse dans X_p , la strate X est $X_p = \mathcal{L}_{p|X_p}$ -admissible, ce qui donne 1).

4) Par la condition de frontière, on a :

$$\text{adh}(X_p) \cap X_q = \bigcup_{X \in \Sigma_p, Y \in \Sigma_q} \text{adh}(X) \cap Y = \bigcup_{X \in \Sigma_p, Y \in \Sigma_q, Y \leq X} Y$$

Comme chaque strate de Σ_q est admissible dans X_q et la stratification est localement finie, $\text{adh}(X_p) \cap X_q$ est X_q -admissible.

5) Par la condition de frontière, on a :

$$\text{adh}(X_p) = \bigcup_{X \in \Sigma_p} \text{adh}(X) = \bigcup_{X \in \Sigma_p} \bigcup_{Y \leq X} Y \subset \bigcup_{q \leq p} \bigcup_{X \in \Sigma_q} X = \bigcup_{q \leq p} X_q$$

Remarque Pour l'exemple 4 de 2.1.1, $(A, (X_p)_p)$ n'est pas un espace stratifié.⁷

Morphismes $(\mathcal{T}_A, \mathcal{T}_{A'})$ -contrôlés Soient (A, Σ) et (A', Σ') deux espaces stratifiés admettant des structures de treillis \mathcal{T} et \mathcal{T}' respectivement.

Un *morphisme* (resp. *une immersion*) $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$ -contrôlé est un morphisme stratifié de (A, Σ) dans (A', Σ') tel que, pour $X \in \Sigma$ envoyée par f dans $X' \in \Sigma'$, il existe un voisinage ouvert V_X de X dans L_X tel que $f|_{V_X}$ appartienne à $\text{Mor}(\mathcal{L}_{X|V_X}, \mathcal{L}_{X'})$ (resp. $f \in \text{Im}(\mathcal{L}_{X|V_X}, \mathcal{L}_{X'})$). On note alors $f \in \text{Mor}(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$ (resp. $f \in \text{Im}(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$). La famille $\mathcal{V} := (V_X)_{X \in \Sigma}$ est appelée *famille de voisinages adaptée à f* (et à $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$).

Si (A', Σ') est une variété M , alors M est aussi une structure de treillis sur cet espace stratifié. Dans ce cas, on dira par abus de langage que le morphisme est \mathcal{T} -contrôlé.

Un *endomorphisme \mathcal{T} -contrôlé* est un endomorphisme stratifié de (A, Σ) qui est $(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ -contrôlé. On note $\text{End}(\mathcal{T})$ cet ensemble.

⁷Cependant, si on remplace la condition de frontière des espaces stratifiés laminaires (A, Σ) par la condition (plus générale) :

"pour tout couple de strate (X, Y) , la partie $\text{adh}(X) \cap Y$ est Y -admissible",

il semble que tout ce qui est prouvé dans ce travail reste vrai et $(A, (X_p)_p)$ est toujours un espace stratifié et, si (A, Σ) supporte une structure de treillis, $(L_p)_p$ est aussi structure de treillis sur $(A, (X_p)_p)$.

Un *isomorphisme* $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$ -contrôlé est un morphisme $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$ -contrôlé, inversible et d'inverse $(\mathcal{T}', \mathcal{T})$ -contrôlé.

Propriété 2.1.8. Soient (A, Σ) , (A', Σ') et (A'', Σ'') des espaces stratifiés admettant des structures de treillis \mathcal{T} , \mathcal{T}' et \mathcal{T}'' respectivement.

- L'identité de A est un endomorphisme stratifié \mathcal{T} -contrôlé.
- La composition d'un morphisme $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$ -contrôlé avec un morphisme $(\mathcal{T}', \mathcal{T}'')$ -contrôlé est un morphisme $(\mathcal{T}, \mathcal{T}'')$ -contrôlé.

Preuve

L'identité de A est clairement un endomorphisme contrôlé, on va donc montrer que la composition de deux morphismes contrôlés est un morphisme contrôlé.

Soient $f \in \text{Mor}(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$ et $f' \in \text{Mor}(\mathcal{T}', \mathcal{T}'')$. Soient \mathcal{V} et \mathcal{V}' deux familles de voisinages adaptée à respectivement f et f' . Chaque strate $X \in \Sigma$ est envoyée par f dans une strate $X' \in \Sigma'$, qui est envoyée par f' dans une strate $X'' \in \Sigma''$. Donc X est envoyée par $f'' := f' \circ f$ dans la strate X'' . Soient alors l'ouvert $V_X'' := V_X \cap f^{-1}(V_{X'}')$. On remarque que la famille $\mathcal{V}'' := (V_X'')_{X \in \Sigma}$ est une famille de voisinages adaptés à f'' .

Morphismes contrôlés équivalents Soient \mathcal{T} et \mathcal{T}' deux structures de treillis sur deux espaces stratifiés (A, Σ) et (A', Σ') respectivement. Deux éléments f et \hat{f} de $\text{Mor}(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$ (resp. $\text{Im}(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$, resp. $\text{End}(\mathcal{T}')$) seront dits *équivalents* si chaque strate $X \in \Sigma$ est envoyée par f et \hat{f} dans une même strate $X' \in \Sigma'$ et qu'il existe une famille de voisinages \mathcal{V} adaptée à f et \hat{f} vérifiant $\hat{f}|_{V_X} \in \text{Mor}_{f|_{V_X}}(\mathcal{L}_{X|V_X}, \mathcal{L}_{X'})$. Étant donné un morphisme contrôlé f et une famille de voisinages adaptée à f , on note $\text{Mor}_f^{\mathcal{V}}(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$ l'ensemble des morphismes \hat{f} équivalents à f qui vérifient la propriété énoncée ci-dessus.

On munit $\text{Mor}_f^{\mathcal{V}}(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$ de la topologie induite par la topologie produit sur :

$$\prod_{X \in \Sigma} \text{Mor}_{f|_{V_X}}(\mathcal{L}_{X|V_X}, \mathcal{L}_{X'})$$

On munit l'ensemble des familles de voisinages adaptées à f de l'ordre partiel suivant :

$$\mathcal{V} \leq \mathcal{V}' \iff \forall X \in \Sigma, \quad V_X \subset V_X'$$

Propriété 2.1.9. Soient \mathcal{T} et \mathcal{T}' deux structures de treillis sur deux espaces stratifiés (A, Σ) et (A', Σ') . Soit f un morphisme $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$ -contrôlé ainsi que $\mathcal{V} \leq \mathcal{V}'$ deux familles de voisinages adaptées à f . Alors la topologie de $\text{Mor}_f^{\mathcal{V}'}(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$ est égale à la topologie induite par $\text{Mor}_f^{\mathcal{V}}(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$.

Preuve

Par définition de ces topologies, il est immédiat que la topologie de $\text{Mor}_f^{\mathcal{V}'}(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$ est plus fine que la topologie induite par $\text{Mor}_f^{\mathcal{V}}(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$. Il suffit donc de prouver que la topologie de $\text{Mor}_f^{\mathcal{V}'}(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$ est moins fine que la topologie induite par $\text{Mor}_f^{\mathcal{V}}(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$. Pour cela il suffit de montrer, pour $X \in \Sigma$ envoyée par f dans $X' \in \Sigma'$, que la topologie

de $Mor_{f|V'_X}(\mathcal{L}_{X|V_X}, \mathcal{L}'_{X'})$ est moins fine que $Mor_f^{\mathcal{V}}(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$. Comme un compact de V'_X est une union finie de compacts de $(V_Y)_{Y \geq X}$, la topologie de $Mor_{f|V'_X}(\mathcal{L}_{X|V_X}, \mathcal{L}'_{X'})$ est moins fine que la topologie produit :

$$\prod_{Y \geq X} \prod_{f(Y) \subset Y' \in \Sigma'} Mor_{f|V_Y}(\mathcal{L}_{Y|V_Y}, \mathcal{L}'_{Y'})$$

qui est elle-même moins fine que celle de $Mor_f^{\mathcal{V}}(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$.

Cette dernière propriété signifie que les espaces topologiques $(Mor_f^{\mathcal{V}}(\mathcal{T}, \mathcal{T}'))_{\mathcal{V}}$ ne diffèrent que par une condition de respect de plaques. Cela permet de faire les abus de notations suivants :

- Si (A', Σ') est une variété M , alors la structure \mathcal{T}' est constituée nécessairement de la seule variété M . Les conditions de respect de plaques étant trivialement vérifiées, l'espace topologique $Mor_f^{\mathcal{V}}(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$ ne dépend ni de f ni de \mathcal{V} . On note alors $Mor(\mathcal{T}, M)$ cet espace.
- De manière générale, quand la topologie induite par $Mor_f^{\mathcal{V}}(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$ sur un sous-espace E ne dépend pas de \mathcal{V} , on se permettra d'écrire que E est muni de la topologie induite par $Mor(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$.

Remarques

- La topologie de $Mor_f^{\mathcal{V}}(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$ est plus fine que la topologie induite par $Mor_f(\Sigma, \Sigma')$. En effet, la topologie compacte-ouverte de $C^0(A, A')$ est moins fine que la topologie $Mor_f^{\mathcal{V}}(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$, car \mathcal{V} recouvre l'espace A et l'inclusion de $C^0(A, A')$ dans $\prod_{X \in \Sigma} C^0(V_X, A')$ est un homéomorphisme sur son image.
Enfin, pour une strate $X \in \Sigma$ envoyée par f dans une strate $X' \in \Sigma$, la topologie de $Mor_{f|V_X}(\mathcal{L}_{X|V_X}, \mathcal{L}'_{X'})$ est plus fine que la topologie de $Mor_{f|X}(X, X')$.
- En général, la topologie de $Mor_f^{\mathcal{V}}(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$ est différente de la topologie induite par $Mor_f(\Sigma, \Sigma')$. Par exemple, le disque unité fermé $adh(\mathbb{D})$ de \mathbb{C} supporte la stratification canonique Σ formée du disque unité \mathbb{D} et du cercle unité \mathbb{S}^1 . Cet espace stratifié admet la structure de treillis \mathcal{T} formée de \mathbb{D} et de la lamination $(L_{\mathbb{S}^1}, \mathcal{L}_{\mathbb{S}^1})$ dont les feuilles sont les cercles de centre 0 et de rayon $r \in]1/2, 1]$. On paramètre $adh(\mathbb{D})$ par les coordonnées polaires (θ, r) . L'ensemble des fonctions f sur $adh(\mathbb{D})$ telles que $\sup_{x \in L_{\mathbb{S}^1}} \|\partial_{\theta} f(x)\| < 1$ est un ouvert de $Mor(\mathcal{T}, \mathbb{R})$. Par contre, dans tout ouvert O de $Mor(\Sigma, \mathbb{R})$, il existe une suite de fonctions $(f_n)_n \in (Mor(\mathcal{T}, \mathbb{R}) \cap O)^{\mathbb{N}}$ telle que $\sup_{n \geq 0, x \in L_{\mathbb{S}^1}} \|\partial_{\theta} f_n(x)\| = \infty$.

2.1.3 Des structures géométriques sur certains espaces stratifiés

Dans cette partie, on va rappeler certain travaux définissant des structures géométriques similaires aux treillis sur les stratifications. Ces structures seront presque toujours plus faibles que les treillis de laminations, car elles interviennent dans un contexte topologique.

La mise en place d'une structure géométrique sur les stratifications remonte aux travaux de H. Whitney sur l'étude des variétés analytiques singulières [31] :

Conjecture 1 (H. Whitney 1965). *Toute variété analytique singulière V de \mathbb{C}^n supporte une stratification analytique telle qu'au voisinage de chaque point p d'une strate X , il existe un voisinage U de p dans V , un espace métrique T et un homéomorphisme :*

$$\phi : (X \cap U) \times T \rightarrow U$$

tels que, pour tout $t \in T$, la restriction $\phi|_{X \cap U \times \{t\}}$ soit biholomorphe sur son image, la différentielle de ces restrictions soit continue sur $(X \cap U) \times T$ et la lamination engendrée par ϕ^{-1} (de même dimension que X) soit cohérente avec toutes les strates.

Plus tard, R. Thom et J. N. Mather considèrent des espaces stratifiés différentiables (A, Σ) , ayant des conditions de régularités intrinsèques supplémentaires, qui dans certain cas permettent de prouver que leur stratification est localement triviale, c'est à dire, que pour chaque point $x \in A$ appartenant à la strate $X \in \Sigma$, il existe un voisinage U de x dans A , un voisinage V de x dans X , un espace stratifié différentiable (A', Σ') et un homéomorphisme $h : V \times A' \rightarrow U$ tels que les strates de $\Sigma|_U$ sont les images par h des strates de $(V \times A', X|_V \times \Sigma')$.

En 1993, D. Trotman adapte la conjecture de H. Whitney aux espaces stratifiés différentiables⁸. Pour énoncer sa conjecture, on rappelle qu'un plongement p d'un espace stratifié différentiable (A, Σ) dans \mathbb{R}^n est b -régulier si :

pour tout $(X, Y) \in \Sigma^2$ avec $Y < X$, pour toutes suites $(x_i)_i \in X^{\mathbb{N}}$ et $(y_i)_i \in Y^{\mathbb{N}}$ qui convergent vers $y \in Y$, si $T_{x_i}X$ tend vers τ et que le vecteur unitaire dans la direction de $\overline{x_i y_i} \in \mathbb{R}^n$ tend vers λ , alors λ est inclus dans τ .

Il est bien connu et facile à démontrer que la b -régularité implique la a -régularité. La conjecture s'énonce ainsi :

Conjecture 2 (D. Trotman 1993). *Soit un espace stratifié (A, Σ) de variétés réelles (connexes) b -régulièrement plongées par p dans \mathbb{R}^n ; alors pour tout $X \in \Sigma$, $x \in X$, il existe un voisinage U de x dans A et un voisinage tubulaire (L, \mathcal{L}) de $X|_U$ dans l'espace stratifié $(U, \Sigma|_U)$ tel que $p|_L$ soit un plongement de (L, \mathcal{L}) .*

Dans sa thèse C. Murolo [19] s'appuie sur cette conjecture pour définir un "Système de contrôle feuilleté, totalement compatible et a -régulier" qui est la donnée de voisinages tubulaires $(L_X, \mathcal{L}_X)_{X \in \Sigma}$ deux à deux compatibles, sur un espace stratifié différentiable.

Par ailleurs, pour tout difféomorphisme axiome A , vérifiant la condition de transversalité forte et agissant sur une surface M , W. De Melo [6] construit une véritable structure de treillis

⁸Il s'agit bien d'une adaptation car H. Whitney démontre que toute variété analytique singulière supporte une stratification analytique b -régulière [32].

sur la stratification de laminations $(M, (W^s(\Lambda_i))_i)$, où (Λ_i) est la décomposition spectrale de l'ensemble non-errant et $W^s(\Lambda_i)$ est munie de sa structure de lamination canonique (cf 1.2.2)⁹. Ce travail lui permettra de démontrer la stabilité structurelle des axiomes A en dimension 2 ayant la condition de transversalité forte. De façon locale, cette idée sera reprise par C. Robinson [22] pour achever la démonstration de la conjecture de J. Palis et S. Smale [27] : tout axiome A satisfaisant la condition de transversalité forte est structurellement stable¹⁰.

On verra que les stratifications α -régulières n'admettent pas toujours localement une structure de treillis, ni même une trivialisatoin locale. Mais au-delà des contraintes locales, il existe aussi des contraintes topologiques globales empêchant une stratification d'admettre une structure de treillis de laminations.

Par exemple, on considère la stratification du fibré tangent de la sphère \mathbb{S}^2 , formée de deux strates, l'une étant la section nulle et l'autre étant son complémentaire (de dimension quatre). Cette stratification satisfait les deux conjectures ci-dessus, et la restriction de cette stratification à de petits ouverts admet une structure de treillis de laminations. Cependant cette stratification n'admet pas une structure de treillis de laminations. On peut le démontrer en raisonnant par l'absurde. En effet, l'existence d'une telle structure donnerait un feuilletage topologique sur un ouvert de $T\mathbb{S}^2$ dont la section nulle serait une feuille. On identifie la section nulle avec \mathbb{S}^2 . Comme la sphère \mathbb{S}^2 est simplement connexe, l'holonomie le long des feuilles est triviale. On choisit un petit vecteur de $T\mathbb{S}^2$ non nul ; on le transporte par l'holonomie et on définit un champ de vecteurs continu et sans singularité sur l'espace tangent de la sphère. Or il est bien connu, par le théorème de la boule chevelue, qu'il n'existe pas de tel champ de vecteurs.

⁹Dans le cas d'un axiome A ayant la décomposition spectrale $(\Lambda_i)_i$, il définit sur la stratification $(W^s(\Lambda_i))_i$ une structure qu'il nomme "system of unstable tubular families". Cette structure est un système de voisinages tubulaires deux à deux compatibles. La condition de feuilletage de laminations n'est donc pas requise, bien que pour son cas particulier, il la démontre. Il ne s'intéresse en effet qu'à des propriétés topologiques et non différentiables. Le travail exposé ici peut servir de base pour donner plus de régularité à l'homéomorphisme conjuguant : être un endomorphisme stratifié.

¹⁰Cette structure porte le nom "Compatible families of unstable disks". Même si l'algorithme construit de façon locale une structure de treillis, pour les mêmes raisons que W. De Melo, C. Robinson demande seulement d'avoir localement un "system of unstable tubular families".

2.2 Persistence des stratifications de laminations normalement dilatées

2.2.1 Persistence des stratifications de laminations normalement dilatées de façon contrôlée

Les hypothèses du théorème de stabilité nécessitent de généraliser la définition des pseudo-orbites :

Soient (L, \mathcal{L}) une lamination, V un ouvert de L , $f \in C^0(V, L)$, ainsi que η une fonction continue et strictement positive sur V . La famille $(p_n)_n \in V^{\mathbb{N}}$ est une η -pseudo-orbite de V qui respecte \mathcal{L} si $(p_{n+1}, f(p_n))$ sont dans une même plaque de \mathcal{L} de diamètre inférieur à $\eta(p_{n+1})$.

On peut maintenant énoncer le résultat principal de ce travail :

Théorème 2.1. *Soient (M, g) une variété riemannienne et (A, Σ) un espace stratifié supportant une structure de treillis \mathcal{T} . Soient $f \in C^1(M, M)$, $i \in \text{Im}(\mathcal{T}, M)$ et $f^* \in \text{End}(\mathcal{T})$ tels que :*

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ & M \rightarrow M & \\ i. \text{ le diagramme suivant commute : } & \uparrow i & \uparrow i \\ & A \rightarrow A & \\ & f^* & \end{array}$$

ii. f dilate normalement l'espace stratifié immergé (A, Σ) ,

iii. il existe une famille de voisinages \mathcal{V} adaptée à f^* et une fonction continue $\eta \in C^0(V_X, \mathbb{R}_+^*)$, pour chaque strate $X \in \Sigma$, telles que toute η -pseudo-orbite de V_X qui respecte \mathcal{L}_X est contenue dans X .

Soit $A' \subset A$ un ouvert relativement compact tel que $f^*(\text{adh}(A')) \subset A'$. Il existe alors un voisinage V_f de f dans $C^1(M, M)$, une famille de voisinages \mathcal{V}' adaptée à $f|_{A'}$ et une application continue :

$$\begin{aligned} V_f &\rightarrow \text{End}_{f^*}^{\mathcal{V}'}(\mathcal{T}|_{A'}) \times \text{Im}(\mathcal{T}|_{A'}, M) \\ f' &\mapsto (f'^*, i(f')) \end{aligned}$$

avec $i(f) = i$ et telle que $(f', i(f'), f'^*)$ vérifie les propriétés (i), (ii) et (iii) ci-dessus pour l'espace stratifié $(A', \Sigma|_{A'})$ supportant la structure de treillis de laminations $\mathcal{T}|_{A'}$.

En particulier, f' préserve la stratification de laminations $\Sigma|_{A'}$, immergée par $i(f')$ et la dynamique induite sur l'espace des feuilles de chaque strate est la même que celle de f .

Sous les hypothèses du théorème 2.1, on dira par abus de langage, que f dilate normalement la stratification de laminations Σ de façon contrôlée.

En pratique, on se servira du théorème 2.1 complétement par le corollaire suivant

Corollaire 2.2. *Si, sous les hypothèses du théorème 2.1, f^* est expansif par plaques sur chacune des strates $X' \in \Sigma_{|A'}$ et que la restriction de i à A' est un plongement, alors quitte à restreindre V_f , pour $f' \in V_f$, l'immersion $i(f')$ est aussi un plongement et f'^* est expansif par plaques sur chacune des strates $X' \in \Sigma_{|A'}$. Ainsi f' préserve l'espace stratifié $(A', \Sigma_{|A'})$ plongé a -régulièrement par $i(f')$.*

Questions :

- Le contre-exemple dans 2.2.2 montre que l'existence, au moins locale, d'une structure de treillis est importante pour assurer la persistance d'une stratification de laminations normalement dilatée. Cependant, on peut se demander s'il est nécessaire qu'une telle structure contrôle f^* (ou même i), pour assurer la persistance de cette stratification immergée. En effet, dans la preuve du théorème 2.1, cette hypothèse n'intervient que dans le lemme 5.3.4. Enlever cette hypothèse simplifierait beaucoup l'utilisation de ce théorème.

Dans le cas où i est un plongement, l'hypothèse (iii) est-elle toujours vérifiée? Sous les hypothèses du théorèmes 2.1, cette hypothèse est-elle nécessaire?

Cette première question peut être une première étape dans la recherche d'un éventuel contre-exemple d'un endomorphisme dilatant normalement une lamination compacte plongée sans être expansif par plaques.

- Étant donnée une stratification de laminations plongée a -régulière et normalement dilatée par f , l'existence d'une structure de treillis (au moins locale) est-elle reliée par des conditions dynamiques supplémentaires?

Par exemple, dans le cas d'un axiome A vérifiant la condition de transversalité forte, on a localement l'existence d'une structure de treillis, pour l'espace stratifié $(M, (W^s(\Lambda_i))_i)$ (voir 2.1.3).

2.2.2 Un exemple de stratification normalement dilatée non topologiquement persistante

On se propose maintenant de donner un exemple d'une stratification différentiable a -régulière, normalement dilatée par un difféomorphisme f , telle que la stratification ne soit pas topologiquement persistante. Cela signifie qu'il existe f' C^1 -proche de f , qui ne préserve pas l'image des strates par tout plongement C^0 -proche de l'inclusion canonique de notre espace stratifié. On remarquera que cet espace stratifié ne peut pas supporter une structure de treillis (même localement).

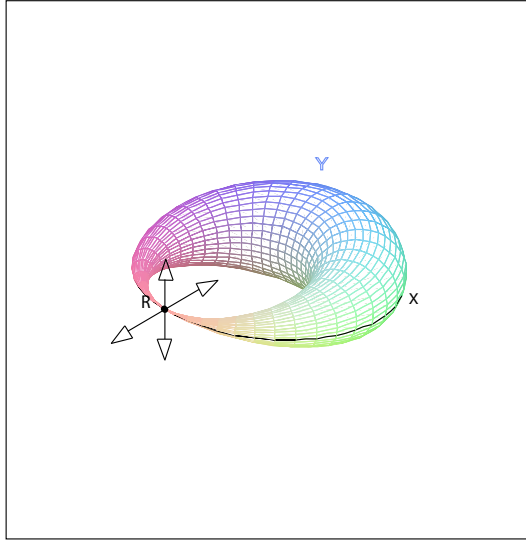


FIG. 2.5 – Stratification normalement dilatée et non persistante

Soit un cercle plongé dans \mathbb{R}^3 et normalement hyperbolique pour un difféomorphisme f de \mathbb{R}^3 . On suppose que la direction stable est de dimension 1. Par [11], l'union des variétés fortement stables de ce cercle est une variété immergée C^1 de dimension 2 que l'on note W^s . On suppose que le point $0 \in \mathbb{R}^3$ est fixé par f et que la restriction de f à $] - 1, 1[^3$ s'écrit :

$$f|_{]-1,1[^3} :] - 1, 1[^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (x + x^3, 2y, 2z)$$

Le point $0 \in \mathbb{R}^3$ est donc topologiquement répulsif pour f . On suppose que W^s privé du cercle est contenu dans le bassin de répulsion de 0. Ainsi W^s est une variété plongée dans \mathbb{R}^3 .

On suppose que la restriction de f au cercle possède un point fixe répulsif et que la variété stable de ce point intersecte $] - 1, 1[^3$ en $] - 1, 1[\times \{0\}^2 \setminus \{0\}$. Ainsi, l'union de 0 et de cette variété stable de ce point est un cercle X différemment plongé dans \mathbb{R}^3 . Soit alors $Y := W^s \setminus X$.

On suppose aussi que l'intersection de W^s avec $([-1/2 - 1/8, -1/2] \cup [1/2, 1/2 + 1/8]) \times] - 1, 1[^2$ est une union de graphes de fonctions de $[-1/2 - 1/8, -1/2] \cup [1/2, 1/2 + 1/8]$ dans $] - 1, 1[^2$.

Ainsi, la partition $A := (X, Y)$ de $X \cup Y$ forme une stratification a -régulière de \mathbb{R}^3 normalement dilatée par f . On dessine figure 2.5 l'allure de la stratification.

Si cet espace stratifié (restreint à un voisinage de 0) admettait une structure de treillis, alors un petit voisinage de 0 dans A serait homéomorphe au produit d'un voisinage de 0 dans X par un voisinage de 0 dans l'intersection de A avec un plan transverse à X . Ce dernier produit peut être un segment, qui n'est pas homéomorphe à un voisinage de 0 dans A , car un segment ne contient pas de surface.

On suppose par l'absurde que la stratification (X, Y) est topologiquement persistante pour des perturbations de f . Cela signifie que pour une petite perturbation f' de f , il existe un plongement p de A dans \mathbb{R}^3 , proche de l'inclusion canonique, tel que $h(X)$ et $h(Y)$ soient stables par f' .

On construit maintenant une famille de perturbations de f contredisant cette hypothèse de stabilité. Soit ρ une fonction de classe C^∞ à support dans $] -1, 1[$ et dont la restriction à $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ est égale à 1. Pour $t \geq 0$, soit f_t l'application de \mathbb{R}^3 égale à f sur le complémentaire de $] -1, 1[^3$ et dont la restriction à $] -1, 1[^3$ est égale à :

$$f_t|_{] -1, 1[^3} :] -1, 1[^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) + (-t \cdot \rho(x) \cdot x, 0, 0)$$

On remarque que f_0 est égale à f . Pour t assez petit, soit $(X(t), Y(t))$ la stratification stable pour f_t donnée par l'hypothèse de persistance topologique de (X, Y) .

Pour $r \in]0, \frac{1}{2}[$ assez petit, Y intersecte les seules faces $\{-r\} \times] -r, r[^2$ et $\{r\} \times] -r, r[^2$ de $[-r, r]^3$. Il en est de même pour $Y(t)$, avec t assez petit.

Pour t plus petit que $r^2 < \frac{1}{4}$, l'intervalle $] -\sqrt{t}, \sqrt{t}[$ est stable par l'application :

$$\phi_t : x \mapsto x + x^3 - t \cdot \rho(x) \cdot x$$

On remarque que $f_t|_{] -1, 1[^3}(x, y, z) = (\phi_t(x), 2y, 2z)$.

Par ailleurs, le compact $X \cup Y$ est localement connexe et l'adhérence de Y contient X . Ces propriétés étant conservées par homéomorphisme, il en est de même pour $X(t)$ et $Y(t)$.

On va montrer que la strate $X(t)$ est égale à X pour t assez petit. Remarquons que les difféomorphismes $(f_t)_t$ préserve X , et le dilatent normalement et uniformément. Il existe donc un voisinage V de X tel que, pour t assez petit, l'intersection $\cap_{n \geq 0} f_t^{-n}(V)$ est égale à X . Or, pour un t assez petit, la strate $X(t)$ est incluse dans V . Par stabilité de cette strate :

$$X(t) \subset \cap_{n \geq 0} f_t^{-n}(U) = X$$

La strate $X(t)$ étant fermée, c'est un fermé de X . Comme c'est une variété de même dimension que X , c'est un ouvert de X . Donc par connexité, les deux strates sont identiques.

On fixe maintenant $t > 0$ assez petit pour que tout ce qui a été énoncé soit réalisé. Il existe donc un lacet γ inclus dans $] -\sqrt{t}, \sqrt{t}[\times] -1, 1[^2 \cap Y(t)$ contenant $0 \in X = X(t)$ dans son adhérence. On va montrer qu'un itéré de γ par f_t intersecte d'autres faces de $[-r, r]^3$ que $\{-r\} \times] -r, r[^2$ et $\{r\} \times] -r, r[^2$. Comme $Y(t)$ est stable par f_t , cela impliquera que $Y(t)$ intersecte d'autres faces de $[-r, r]^3$ que $\{-r\} \times] -r, r[^2$ et $\{r\} \times] -r, r[^2$, ce qui est une absurdité.

Comme γ privé de 0 est inclus dans le bassin de répulsion X , il existe un premier entier naturel n , tel que $f_t^n(\gamma)$ intersecte le complémentaire de $] -r, r[^3$. Comme ϕ_t stabilise

$] - \sqrt{t}, \sqrt{t}[$ et que $r < \frac{1}{2}$, il vient que $f_t^n(\gamma)$ est inclus dans $] - \sqrt{t}, \sqrt{t}[\times] - 1, 1[^2$ et intersecte $] - \sqrt{t}, \sqrt{t}[\times(] - 1, 1[^2 \setminus] - r, r[^2)$. Comme le point 0 est fixé par f_t , il appartient donc à l'adhérence de $f_t^n(\gamma)$. Par connexité, il existe donc un point de $f_t^n(\gamma)$ ayant sa deuxième ou troisième coordonnée égale à $-r$ ou r . Comme \sqrt{t} est plus petit que r , le chemin $f_t^n(\gamma)$ intersecte donc le bord de $[-r, r]^3$ en d'autre face que $\{-r\} \times] - r, r[^2$ et $\{r\} \times] - r, r[^2$.

2.3 Applications du théorème de persistance 2.1

2.3.1 Prolongement de la continuation hyperbolique d'un compact répulsif invariant

La structure de treillis permet d'étendre l'homéomorphisme donné par le théorème de continuité hyperbolique montré par M. Shub durant sa thèse [25].

Corollaire 2.3. *Soient M une variété riemannienne compacte, $f \in C^1(M, M)$ et K un compact de M vérifiant :*

$$f^{-1}(K) = K$$

On suppose que f dilate K , c'est-à-dire que pour $x \in K$, $T_x f$ est inversible et d'inverse contractante.

Alors, il existe V_f un voisinage de f , V_K un voisinage de K et une application continue

$$V_f \rightarrow \text{Homéo}(M, M)$$

$$f' \mapsto i(f')$$

telle que $i(f) = \text{id}$ et, pour $f' \in V_f$, la restriction $i(f')|_{K^c}$ appartient à $\text{Diff}^1(M \setminus K, M \setminus i(f')(K))$. Enfin le diagramme suivant commute au voisinage de K :

$$\begin{array}{ccc} & f' & \\ & M \longrightarrow M & \\ i(f') \uparrow & & \uparrow i(f') \\ & V_K \longrightarrow M & \\ & f & \end{array}$$

Ce corollaire est en quelque sorte l'équivalent (régulier) pour les endomorphismes du théorème ([Rob], Thm. 4.1) suivant :

Théorème 2.4 (Robinson 1975'). *Soit $f : M \rightarrow M$ un difféomorphisme de classe C^1 et $K \subset M$ un compact hyperbolique ayant une structure de produit local. Alors il existe un voisinage V_K de*

K et un voisinage V_f de f dans $\text{Diff}^1(M)$ tels que si $f' \in V_f$, alors il existe un homéomorphisme sur son image $h : V_K \rightarrow M$, vérifiant $h \circ f = f' \circ h$. De plus, quand f' est proche de f dans $\text{Diff}^1(M)$, h est proche de l'inclusion canonique dans $C^0(V, M)$.

Pour démontrer ce corollaire, on va se servir du lemme suivant que l'on réutilisera par la suite.

Lemme 2.3.1. *Soient M une variété riemannienne de dimension n et $f \in C^1(M, M)$. Soit A un compact de M étant l'union d'un compact K et d'un ouvert X disjoint de K , et tels que :*

$$K \subset \text{adh}(X), f(K) \subset K, f(X) \subset X$$

On suppose que f est dilatante sur K .

On munit K de la structure de lamination de dimension 0 et X de la structure de lamination de même dimension que M .

Alors $(A, (K, X))$ forme une stratification de laminations normalement dilatée par f et de façon contrôlée ; f est aussi expansive par plaques sur chaque strate.

Preuve du lemme 2.3.1

Comme $f|_A^{-1}(K) = K$ et que f est dilatante sur K , il existe un voisinage ouvert L_K de K dans A , qui vérifie $\bigcap_{n \geq 0} f|_A^{-1}(L_K) = K$. Alors L_K muni de la structure \mathcal{L}_K de lamination de dimension 0 et X munie de sa structure de variété \mathcal{L}_X forment une structure de treillis sur l'espace stratifié $(A, (K, X))$, qui contrôle f . Soit $V_K := f|_A^{-1}(L_K) \cap L_K$. Comme une pseudo-orbite de $\mathcal{L}_K|_{V_K}$ qui respecte \mathcal{L}_K est une orbite dans V_K et que $\bigcap_{n \geq 0} f^{-1}(V_K) = K$, l'hypothèse (iii) du théorème est vérifiée. De plus, une application dilatante sur un compact est nécessairement expansive sur celui-ci, donc f est expansive par plaques sur chaque strate.

Preuve du corollaire 2.3

Soient $(M_i)_i$ les composantes connexes de M .

Commençons par montrer que le compact K se décompose en une union de composantes connexes $(M_i)_{i=1}^k$ de M et de parties $(X_i)_{i=k+1}^N$ d'intérieur vide incluses dans respectivement $(M_i)_{i=k+1}^N$.

Supposons le contraire par l'absurde. Soit ∂K la frontière de K . Comme $f^{-1}(K) = K$ et que f est ouverte sur un voisinage de K , on a $f^{-1}(\partial K) = \partial K$. On munit M d'une métrique adaptée à la dilation de K . Pour $\epsilon > 0$ assez petit, si l'on note $B(\partial K, \epsilon)$ le ϵ -voisinage de ∂K , l'adhérence de $f^{-1}(B(\partial K, \epsilon))$ est incluse dans $B(\partial K, \epsilon)$. On pose $U := K \setminus f^{-1}(B(\partial K, \epsilon))$ qui, pour $\epsilon > 0$ assez petit, est non vide par l'hypothèse absurde. De plus, l'image de U par f est incluse dans l'intérieur de U . On pose $U_n = f^n(U)$. La suite de compacts $(U_n)_n$ est décroissante donc converge, pour la distance de Hausdorff, vers $U_\infty := \bigcap_{n \geq 0} U_n$. Comme la restriction de f à K est ouverte, pour tout $n \geq 0$, le compact U_{n+1} est inclus dans l'intérieur U_n . Pour tout $n \geq 0$, soit $\epsilon_n > 0$ le rayon maximal d'une boule centrée sur la frontière de U_∞ qui est incluse dans U_n . D'après la convergence de $(U_n)_n$, la suite $(\epsilon_n)_n$ tend vers 0, mais par dilatation de f , pour ϵ_n assez petit, le réel ϵ_{n+1} est strictement supérieur ϵ_n . Ceci est bien absurde.

Ainsi $(M, \Sigma := \{X_i, M_i \setminus X_i, i = k, \dots, N\} \cup \{X_i, i = 1, \dots, k\})$ est une stratification de laminations normalement dilatée. D'après le lemme 2.3.1, la dilatation normale est contrôlée et f est expansive par plaques sur les strates de $(M, (K, X))$. Les hypothèses du corollaire 2.2 étant donc vérifiées avec $A' = M$, on obtient l'application d'un voisinage V_f de f dans $C^1(M, M)$:

$$f' \in V_f \mapsto (f'^*, i(f'))$$

Puisque f'^* appartient à la même classe d'équivalence que f au sein des morphismes de treillis de laminations, f et f'^* sont égaux sur un voisinage V'_K de K . Par la conclusion (i) du théorème, on obtient la commutativité du diagramme.

2.3.2 Produit de stratifications de laminations

Proposition 2.5. *Soient M et M' deux variétés. Soient $S = (A, \Sigma)$ et $S' = (A', \Sigma')$ deux espaces stratifiés plongés par respectivement i et i' dans M et M' . Soient f et f' deux applications C^1 de respectivement M et M' dans elles-mêmes. On note (f, f') la dynamique produit sur $M \times M'$. On suppose que f et f' dilatent normalement et de façon contrôlée les stratifications de laminations S et S' .*

Si (f, f') dilate normalement la stratification produit $S \times S' := (A \times A', (X \times X')_{(X, X') \in \Sigma \times \Sigma'})$, plongée par (i, i') , alors (f, f') dilate normalement et de façon contrôlée cette stratification produit.

Si les applications f et f' sont expansives par plaques sur chaque strate de respectivement Σ et Σ' , alors (f, f') est aussi expansive par plaques sur chaque strate. Ainsi, quand ces stratifications de laminations sont compactes, la stratification a -régulière produit $S \times S'$ est persistante.

remarque Étant données deux stratifications laminations normalement dilatées, en général, la dynamique produit ne dilate pas normalement la stratification de laminations produit.

Démonstration.

Soient $\Sigma \times \Sigma'$ la stratification produit sur $A \times A'$ définie en 2.1.1 et \mathcal{T}_{prod} la structure de treillis définie en 2.1.2. Montrons qu'elle contrôle (f, f') . On note respectivement f^* et f'^* les endomorphismes $i^{-1} \circ f \circ i$ et $i'^{-1} \circ f' \circ i'$ qui sont \mathcal{T} et \mathcal{T}' contrôlés. Pour chaque $(X, X') \in \Sigma \times \Sigma'$, il existe V_X et $V_{X'}$ des voisinages ouverts de respectivement X et X' dans L_X et $L_{X'}$ vérifiant $f^*_{|V_X} \in Mor(\mathcal{L}_X|V_X, \mathcal{L}_X)$ et $f'^*_{|V_{X'}} \in Mor(\mathcal{L}_{X'}|V_{X'}, \mathcal{L}_{X'})$. Soit alors $V_{X \times X'} := (V_X \times V_{X'}) \cap L_{X \times X'} \cap (f^*, f'^*)^{-1}(L_{X \times X'})$ qui est un voisinage ouvert de $X \times X'$. Cet ouvert vérifie aussi $(f^*, f'^*)_{|V_{X \times X'}} \in Mor(\mathcal{L}_{X \times X'}|V_{X \times X'}, \mathcal{L}_{X \times X'})$. Donc l'endomorphisme stratifié (f^*, f'^*) est \mathcal{T}_{prod} -contrôlé.

On vérifie maintenant l'hypothèse (iii) du théorème 2.1 pour $\eta > 0$. Soit $X \times X' \in \Sigma \times \Sigma'$. Soit $(x_n)_n$ une η -pseudo-orbite de $V_{X \times X'}$. En projetant canoniquement celle-ci sur A et A' , on obtient deux η -pseudo-orbites de respectivement V_X et de $V_{X'}$ qui respectent \mathcal{L}_X et $\mathcal{L}_{X'}$. Ces deux projections appartiennent donc respectivement à X et X' . Donc la pseudo-orbite $(x_n)_n$ appartient à $X \times X'$. Ainsi l'hypothèse (iii) du théorème 2.1 est bien vérifiée.

L'expansivité par plaques se montre de la même manière. □

2.3.3 Exemples de stratifications de laminations persistantes en dynamique produit.

2.3.3.1 Application de Viana

Soit $V : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{R}$

$$(z, h) \mapsto (z^2, h^2 + c)$$

L'application $V_1 : z \mapsto z^2$ est dilatante sur \mathbb{S}^1 et stabilise l'intérieur du disque unité \mathbb{D} . On munit \mathbb{S}^1 et \mathbb{D} d'une structure de lamination de dimension 0 et 2 respectivement. Soit S_1 l'espace stratifié $(adh(\mathbb{D}), (\mathbb{S}^1, \mathbb{D}))$.

On fixe $c \in]-2, 1/4[$. Ainsi l'application $V_2 : h \mapsto h^2 + c$ préserve un intervalle ouvert I et dilate son bord ∂I . On munit ∂I d'une structure de lamination de dimension 0 et I d'une structure de lamination de dimension 1. Soit S_2 l'espace stratifié $(adh(I), (\partial I, I))$.

Par le lemme 2.3.1, V_1 et V_2 dilate normalement et de façon contrôlée les espaces stratifiés S_1 et S_2 respectivement et sont expansives par plaques sur chaque strate.

On remarque que l'espace stratifié produit $S_1 \times S_2$ est $(adh(\mathbb{D} \times I), (\mathbb{S}^1 \times \partial I, \mathbb{S}^1 \times I, \mathbb{D} \times \partial I, \mathbb{D} \times I))$ et ses strates sont des laminations de dimension 0, 1, 2 et 3 respectivement.

Comme, V dilate normalement la stratification produit $S_1 \times S_2$ (voir [4] pour avoir les estimés prouvant la dilatation normale de la stratification produit), on peut appliquer la proposition 2.5 puis le corollaire 2.2, qui implique que la stratification produit est persistante en tant que stratification de laminations a -régulière, pour des perturbations C^1 de V . Une vue d'artiste d'une perturbation de cette stratification de la laminations est représentée figure 2.2.

2.3.3.2 Produit de polynômes quadratiques hyperboliques

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$(x_i)_i \mapsto (x_i^2 + c_i)_i$$

On choisit $(c_i)_i \in [-2, 1/4]^n$, tel que pour tout i , $f_i : x \mapsto x^2 + c_i$ possède une orbite périodique attractive, son ensemble de Julia est alors un compact K_i répulsif. D'après Graczyk-Świątek [10] et M. Lyubich [14], c'est le cas pour un ouvert dense de paramètre $(c_i)_i \in [-2, 1/4]^n$. L'application $x \mapsto x^2 + c_i$ dilate normalement la stratification de laminations Σ_i formée de la lamination de dimension 0 supportée par K_i et la variété X_i de dimension 1 supportée par $\mathbb{R} \setminus K_i$ privée de ses composantes connexes non bornées.

Par le lemme 2.3.1, f est un produit d'applications dilatant normalement et de façon contrôlée la stratification Σ_i , étant expansive par plaques sur chaque strate.

On remarque que la stratification $\prod \Sigma_i$ est formée des strates $(Y_J)_{J \subset \{1, \dots, n\}}$, avec Y_J la lamination de dimension $\#J$, de support :

$$\prod_{j \in J} X_j \times \prod_{j \in J^c} K_j,$$

et dont les feuilles de cette lamination sont de la forme $\prod_{j \in J} C_j \times \prod_{j \in J^c} \{k_j\}$, avec C_j une composante connexe bornée de X_j et k_j un élément de K_j .

Comme f dilate normalement la stratification produit $\prod \Sigma_i$, en appliquant $n - 1$ fois la proposition 2.5, puis le corollaire 2.2, on montre que la stratification produit est persistante en tant que stratification de laminations a -régulière, pour des perturbations C^1 de f .

La figure 2.6 est une expérimentation numérique d'une perturbation de f , pour $n = 2$ et $c_1 = c_2 = -1$. Les courbes s'enroulent autour de chaque croisement à une vitesse exponentielle, ce qui rend cette enroulement imperceptible.

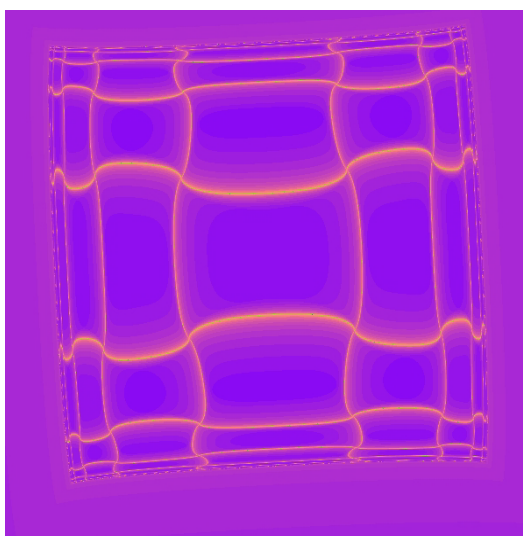


FIG. 2.6 – Expérimentation numérique de l'exemple 2.3.3.2

En dimension deux, c'est en réalité J.-C. Yoccoz qui a remarqué la stabilité de cette famille continue de courbes de classe C^1 , s'enroulant au point de croisement. Cet exemple motive la théorie ici présentée.

2.3.3.3 Produit de fractions rationnelles hyperboliques

Soit $f : \hat{\mathbb{C}}^n \rightarrow \hat{\mathbb{C}}^n$

$$(z_i)_i \mapsto (R_i(z_i))_i$$

où pour chaque i , R_i est une fraction rationnelle hyperbolique : cela signifie que son ensemble de Julia K_i est un compact répulsif, et que son complémentaire est une union finie de bassin d'attraction d'orbites périodiques. L'application R_i dilate normalement la stratification de laminations Σ_i formée de la lamination de dimension 0 supportée par K_i et de la variété $X_i := \hat{\mathbb{C}} \setminus K_i$.

On remarque que la stratification $\prod \Sigma_i$ est formée des strates $(Y_J)_{J \subset \{1, \dots, n\}}$, avec Y_J la lamination de dimension $2\#J$, de support :

$$\prod_{j \in J} X_j \times \prod_{j \in J^c} K_j,$$

et dont les feuilles de cette lamination sont de la forme $\prod_{j \in J} C_j \times \prod_{j \in J^c} \{k_j\}$, avec C_j une composante connexe de X_j et k_j un élément de K_j .

Pour les mêmes raisons que l'exemple précédent, $\prod_i \Sigma_i$ est persistante en tant que stratification de laminations a -régulière, pour des perturbations C^1 de f .

Persistence de sous-variétés

Sommaire

3.1 Variétés à bord normalement dilatées	71
3.1.1 Persistence des sous-variétés à bord normalement dilatées en tant que stratification a -régulière	71
3.1.2 Preuve du théorème 3.1	72
3.2 Variétés à coins normalement dilatées	76
3.2.1 Rappels sur les variétés à coins	76
3.2.2 Théorème de persistance des variétés à coins normalement dilatées en tant que stratifications a -régulières	77
3.2.3 Preuve du théorème 3.2	78

3.1 Variétés à bord normalement dilatées

3.1.1 Persistence des sous-variétés à bord normalement dilatées en tant que stratification a -régulière

Théorème 3.1. *Soient M une variété C^∞ , $f \in C^1(M, M)$ ainsi que N une sous-variété C^1 de M connexe, compacte et à bord. On note ∂N et \mathring{N} , le bord et l'intérieur de N respectivement. On suppose que f préserve et dilate normalement l'intérieur de N et son bord. Alors f dilate normalement la stratification $(\partial N, \mathring{N})$ de façon contrôlée. Cette stratification a -régulière est donc persistante.*

Autrement dit, pour toute application f' C^1 -proche de f , il existe deux sous-variétés $\partial N'$ et \mathring{N}' telles que :

- \mathring{N}' (resp. $\partial N'$) est préservée par f' et difféomorphe à \mathring{N} (resp. ∂N), par un plongement de classe C^1 proche de l'inclusion canonique,

– le couple $(N' := \mathring{N}' \cup \partial N', (\mathring{N}', \partial N'))$ est espace stratifié a -régulier et N' est l'image de N par un plongement C^0 -proche de l'inclusion canonique de N dans M .

Remarque En général N' n'est pas une sous-variété C^1 à bord car il n'y a pas de direction transverse à ∂N tangente à N' . La variété \mathring{N}' peut s'enrouler sur $\partial N'$ et former une stratification qui n'est pas toujours b -régulière.

Exemple d'une sous-variété à bord normalement dilatée, mais non persistante en tant que sous-variété C^1 Soient M le plan \mathbb{R}^2 , N le segment $[-1, 1] \times \{0\}$ et

$$f := (x, y) \mapsto (x^3/2 + x/2, 2y)$$

qui est un difféomorphisme du plan. La variété à bord N est bien normalement dilatée et la différentielle de f sur chacune des extrémités est $2 \cdot id$.

On perturbe maintenant f au voisinage d'une des extrémités A de N de façon à ce que, sur une boule B centrée en A , la perturbation f' soit égale à la composition d'une petite rotation R centrée en A avec l'homothétie H centrée en A et de rapport 2. Le théorème 3.1 assure l'existence d'une stratification $(N', (\partial N', \mathring{N}'))$ proche de N et stabilisée par cette perturbation f' .

Cette perturbation étant homotope à f , par une homotopie restant dans un petit voisinage de f dans $C^1(M, M)$ et conservant le point fixe répulsif A , par continuité, A est donc une composante connexe de $\partial N'$. On peut trouver $x \in \mathring{N}' \cap B$ telle que $T_x N'$ soit différent de la droite joignant A à x_n , sinon, au voisinage de A , N' est une demi-droite, ce qui est absurde car la composée d'une petite rotation avec une homotopie ne stabilise aucune droite. On fixe un tel x et on regarde la préorbite $(x_n)_{n \leq 0}$ de $R \circ H$ partant de x . L'application $R \circ H$ étant linéaire et conforme, l'angle entre $T_{x_n} \mathring{N}$ et $\overrightarrow{Ax_n}$ est constant et non nul. Ainsi la stratification $(N', (\partial N', \mathring{N}'))$ n'est pas b -régulière, et n'est donc pas une variété à bord.

3.1.2 Preuve du théorème 3.1

On va donc chercher une structure de lamination $\mathcal{L}_{\partial N}$ de codimension un, sur un petit voisinage $L_{\partial N}$ de ∂N dans N , cohérente avec ∂N , telle que $((L_{\partial N}, \mathcal{L}_{\partial N}), \mathcal{L}_{\mathring{N}} := \mathring{N})$ forme une structure de treillis de laminations qui contrôle f et vérifie l'hypothèse (iii) du théorème 2.1. Pour cela, il suffit de trouver une fonction réelle et continue r sur un voisinage $L_{\partial N}$ de ∂N dans N vérifiant les propriétés suivantes :

1. la préimage de 0 par r est égale au bord de N ,
2. r est une submersion de classe C^1 sur $\mathring{N} \cap L_{\partial N}$,

3. f préserve les hypersurfaces de niveau de r au voisinage de ∂N ,

4. l'hypersurface de niveau λ de r tend vers ∂N pour la topologie C^1 quand λ tend vers 0.

D'après 1, 2 et 4, la structure de lamination $\mathcal{L}_{\partial N}$ sur $L_{\partial N}$ dont les feuilles sont les composantes connexes des fibres de r , est un voisinage tubulaire de ∂N et $((L_{\partial N}, \mathcal{L}_{\partial N}), \mathring{N})$ forme une structure de treillis sur $(\partial N, \mathring{N})$. D'après 3, cette structure de treillis contrôle f . Comme $\mathcal{L}_{\partial N}$ est une fibration, l'hypothèse iii) du théorème 2.1 est bien vérifiée. Comme f dilate normalement le bord et l'intérieur de N , la stratification $(\partial N, \mathring{N})$ est normalement dilatée de façon contrôlée par f .

Pour construire la fonction r , on commence par mettre une structure de variété à bord C^∞ sur N , compatible avec sa structure C^1 initiale (voir [12]). On choisit alors une métrique riemannienne C^∞ g sur N adaptée à la dilatation normale de ∂N dans N . On note \exp l'application exponentielle associée à g . On note $n(x) \in T_x \partial N^\perp$ l'unique vecteur unitaire, orthogonal à l'espace tangent du bord de N et qui pointe vers l'intérieur de N . L'application $x \mapsto n(x)$ est de classe C^1 .

Par compacité de ∂N , il existe $r_0 > 0$ et V un voisinage de ∂N , tels que

$$\text{Exp} : \partial N \times [0, r_0[\rightarrow V$$

$$(x, t) \mapsto \exp_x(t \cdot n(x))$$

est un difféomorphisme et la préimage $f^{-1}(V)$ est incluse dans V . Soient p_1 et p_2 les projections sur la première et la deuxième coordonnée de $N \times [0, r[$. On note alors ρ la fonction sur V égale à $p_2 \circ \text{Exp}^{-1}$. C'est une submersion de V . Soit π la projection de V sur ∂N égale à $p_1 \circ \text{Exp}^{-1}$. Soient $t > \epsilon > 0$ tels que $f^{-1}(\rho^{-1}([0, t]))$ est un compact inclus dans $\rho^{-1}([0, t - \epsilon])$. Soit $L_{\partial N}$ l'ouvert $\rho^{-1}([0, t])$. Soit $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$, décroissante, valant 1 sur $] -\infty, t - \epsilon]$ et 0 sur $[t, +\infty[$. Par la suite, on s'autorisera à réduire t et donc d'adapter ϵ , ϕ et $L_{\partial N}$. Soient alors $C := \sup_N \|Tf\|$ et r' la fonction de classe C^1 sur $L_{\partial N}$ définie par :

$$\begin{aligned} r' &:= (1 - \phi \circ \rho) \cdot \rho + \phi \circ \rho \cdot \frac{\rho \circ f}{C} \\ \Rightarrow \nabla r' &= (1 - \phi \circ \rho) \cdot \nabla \rho + \phi \circ \rho \cdot \nabla \left(\frac{\rho \circ f}{C} \right) + \left(\frac{\rho \circ f}{C} - \rho \right) \nabla(\phi \circ \rho) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Montrons que r' est une submersion. On a $g(\nabla \rho, \nabla(\phi \circ \rho)) \leq 0$ et comme $C > \|Tf\|$, la fonction $(\rho \circ f / C - \rho)$ est négative. On remarque aussi que $\nabla \rho(x)$ tend vers $n \circ \pi(x)$ uniformément quand la distance entre le bord de N et x diminue. De plus $g(\nabla \rho, \nabla(\rho \circ f))$ est égal au produit scalaire de $\nabla \rho$ avec l'image par l'adjoint de Tf de $\nabla \rho$. Donc par symétrie de g , $g(\nabla \rho, \nabla(\rho \circ f))$ est égal à $g(\nabla \rho, Tf \circ \nabla \rho)$. Par conséquent, pour t assez petit, $g(\nabla \rho, \nabla(\rho \circ f))$ est proche de $g(n \circ \pi, Tf \circ n \circ \pi)$ qui est strictement positif, par dilatation normale du bord de N . Ainsi, il existe $m > 0$ tel que, pour t assez petit et tout $x \in L_{\partial N}$, on a :

$$g(\nabla r', \nabla \rho) > m \quad (3.2)$$

En particulier, r' est une submersion.

On remarque aussi que $r' = \rho$ sur un voisinage de $\rho^{-1}(\{t\})$ et $r' = \rho \circ f/C$ sur un voisinage de $f^{-1}(\rho^{-1}(\{t\}))$. On peut donc définir la fonction r suivante :

$$r : L_{\partial N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \partial N \\ \frac{r' \circ f^n}{C^n} & \text{si } x \in f^{-n}(L_{\partial N}) \setminus f^{-n-1}(L_{\partial N}), n \geq 0 \end{cases}$$

Une telle fonction r vérifie donc les propriétés 1 et 3. Il ne reste donc plus qu'à démontrer les propriétés 2 et 4 pour t assez petit. De plus, on remarque que $r|_{L_{\partial N} \setminus \partial N}$ est de classe C^1 .

Pour démontrer 4, on va prouver que les lignes de niveau de r' sont C^1 proches du bord de N pour t assez petit. Comme le bord de N est normalement dilaté, par le lemme 1.5.1, les préimages de ces lignes de niveau par f^n sont de plus en plus proches de ∂N quand n tend vers l'infini. Or l'ensemble des préimages des lignes de niveau de r' par f^n , pour n appartenant à un voisinage de l'infini, contient les lignes de niveau de r dans un voisinage de ∂N . Cela démontrera donc la propriété 4. Écrivons maintenant ceci plus en détail.

On se sert donc du lemme 1.5.1. Pour son utilisation, la variété ambiante est une variété sans bord de même dimension que N et qui contient N (une telle extension existe par le lemme du collier). La dynamique sur cette variété est une extension de $f|_N$. Et la lamination normalement dilatée est la sous-variété compacte ∂N . L'ouvert relativement compact L' sera choisi égal à ∂N . Aussi, le \mathcal{L} -fibré (F, \mathcal{F}) est égal à $\partial N \times \mathbb{R}$. On étend notre immersion Exp en morphisme de $\partial N \times \mathbb{R}$ que l'on continue à noter du même nom. Soit enfin la connexion sur ΓF qui à une section associe sa différentielle, vue comme une fonction sur ∂N .

Ce lemme 1.5.1 nous garantit donc l'existence d'un voisinage V_σ de la section nulle de ΓF et d'une application continue :

$$V_\sigma \rightarrow C^1(\partial N, \partial N) \times V_\sigma$$

$$\sigma \mapsto (f_\sigma^*, S(\sigma))$$

telle que pour $\sigma \in V_\sigma$ le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc} & & f|_N & & \\ & & \downarrow & & \\ N & \longrightarrow & N & & \\ Exp \circ S(\sigma) & \uparrow & \uparrow & Exp \circ \sigma & \\ \partial N & \longrightarrow & \partial N & & \\ & & f_\sigma^* & & \end{array}$$

Ces applications vérifient aussi : $S(0_F) = 0_F$ et $f_{0_F}^* = f|_{\partial N}$. De plus, le diamètre de $S^n(V_\sigma)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Enfin, l'image de $Exp \circ S(\sigma)$ est l'intersection d'un voisinage de ∂N avec la préimage par f de l'image de $Exp \circ \sigma$. On va montrer que chaque ligne de

niveau de r' est l'image d'une application $Exp \circ \sigma$, pour un certain $\sigma \in V_\sigma$, si t a été choisi assez petit. Ainsi une ligne de niveau de $r|_{f^{-k}(L_{\partial N})}$ sera l'image de $Exp \circ \sigma$, pour $\sigma \in S^k(V_\sigma)$; une telle ligne de niveau deviendra C^1 -proche de ∂N quand k tendra vers l'infini. Ce qui est l'assertion 4.

On a remarqué que $g(\nabla\rho, \nabla r') > 0$, en (3.2). Comme $\nabla\rho \approx n$ pour t assez petit, par le théorème des fonctions implicites, les lignes de niveau de r' sont les images par Exp de sections de ΓF . Bien sûr, la norme C^0 de ces sections tend vers 0 avec t .

On va montrer que c'est aussi le cas de la norme C^1 . Pour cela, il est plus commode d'identifier le voisinage V à $\partial N \times [0, r_0[$ et un voisinage de ∂N , via l'application Exp . Dans cette identification la section σ_μ associée à la ligne de niveau μ de r' est une fonction sur ∂N , qui vérifie :

$$\begin{aligned} r'(x, \sigma_\mu(x)) &= \mu, \quad \forall x \in \partial N \\ \Rightarrow (\partial_{T\partial N} r')(x, \sigma_\mu(x)) + (\partial_{\mathbb{R}} r')(x, \sigma_\mu(x)) \cdot T\sigma_\mu(x) &= 0, \quad \forall x \in \partial N \end{aligned} \quad (3.3)$$

Or, dans cette identification, d'après (3.2), on a :

$$\partial_{\mathbb{R}} r' = g(\nabla r', \nabla \rho) \geq m > 0$$

Par ailleurs, la forme linéaire $\partial_{T\partial N} r'$ s'identifie à $Tr' \circ T_{\partial N} Exp$. On a d'après (3.1),

$$Tr' \circ T_{\partial N} Exp = \frac{\phi \circ \rho}{C} \cdot T(\rho \circ f \circ Exp) \quad (3.4)$$

La forme linéaire $\partial_{T\partial N} r'$ est donc de norme inférieure à celle de $\partial_{T\partial N}(\rho \circ f \circ Exp)$. Comme f préserve le bord de N , la norme de $\partial_{T\partial N}(\rho \circ f \circ Exp)$ est arbitrairement petite quand t tend vers 0. Il en est donc de même pour $\partial_{T\partial N} r'$ et $T\sigma_\mu$.

Il ne reste plus qu'à prouver la propriété 2. Par dilatation normale, il existe au voisinage de ∂N un champ de cônes stable par Tf et centré en $\nabla\rho$. Donc, il existe $m' > 0$ (indépendant de t assez petit) tel que l'on a :

$$\frac{g(\nabla\rho(f^k(x)), Tf^k(\nabla\rho(x)))}{\|Tf^k(\nabla\rho(x))\|} > m', \quad \forall k \geq 0, \quad \forall x \in f^{-k}(L_{\partial N}) \quad (3.5)$$

De plus, les lignes de niveau de r' sont C^1 proches de ∂N , pour t assez petit. Donc, $\frac{\nabla r'}{\|\nabla r'\|}$ est uniformément proche de $\frac{\nabla\rho}{\|\nabla\rho\|}$ quand t est petit. Ainsi, on a :

$$C^n \cdot Tr(\nabla\rho(x)) = g(\nabla r', Tf^k(\nabla\rho)) > 0, \quad \forall x \in f^{-k}(L_{\partial N}) \setminus f^{-k-1}(L_{\partial N}) \quad (3.6)$$

Cela prouve que r est une submersion sur $L_{\partial N}$ privée du bord de N , c'est-à-dire la propriété 2.

Cela finit la preuve de ce théorème.

3.2 Variétés à coins normalement dilatées

3.2.1 Rappels sur les variétés à coins

Une application d'un ouvert de \mathbb{R}_+^n dans $\mathbb{R}^{n'}$ est de classe C^1 (resp. C^∞) si on peut l'étendre en une application de classe C^1 (resp. C^∞) d'un ouvert de \mathbb{R}^n dans $\mathbb{R}^{n'}$. La différentielle en un point d'une telle application sera la différentielle de l'une de ses extensions en ce point (qui ne dépend pas de l'extension). Une application d'un ouvert de \mathbb{R}_+^n dans $\mathbb{R}_+^{n'}$ est de classe C^1 (resp. C^∞) si sa composition avec l'inclusion canonique de $\mathbb{R}_+^{n'}$ dans $\mathbb{R}^{n'}$ est de classe C^1 (resp. C^∞).

Un C^∞ -difféomorphisme d'un ouvert de \mathbb{R}_+^n sur un ouvert de \mathbb{R}_+^n est une application qui peut s'étendre en un C^∞ -difféomorphisme d'un ouvert de \mathbb{R}^n sur un ouvert de \mathbb{R}^n .

On rappelle qu'une variété à coins N de dimension d est une variété C^∞ modélée sur \mathbb{R}_+^d . Cela signifie que les changements de cartes sont des C^∞ -difféomorphismes d'ouverts de \mathbb{R}_+^d .

L'*indice* d'un point x de N est le nombre de coordonnées nulles de l'image de x par une carte d'un ouvert contenant cet élément. On note par $b^k N$ l'ensemble des points de N d'indice supérieur ou égal à k . On note par $\partial^{0k} N$ l'ensemble des points d'indice k ; la structure de variété à coins de N induit sur $\partial^{0k} N$ une structure de variété (sans coins).

Soient $x \in N$ et E l'ensemble des couples (u, ϕ) , où ϕ est une carte de N d'un voisinage de x et u un vecteur de \mathbb{R}^n . On définit sur E une relation d'équivalence : deux couples (u, ϕ) et (v, ψ) sont équivalents si la différentielle de $\psi \circ \phi^{-1}$ au point $\phi(x)$ envoie u sur v . L'espace quotient est appelé l'*espace tangent* en x à N . On le note $T_x N$. Par transport des structures, on obtient sur $T_x N$ une structure d'espace vectoriel réel de dimension n .

Une application continue h , d'une variété à coins N dans une autre N' , est de classe C^1 (resp. C^∞), si vue à travers des cartes ϕ et ϕ' de respectivement N et N' , l'application $\phi' \circ h \circ \phi^{-1}$ est de classe C^1 (resp. C^∞) sur son ensemble de définition. Dans ce cas, pour $x \in N$, on vérifie que l'application h induit une application linéaire, dite différentielle de h en x et notée $T_x h$, qui à un vecteur $v \in T_x N$ envoie la classe d'équivalence de $(T_{\phi(x)}(\phi' \circ h \circ \phi^{-1})(u), \phi')$, où (u, ϕ) est un représentant de v et ϕ' une carte d'un voisinage de $h(x)$. L'application h est une *immersion* (resp. *submersion*) si sa différentielle est injective (resp. surjective) en tout point. Un C^∞ -difféomorphisme de variétés à coins est une application C^∞ qui possède un inverse de classe C^∞ . Un C^∞ -difféomorphisme local (de variétés à coins) est une application dont la restriction à un voisinage de tout point est un C^∞ -difféomorphisme sur son image. Un *plongement* de classe C^1 (resp. C^∞) est un homéomorphisme sur son image, qui est aussi une immersion de classe C^1 (resp. C^∞).

Soit N une variété à coins plongée par i dans une variété (sans coins). On remarque alors que la stratification $(N, (\partial^{0k} N)_k)$ plongée par i est a -régulière.

On rappelle qu'une *métrique riemannienne* sur une variété à coins est un produit scalaire sur chaque espace tangent dépendant différemment du point base.

On va maintenant définir une variété à coins $\partial^1 N$ telle que $\partial^1 N \setminus b^1 \partial^1 N$ s'identifie à $\partial^{0_1} N$. Les points de $\partial^1 N$ sont les couples (x, E) où x appartient à $b^1 N$ et E est une valeur d'adhérence de $(T_{x_n} \partial^{0_1} N)_n$ dans l'espace des plans de codimension 1 de TN , pour $(x_n)_n \in (\partial^{0_1} N)^{\mathbb{N}}$ qui tend vers x .

Cet ensemble $\partial^1 N$ est muni de la structure de variété à coins engendrée par les cartes suivantes : pour $(x, E) \in \partial^1 N$, on choisit une carte ϕ d'un voisinage distingué V de $x \in N$. Le sous-espace vectoriel E est donc de la forme $T_x \phi^{-1}(\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\} \times \mathbb{R}^{d-k})$, si x appartient à $\phi^{-1}(\mathbb{R}_+^{k-1} \times \{0\} \times \mathbb{R}_+^{d-k})$. On considère la restriction correspondante

$$(x, E) \mapsto \phi(x)$$

De telles applications engendrent une structure de variété à coins sur $\partial^1 N$.

La variété à coins $\partial^1 N$ s'envoie continûment dans N , via l'application p qui à (x, E) associe sa première coordonnée. On remarque que $x \in \partial^{0_j} N$ à exactement j -préimages par p .

On appelle *face de N* une composante connexe de $\partial^1 N$.

Propriété 3.2.1. *Il existe un C^∞ -difféomorphisme local ϕ de la variété à coins $\partial^1 N \times \mathbb{R}^+$ sur un voisinage V de $b^1 N$ dans N , telle que $\phi(\cdot, 0)$ est égal à p . L'application ϕ sera appelée *voisinage tubulaire de $\partial^1 N$* .*

Preuve

La preuve découle de la thèse de J. Cerf [5]. Pour toute variété à coins N , ce dernier construit un C^∞ -plongement de N dans une variété (sans coins) de même dimension. Il construit aussi une métrique riemannienne sur N telle que la variété $\partial^{0_k} N$ est géodésique, pour tout $k \geq 0$. La construction de l'application p est alors classique.

3.2.2 Théorème de persistance des variétés à coins normalement dilatées en tant que stratifications a -régulières

Théorème 3.2. *Soient (M, g) une variété riemannienne, N une variété à coins compacte et (N, Σ) l'espace stratifié $(N, (\partial^{0_k} N)_k)$. Soient $f \in C^1(M, M)$ et i un plongement de classe C^1 de N dans M .*

On suppose que f préserve et dilate normalement l'espace stratifié (N, Σ) plongé par i . Autrement dit, pour chaque k , f préserve l'image par i de la variété $\partial^{0_k} N$ et la dilate normalement.

Alors, cette stratification a -régulière est persistante. Cela signifie que, pour toute application $f' C^1$ -proche de f , il existe i' un plongement stratifié a -régulier de (N, Σ) dans M , tel que i' est

C^0 -proche de i , i' restreinte à chaque strate $\partial^{0_k}N$ de Σ est C^1 -proche de $i|_{\partial^{0_k}N}$ et f' préserve $i'(\partial^{0_k}N)$.

De plus, f' dilate normalement la stratification Σ plongée par i' de façon contrôlée.

Remarques

- Comme pour les variétés à bord, en général, $i'(N)$ n'est pas une sous-variété à coins de M .
- Le théorème implique en particulier que l'espace stratifié (A, Σ) est plongé par la perturbation i' de façon contrôlée pour une certaine structure de treillis de laminations. De plus, la structure de treillis construite dans la preuve induit canoniquement un système de données de contrôle sur N vérifiant la condition de c -régularité de K. Bekka [2] et contrôlant le plongement i' . Autrement dit, la stratification (N, Σ) est persistante en tant que stratification c -régulière.

Questions

- Réciproquement, on peut se demander si toute stratification c -régulière, préservée et normalement dilatée par la dynamique est persistante en tant que stratification c -régulière. Pour ce résultat, il manque essentiellement la preuve de la conjecture 2 de Trotman pour les stratifications c -régulières. Cependant C. Murolo, A. du Plessis et D. Trotman ont annoncé avoir résolu cette conjecture pour le cas c -régulier.
- Les orbifolds généralisent les structures de variétés à coins et possèdent aussi des stratifications canoniques. Considérons un orbifold plongé dans une variété, dont la stratification canonique est normalement dilatée par une application de classe C^1 : cette stratification est-elle persistante ?

3.2.3 Preuve du théorème 3.2

Ce théorème se démontre en construisant une structure de treillis de laminations sur (N, Σ) contrôlant f . L'expansivité par plaques de f sur chaque strate étant immédiate, on peut alors appliquer le corollaire 2.2 et la propriété 2.1.5, qui impliqueront la persistance de cette stratification a -régulière.

La preuve de ce théorème est plus délicate que celle concernant les variétés à bord, car la dilatation normale de $\partial^{0_1}N$ ne peut pas être uniforme si N n'est pas une variété à bord. La méthode est cependant similaire. Dans la partie I), on va montrer qu'il suffit de construire une fonction sur $\partial^1N \times \mathbb{R}^+$ vérifiant des propriétés semblables à celles déjà rencontrées dans le cadre des variétés à bord. Dans la partie II), on construira cette fonction. On procède comme pour les variétés à bord, mais par défaut de dilatation normale uniforme, on est obligé de changer la géométrie du domaine fondamental.

On commence par introduire quelques notations. Soit d la dimension de N . On identifiera N avec son image par i . Ainsi, on notera par $f \in C^1(N, N)$ l'application $i^{-1} \circ f \circ i$. On munit aussi N de la métrique riemannienne induite par celle de (M, g) .

On fixe p un voisinage tubulaire de $\partial^1 N$. On rappelle que p envoie $\partial^1 N \times \{0\}$ dans $b^1 N$. On munit $\partial^1 N \times \mathbb{R}^+$ de la métrique riemannienne induite par celle de N , via p .

Il existe \hat{V}' et \hat{V} deux voisinages de $\partial^1 N \times \{0\}$ dans $\partial^1 N \times \mathbb{R}^+$ et une unique application \hat{f} de classe C^1 de \hat{V}' dans \hat{V} tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \hat{V}' & \xrightarrow{\hat{f}} & \hat{V} \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ N & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

On note $A_k := \partial^{0k-1} \partial^1 N \times \{0\}$, pour $k \geq 1$.

Propriété 3.2.2. *Il existe pour chaque $k \geq 1$ un voisinage \hat{U}_k de A_k dans \hat{V} , tel que $p|_{\hat{U}_k}$ soit un revêtement à k feuillets de $U_k := p(\hat{U}_k)$ et tel que*

$$- \hat{f}^{-1}(\hat{U}_k) \subset \hat{U}_k \text{ et } f^{-1}(U_k) \subset U_k,$$

$$\text{avec } F_x^k := p|_{\hat{U}_k}^{-1}(x) \text{ pour } x \in U_k,$$

$$\begin{aligned} - \forall x \in f^{-1}(U_k), \quad \hat{f}(F_x^k) &= F_{f(x)}^k, \\ - \forall k \leq j, \quad x \in U_k \cap U_j, \quad F_x^k &\subset F_x^j. \end{aligned}$$

Démonstration.

Pour chaque $k \geq 0$, il existe un compact K de $\partial^{0k} N$ tel que

$$\cup_{n \geq 0} f|_N^{-n}(K) = \partial^{0k} N$$

Comme $p|_{A_k}$ est un revêtement à k feuillets de $\partial^{0k} N$ et comme p est un difféomorphisme local, il existe \hat{V}_k un voisinage ouvert de $p|_{A_k}^{-1}(K)$ dans \hat{V}' tel que $p|_{\hat{V}_k \cup \hat{f}^{-1}(\hat{V}_k)}$ et $p|_{\hat{V}_k}$ soient des revêtements à k feuillets de $V_k \cup f|_N^{-1}(V_k)$ et $V_k := p(\hat{V}_k)$ respectivement.

$$\text{On pose } \hat{V}'_k := \hat{f}^{-1}(\hat{V}_k) \setminus \hat{V}_k, \quad V'_k := p(\hat{V}'_k) = f|_N^{-1}(V_k) \setminus V_k \text{ et } \hat{U}_k := \cup_{n \geq 0} \hat{f}^{-n}(\hat{V}_k).$$

D'après l'expression de \hat{U}_k , la préimage $\hat{f}^{-1}(\hat{U}_k)$ est incluse dans \hat{U}_k .

On va montrer que $f^{-1}(U_k)$ est inclus dans U_k . Par dilatation normale, pour \hat{V}_k assez petit et $x \in f^{-1}(U_k)$, les valeurs d'adhérence de l'ensemble des hyperplans tangents à $\partial^{01} N$ en tout point proche de x sont envoyées par Tf bijectivement sur les valeurs d'adhérence de l'ensemble des hyperplans tangents à $\partial^{01} N$ d'un point proche de $f(x)$. Or un point $y \in F_{f(x)}^k$ est associé à

une de ces valeurs d'adhérence, qui possède donc une préimage par Tf . Cela entraîne que y a une préimage par \hat{f} . Ainsi x appartient à $p(\hat{f}^{-1}(\hat{U}_k))$ qui est inclus dans $p(\hat{U}_k) = U_k$.

Cela entraîne aussi que, pour $x \in f_{|N}^{-1}(U_k)$, la fibre F_x^k est incluse dans $\hat{f}^{-1}(\hat{U}_k)$ et que $\hat{f}_{|F_x^k}$ est une bijection de F_x^k sur $F_{f(x)}^k$.

On suppose que :

$$U_k \subset \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(V'_k) \cup V_k \quad \text{et} \quad p(\hat{f}^{-n}(\hat{V}'_k)) \subset f^{-n}(V'_k) \quad (3.7)$$

Comme les ensembles $(\hat{f}^{-n}(\hat{V}'_k))_n$ sont disjoints, il vient alors que F_x^k est de cardinalité k , pour $x \in V_k \cup V'_k$. Soit $x \in U_k \setminus V_k$. Par (3.7), il existe $n \geq 0$ tel que F_x^k appartient à $\hat{f}_{|N}^{-n}(\hat{V}'_k)$. Comme $\hat{f}_{|F_x^k}^n$ est une bijection de F_x^k sur $F_{f^n(x)}^k$. La cardinalité de $F_{f^n(x)}^k$ étant k , la cardinalité de F_x^k est donc égale à k . Cela implique que $p|_{\hat{U}_k}$ est un revêtement à k -feuilletés de U_k .

On va maintenant montrer (3.7). Soient $x \in U_k \setminus V_k$ et $y \in F_x^k$, comme \hat{U}_k est égal à $\hat{V}_k \cup \bigcup_{n \geq 0} \hat{f}^{-n}(\hat{V}'_k)$, il existe alors un unique $n \geq 0$ tel que y appartient à $\hat{f}^{-n}(\hat{V}'_k)$. Donc $\hat{f}^n(y)$ appartient à \hat{V}'_k et, par commutativité du diagramme, $f^n(x)$ appartient à V'_k . Cela implique que x appartient à $f^{-n}(V'_k)$.

Pour $j \geq k$ et $x \in \partial^{0k}N$ qui tend vers $y \in \partial^{0j}N$, F_x^k tend à être inclus dans F_y^j . Quitte à restreindre V_k et V_j , on peut donc supposer que, pour $x \in U_k \cap U_j$, la fibre F_x^k est incluse dans F_x^j . \square

I. Une condition suffisante pour obtenir la persistance de notre stratification

Pour construire une structure de treillis de laminations, il suffira de trouver une fonction r continue, positive, bornée, définie sur un voisinage ouvert D_r de $\partial^1 N \times \{0\}$ dans \hat{V}' et vérifiant les propriétés suivantes :

P_1 . il existe $C > 1$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} r \circ \hat{f} = C \cdot r \quad \text{sur } D_r \cap \hat{f}^{-1}(D_r) \\ r^{-1}(\{0\}) = \partial^1 N \times \{0\} \end{array} \right. ,$$

P_2 . la restriction de r à $D_r \setminus (\partial^1 N \times \{0\})$ est de classe C^1 ,

P_3 . pour $k \geq 0$, il existe un voisinage ouvert L_k de $\partial^{0k}N$ dans $U_k \setminus b^{k+1}N$ tel que, pour $x \in L_k$, la fibre F_x^k est incluse dans D_r et l'application

$$r_k : x \in L_k \mapsto (r(y))_{y \in F_x^k}$$

est localement¹¹ une submersion stratifiée : pour $l \leq k$ et $x \in \partial^{0l}N$, la différentielle en x de r_k le long de $\partial^{0l}N$ de rang maximal $k-l$; on note $T_x r_k$ cette différentielle. On demande

¹¹Restreinte à un ouvert trivialisant U , du revêtement $F^k \rightarrow L_k$, l'application r_k est à valeurs dans un espace qui s'identifie à \mathbb{R}_+^k . Pour cette structure, on demande que $r_k|_U$ soit une submersion stratifiée.

que cette submersion stratifiée vérifie la condition (a_f) de régularité de R. Thom : pour $k \geq l' \geq l$ et $(x_n)_n \in (\partial^{0l}N \cap L_k)^{\mathbb{N}}$ qui tend vers $x \in \partial^{0l'}N \cap L_k$, l'espace tangent du noyau de $T_{x_n}r_k$ tend vers celui de T_xr_k dans la grassmannienne des $(d - k)$ -plans de TM .

On va montrer maintenant que l'existence d'une telle fonction est suffisante pour construire une structure de treillis de laminations qui contrôle f .

On va commencer par construire un voisinage tubulaire (L_k, \mathcal{L}_k) de la strate $\partial^{0k}N$. L'idée est d'extraire de la submersion stratifiée r_k une structure de lamination \mathcal{L}_k sur L_k dont les feuilles sont les composantes connexes des fibres de cette submersion.

Cette construction serait une simple conséquence du premier théorème d'isotopie de R. Thom, si cette submersion était propre.

Pour chaque $l \leq k$, chaque élément $x \in \partial^{0l}N$ possède exactement l préimages par p dans $\partial^1N \times \{0\}$. Donc par P_1 , r_k envoie $L_k \cap \partial^{0l}N$ dans les k -uplets ayant l coordonnées nulles. Par (P_3) , la restriction de r_k à de petits ouverts de la variété $\partial^{0l}(L_k \cap N)$ est une submersion de classe C^1 dans \mathbb{R}^{k-l} . Ces fibres forment donc un feuilletage \mathcal{L}_k^l sur $\partial^{0l}N \cap L_k$ de dimension $d - k$ et de classe C^1 .

Il s'agit maintenant de montrer que les feuilles des feuilletages $(\mathcal{L}_k^l)_{l \leq k}$ sont les feuilles d'une lamination \mathcal{L}_k sur L_k . Par (P_3) , les espaces tangents à ces différents feuilletages forment une famille continue sur L_k . Cependant cela n'est pas suffisant pour garantir l'existence d'une telle structure de lamination.

On se propose donc d'exhiber une structure de lamination \mathcal{L}_k , dont les feuilletages $(\mathcal{L}_k^l)_{l \leq k}$ sont des restrictions. Soient $x \in L_k$ et $l \leq k$, tels que x appartient à $\partial^{0l}N$. Soit \mathbb{D}_x un petit disque, de dimension k et contenant x , transverse à tout ces feuilletages. Le disque \mathbb{D}_x intersecte une petite plaque \mathcal{L}_{kx}^l de \mathcal{L}_k^l , contenant x et simplement connexe, en un unique point. On va montrer que \mathbb{D}_x est localement l'espace transverse à \mathcal{L}_k .

Quitte à restreindre \mathbb{D}_x , par continuité de l'espace tangent de l'union de ces feuilletages, un disque \mathbb{D}' proche de \mathbb{D}_x reste bien transverse à ces feuilletages et intersecte \mathcal{L}_{kx}^l en un unique point. On étend \mathbb{D}_x sur un voisinage de x en un feuilletage (D, \mathcal{D}) de classe C^1 , dont les feuilles sont des disques assez proches de \mathbb{D}_x pour être transverses aux feuilletages $(\mathcal{L}_k^{l'})_{l' \leq k}$ et intersecter \mathcal{L}_{kx}^l en un unique point. On note $\mathbb{D}_{x'}$ la feuille de (D, \mathcal{D}) contenant $x' \in D$.

Étant donné un point x' d'un voisinage V de x dans D et un chemin $\gamma \subset \mathcal{L}_{kx}^l$ partant de l'intersection u de $\mathbb{D}_{x'}$ avec \mathcal{L}_{kx}^l et arrivant en x , on peut suivre l'intersection du disque $\mathbb{D}_{\gamma(t)}$ avec la feuille de x' dans un certain feuilletage $\mathcal{L}_k^{l'}$; à condition que cette intersection "ne s'interrompe pas trop tôt". Une telle interruption ne peut se produire qu'à la frontière de $D \cap \partial^{0l'}N \cap L_k$. Ainsi, trois accidents peuvent se produire : l'interruption est due soit à la frontière de L_k , soit à la frontière de D ou soit à la frontière de $\partial^{0l'}N$.

Le premier accident peut être évité en considérant \mathbb{D}_x et D inclus dans L_k . Le deuxième accident peut être évité en considérant V et \mathcal{L}_{kx}^l assez petit pour que l'intersection soit toujours incluse dans D . On va maintenant montrer par l'absurde que le troisième accident est impossible. Soit $t > 0$ maximal tel que, pour x' et $\gamma_{[0,t]}$, l'intersection soit bien définie. Le chemin β partant de x' , déduit de γ par holonomie, est inclus dans $L_k \cap \partial^{0l'} N$ et a son adhérence qui intersecte $L_k \cap \partial^{0l''} N$, avec $l'' \neq l'$. Cela implique que $l' < l'' \leq k$. Ceci contredit le fait que l'application $s \mapsto r_k \circ \beta(s)$ soit constante sur $[0, t[$. Cela contre-dit le fait que l'application r est localement constante sur les feuilles de ces différents feuilletages.

Comme \mathcal{L}_{kx}^l est simplement connexe, cette intersection dépend de x' mais pas du chemin γ . Soit ϕ l'application qui à $x' \in V$ associe l'intersection u de $\mathbb{D}_{x'}$ avec \mathcal{L}_{kx}^l et l'intersection t de \mathbb{D}_x avec la plaque de $\mathcal{L}_k^{l'}$ contenant x' considérée ci-dessus. On montre sans peine que cette application définit un homéomorphisme sur son image, qui est ouverte, et que cette application est différentiable le long des feuilletages $(\mathcal{L}_k^l)_{l \leq k}$, de différentielle inversible et dépendant continûment de $x' \in V$.

De telles applications p (restreintes à la préimage du produit d'un petit voisinage de x dans \mathcal{L}_{kx}^l par un petit voisinage de x dans $\mathbb{D}_x \cap N$) engendrent ainsi une structure de lamination \mathcal{L}_k sur L_k , dont les feuilles sont les fibres de r_k .

Pour montrer que $\mathcal{T} := (\mathcal{L}_k)_k$ est une structure de treillis de laminations sur (A, Σ) , où \mathcal{L}_k est le voisinage tubulaire de $\partial^{0k} N$, il suffit de vérifier la condition de feuilletage. Cela revient à montrer, pour $k > l$, que $\mathcal{L}_k|_{L_k \cap L_l}$ est un feuilletage de $\mathcal{L}_l|_{L_k \cap L_l}$. On rappelle que les feuilles de \mathcal{L}_k et \mathcal{L}_l sont les composantes connexes des fibres de r_k et r_l respectivement. Par (P_1) , pour $j \leq l$ et $x \in L_k \cap L_l \cap \partial^{0j} N$, les points $r_k(x)$ et $r_l(x)$ ont chacun j coordonnées nulles. Donc $(r(y))_{y \in (F_x^k \setminus F_x^l)}$ n'a aucune coordonnée nulle. Ainsi, par (P_1) et (P_2) , l'application suivante est localement une submersion de variété à coins de classe C^1 :

$$x \in L_k \cap L_l \mapsto (r(y))_{\{y \in (F_x^k \setminus F_x^l)\}}$$

On fixe un petit voisinage distingué U de x pour la structure de variété à coins N . On identifie U à un ouvert de \mathbb{R}_+^d via une carte de N . Dans cette identification, cette submersion locale restreinte à $U \cap L_k \cap L_l$ peut s'étendre sur un ouvert de \mathbb{R}^d et ainsi définir un feuilletage \mathcal{F} de classe C^1 . Par (P_3) , ces feuilles sont transverses à l'identification de la lamination $(L_l \cap L_k \cap U, \mathcal{L}_l|_{L_k \cap L_l \cap U})$. D'après la propriété 2.1.2, $\mathcal{L}_k|_{L_k \cap L_l \cap U}$ est donc bien un feuilletage de $\mathcal{L}_l|_{L_k \cap L_l \cap U}$, car $\mathcal{L}_k|_{L_k \cap L_l \cap U}$ est égal à $\mathcal{F} \pitchfork \mathcal{L}_l|_{L_k \cap L_l \cap U}$, pour tout ouvert distingué U de N .

Pour $k \geq 0$, soit $V_k := L_k \cap f^{-1}(L_k)$. Par (P_1) , f est un endomorphisme \mathcal{T} -contrôlé et $(V_k)_k$ est une famille de voisinages adaptée à f .

On remarque finalement que, par (P_1) , la condition (iii) du théorème 2.1 est bien vérifiée.

II. Réalisation de la condition suffisante

On commence par rajouter quelques notations à celles déjà établies avant I). Pour $k \geq 1$, soient $A_k := (\partial^{0_{k-1}}\partial^1 N) \times \{0\}$ et $B_k := \text{adh}(A_k)$. Chaque point $y \in \hat{V}$ possède un voisinage U_y tel que $p|_{U_y}$ soit un difféomorphisme sur son image. On note $p_y := p|_{U_y}^{-1}$ l'application de $p(U_y)$ dans U_y .

i Construction de R

Pour x appartenant à $\Upsilon^n := \bigcap_{k=0}^n \hat{f}^{-k}(\hat{V}')$, on définit :

$$r^n(x) := \sum_{k=0}^n p_2 \circ \hat{f}^k(x)$$

où p_2 est la projection de $\partial^1 N \times \mathbb{R}^+$ sur \mathbb{R}^+ .

Pour $x \in \Upsilon^{n+1}$, on a

$$r^n(\hat{f}(x)) - r^n(x) = p_2 \circ \hat{f}^{n+1}(x) - p_2(x)$$

Par dilatation normale et compacité de N , il existe $M \geq 0$ et $T > 0$ tels que, avec $R := r^M$ et $\Upsilon := R^{-1}([0, T])$ que l'on suppose inclus dans Υ^{M+1} , on a :

i.0. $R^{-1}(\{0\}) = B_1$.

i.1. $\exists C > \lambda > 1; \forall x \in \Upsilon$, on a $C \cdot R(x) \geq R \circ \hat{f}(x) \geq \lambda \cdot R(x)$.

i.2. Pour tout $k \geq 0$, quitte à restreindre \hat{U}_k et U_k , l'ouvert Υ contient \hat{U}_k et l'application

$$x \in U_k \mapsto (R(y))_{y \in F_x^k}$$

est localement une submersion C^1 de variétés à coins dans \mathbb{R}_+^k

ii Définition itérative de r

Pour construire r , on va choisir un fermé U de Υ , disjoint de B_1 , tel que l'intérieur de $\hat{f}^{-1}(U)$ contient U et tel que l'union $\bigcup_{n \geq 0} \hat{f}^{-n}(U)$ soit égale à $\Upsilon \setminus B_1$. On va aussi choisir une fonction Ψ de classe C^1 sur Υ égale à 1 sur U et à 0 sur $\Upsilon \setminus \hat{f}^{-1}(U)$. On pose $D := \hat{f}^{-1}(U) \setminus U$ et on définit :

$$R_1 := \Psi \cdot R + (1 - \Psi) \cdot \frac{R \circ \hat{f}}{C}$$

ainsi que :

$$r : \Upsilon \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$y \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y \in B_1 \\ \frac{R_1 \circ \hat{f}^n(y)}{C^n} & \text{si } y \in \hat{f}^{-n}(D), n \geq 0 \\ R_1(y) & \text{si } y \in U \end{cases}$$

Les propriétés (P_1) et (P_2) sont alors faciles à vérifier.

Pour montrer (P_3) , on commence par calculer le noyau de la différentielle de r_k en $x \in U_k$. Pour cela, on calcule la différentielle de r en $y \in \Upsilon \setminus B_1$. On a :

$$d_y r = \begin{cases} dR_1 \circ T_y \hat{f}^n & \text{si } y \in \hat{f}^{-n}(D) \\ d_y R_1 & \text{si } y \in O \end{cases}$$

On note $n_y := 0$ si y appartient à $B_1 \cup U$ et $n_y := n$ si y appartient à $\hat{f}^{-n}(D)$.

On a ainsi, pour $x \in U_k$:

$$\ker T_x r_k = \ker (d_x (R_1 \circ \hat{f}^{n_y} \circ p_y))_{y \in F_x^k} \quad (3.8)$$

Mais, pour $k > 1$ et x appartenant à un petit voisinage de $\partial^{0k}N$, les entiers $(n_y)_{y \in F_x^k}$ n'ont aucune raison d'être égaux. Et, comme la dilatation normale de $\partial^{01}N$ n'est pas uniforme, les espaces $(\ker(d_x(R_1 \circ \hat{f}^{n_y} \circ p_y)))_{y \in F_x^k}$ ne sont pas assurément proches des espaces $(\ker(d_y R))_{y \in F_x^k}$. De plus, les n_y premiers itérés de $y \in F_x^k$ ne restent pas forcément ni dans \hat{U}_k ni dans un voisinage de A_k où sa dilatation normale agit.

Pour palier à ce problème, l'idée intuitive est de regrouper par paquet les éléments de la fibre F_x^k , en procédant par récurrence croissante sur k .

Par dilatation normale, pour chaque k , tout plan de codimension k de TN , assez proche d'un plan tangent à $\partial^{0k}N$, a toutes ses préorbites par Tf , basées dans un certain voisinage L_k de $\partial^{0k}N$, qui tendent à être tangentes à $\partial^{0k}N$. Appelons, de façon informelle, *le bassin de répulsion de $T\partial^{0k}N$* l'union de tels plans de codimension k de TN . On va maintenant esquisser la preuve de (P_3) , par récurrence croissante :

Pour $k = 1$, les difficultés précédemment énoncées n'existent pas : pour D assez proche de $\partial^{01}N$, on choisit L_1 pour que le point y de la fibre F_x^1 de tout élément $x \in L_1$ arrive à D en étant resté dans $p_{\hat{U}_1}^{-1}(L_1)$ et $\ker T_{f^{n_y}(x)} r_1$ appartient au bassin de répulsion de $T\partial^{01}N$.

Pour $k > 1$ et $x \in L_k$, si les entiers $(n_y)_{y \in F_x^k}$ sont tous égaux à un certain entier n , on s'arrange pour que, quelque soit $y \in F_x^k$, chaque point y de la fibre F_x^k arrive à D en étant resté dans $p_{\hat{U}_k}^{-1}(L_k)$ et pour que $\ker(T_{f^n(x)} r_k)$ appartient au bassin de répulsion de $T\partial^{0k}N$.

Si les entiers $(n_y)_{y \in F_x^k}$ ne sont pas égaux, le minimum n de cette famille n'est pas atteint pour exactement $l > 0$ éléments de F_x^k . On va alors s'arranger pour que :

- les points $\{f^i(x)\}_{i=0}^n$ appartiennent à $U_k \cap L_k$,

- le point $f^n(x)$ appartient à U_l et, par récurrence sur k , le noyau de $T_{f^n(x)}r_l$ intersecte le noyau de $(TR_1 \circ Tp_y)_{y \in F_{f^n(x)}^k \setminus F_{f^n(x)}^l}$ en un plan de codimension k qui appartient au bassin de répulsion de $T\partial^{0k}N$.

La géométrie de D est donc dictée par la dilatation normale des strates $(\partial^{0k}N)_k$ et par la géométrie des voisinages $(U_k)_k$.

Comme la dilatation normale de ces strates n'est uniforme que pour $k =: d$ maximal, c'est par récurrence décroissante sur k que l'on va construire D .

iii Géométrie du domaine fondamental

On va définir dans cette partie et la suivante une famille de petits réels strictement positifs $(t_k)_{k=1}^d$ par récurrence décroissante : le réel t_k sera considéré assez petit en fonction de $(t_j)_{j>k}$. On dira que la famille $(t_k)_{k=1}^d$ est *récurivement assez petite*.

Pour $k \in \{1, \dots, d\}$ et $t > 0$, on note :

$$W_k^t := \left\{ x \in U_k; \sum_{y \in F_x^k} R(y) < t \right\}.$$

On pose :

$$U := \Upsilon \setminus p_{|\hat{U}_k}^{-1}(W_k^{t_k})$$

Par (i.1) et la propriété 3.2.2, pour $t < T$, on a $f^{-1}(W_k^t) \subset W_k^{t/\lambda}$. On suppose donc chaque t_k inférieur à T , ainsi l'union $\cup_{n \geq 0} \hat{f}^{-n}(U)$ est égale à $\Upsilon \setminus B_1$. On suppose aussi $(t_k)_k$ récurivement assez petite, pour que $C_k := \text{adh}(W_k \setminus \cup_{l>k} f^{-1}(W_l))$ soit un compact propre inclus dans U_k et $\hat{f}^{-1}(\cup_{j \geq k} p_{|\hat{U}_j}^{-1}(C_j))$ est inclus dans l'intérieur de $\cup_{j \geq k} p_{|\hat{U}_j}^{-1}(C_j)$, pour $k \in \{1, \dots, d\}$.

On démontrera à la fin la propriété, non triviale, suivante :

Propriété 3.2.3. *Il existe une fonction Ψ de classe C^1 sur Υ , valant 1 sur U et 0 sur $\Upsilon \setminus \hat{f}^{-1}(U)$ tel que, pour $(t_k)_{k=1}^d$ récurivement assez petite, le noyau $E_k(x) := \ker(dR_1 \circ T_x p_y)_{y \in F_x^k}$ soit uniformément proche de celui de $x \mapsto (dR \circ T_x p_y)_{y \in F_x^k}$, pour $x \in C_k$.*

Il s'agit maintenant de fixer $(t_k)_k$, par une récurrence décroissante, en fonction de la dilatation normale. Pour convenir à la définition itérative de r , on va matérialiser l'influence de la dilations normale des strates de $(\partial^{0k}N)_k$ par des champs de cônes.

iv Champs de cônes

On rappelle qu'un champ de cônes χ sur C_k est un ouvert de la grassmannienne de $TN|_{C_k}$ tel que, avec $\chi(x)$ l'intersection de χ avec $T_x N$, pour $x \in C_k$, on a :

$$\begin{cases} \chi(x) \neq \emptyset \\ \forall u \in \chi(x), \forall t \in \mathbb{R}, tu \in \chi(x) \end{cases}$$

La distance de χ à E_k est le plus petit $\epsilon > 0$ tel que, pour $x \in C_k$ et $u \in \chi(x)$ unitaire, il existe un vecteur unitaire de $E_k(x)$ à une distance inférieure à ϵ de u .

La dilatation normale et la propriété 3.2.3 implique le

Fait 3.2.4. *Pour $k \in \{1, \dots, d\}$, $\epsilon_k > 0$ et t_k assez petit devant $(t_j)_{j>k}$, il existe un champ de cônes χ_k sur C_k tel que :*

1. *Pour $x \in C_k$, le cône $\chi_k(x)$ contient $E_k(x)$ et $(T_x N \setminus \chi_k(x)) \cup \{0\}$ contient un espace vectoriel de dimension k . De plus, la distance de χ_k à E_k est inférieure à ϵ .*
2. *Le champ de cônes χ_k est f_* -stable : pour $x \in C_k \cap f^{-1}(C_k)$, le cône $T_x f^{-1}(\chi_k(f(x)))$ est inclus dans $\chi_k(x)$.*

Démonstration. On munit M d'une métrique riemannienne adaptée à la dilatation normale de $\partial^{0k} N$ sur le compact $\partial^{0k} N \cap C_k$. Un calcul de la matrice de la différentielle de f au voisinage de \tilde{K}_k dans les coordonnées associées à une carte de la sous-variété $\partial^{0k} N$ de M implique alors simplement ce fait. \square

L'esquisse de la preuve dans ii) invite à fixer définitivement $(t_j)_{j=1}^d$ et $(\epsilon_j)_{j=1}^d$ tels que, pour $j \in \{1, \dots, d\}$, on a :

(A_j) pour $i > j$ et $x \in C_j \cap C_i$, le cône $\chi_j(x) \cap \ker(dR_1 \circ T_x p_y)_{y \in F_x^i \setminus F_x^j}$ est inclus dans $\chi_i(x)$.

Pour ce faire, on procède par récurrence décroissante sur $j \in \{1, \dots, d\}$:

L'assertion (A_d) est vide de sens. On fixe alors ϵ_d quelconque et t_d pour que tout ce qui précède soit vérifié.

Soit $k \in \{1, \dots, d-1\}$. Supposons $(\epsilon_j)_{j>k}$ et $(t_j)_{j>k}$ fixés pour que tout ce qui précède (et notamment les assertions (A_j), pour $j > k$) soit vérifié.

Pour tous $i > k$ et $x \in C_k \cap C_i$, l'espace $E_i(x)$ est inclus dans le cône ouvert $\chi_i(x)$ et la fibre F_x^k est incluse dans F_x^i . Donc, pour ϵ_k assez petit, le cône $\chi_k(x)$, qui est ϵ_k -proche de $E_k(x)$, vérifie :

$$\chi_k(x) \cap \ker(dR_1 \circ T_x p_y)_{y \in F_x^i \setminus F_x^k} \subset \chi_i(x)$$

Par compacité, on peut choisir ϵ_k indépendamment de $x \in C_k \cap C_i$. Ainsi, l'assertion (A_j) est vérifiée pour un tel ϵ_k que l'on fixe maintenant. On fixe aussi t_k pour que tout ce qui précède soit vérifié.

v Vérification de la propriété (P_3)

On va montrer par récurrence croissante la propriété suivante :

Propriété 3.2.5. *Sur C_k , le noyau de la différentielle de r_k est inclus dans χ_k .*

Démonstration. Pour commencer, on remarque que :

$$\emptyset =: M_{d+1} \subset M_d := p_{|\hat{U}_d}^{-1}(C_d) \subset \cdots \subset M_k := \cup_{j \geq k} p_{|\hat{U}_j}^{-1}(C_j) \subset \cdots \subset M_0 =: \Upsilon$$

est une filtration. Autrement dit, la préimage par \hat{f} de M_k est incluse dans l'intérieur de M_k , pour $k \in \{1, \dots, d\}$.

Comme $p_{|\hat{U}_1}^{-1}(C_1)$ est égal à $\text{adh}(p_{|\hat{U}_1}^{-1}(W_1) \setminus \hat{f}^{-1}(M_2))$ toute orbite partant de $p_{|\hat{U}_1}^{-1}(C_1) \setminus A_1$ arrive en D en étant restée dans C_1 . Ainsi, le noyau de la différentielle de r_1 en $x \in C_1$, qui est égale à celui de $f_*^{n_y}(dR_1 \circ Tp_{f^{n_y}(y)})_{y \in F^1(z)}$ par (3.8), est inclus dans $\chi_1(x)$ par les assertions 1 et 2 du fait 3.2.4.

Soit $k \in \{1, \dots, d-1\}$. On suppose que, pour $j > k$, la propriété 3.2.5 est vérifiée. Comme $p_{|\hat{U}_k}^{-1}(C_k)$ est égal à $\text{adh}(p_{|\hat{U}_k}^{-1}(W_k) \setminus f^{-1}(M_{k-1}))$, toute orbite partant de $p_{|\hat{U}_k}^{-1}(C_k) \setminus A_k$ arrive en D en franchissant $(M_i)_{i \leq k}$ par ordre décroissant.

Soit $x \in C_k$. Si tous les points de F_x^k arrivent en D en étant restés dans M_k , alors ils sont aussi tous restés dans $p_{|\hat{U}_k}^{-1}(C_k)$. La propriété 3.2.5 s'obtient alors comme dans le cas $k = 1$, car les entiers $(n_y)_{y \in F_x^k}$ sont tous égaux. Sinon, on considère $n \geq 0$ minimal tel qu'il existe un élément de $y \in F_x^k$ dont l'image $\hat{f}^n(y)$ appartient à $p_{|\hat{U}_l}^{-1}(C_l)$, pour $l < k$. On choisit alors l minimal. Par minimalité de n et comme x n'appartient pas à $f^{-1}(\cup_{j > k} C_j)$, le point $x' := f^n(x)$ appartient à C_k . Comme la fibre $F_{x'}^k$ contient $F_{x'}^l$, on a :

$$\ker T_{x'} r_k = \ker T_{x'} r_l \cap \ker T_{x'}(r(z))_{z \in F_{x'}^k \setminus F_{x'}^l}$$

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\ker T_{x'} r_k \subset \chi_l(x') \cap \ker T_{x'}(r(z))_{z \in F_{x'}^k \setminus F_{x'}^l}$$

On va montrer que les éléments de $F_{x'}^k \setminus F_{x'}^l$ appartiennent à D . On a alors d'après (A_l) :

$$\ker T_{x'} r_k \subset \chi_l(x') \cap \ker T_{x'}(R_1(z))_{z \in F_{x'}^k \setminus F_{x'}^l} \subset \chi_k(x')$$

Et par f_* -stabilité de χ_k , on a :

$$\ker T_x r_k \subset (f_*^n \chi_k)(x) \subset \chi_k(x)$$

Ce que l'on souhaitait démontrer.

On suffit donc de montrer que les éléments de $F_{x'}^k \setminus F_{x'}^l$ appartiennent à D . Tout d'abord, le point x' appartient à C_l . Donc, tous les points de $F_{x'}^k \setminus F_{x'}^l$ n'appartiennent pas à $\cup_{j > l} \hat{f}^{-1}(p_{|\hat{U}_j}^{-1}(W_j)) = \cup_{j > l} \hat{f}^{-1}(p_{|\hat{U}_j}^{-1}(C_j))$. Par définition, ces éléments n'appartiennent pas n'ont plus à $p_{|\hat{U}_l}^{-1}(C_l)$. Enfin par minimalité de l , l'ensemble $F_{x'}^k \setminus F_{x'}^l$ ne peut pas intersecter $\cup_{j < l} p_{|\hat{U}_j}^{-1}(C_j)$. Ainsi, l'ensemble $F_{x'}^k \setminus F_{x'}^l$ est inclus dans $\hat{f}^{-1}(U) = \cup_j \hat{f}^{-1}(p_{|\hat{U}_j}^{-1}(C_j))$. Comme x' appartient à C_k , les éléments de $F_{x'}^k \setminus F_{x'}^l$ appartiennent bien à D . \square

Cette dernière propriété montre en particulier que $\ker(T_x r_k)$ est un espace de codimension k , pour tout $x \in C_k$.

On montre maintenant par récurrence sur k que la propriété (P_3) est vérifiée. Soit $k \in \{1, \dots, d\}$. On va commencer par montrer que $\ker(T r_k)$ est continue sur C_k . Par l'hypothèse de récurrence, seule la continuité en $\tilde{K}_k := C_k \cap \partial^{0k} N$ n'est pas évidente. Soit $(x_n)_n \in C_k^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $x \in \tilde{K}_k$. Soit E une valeurs d'adhérence de $(\ker(T_{x_n} r_k))_n$. Les espaces E et $E_k(x) = T_x \partial^{0k} N$ sont donc ϵ_k -proches. Par f_* -stabilité de $\ker T r_k$ et f -stabilité de \tilde{K} , il existe une valeurs d'adhérence E_m de $(\ker(T_{f^m(x_n)} r_k))_n$, qui est ϵ_k -proche de $E_k(f^m(x))$ et telle que E soit égal à $(T_x f^m)^{-1}(E_k(f^m(x)))$. Donc par dilatation normale et la propriété 1 de 3.2.4, l'espace E est égal à $E_k(x) = T_x \partial^{0k} N$. Cela prouve la continuité de $\ker(T r_k)$, par compacité de la grassmannienne.

On finit maintenant de démontrer la propriété (P_3) . Pour $x \in \partial^{0k} N$, il existe $n \geq 0$ tel que le point $f^n(x)$ appartient à l'intérieur de \tilde{K}_k dans $\partial^{0k} N$. Par dilatation normale, il existe un voisinage V_x de x dont l'image par f^n est incluse dans C_k et tel que, pour tout $x' \in V_x$, l'espace $\ker T_{x'} r_k$ est de codimension k .

Par régularité de $T f^n$ et régularité de $\ker T r_k|_{C_k}$, quitte à réduire V_x , la restriction $\ker T r_k|_{V_x}$ est continue.

On pose alors $L_k := \text{int}(\cup_{x \in \partial^{0k} N} V_x \cup C_k)$, qui vérifie donc la propriété (P_3) .

vi Construction de Ψ

La difficulté de cette propriété réside dans le fait que la famille de réels $(t_k)_k$ soit récursivement assez petite et que les compacts $(C_k)_k$ s'intersectent.

On rappelle que, dans la partie i), on a défini les réels $C > \lambda > 1$. On fixe une fonction ϕ croissante de classe C^1 sur \mathbb{R} , s'annulant sur $] -\infty, 1/\lambda]$ et égale à 1 sur $]1, \infty[$. Pour $t > 0$, on pose $\phi_t := \phi(\cdot/t)$.

$$\text{Soit } \Psi := \prod_{j=1}^d \phi_j \quad \text{avec} \quad \phi_k := z \in \Upsilon \mapsto \begin{cases} \phi_{t_k}(\sum_{y \in F_{p(z)}^k} R(y)) & \text{si } z \in \hat{U}_k \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Remarquons que Ψ est de classe C^1 quand $(t_k)_k$ est récursivement assez petite : pour $k \in \{1, \dots, d\}$, il suffit que t_k soit assez petit pour que l'adhérence de $p_{|\hat{U}_k}^{-1}(W_k)$ intersectée avec la frontière de \hat{U}_k soit incluse dans $\hat{f}^{-1}(\cup_{j>k} p_{|\hat{U}_j}^{-1}(W_j))$, où $\prod_{j=k+1}^d \phi_j$ est nulle.

On remarque enfin que la fonction Ψ est bien nulle sur $\Upsilon \setminus \hat{f}^{-1}(U)$ et égale à 1 sur U .

On doit donc montrer que, pour $(t_j)_j$ récursivement assez petite, le noyau $E_k(x) := \ker(dR_1 \circ T p_y)_{y \in F_x^k}$ est uniformément proche de celui de $x \mapsto (dR \circ T p_y)_{y \in F_x^k}$, pour $x \in C_k$ et $k \in \{1, \dots, d\}$.

Pour toute la suite de cette preuve, les estimations seront uniformes sur C_k ou sur $p_{|\hat{U}_k}^{-1}(C_k)$ et seront effectuées pour $(t_k)_k$ récursivement assez petite.

On commence par calculer la différentielle de R_1 :

$$dR_1 = \Psi dR + \frac{(1 - \Psi)}{C} dR \circ T\hat{f} + \left(R - \frac{R \circ \hat{f}}{C} \right) d\Psi$$

Et, on a pour $z \in \Upsilon$:

$$d_z \Psi = \sum_{\{i; \hat{U}_i \ni z\}} \left(\prod_{j \neq i} \phi_j \right) (z) \cdot d_z \phi_i = \sum_{\{i; \hat{U}_i \ni z\}} \underbrace{\left(\prod_{j \neq i} \phi_j \right) (z)}_{=: f_i(z)} \cdot \frac{\phi'_i}{t_i} \cdot \sum_{y \in F_{p(z)}^i} d(R \circ p_y)$$

On analyse maintenant la différentielle de R_1 .

- Les fonctions Ψ et $(1 - \Psi)/C$ sont à valeurs dans $[0, 1]$.
- Par dilatation normale, la différentielle $\frac{dR \circ T\hat{f}}{\|dR \circ T\hat{f}\|}$ est proche de $\frac{dR}{\|dR\|}$ sur $p_{|\hat{U}_k}^{-1}(C_k)$. On a ainsi l'existence d'une fonction continue a sur Υ , bornée et supérieure à 1, telle que :

$$\Psi dR + \frac{(1 - \Psi)}{C} dR \circ T\hat{f} = a \cdot dR + o(1), \quad \text{sur } p_{|\hat{U}_k}^{-1}(C_k).$$

On note que la fonction a est indépendante de $(t_j)_j$.

- La fonction $\rho := \left(R - \frac{R \circ \hat{f}}{C} \right)$ est positive et inférieure à R , d'après (i.1). Donc, pour $l \leq k$, sur $p_{|\hat{U}_l}^{-1}(C_l)$, la fonction ρ est à valeurs dans $[0, t_l]$.

Malheureusement, la norme uniforme de $\rho \cdot d\Psi$ sur C_k n'est ni négligeable ni dans la direction de dR , pour $k > 1$. Cependant, la propriété 3.2.3 veut que l'intersection des noyaux de $(dR_1 \circ T p_y)_{y \in F_x^k}$ soit proche de l'intersection des noyaux de $(dR \circ T p_y)_{y \in F_x^k}$, sur C_k .

On remarque que, pour $i > l$, la norme uniforme de la fonction f_i est petite devant $1/t_l$.

Ainsi, pour $x \in C_l$ et $z \in F_x^l$, on a :

$$\rho(z) \cdot \sum_{\{i > l; \hat{U}_i \ni z\}} f_i(z) \sum_{y \in F_x^i} d(R \circ p_y) = o(1)$$

Et, pour $z \in \hat{U}_i \setminus p_{|\hat{U}_i}^{-1}(C_i)$, on a :

$$f_i(z) = 0$$

On conclut que, pour $x \in C_k$ et $z \in F_x^k$, si $l \leq k$ est minimal tel que z soit dans $p_{|\hat{U}_l}^{-1}(C_l)$, on a :

$$d_z R_1 = a(z) \cdot d_z R + \rho(z) \cdot f_l(z) \sum_{y \in F_x^l} d(R \circ p_y) + o(1)$$

Aussi, pour $k \in \{1, \dots, d\}$ et $x \in C_k$, si x appartient exactement à $(C_{i_j})_{j=1}^l$, pour $(i_j)_j \in \{1, \dots, k\}^l$ croissant (et ainsi $i_l = k$), on a pour $z \in F_x^{i_j} \setminus F_x^{i_j-1}$ (avec $F_x^0 := \emptyset$) :

$$d_z R_1 = a(z) \cdot d_z R + \rho(z) \cdot f_{i_j}(z) \sum_{y \in F_x^{i_j}} d(R \circ p_y) + o(1)$$

On munit F_x^k d'un ordre compatible avec l'indexation $(i_j)_j$, selon lequel on effectue un produit extérieur :

$$\bigwedge_{z \in F_x^k} d(R_1 \circ p_z) = \bigwedge_{j=1}^l \bigwedge_{z \in F_x^{i_j} \setminus F_x^{i_{j-1}}} \left(a(z) d(R \circ p_z) + \rho(z) \cdot f_{i_j}(z) \sum_{y \in F_x^{i_j}} d(R \circ p_y) + o(1) \right)$$

tous les scalaires étant positifs, ce produit est égal à :

$$\prod_{j=1}^l \left(\prod_{z \in F_x^{i_j} \setminus F_x^{i_{j-1}}} a(z) + \sum_{z \in F_x^{i_j} \setminus F_x^{i_{j-1}}} \rho(z) \cdot f_{i_j}(z) \prod_{y \in F_x^{i_j} \setminus (F_x^{i_{j-1}} \cup \{z\})} a(y) \right) \bigwedge_{z \in F_x^k} (d(R \circ p_z) + o(1))$$

Cela implique le noyau de $(d(R_1 \circ p_y))_{y \in F_x^k}$, est de codimension k et uniformément proche de $\ker(d(R \circ p_y))_{y \in F_x^k}$ sur C_k , pour une famille $(t_j)_j$ récursivement assez petite.

□

Fibré normalement axiome A

Sommaire

4.1	Théorèmes de persistance	91
4.2	Preuve de la persistance	94
4.2.1	Stratifications de laminations et structures de treillis persistantes	95
4.2.2	Voisinages tubulaires des feuilles de \mathcal{L}	96
4.2.3	Hypothèse de récurrence	97
4.2.4	Etape $j=N$	97
4.2.5	Etape $i + 1 \rightarrow i$	98

4.1 Théorèmes de persistance

Dans le cadre des difféomorphismes hyperboliques, on aimerait unifier deux remarquables théorèmes de persistance, que l'on commence par exposer.

Rappelons qu'un *difféomorphisme axiome A vérifie la condition de transversalité forte (ATF)* si :

- l'ensemble non errant Ω est hyperbolique,
- les points périodiques sont denses dans Ω ,
- les variétés stables et instables des points de Ω s'intersectent transversalement.

On rappelle qu'un difféomorphisme f d'une variété est dit C^1 -structurellement stable si toute C^1 -perturbation de f est conjuguée à f via un homéomorphisme.

Les travaux de Smale [27], Palis [20], de Melo [6], Mañé [16], Robbin [21] et Robinson [22] ont abouti au théorème suivant :

Théorème 4.1. *Les difféomorphismes C^1 -structurellement stables d'une variété compacte sont exactement les difféomorphismes ATF.*

Soit (L, \mathcal{L}) une lamination compacte plongée dans une variété M . On identifie (L, \mathcal{L}) à son image dans M . Soit f un difféomorphisme de M préservant (L, \mathcal{L}) . On dit que f est *normalement hyperbolique* sur (L, \mathcal{L}) si le support L est f -invariant ($f(L) = L$) et s'il existe deux sous-fibrés E^s et E^u de la restriction du fibré tangent de M à L , dit *espace fortement stable et fortement instable*, tels que :

- E^s et E^u sont Tf -invariants,
- $E^s \oplus T\mathcal{L} \oplus E^u = TM|_L$,
- il existe un réel $\lambda < 1$ vérifiant pour $x \in L$, $u \in T_x\mathcal{L} \setminus \{0\}$ et $v \in E^u(x)$:

$$\|T_x f|_{E^s}\| \leq \lambda \cdot \min\left(1, \frac{\|Tf|_{T_x\mathcal{L}}(u)\|}{\|u\|}\right) \quad \text{et} \quad \lambda \cdot \|T_x f(v)\| \geq \max(1, \|Tf|_{T_x\mathcal{L}}\|)\|v\|$$

Dans ce cadre, le difféomorphisme f est dit *expansif par plaques* sur \mathcal{L} lorsque : pour tout $\epsilon > 0$ assez petit, ainsi que pour tout couple de ϵ -pseudo-orbites $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ respectant les plaques de \mathcal{L} si, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la distance $d(x_n, y_n)$ est strictement inférieure à ϵ , alors x_0 et y_0 appartiennent à une même plaque de diamètre inférieur à ϵ .

Théorème 4.2 (Hirsch-Pugh-Shub, 1974'). *Si $f \in \text{Diff}^1(M)$ préserve une lamination compacte plongée (L, \mathcal{L}) normalement hyperbolique, sur laquelle f est expansif par plaques, alors cette lamination est persistante.*

Cela signifie que, pour f' C^1 -proche de f , il existe un plongement i' de \mathcal{L} dans M proche de l'inclusion canonique et $f'_ \in \text{End}_{f|_L}(\mathcal{L})$ proche de $f|_L$ tels que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccccc} & & f' & & \\ & & \downarrow & & \\ M & \rightarrow & M & & \\ i' \uparrow & & \uparrow & i' & \\ L & \rightarrow & L & & \\ & & f'_* & & \end{array}$$

Ce théorème (et sa version pour les champs de plaques) est sûrement le théorème fondateur de la dynamique partiellement hyperbolique. Ce dernier champ de recherche a connu un développement spectaculaire ces dernières années. Il a ainsi contribué à la preuve de quelques problèmes difficiles et intéressants, en dynamique C^1 -générique.

Mais, comme il existe des difféomorphismes structurellement stables qui ne sont pas Anosov, les hypothèses du théorème 4.2 ne sont pas nécessaires à la persistance d'une lamination.

Une généralisation semble pourtant n'avoir jamais été étudiée. Dans une telle optique, on introduit les notions suivantes. Soit \mathcal{L} une lamination compacte, préservée par un difféomorphisme f d'une variété M . On note $\Omega(\mathcal{L})$ le plus petit compact \mathcal{L} -saturé contenant l'ensemble non errant de $f|_L$. On dira que \mathcal{L} est *normalement ATF* si :

- il existe $\epsilon > 0$ et un voisinage U de $\Omega(\mathcal{L})$, tels que toute ϵ -pseudo-orbite de U respectant les plaques de \mathcal{L} est incluse dans $\Omega(\mathcal{L})$,
- la lamination $\Omega(\mathcal{L})$ est normalement hyperbolique et expansive par plaques,
- l'ensemble stable d'une feuille de $\Omega(\mathcal{L})$ (qui est une sous-variété immergée) intersecte transversalement l'ensemble instable d'une autre feuille de $\Omega(\mathcal{L})$.

Conjecture 3. *Les laminations compactes normalement ATF sont persistantes.*

Exemple Soit f un difféomorphisme axiome A d'une variété compacte M vérifiant la condition de transversalité forte. Soit N une variété compacte. Soit \mathcal{L} la lamination sur $M \times N$ dont les feuilles sont de la forme $\{m\} \times N$, pour m appartenant à M . Soit enfin F la dynamique sur $M \times N$ égale au produit de f et de l'identité de N . Alors la lamination \mathcal{L} est normalement ATF. Cette conjecture impliquerait que cette lamination soit persistante pour des C^1 -perturbations de F .

D'une part, comme R. Mañé a montré que les sous-variétés compactes C^1 -persistantes et uniformément localement maximales sont exactement les sous-variétés normalement hyperboliques [15], il est raisonnable d'espérer que les laminations persistantes et recouvrant l'espace ambiant sont exactement les laminations normalement ATF (*modulo* les hypothèses relatives à l'expansivité par plaques).

D'autre part, lors d'une entrevue, C. Bonatti nous a signalé qu'il existe des sous-variétés C^1 , qui sont persistantes, mais qui ne sont pas normalement hyperboliques. Par exemple, on considère un cercle plongé dans le plan et préservé par un difféomorphisme. On suppose que la dynamique induite par le difféomorphisme est de type nord-sud. Cela signifie que l'ensemble non errant de cette dynamique est constitué de deux points fixes, le pôle nord et le pôle sud, et que tous les autres points tendent par itérations positives vers le pôle sud et par itérations négatives vers le pôle nord. Si, de plus, au pôle nord (resp. sud), la dynamique dilate (resp. contracte) l'espace normal au cercle plus qu'elle ne dilate (resp. contracte) l'espace tangent au cercle, alors ce cercle est persistant. Cela signifie que tout difféomorphisme C^1 -proche préserve un cercle C^1 -proche. Cela nous invite à poser la

Question Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une sous-variété C^1 (resp. lamination) compacte, préservée par un difféomorphisme de classe C^1 soit persistante? La persistance signifie qu'étant donné un difféomorphisme C^1 -proche, il existe un plongement C^1 -proche de l'inclusion canonique de la sous-variété (resp. lamination) que cette perturbation préserve.

On peut espérer démontrer la conjecture 3, grâce au théorème 2.1 de persistance des treillis de laminations. On va montrer le résultat partiel suivant :

Théorème 4.3. *Une lamination compacte normalement ATF, dont les feuilles sont les composantes connexes d'un fibré de classe C^1 sur une surface, est persistante.*

Remarques

- On pense que le théorème 4.3 est vrai pour une variété S compacte de dimension quelconque. Pour des raisons techniques la preuve du théorème de stabilité structurelle (en dimension 2) de W. de Melo était plus simple à généraliser que le cas général rédigé par Robinson. On espère aussi prouver prochainement le cas où S est une variété compacte de dimension quelconque.
- On peut reformuler le théorème 4.3 ainsi :

Soient M une variété riemannienne compacte et S une surface compacte. Soit $p : M \rightarrow S$ une submersion de classe C^1 . Soit \mathcal{L} la structure de lamination sur M dont les feuilles sont les composantes connexes des fibres de p .

Soit f_b un difféomorphisme ATF de S . Soit f un difféomorphisme de M tel que :

- *le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ M & \rightarrow & M \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ S & \rightarrow & S \\ & f_b & \end{array}$$

- *le difféomorphisme f est normalement hyperbolique sur $\mathcal{L}|_{p^{-1}(\Omega_b)}$, avec Ω_b l'ensemble non errant de f_b .*

Alors, pour toute application f' C^1 -proche de f , il existe un plongement $h \in Pl(\mathcal{L}, M)$, proche de l'inclusion canonique (donc surjectif), tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} & f' & \\ M & \rightarrow & M \\ p \circ h^{-1} \downarrow & & \downarrow p \circ h^{-1} \\ S & \rightarrow & S \\ & f_b & \end{array}$$

4.2 Preuve de la persistance

On reprend les notations de la remarque ci-dessus, pour prouver le théorème 4.3.

4.2.1 Stratifications de laminations et structures de treillis persistantes

Soit $(\Lambda_i)_i$ la décomposition spectrale de l'ensemble non errant de f_b . On a vu dans la partie 1.2.3 que pour chaque i , $W^s(\Lambda_i)$ (resp. $W^u(\Lambda_i)$) admet une structure de lamination canonique X_{bi}^s (resp. X_{bi}^u) et, dans la partie 2.1.3, on a vu que $\Sigma_b^s := (X_{bi}^s)_i$ (resp. $\Sigma_b^u := (X_{bi}^u)_i$) forme une stratification de laminations sur S . Cette stratification admet une structure de treillis \mathcal{T}_b^s (resp. \mathcal{T}_b^u) qui contrôle f_b (th. 2.2 [6]). De plus, les voisinages tubulaires de \mathcal{T}_b^s sont compatibles entre eux et f^{-1} -stables. On note par $\mathcal{L}_{X_{bi}^s}$ le voisinage tubulaire de X_{bi}^s et par $\mathcal{L}_{X_{bi}^u}$ le voisinage tubulaire de X_{bi}^u .

On définit, pour tout i :

- la lamination $X_i := \mathcal{L}_{|p^{-1}(\Lambda_i)}$,
- les laminations X_i^s (resp. X_i^u) dont les feuilles sont les composantes connexes des préimages par p des feuilles de X_{bi}^s (resp. X_{bi}^u),
- les stratifications de laminations $\Sigma^s := (X_i^s)_i$ et $\Sigma^u := (X_i^u)_i$ sur M ,
- les voisinages tubulaires \mathcal{L}_i^s de X_i^s et \mathcal{L}_i^u de X_i^u dont les feuilles sont les composantes connexes des préimages par p des feuilles de $\mathcal{L}_{X_{bi}^s}$ et de $\mathcal{L}_{X_{bi}^u}$,
- les structures de treillis de laminations $\mathcal{T}^s := (\mathcal{L}_i^s)_i$ et $\mathcal{T}^u := (\mathcal{L}_i^u)_i$ sur (M, Σ^s) et (M, Σ^u) respectivement.

Pour tout i , par hyperbolicité normale de X_i , la lamination X_i^s (resp. X_i^u) est normalement dilatée par f (resp. f^{-1}). Par hyperbolicité, f_b (resp. f_b^{-1}) dilate normalement Σ_b^s (resp. Σ_b^u) de façon contrôlée par \mathcal{T}_b^s (resp. \mathcal{T}_b^u). Ainsi f (resp. f^{-1}) dilate normalement Σ^s (resp. Σ^u) de façon contrôlée par \mathcal{T}^s (resp. \mathcal{T}^u). De plus, d'après la proposition B.2, les endomorphismes f et f^{-1} sont expansifs par plaques sur les strates de Σ^s et Σ^u .

Ainsi, par le corollaire 2.2, il existe une famille de voisinages \mathcal{V}^s (resp. \mathcal{V}^u) telle que, pour tout difféomorphisme f' C^1 -proche de f , il existe un plongement $h_s \in Pl(\mathcal{T}^s, M)$ (resp. $h_u \in Pl(\mathcal{T}^u, M)$) proche de l'inclusion canonique et un endomorphisme $f'_s \in End_f^{\mathcal{V}^s}(\mathcal{T}^s)$ (resp. $f'_u \in End_f^{\mathcal{V}^u}(\mathcal{T}^u)$) proche de f tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 & f' & \\
 & M \rightarrow M & \\
 h_s \uparrow & & \uparrow h_s \\
 & M \rightarrow M & \\
 & f'_s &
 \end{array}
 \left(
 \begin{array}{ccc}
 & f' & \\
 & M \rightarrow M & \\
 \text{resp. } h_u \uparrow & & \uparrow h_u \\
 & M \rightarrow M & \\
 & f'_u &
 \end{array}
 \right)$$

On note :

- $(V_i^s)_i := \mathcal{V}^s$ et $(V_i^u)_i := \mathcal{V}^u$,
- pour tout i , \mathcal{L}'_i^s la structure de lamination sur $L_i^s := h_s(L_i^s)$ dont les feuilles sont les images par h_s des feuilles de \mathcal{L}_i^s , et \mathcal{L}'_i^u la structure de lamination sur $L_i^u := h_u(L_i^u)$ dont les feuilles sont les images par h_u des feuilles de \mathcal{L}_i^u .

Par compatibilité et f^{-1} -stabilité des voisinages tubulaires de \mathcal{T}^s , on peut supposer que les voisinages de la famille \mathcal{V}^s sont f^{-1} -stables.

Exceptionnellement dans cette preuve, on note par \mathcal{L}_x la feuille de \mathcal{L} contenant $x \in M$ et, pour $\eta > 0$, on note par $\mathcal{L}'_{ix}{}^{s\eta}$ (resp. $\mathcal{L}'_{ix}{}^{u\eta}$) l'union des plaques de $\mathcal{L}'_i{}^s$ (resp. $\mathcal{L}'_i{}^u$) de diamètre inférieur à η qui contiennent un élément de $h_s(\mathcal{L}_x)$ (resp. $h_u(\mathcal{L}_x)$).

Par compatibilité des voisinages tubulaires, on peut supposer que, pour tout $\eta > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que pour f' assez proche de f et $x \in V_i^s$, la sous-variété $f'(\mathcal{L}'_{ix}{}^{s\delta})$ est incluse dans $\mathcal{L}'_{if(x)}{}^{s\eta}$.

4.2.2 Voisinages tubulaires des feuilles de \mathcal{L}

Soit n la dimension de M et d la dimension de \mathcal{L} .

On note par \exp l'application exponentielle associée à la métrique de M .

Soit N_0 la section de la grassmannienne des $(n - d)$ -plans de TM définie par

$$N_0(x) = (T_x\mathcal{L})^\perp, \quad \forall x \in M$$

Soit N une section de classe C^∞ de la grassmannienne des $n - d$ -plans de TM assez proche de N_0 , pour avoir :

$$\forall x \in M, \quad N(x) \oplus T_x\mathcal{L} = T_xM$$

On munit $F := \cup_{x \in M} N(x)$ de la structure de fibré vectoriel canonique sur M . Soit alors $\epsilon > 0$ petit tel que, pour chaque $x \in M$,

$$\mathcal{F}_x^\epsilon := \{(x', u) \in F : \|u\| \leq \epsilon, x' \in \mathcal{L}_x\}$$

soit plongé par \exp .

On définit la submersion

$$\begin{aligned} \text{Exp} : F &\rightarrow M \\ (x, u) &\mapsto \exp_x \left(\frac{u}{\sqrt{1 + \epsilon^2 \|u\|^2}} \right) \end{aligned}$$

dont la restriction à $\mathcal{F}_x := \mathcal{F}_x^\infty$ est donc un difféomorphisme sur son image ouverte, pour tout $x \in M$. De plus, la restriction de Exp à \mathcal{F}_x est un voisinage tubulaire de la sous-variété \mathcal{L}_x .

On donne ci-dessous une propriété de paramétrisation :

Propriété 4.2.1. *Soit G l'ensemble des sous-variétés de M C^1 -difféomorphes à toute feuille de \mathcal{L} . On munit G de la topologie C^1 .*

Il existe alors un voisinage ouvert V_G de $\{(x, \mathcal{L}_x); x \in M\}$ dans $M \times G$, tel que, pour $(x, \mathcal{G}) \in V_G$, les sous-variétés $\text{Exp}(F_x)$ et \mathcal{G} s'intersectent transversalement en un unique point $I(x, \mathcal{G})$.

De plus, l'application I est continue et sa différentielle suivant sa première variable existe, est injective et dépend continûment de $(y, \mathcal{G}) \in V_G$.

Démonstration.

Il s'agit d'une application simple du théorème des fonctions implicites. \square

4.2.3 Hypothèse de récurrence

Sur la décomposition spectrale de f_b , il existe un préordre \succ défini par $\Lambda_i \succ \Lambda_j$ si $W^u(\Lambda_i) \setminus \Lambda_i$ intersecte $W^s(\Lambda_j) \setminus \Lambda_j$. Par l'hypothèse de transversalité forte, le préordre \succ n'a pas de cycle. On peut donc le compléter en un ordre total $>$. Quitte à réindexer la décomposition spectrale, on peut supposer que $\Lambda_i > \Lambda_j$ si $i > j$.

On va démontrer le théorème 4.3 par récurrence décroissante sur $i \in \{1, \dots, N\}$, avec l'hypothèse suivante :

Il existe un voisinage compact U_i de $\cup_{j \geq i} X_j$ dans $(\cup_{j < i} X_j)^c$ tel que :

- $f^{-1}(U_i) \subset \text{int}(U_i)$,
- U_i est \mathcal{L} -saturé,

de plus, pour $\eta > 0$ assez petit et f' C^1 -proche de f , il existe un plongement h_i de $\mathcal{L}|_{U_i}$ dans M tel que

- i) le plongement h_i est proche de l'inclusion canonique de $Pl(\mathcal{L}|_{U_i}, M)$,
- ii) pour $x \in U_i$, le point $h_i(x)$ est égal à $I(x, f' \circ h_i(\mathcal{L}_{f^{-1}(x)}))$,
- iii) pour $x \in V_k^s \cap U_i$, le point $h_i(x)$ appartient à $\mathcal{L}_{kx}^{l's\eta}$, pour tout $k \geq i$.

On remarque que cette hypothèse de récurrence, au rang $i = 1$, implique le théorème, car U_1 est nécessairement égal à M et $h := h_1$ satisfait les conclusions du théorème, par i) et ii).

Pour toute la suite de la preuve, la relation entre η et la C^1 -distance de f' à f est la suivante : η sera choisi assez petit puis f' sera choisi assez proche de f en fonction de η .

4.2.4 Etape $j=N$

Comme Λ_N est un répulseur de f_b , il existe un voisinage compact U_N de X_N dans $V_N^s \cap V_N^u$, arbitrairement petit, tel que $f^{-1}(U_N)$ soit inclus dans $\text{int}(U_N)$ et tel que U_N soit \mathcal{L} -saturé. Comme les laminations X_N^u et X_N^s sont transverses, pour U_N assez petit, les laminations \mathcal{L}_N^s et \mathcal{L}_N^u sont transverses au voisinage de U_N .

Ainsi, pour $\eta > 0$ assez petit et f' assez proche de f , pour tout $x \in U_N$, $\mathcal{L}_{Nx}^{l'un\eta}$ intersecte transversalement $\mathcal{L}_{Nx}^{l's\eta}$ en une sous-variété \mathcal{L}'_x qui varie C^1 -continûment avec $x \in U_N$ et f' C^1 -proche de f .

Pour f' assez proche de f , on peut donc définir :

$$h_N : U_N \rightarrow M$$

$$x \mapsto I(x, \mathcal{L}'_x)$$

On remarque que l'application h_N est une immersion de la lamination \mathcal{L} dans M proche de l'inclusion canonique, pour f' proche de f .

Pour montrer l'hypothèse i), il reste à montrer que h_N est un homéomorphisme sur son image. Le voisinage U_N étant compact, il suffit de montrer que h_N est injectif.

Soit $(x, y) \in U_N^2$ tel que $h_N(x)$ soit égal à $h_N(y)$. Par définition de h_N et injectivité de h_s et h_u , il vient que la feuille $\mathcal{L}_{Nx}^{s\eta}$ est égale à $\mathcal{L}_{Ny}^{s\eta}$ et que $\mathcal{L}_{Nx}^{u\eta}$ est égale à $\mathcal{L}_{Ny}^{u\eta}$. Comme la feuille \mathcal{L}_x est égale à $\mathcal{L}_{Nx}^{s\eta} \pitchfork \mathcal{L}_{Nx}^{u\eta}$ et que \mathcal{L}_y est égale à $\mathcal{L}_{Ny}^{s\eta} \pitchfork \mathcal{L}_{Ny}^{u\eta}$, les feuilles \mathcal{L}_x et \mathcal{L}_y sont égales. Comme la restriction de Exp à $F|_{\mathcal{L}_x}$ est un difféomorphisme, $Exp(F_x)$ et $Exp(F_y)$ ne peuvent s'intersecter que si x et y sont égaux. Donc x est égal à y . Cela montre aussi que h_N est injectif.

Pour montrer l'hypothèse ii), il suffit de prouver que, pour $x \in f^{-1}(U_N)$, l'image de \mathcal{L}'_x par f' est égale à $\mathcal{L}'_{f(x)}$. Il existe $\delta > 0$ assez petit tel que pour f' assez proche de f et pour $x \in f^{-1}(U_N)$:

- la sous-variété $h_s(\mathcal{L}_{Nx}^{s\delta})$ est envoyée par f' dans $h_s(\mathcal{L}_{Nf(x)}^{s\eta})$,
- la sous-variété $h_u(\mathcal{L}_{Nx}^{u\delta})$ est envoyée par f' dans $h_u(\mathcal{L}_{Nf(x)}^{u\eta})$,
- la sous-variété \mathcal{L}'_x est égale à $h_s(\mathcal{L}_{Nx}^{s\delta}) \pitchfork h_u(\mathcal{L}_{Nx}^{u\delta})$

Il vient alors que f' envoie \mathcal{L}'_x dans $\mathcal{L}'_{f(x)} = h_s(\mathcal{L}_{Nf(x)}^{s\eta}) \pitchfork h_u(\mathcal{L}_{Nf(x)}^{u\eta})$. De plus, comme f' est un difféomorphisme et la sous-variété \mathcal{L}'_x est compacte, par connexité, $f'(\mathcal{L}'_x)$ est égal à $\mathcal{L}'_{f(x)}$.

4.2.5 Etape $i + 1 \rightarrow i$

On suppose que l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang $i + 1 \leq N$.

D'après [26], il existe un voisinage compact V_b de $\cup_{j \geq i} \Lambda_j$, ayant sa préimage incluse dans son intérieur et vérifiant $\cap_{m \in \mathbb{Z}} f_b^m(V_b \setminus p(U_{i+1})) = \Lambda_i$. On pose $V := p^{-1}(V_b)$. Ainsi, pour n assez grand, $f^{-n}(V) \setminus f^n(U_{i+1})$ est inclus dans un voisinage de X_i arbitrairement petit. Il existe donc $n \geq 0$ tel que, avec $U_i := f^{-n}(V) \cup f^n(U_{i+1})$ et $V_i := f^{-n}(V) \setminus f^n(U_{i+1})$, on a :

- le compact $adh(V_i)$ est inclus dans l'ouvert $V_i^s \cap V_i^u$,
- pour f' assez proche de f , la section de la grassmannienne sur $h_s(V_i \cap X_i^s)$ égale à l'espace fortement stable peut être prolongée sur un voisinage \hat{V}_i de V_i en une section de plans E'^s tangente aux feuilles de $\mathcal{L}'_{i\hat{V}_i}$, vérifiant pour $x \in f'^{-1}(\hat{V}_i) \cap \hat{V}_i$:

$$Tf'(E'^s(x)) = E'^s(f'(x))$$

$$\forall u \in Th_s(T_x \mathcal{L} \setminus \{0\}), \quad \|Tf'|_{E'^s(x)}\| < \min \left(1, \frac{\|T_x f'(u)\|}{\|u\|} \right) \quad (4.1)$$

et variant continûment avec f' proche de f .¹²

Par (4.1), pour $\delta > 0$, on remarque que le champ de cônes :

$$C'^{\delta} : y \in \hat{V}_i \mapsto \left\{ (u + v) \in T_y \mathcal{L}_j^s : u \in Th_s(T_y \mathcal{L}), v \in E'^s(y) \text{ et } \|v\| < \delta \|u\| \right\}$$

vérifie, pour $x \in \hat{V}_i \cap f^{-1}(\hat{V}_i)$:

$$\text{adh}\left(Tf'(C'^{\delta}(x))\right) \subset C'^{\delta}(f'(x)) \cup \{0\}$$

On note $[C'^{\delta}] := \cup_{x \in \hat{V}_i} (C'^{\delta}(x) \cup \{0_x\})$ et, pour $f' = f$, on note $C'^{\delta} =: C^{\delta}$

Lemme 4.2.2. *Il existe $\eta > 0$ arbitrairement petit et il existe $\delta > 0$ tels que, pour tout f' C^1 -proche de f , on a :*

– pour $x \in V_i \cap f^{-1}(V_i)$,

$$f'(\mathcal{L}_{ix}^{!s\eta}) \subset \mathcal{L}_{if(x)}^{!s\eta},$$

– pour $x \in V_i$ et $h \in C^1(\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_{ix}^{!s\eta})$, si $Th(T\mathcal{L}_x)$ est inclus dans $[C'^{\delta}]$, alors $(x, h(\mathcal{L}_x))$ appartient à V_G .

Démonstration. Ce lemme résulte de l'équation (4.1) □

Pour f' assez proche de f , l'application suivante est bien définie :

$$\tilde{h}_{i+1} : x \in \tilde{U}_{i+1} \mapsto I\left(x, f'^{m+1} \circ h_{i+1}(\mathcal{L}_{f^{-n-1}(x)})\right)$$

$$\text{avec } \tilde{U}_{i+1} := f'^{n+1}(U_{i+1}) \cap U_i$$

Par l'hypothèse de récurrence ii), pour $x \in U_{i+1}$, les sous-variétés $h_{i+1}(\mathcal{L}_x)$ et $f'^{m+1} \circ h_{i+1}(\mathcal{L}_{f^{-n-1}(x)})$ sont égales et $h_{i+1}(x)$ appartient à $Exp(F_x)$. Donc l'application \tilde{h}_{i+1} est égale à h_{i+1} sur U_{i+1} . De même, on vérifie rapidement que :

$$\tilde{h}_{i+1} = I\left(x, f' \circ \tilde{h}_{i+1}(\mathcal{L}_{f^{-1}(x)})\right), \quad \text{pour } x \in \tilde{U}_{i+1} \quad (4.2)$$

Montrons que, pour f' proche de f , le point $\tilde{h}_{i+1}(x)$ appartient à $\mathcal{L}_{kx}^{!s\eta}$, pour tout $k \geq i+1$ et $x \in V_k^s \cap \tilde{U}_i$. Par f^{-1} -stabilité de $V_k^s \cap \tilde{U}_{i+1}$, les $n+1$ premières préimages de x par f appartiennent aussi à V_k^s . D'après la dernière affirmation de la partie 4.2.1 et iii), pour f' assez proche de f , le point $f'^{m+1} \circ h_{i+1}(\mathcal{L}_{f^{-n-1}(x)})$ est inclus dans $\mathcal{L}_{kx}^{!s\eta}$, pour $x \in V_k^s \cap \tilde{U}_{i+1}$. Ainsi $\tilde{h}_{i+1}(x)$ appartient à $\mathcal{L}_{kx}^{!s\eta}$, pour tout $k \geq i+1$ et $x \in V_k^s \cap \tilde{U}_{i+1}$.

¹²Pour ce faire, on choisit un champ de cônes Tf' -stable C sur $\hat{V}_i := f^{-n+1}(V) \setminus f^{-n+1}(U_{i+1})$, centré en un prolongement continu de l'espace fortement stable sur $X_i^s \cap \hat{V}_i$. On note d_i^s la dimension de cet espace tangent. On construit alors une section χ' continue f'_* -invariante de la grassmannienne des d_i^s -plans sur un domaine fondamental $D' := \hat{V}_i \cap f'(\hat{V}_i)$ de \hat{V}_i , tel que $\chi'(x)$ est inclus dans $C(x)$, pour $x \in D'$. On étend χ sur $\hat{V}_i \setminus X_i^u$ par $f'^* \chi(x) := Tf^n \circ \chi \circ f^{-n}(x)$ si x appartient à $f^n(D')$. Par dilatation normale, χ' est alors un prolongement continu de l'espace fortement stable sur $X_i^s \cap \hat{V}_i$.

Pour f' assez proche de f , pour tout $x \in \tilde{U}_{i+1} \cap V_i$, par compatibilité des voisinages tubulaires, le point $\tilde{h}_{i+1}(x)$ appartient à $\mathcal{L}'_{ix}{}^{s\eta}$ et, par i), l'espace $T\tilde{h}_{i+1}(T_x\mathcal{L}_x)$ est inclus dans $\text{adh}(C'^{\delta}(\tilde{h}_{i+1}(x)))$. La suite suivante est donc bien définie :

$$h^{(0)} := \tilde{h}_{i+1}$$

$$h^{(m+1)} := x \in f^{m+1}(\tilde{U}_{i+1}) \cap U_i \mapsto I\left(x, f' \circ h^{(m)}(\mathcal{L}_{f^{-1}(x)})\right)$$

On remarque que, pour $m \geq 0$, l'application $h^{(m)}$ est une immersion de $\mathcal{L}|_{f^m(\tilde{U}_{i+1}) \cap U_i}$ dans M , qui vérifie

$$h^{(m)}(x) = I(x, f' \circ h^{(m)}(\mathcal{L}_{f^{-1}(x)})), \quad \forall x \in f^m(\tilde{U}_{i+1}) \cap U_i$$

De plus, pour tous $m' \geq m \geq 0$ et $x \in f^{m'}(\tilde{U}_{i+1}) \cap U_i$, les points $h^{(m')}(x)$ et $h^{(m)}(x)$ sont égaux.

On définit h_i sur $U_i \setminus X_i^u$ par :

$$h_i(x) = h^{(m)}(x), \quad \text{si } x \in f^m(\tilde{U}_{i+1}) \cap U_i$$

On remarque que h_i est une immersion de $\mathcal{L}|_{U_i \setminus X_i^u}$ dans M . De plus h_i vérifie :

$$\begin{cases} h_i(x) = I\left(x, f' \circ h_i(\mathcal{L}_{f^{-1}(x)})\right) & \text{pour } x \in U_i \setminus X_i^u \\ h_i(x) \in \mathcal{L}'_{ix}{}^{s\eta} & \text{pour } x \in V_i \setminus X_i^u \end{cases}$$

On va maintenant définir h_i sur $X_i^u \cap U_i$. Pour η assez petit et f' assez proche de f , pour $x \in U_i \cap X_i^u$, la sous-variété $h_u(\mathcal{L}'_{ix}{}^{u\eta})$ intersecte transversalement $h_s(\mathcal{L}'_{ix}{}^{s\eta})$ en une sous-variété \mathcal{L}'_x proche de \mathcal{L}_x . De plus, la famille $(\mathcal{L}'_x)_{x \in U_i \cap X_i^u}$ est continue. On définit pour $x \in U_i \cap X_i^u$:

$$h_i(x) = I(x, \mathcal{L}'_x)$$

On remarque que $h_i|_{U_i \cap X_i^u}$ est une immersion de $\mathcal{L}|_{U_i \cap X_i^u}$ dans M . De plus, h_i vérifie :

$$\begin{cases} h_i(x) = I\left(x, f' \circ h_i(\mathcal{L}_{f^{-1}(x)})\right) & \text{pour } x \in U_i \cap X_i^u \\ h_i(x) \in \mathcal{L}'_{ix}{}^{s\eta} & \text{pour } x \in V_i \cap X_i^u = U_i \cap X_i^u \end{cases}$$

Ainsi h_i vérifie l'hypothèse de récurrence ii). De plus, par compatibilité des voisinages tubulaires, h_s et donc h_i vérifient l'hypothèse de récurrence iii).

Vérification de la régularité de h_i

On va maintenant montrer que h_i est une immersion de la lamination $\mathcal{L}|_{U_i}$ dans M . Pour cela, il suffit de montrer sa continuité et la continuité de ses différentielles le long de \mathcal{L} sur $X_i^u \cap U_i$.

Commençons par montrer que h_i est une application continue par l'absurde.

Soit $(x_n)_n \in V_i^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in X_i^u \cap V_i$, telle que $(h_i(x_n))_n$ ne converge pas vers

$h_i(x)$. Comme M est compacte, on peut supposer que $h_i(x_n)$ converge vers y différent de $h_i(x)$.

Comme $h_i(x_n)$ appartient à $\mathcal{L}'_{ix_n}{}^{s\eta}$ pour tout n , il vient que y appartient à $\mathcal{L}'_{ix}{}^{s2\eta}$. De plus, par les hypothèses de récurrence ii) et iii), pour $k \geq 0$, $f'^{-k} \circ h_i(x_n)$ appartient à $\mathcal{L}'_{if^{-k}(x_n)}{}^{s\eta}$. Donc $f'^{-k}(y)$ appartient à $\mathcal{L}'_{if^{-k}(x)}{}^{s2\eta}$, pour tout $k \geq 0$.

Par ii) et iii), le point $f'^{-k} \circ h_i(x)$ appartient aussi à $\mathcal{L}'_{if^{-k}(x)}{}^{s2\eta}$, pour tout $k \geq 0$. Par ailleurs, $h_i(x)$ et y appartiennent à $Exp(F_x)$. On peut donc relier $h_s(x)$ et y par un chemin différentiable inclus dans $Exp(F_x) \cap \mathcal{L}'_{ix}{}^{s2\eta}$. On suppose que δ et η ont été choisis assez petits et que f' est assez proche de f , pour que l'espace tangent de la variété $Exp(F_x) \cap \mathcal{L}'_x{}^{s2\eta}$ soit inclus dans l'adhérence du complémentaire de $[C'^{\delta}]$, pour $x \in V_i$. Ainsi, le chemin considéré a son espace tangent qui est inclus dans l'adhérence du complémentaire de $[C'^{\delta}]$. Cela implique que ses préimages par f' , ont aussi leur espace tangent inclus dans l'adhérence du complémentaire de $[C'^{\delta}]$ et que leur longueur croît exponentiellement vite. Cela contredit le fait que $f'^{-k}(y)$ et $f'^{-k} \circ h_i(x)$ appartiennent à $\mathcal{L}'_{if^{-k}(x)}{}^{s2\eta}$, pour tout $k \geq 0$. Donc h_i est continue sur U_i .

Montrons, par l'absurde, que h_i est continûment différentiable le long des fibres de U_i .

Soit $(x_n)_n \in V_i^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in X_i^u \cap V_i$, telle que $(Th_i(x_n))_n$ ne converge pas vers $Th_i(x)$. Comme $Th_i(T_{x_n}\mathcal{L})$ est inclus dans $[C'^{\delta}]$ pour tout $n \geq 0$, on peut supposer que $(Th_i(T_{x_n}\mathcal{L}))_n$ converge vers un d -plan $P' \subset [C'^{\delta}]$ différent de $P := Th_i(T_x\mathcal{L}) \subset [C'^{\delta}]$. Pour les mêmes raisons que précédemment, $Tf'^{-k}(P)$ et $Tf'^{-k}(P')$ sont inclus dans $C'^{\delta}(f'^{-k} \circ h_i(x))$ pour tout $k \geq 0$. Par (4.1) on obtient donc une absurdité.

Vérification que h_i est un plongement

Pour montrer que h_i est un homéomorphisme sur son image, il suffit de montrer que h_i est injectif, car U_i est un compact.

Aussi, par l'hypothèse de récurrence ii), il suffit de montrer que deux différentes feuilles de $\mathcal{L}|_{U_i}$ ont des images disjointes par h_i .

On rappelle par ailleurs que

$$\forall x \in U_i, \quad f'^{-n} \circ h_i(\mathcal{L}_x) = h_i(\mathcal{L}_{f^{-n}(x)}) \quad (4.3)$$

Soit $(x, x') \in U_i^2$ tel que $h_i(x)$ et $h_i(x')$ sont égaux.

Si ni x ni x' appartiennent à X_i^u . Il existe alors $n \geq 0$ tel que $f^{-n}(x)$ et $f^{-n}(x')$ appartiennent à U_{i+1} . Par (4.3), les images par h_i de $\mathcal{L}_{f^{-n}(x)}$ et $\mathcal{L}_{f^{-n}(x')}$ s'intersectent. Donc la feuille $\mathcal{L}_{f^{-n}(x)}$ est égale à $\mathcal{L}_{f^{-n}(x')}$ et \mathcal{L}_x est égale à $\mathcal{L}_{x'}$.

Si x appartient à X_i^u alors la préorbite de \mathcal{L}_x est incluse dans V_i . Si x' n'appartient pas à X_i^u , alors pour n assez grand, $f^{-n}(\mathcal{L}_x)$ sera loin de V_i . Ainsi, comme h_i est C^0 -proche de l'inclusion canonique, $h_i \circ f^{-n}(\mathcal{L}_x)$ et $h_i \circ f^{-n}(\mathcal{L}_{x'})$ sont disjoints. Par (4.3), on déduit que $h_i(x)$ et $h_i(x')$ sont différents, ce qui est absurde.

Il ne reste plus qu'à montrer l'injectivité de h_i sur $X_i^u \cap U_i$. Pour cela, on procède comme dans l'étape $i = N$.

Preuve de la persistance des stratifications

Sommaire

5.1	Préliminaires	103
5.1.1	Convention et notations	103
5.1.2	Construction de fibrés	104
5.1.3	Construction d'une filtration adaptée	106
5.1.4	Uniformité locale des chaînes sortantes	108
5.2	Démonstration du corollaire 2.2	109
5.3	Démonstration par récurrence du théorème 2.1	110
5.3.1	Propriété fondamentale de la dynamique sur K_p	110
5.3.2	Démonstration du théorème 2.1 à partir de la propriété fondamentale	111
5.3.3	Rang $p=N$	113
5.3.4	Rang $p+1 \Rightarrow$ Rang p	113
5.3.5	Preuve du lemme 5.3.4 préimage d'une perturbation de \mathcal{L}_p	125
5.3.6	Preuve du lemme 5.3.5 : construction d'une structure algébrique locale	129

5.1 Préliminaires

5.1.1 Convention et notations

Pour toute la preuve du théorème 2.1 et du corollaire 2.2 et leur préliminaire, on se place sous les hypothèses du théorème 2.1 avec les notations suivantes :

- n désigne la dimension de M .
- On note $\eta > 0$ et $\mathcal{V} = (V_X)_{X \in \Sigma}$, le réel et la famille de voisinages adaptée à f^* vérifiant l'hypothèse (iii) du théorème 2.1.

- Soit $\Sigma' := \{X_1, \dots, X_N\}$ l'ensemble des strates de Σ qui intersectent $\text{adh}(A')$, indexées telles que, pour deux entiers $i \leq j$ de $\{1, \dots, N\}$, si X_i et X_j sont comparables alors $X_i \leq X_j$.
- On note d_j la dimension de X_j . Pour alléger l'écriture, on note (L_j, \mathcal{L}_j) le voisinage tubulaire $(L_{X_j}, \mathcal{L}_{X_j})$ et V_j le voisinage V_{X_j} .
- Étant donné un compact C , V_C désigne un voisinage ouvert et relativement compact de C , et (V'_C, V''_C) est un couple d'ouverts vérifiant :

$$C \subset V''_C \subset \text{adh}(V''_C) \subset V'_C \subset \text{adh}(V'_C) \subset V_C$$

On rappelle que si L_j intersecte L_k , alors X_j et X_k sont comparables, et si $j \leq k$, alors on a $d_j \leq d_k$.

5.1.2 Construction de fibrés

Dans le théorème 2.1, la structure de treillis intervient de façon "germinale". On ne perd donc rien à restreindre chacun des voisinages tubulaires de notre structure (ainsi que la famille de voisinages adaptée à f^*). On s'autorise donc à restreindre les laminations $(L_k, \mathcal{L}_k)_k$.

Pour $d \in \{0, \dots, n\}$, soit $Gr(d, TM)$ le fibré au-dessus de M de la grassmannienne des d -plans de TM . La métrique riemannienne g sur M induit de façon standard une métrique riemannienne sur ce fibré.

Soient $j \in \{1, \dots, N\}$ et

$$\begin{aligned} N'_j &: L_j \rightarrow Gr(n - d_j, TM) \\ x &\mapsto (T_x i(T_x \mathcal{L}_j))^\perp \end{aligned}$$

Cette application est un relèvement continu de $i|_{L_j}$:

$$\begin{array}{ccc} N'_j & Gr(n - d_j, TM) & \\ \nearrow & \downarrow & \\ L_j & \rightarrow & M \\ & i|_{L_j} & \end{array}$$

Cette famille de sections possède aussi deux propriétés que l'on apprécie :

- Pour $k \leq j$ et $x \in L_k \cap L_j$, on a $N'_j(x) \subset N'_k(x)$.
- Pour $j \in \{1, \dots, N\}$ et $x \in L_j$, $N'_j(x) \oplus Ti(T_x \mathcal{L}_j) = T_{i(x)}M$.

Cependant ces relèvements, en général seulement continus, ne permettent pas de réaliser naturellement des \mathcal{L}_j -fibrés vectoriels. Mais, on peut les lisser par le lemme suivant :

Lemme 5.1.1. *Quitte à restreindre les voisinages tubulaires formant la structure de treillis, il existe une famille d'applications $(N_k)_k$, où $N_k \in \text{Mor}(\mathcal{T}|_{L_k}, \text{Gr}(n - d_k, TM))$ est un relèvement de $i|_{L_k}$, qui peut être choisi arbitrairement proche de N'_k pour la topologie C^0 forte et vérifie :*

1. *Pour $k \leq j$ et $x \in L_k \cap L_j$, on a $N_j(x) \subset N_k(x)$.*
2. *Pour $x \in L_k$, $N_k(x) \oplus Ti(T_x \mathcal{L}_k) = T_{i(x)}M$.*

Preuve du lemme 5.1.1

On va construire $(N_k)_k$ par récurrence sur k .

Étape $k = 1$

Il suffit d'appliquer l'annexe A.2.2 au relèvement continu N'_1 , de l'immersion $\mathcal{T}|_{L_1}$ -contrôlée $i|_{L_1}$, pour obtenir un relèvement $N_1 \in \text{Mor}(\mathcal{T}|_{L_1}, \text{Gr}(n - d_1, TM))$ de $i|_{L_1}$ arbitrairement proche de N'_1 pour la topologie C^0 forte.

Étape $k \rightarrow k + 1$

Par l'annexe A.2.2, il existe un relèvement $\mathcal{T}|_{L_{k+1}}$ -contrôlé N_{k+1}^{k+1} de $i|_{L_{k+1}}$ dans $\text{Gr}(n - d_{k+1}, TM)$, arbitrairement proche de N'_{k+1} pour la topologie C^0 forte. Le relèvement N_{k+1}^{k+1} vérifie donc la condition 2). On va modifier ce relèvement, pour qu'il vérifie la condition 1).

Pour $j \leq k$, soit p_{N_j} la projection orthogonale de $i^*TM|_{L_j}$ sur le sous-fibré vectoriel induit par N_j . On définit alors p_j l'homotopie de l'identité de i^*TM à p_{N_j} :

$$p_j : [0, 1] \times i^*TM|_{L_j} \rightarrow i^*TM$$

$$(t, u) \mapsto u + t \cdot (p_{N_j}(u) - u)$$

Comme (L_j, X_j^c) est un recouvrement ouvert de $A \setminus \cup_{X_p < X_j} X_p$, par l'annexe A.1.2, il existe une fonction $\rho_j \in \text{Mor}(\mathcal{T}_p|_{A \setminus \cup_{X_p < X_j} X_p}, [0, 1])$, valant 1 sur un voisinage ouvert L'_j de X_j et à support dans L_j .

On définit alors par récurrence descendante sur $j \in \{1, \dots, k\}$, l'application :

$$N_{k+1}^j : L_{k+1} \longrightarrow \text{Gr}(n - d_{k+1}, TM)$$

$$x \mapsto \begin{cases} p_j(\{\rho_j(x)\}, N_{k+1}^{j+1}(x)) & \text{si } x \in L_j \\ N_{k+1}^{j+1}(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

qui est bien définie et peut être construite arbitrairement proche de N'_{k+1} , quitte à avoir choisi N_j plus proche de N'_j et supposé par récurrence que N_{k+1}^{j+1} peut être choisie arbitrairement proche de N'_{k+1} . De plus, on montre par récurrence que N_{k+1}^j est $\mathcal{T}|_{L_{k+1}}$ -contrôlée, en remarquant que $\cup_{X_p < X_j} X_p$ n'intersecte pas L_{k+1} .

Une fois la construction par récurrence descendante achevée, on pose $N_{k+1} = N_{k+1}^0$ qui satisfait donc la condition 2), s'il est choisi assez proche de N'_{k+1} . Pour $j \leq k$, on restreint L_j à L'_j . La condition 1) est alors vérifiée.

Pour $k \in \{0, \dots, N\}$, on note $\pi : F_k \rightarrow L_k$ le fibré vectoriel induit par N_k . Pour $j \geq k$, la restriction $N_k|_{L_j \cap L_k}$ est un morphisme de $\mathcal{L}_j|_{L_j \cap L_k}$ dans $\text{Gr}(n - d, TM)$. Ce morphisme induit une structure de lamination de dimension $d_j + n - d_k$ sur $F_k|_{L_j \cap L_k}$. La famille de ces laminations induit une structure de treillis de laminations \mathcal{T}_k sur F_k , par l'annexe A.3.2. Soit (F_k, \mathcal{F}_k) le voisinage tubulaire de dimension n de ce treillis.

En particulier $\pi : (F_k, \mathcal{F}_k) \rightarrow (L_k, \mathcal{L}_k)$ est un \mathcal{L}_k -fibré vectoriel. On munit chacun de ces fibrés de la norme induite par la métrique riemannienne sur M .

5.1.3 Construction d'une filtration adaptée

On définit le compact $K := \text{adh}(A')$.

Propriété 5.1.2. *Il existe une famille de compacts $(K_p)_{p=1}^{N+1}$ vérifiant*

5.1.2.1 $K = K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_{N+1} = \emptyset$ et $f^*(K_p) \subset \text{int}(K_p)$, $\forall p \geq 0$,

telle que pour $p \leq N$, avec $C_p := \text{adh}(K_p \setminus K_{p+1})$, on a :

5.1.2.2 le compact C_p est inclus dans le voisinage adapté V_p .

5.1.2.3 Via Ti , on identifie $T\mathcal{L}_p$ à un sous-fibré de $i^*TM|_{L_p}$. Soit $[i^*Tf]_p : (i^*TM/T\mathcal{L}_p)|_{V_p} \rightarrow i^*TM/T\mathcal{L}_p$ le morphisme de fibrés au-dessus de $f^*|_{V_p}$. Alors pour une métrique riemannienne g sur M , il existe $\lambda < 1$ tel que pour $v \in (i^*TM/T\mathcal{L}_p)|_{C_p} \setminus \{0\}$, on a :

$$\max(1, \|T_{\pi(v)}f^*_{|T\mathcal{L}_p}\|) \cdot \|v\| < \lambda \cdot \|[i^*Tf]_p(v)\|$$

Remarque Pour $p \in \{1, \dots, N\}$, le compact K_p est égal à $\cup_{j=p}^N C_j$. D'après 5.1.2.2, le compact K_p est inclus dans $\cup_{j \geq p} X_j$.

Démonstration de la propriété 5.1.2

On va démontrer ci-dessous, par récurrence sur $p \in \{0, \dots, N\}$, l'existence d'un voisinage ouvert S_p de $\cup_{j \leq p} X_j \cap K$ pour la topologie induite par K , vérifiant

$$\emptyset = S_0 \subset S_1 \subset \dots \subset S_N = K \quad \text{et} \quad f^*_{|K^{-1}}(\text{adh}(S_p)) \subset S_p \quad (5.1)$$

tel que $\text{adh}(S_p \setminus S_{p-1})$ peut être choisi arbitrairement proche de $X_{p+1} \cap K \setminus S_{p-1}$ (l'ouvert S_{p-1} étant fixé) et satisfaisant :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^*_{|K^{-n}}(S_p) = \bigcup_{j \leq p} X_j \cap K \quad (5.2)$$

On pose alors $K_p := K \setminus S_{p-1}$, pour $p \geq 1$. Montrons que (5.1) et (5.2) suffisent à montrer cette propriété :

Preuve de 5.1.2.1

La première partie de 5.1.2.1 est évidente par la première partie de 5.1.

L'image par f^* de K est incluse dans $\text{int}(K)$ et par la seconde inclusion de (5.1), on a :

$$\begin{aligned} K_p = K \setminus S_{p-1} &\subset f^*_{|K^{-1}}(\text{int}(K)) \setminus f^*_{|K^{-1}}(\text{adh}(S_p)) = f^*_{|K^{-1}}(\text{int}(K) \setminus \text{adh}(S_p)) \\ &\Rightarrow f^*(K_p) \subset \text{int}(K) \setminus \text{adh}(S_p) = \text{int}(K_p) \end{aligned}$$

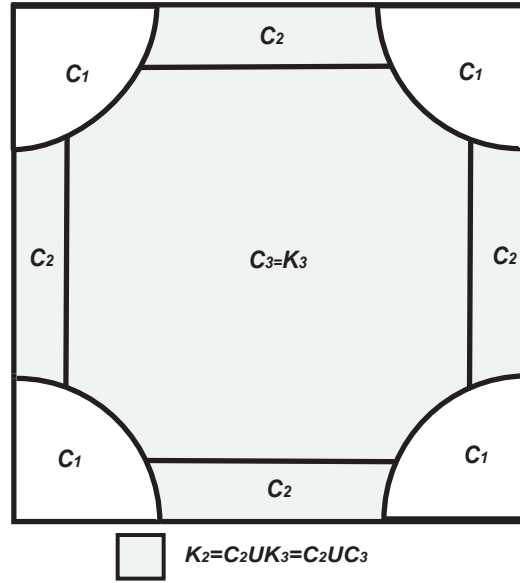


FIG. 5.1 – Compacts $(C_k)_k$ pour la stratification simpliciale d'un carré, munie de la structure de treillis représentée figure 2.1

Preuve de 5.1.2.2

Le compact C_p est égal à $\text{adh}(S_p \setminus S_{p-1})$, qui peut-être choisi arbitrairement proche du compact $X_p \cap K_p = X_p \cap K \setminus S_{p-1}$ inclus dans V_p .

Preuve de 5.1.2.3

Par la proposition 1.1, on peut munir M d'une métrique adaptée à la dilatation normale par f de l'immersion de X_p , au-dessus du compact $X_p \cap K_p$. L'inégalité 5.1.2.3 est alors vérifiée si C_p est assez proche de $X_p \cap K_p$.

Montrons maintenant notre récurrence. Pour toute la suite de la preuve de cette propriété, on se place dans la topologie induite par K .

Soit $p \geq 0$ satisfaisant l'hypothèse de récurrence. Soit $U := (K \cap V_{p+1}) \cup S_p$. Par (5.2), toute orbite débutant dans $U \cap K$ privé de $\tilde{K} := K \cap (\cup_{j \leq p+1} X_j)$ sort définitivement de S_p et, par l'hypothèse iii) du théorème 2.1, sort aussi de V_{p+1} . Comme $f_{|K}^{*-1}(\tilde{K})$ est égal à \tilde{K} , on a

$$\bigcap_{n \geq 1} f_{|K}^{*-n}(U) = \tilde{K}$$

Soit V_0 un voisinage compact de \tilde{K} dans U . On a aussi :

$$\bigcap_{n \geq 1} f_{|K}^{*-n}(V_0) = \tilde{K}$$

Par compacité, il existe $M \geq 0$ tel que $\bigcap_{n=1}^M f_{|K}^{*-n}(V_0)$ soit inclus dans V_0 . On pose alors :

$$V_1 := \bigcap_{n=0}^M f_{|K}^{*-n}(V_0)$$

Le compact V_1 a sa préimage par $f_{|K}^*$ qui est incluse dans lui même et la suite décroissante des préimages de V_1 tend vers \tilde{K} . De plus, V_1 est un voisinage de \tilde{K} pour la topologie induite par K . On voudrait que la préimage $f_{|K}^{*-1}(V_1)$ soit incluse dans l'intérieur de V_1 . Cela nécessite de construire un nouveau voisinage.

Il existe $M' > 0$ tel que $f^{*-M'}(V_1)$ est inclus dans l'intérieur de V_1 . On choisit alors une famille $(V^i)_{i=0}^{M'-1}$ d'ouverts de K vérifiant :

$$\text{int}\left(f_{|K}^{*-M'}(V_1)\right) =: V^0 \subset \text{adh}(V^0) \subset V^1 \subset \text{adh}(V^1) \subset V^2 \subset \dots \subset V^{M'-1} := \text{int}(V_1).$$

On définit le voisinage ouvert de \tilde{K} dans V_0 :

$$V_2 := \bigcup_{n=0}^{M'-1} f_{|K}^{*-n}(V^n)$$

On vérifie alors que la préimage par $f_{|K}^*$ de $\text{adh}(V_2)$ est incluse dans V_2 et que :

$$\bigcap_{n \geq 0} f_{|K}^{*-n}(V_2) = \tilde{K}$$

On pose alors $S_{p+1} := V_2 \cup S_p$, qui est bien un voisinage de \tilde{K} et vérifie (5.1). De plus, $f_{|K}^{*-k}(S_{p+1})$ est égal à $f_{|K}^{*-k}(V_2) \cup f_{|K}^{*-k}(S_p)$, donc $\bigcap_{n \geq 0} f_{|K}^{*-n}(S_{p+1})$ est égal à $K \cap (\bigcup_{l \leq p+1} X_l)$, ce qui est (5.2). Quitte à remplacer S_{p+1} par $f_{|K}^{*-n}(S_{p+1}) \cup S_p$, l'hypothèse de récurrence est vérifiée avec $\text{adh}(S_{p+1} \setminus S_p)$ arbitrairement proche de $K \cap X_{p+1} \setminus S_p$.

5.1.4 Uniformité locale des chaînes sortantes

Soient (L, \mathcal{L}) une lamination, V une partie de L et f^* une application continue de V dans L . Une ϵ -pseudo-chaîne de V qui respecte \mathcal{L} est une famille $(p_n)_{n=0}^N \in V^{N+1}$ telle que, pour $n \in \{0, \dots, N-1\}$, les points p_{n+1} et $f^*(p_n)$ sont dans une même plaque de \mathcal{L} de diamètre inférieur à ϵ . On dira que $(p_n)_{n=0}^N \in L^{N+1}$ part de p_0 , arrive en p_N et que sa longueur est N .

Propriété 5.1.3. *Pour tout $p \in \{1, \dots, N\}$, soit η la fonction sur V_p associée à X_p dans l'hypothèse iii) du théorème 2.1. Pour tout ouvert V relativement compact dans V_p et tout réel $\eta' \in]0, \inf_V \eta[$, on a :*

$$\bigcup_{j \geq 0} \text{int}(U_j) = V \setminus X_p$$

avec U_j l'ensemble des points $x \in V_p$ tels qu'il n'existe pas de η' -pseudo-chaîne de V , qui respecte \mathcal{L}_p , partant de x et de longueur j .

Preuve de la propriété 5.1.3

Pour montrer cette propriété, il suffit de prouver que, pour $x \in V \setminus X_p$, il existe $j \geq 0$ tel que x appartient à l'intérieur de U_j . Soit W un voisinage compact de x inclus dans $V \setminus X_p$. Soit W_n l'ensemble des éléments de V qui sont le point d'arrivée d'une η' -pseudo-orbite de V , de longueur n , partant de $x' \in W$ et respectant les plaques de \mathcal{L}_p .

Si pour n assez grand, W_n est vide, alors x appartient à l'intérieur de U_n .

Sinon, on aboutit à une contradiction : il existe alors $\left((x_i^k)_{i=0}^{N_k}\right)_k$ une famille de η' -pseudo-chaînes de V qui respectent \mathcal{L}_p , partant de W et telles que N_k tend vers l'infini. On complète $(x_i^k)_{i=0}^{N_k}$ en une famille $(x_i^k)_{i \in \mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$ avec $x_i^k := x$ pour $i > N_k$. Comme V est relativement compact dans V_p , par extraction diagonale, une suite

extraite converge vers une η -pseudo-orbite de V_p respectant les plaques de \mathcal{L}_p et partant de $x' \in W$. Comme x' appartient $V_p \setminus X_p$, cette η -pseudo-orbite est incluse dans $V_p \setminus X_p$. Cela contredit l'hypothèse (iii) du théorème 2.1.

5.2 Démonstration du corollaire 2.2

En considérant un voisinage $V_{A'}$ de $\text{adh}(A')$, tel que $f^*(\text{adh}(V_{A'}))$ est inclus dans A' , ainsi qu'en appliquant le théorème 2.1 avec $V_{A'}$ au lieu de A' , on peut supposer que $f' \mapsto f'^*$ est une application continue de V_f dans $\text{End}_{f'^*}^{\mathcal{V}'}(\mathcal{T}_{|V_{A'}})$. On garde cependant toutes les notations et conventions des parties préliminaires.

Soit $(K_p)_p$ la famille de compacts fournie par la proposition 5.1.2. On va montrer, par récurrence descendante sur p , que quitte à restreindre V_f , $i(f')|_{K_p}$ est injective, pour $f' \in V_f$. Ainsi, $i(f')|_K$ sera un homéomorphisme sur son image et $i(f')|_{A'}$ sera un plongement $\mathcal{T}_{|A'}$ -contrôlé.

Pour $p = N$, l'injectivité se démontre comme le corollaire 1.3, car K_N est un compact de la lamination X_N envoyé par f^* dans son intérieur, par 5.1.2.1.

On suppose l'injectivité démontrée sur K_{p+1} . En procédant de nouveau comme dans le corollaire 1.3, on montre que $i(f')$ est injective sur le compact $K_p \cap X_p$, pour $f' \in V_f$.

Soient $(x, y) \in K_p^2$ et $f' \in V_f$ vérifiant $i(f')(x) = i(f')(y)$.

On peut supposer que l'on ait restreint assez V_f , de façon à ce que, pour tout $f'' \in V_f$, les compacts $i(f'')(K_p \cap X_p)$ et $i(f'')(K_{p+1})$ soient disjoints et $f''^*(K_p) \subset K_p$.

Si $x \in X_p$, par commutativité du diagramme, on a :

$$\forall n \geq 0, i(f') \circ f'^{*n}(x) = i(f') \circ f'^{*n}(y) \Rightarrow \forall n \geq 0, f'^{*n}(y) \in K_p \setminus K_{p+1} \subset C_p$$

Quitte à restreindre V_f , par compacité de C_p dans V_p , on peut toujours supposer que $(f'^{*n}(y))_n$ est une η -pseudo-orbite qui respecte \mathcal{L}_p , où η est la fonction sur V_p de l'hypothèse (iii) du théorème 2.1. Ainsi, par cette hypothèse (iii), y appartient à $X_p \cap C_p$. Cela implique que x et y sont égaux.

Pour traiter le cas où ni x , ni y ne sont dans X_p , on fixe un voisinage compact \hat{C}_p de C_p dans V_p et on remarque que :

1. Quitte à restreindre V_f , par le théorème d'inversion locale et compacité de \hat{C}_p , il existe $\delta > 0$ ne dépendant pas de $f' \in V_f$, tel que $i(f')$ restreint aux plaques de \mathcal{L}_p , de diamètre inférieur à δ et contenant un élément de \hat{C}_p , soit un plongement.

2. Quitte à restreindre V_f , par la condition 5.1.2.3, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout couple $(x', y') \in \hat{C}_p^2$ vérifiant $f'^*(x') = f'^*(y')$ et $d(x', y') < \epsilon$, les points x et y , formant ce couple, sont dans une même plaque de \mathcal{L}_p de diamètre inférieur à δ . On suppose de plus que \hat{C}_p contient le ϵ -voisinage de C_p .
3. On considère l'application continue

$$\phi : V_f \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$f' \mapsto \min_{(z, z') \in K_p^2, d(z, z') \geq \epsilon} d(i(f')(z), i(f')(z'))$$

Comme $\phi(f)$ est strictement positif, quitte à restreindre V_f , pour tout $f' \in V_f$, le réel $\phi(f')$ est aussi strictement positif.

Puisque $i(f')(x)$ est égal à $i(f')(y)$, par commutativité du diagramme, pour $n \geq 0$, $i(f') \circ f'^{*n}(x)$ est égal à $i(f') \circ f'^{*n}(y)$. Par 3), pour $n \geq 0$, on a $d(f'^{*n}(x), f'^{*n}(y)) < \epsilon$.

Par l'hypothèse iii) et 5.1.2.2, quitte à réduire V_f , comme ni x ni y n'appartiennent à X_p , il existe M minimal tel que $f'^{*M}(x)$ et $f'^{*M}(y)$ appartiennent à K_{p+1} . Par hypothèse de récurrence, $f'^{*M}(x)$ est égal à $f'^{*M}(y)$. De plus, par définition de M , les points $f'^{*M-1}(x)$ et $f'^{*M-1}(y)$ appartiennent au ϵ -voisinage de C_p et donc à \hat{C}_p . En utilisant alors (2) puis (1), on a :

$$f'^{*M-1}(x) = f'^{*M-1}(y)$$

Par une récurrence décroissante, en utilisant ainsi (3) puis (2) puis (1), on a :

$$\forall n \leq N, f'^{*n}(x) = f'^{*n}(y)$$

Ainsi x et y sont égaux. Ce qu'il fallait démontrer.

5.3 Démonstration par récurrence du théorème 2.1

Dans cette partie, on se place sous les hypothèses du théorème 2.1, en reprenant les notations de la partie 5.1.

5.3.1 Propriété fondamentale de la dynamique sur K_p

On note \exp l'application exponentielle associée à une métrique riemannienne g complète sur M . Soit $\epsilon \in C^\infty(M,]0, 1[)$ une fonction inférieure au rayon d'injectivité de l'application exponentielle. On note :

$$\begin{aligned} \text{Exp} &: i^*TM \rightarrow M \\ (x, v) &\mapsto \exp_{i(x)} \left(\epsilon \circ i(x) \cdot \frac{v}{\sqrt{1 + \|v\|^2}} \right) \end{aligned}$$

pour tout $p \in \{1, \dots, N\}$, la restriction $Exp|_{F_p}$ est un morphisme \mathcal{T}_p -contrôlé de F_p dans M .

On va montrer par récurrence descendante sur p la

Propriété fondamentale 5.3.1. *Pour tout $p \in \{1, \dots, N\}$, il existe :*

- un réel $\eta' > 0$ et un voisinage V_f de f dans $C^1(M, M)$, tous les deux arbitrairement petits,
- un voisinage A_p de K_p , ouvert, relativement compact dans $\cup_{q \geq p} X_q$ et d'adhérence envoyée par f^* dans $\text{int}(K_p)$,
- une famille de voisinages $\mathcal{V}^p := (V_X)_{X \in \Sigma|_{A_p}}$ adaptée à $f^*|_{A_p}$,
- une application continue :

$$V_f \rightarrow \text{End}_{f^*|_{A_p}}^{\mathcal{V}^p}(\mathcal{T}|_{A_p}) \times \text{Mor}(\mathcal{T}, M)$$

$$f' \longmapsto (f'_p, i_p(f'))$$

vérifiant :

1. $f_p^* = f^*|_{A_p}$ et $i_p(f) = i$.

$$\begin{array}{ccc}
 & f' & \\
 M & \rightarrow & M \\
 2. \text{ Le diagramme } i_p(f') & \uparrow & \uparrow i_p(f') \text{ commute.} \\
 A_p & \rightarrow & A_p \\
 & f_p^{t*} &
 \end{array}$$

3. La restriction de $i_p(f')$ à A_p est une immersion.
4. Pour $f' \in V_f$, l'application $\sigma_p(f') : x \mapsto Exp_x^{-1} \circ i_p(f')(x)$ est bien définie et, pour $k \geq p$, ses valeurs appartiennent à F_k sur un voisinage de $f^*(C_k)$ indépendant de f' .

Pour $j \geq p$, on note X_j^p la strate de $\Sigma|_{A_p}$ associée à $X_j \in \Sigma$.

5. Pour tout $j \geq p$, $V_{X_j^p}$ est un voisinage de C_j et, pour tout $x \in V_{X_j^p}$ et $f' \in V_f$, le point $f'^*(x)$ appartient à l'ensemble¹³ $\mathcal{L}_{j f^*(x)}^{\eta'}$.

La relation entre η' et V_f est la suivante : η' sera choisi assez petit, puis V_f sera choisi assez petit en fonction de η' .

5.3.2 Démonstration du théorème 2.1 à partir de la propriété fondamentale

On va prouver que, pour $p = 1$, la propriété que l'on vient d'énoncer suffit à démontrer le théorème 2.1. Pour $j \geq 1$, on note X_j' la strate de $\Sigma|_{A'}$ correspondante à X_j .

¹³On rappelle que \mathcal{L}_{jy}^δ désigne l'union des plaques de \mathcal{L}_j contenant $y \in L_j$ et de diamètre inférieur à $\delta > 0$.

Comme $f^*(adh(A'))$ est inclus dans A' , quitte à réduire V_f et η' , on peut supposer que, pour $f' \in V_f$, on a $d(A'^c, f'^*(A')) > \eta'$.

Ainsi, d'après les propriétés 3 et 5 de 5.3.1, on peut définir l'application continue :

$$V_f \rightarrow \text{End}_{f'^*}^{\mathcal{V}' }(\mathcal{T}_{|A'}) \times \text{Im}(\mathcal{T}_{|A'}, M)$$

$$f' \mapsto (f'^* := f'^*_{|A'}, i(f') := i_1(f')_{|A'})$$

avec pour $j \geq 1$, $V_{X'_j} := V_{X_j^1} \cap A'$ et $\mathcal{V}' := (V_X)_{X \in \Sigma_{|A'}}$.

La conclusion i) du théorème 2.1 résulte simplement de la propriété 2 de 5.3.1.

La conclusion iii) du théorème 2.1 pour la strate X'_p se montre par récurrence sur $p \geq 1$.

Pour tout $p \geq 1$, quitte à restreindre $V_{X_p^1}$, on peut supposer que $V_{X_p^1} \cap K_p$ est relativement compact dans V_p . On peut aussi supposer que $2\eta'$ est inférieur au minimum sur $V_{X_p^1} \cap K_p$ de la fonction η associée à X_p dans l'hypothèse iii).

L'étape $p = 1$ est alors évidente. On considère donc $p > 1$.

Comme K_p est envoyé par f^* dans son intérieur, quitte à réduire V_f et η' , toute η' - f'^* -pseudo-orbite, respectant \mathcal{L}_p et partant de $V_{X'_p} \cap K_p$, est incluse dans K_p et, par l'hypothèse iii), est nécessairement incluse dans X_p .

Par ailleurs, quitte à réduire V_f , d'après 5.1.2.1 on a :

$$A' \cap K_p \subset \text{int}(f'^*{}^{-1}(A' \cap K_p)) \quad (5.3)$$

et on peut montrer que

$$\cup_{n \geq 0} f'^*{}^{-n}(A' \cap K_p) \supset V_{X'_p} \quad (5.4)$$

En effet, sinon il existe $x \in V_{X'_p}$ ayant sa f'^* -orbite qui n'intersecte pas K_p . Soit $q < p$ maximal tel que l'orbite de x intersecte C_q . D'une part, x ne peut pas appartenir à X_q ; donc son orbite quitte nécessairement C_q , par hypothèse de récurrence sur p , la propriété 5 de 5.3.1 et le choix de η' . D'autre part, l'orbite de x intersecte K_q , donc y reste incluse et n'intersecte pas K_p . Ainsi son orbite intersecte $C_{q'}$ avec $p > q' > q$. Cela contredit la maximalité de q .

D'après (5.3) et (5.4), on peut construire une fonction η'' sur $V_{X'_p}$, continue, strictement positive et inférieure à η' telle que pour tous $n \geq 1$, $x \in f'^*{}^{-n}(A' \cap K_p) \cap V_{X'_p}$ et $x_1 \in V_{X'_p} \cap \mathcal{L}_{pf'^*}^{\eta''(x)}$, les points de $V_{X'_p} \cap \mathcal{L}_{pf'^*}^{\eta''(x_1)}$ appartiennent à $f'^*{}^{-n+1}(A' \cap K_p) \cap V_{X'_p}$. Une telle fonction η'' vérifie la conclusion iii) du théorème 2.1, car toute η'' -pseudo-orbite de f'^* dans $V_{X'_p}$ finit par appartenir à $V_{X'_p} \cap K_p$.

Il ne reste plus qu'à montrer la conclusion ii). Par les propriétés 2, 3 et 5 de 5.3.1, la lamination X'_p immergée par $i(f')$ est préservée par $f' \in V_f$, pour $p \geq 1$. Par continuité de $f' \mapsto (i_1(f'), f'^*)$

et l'hypothèse de dilatation normale pour f , quitte à restreindre V_f , l'application f' dilate normalement et uniformément la lamination X_p^1 sur le compact $X_p \cap K_p$. Par (5.3) et (5.4), l'application f' dilate normalement la lamination immergée X_p' . Donc la conclusion ii) du théorème 2.1 est vérifiée.

5.3.3 Rang $p=N$

La démonstration de cette étape est identique à celle du théorème 1.2. On commence par choisir un voisinage ouvert A_N de K_N , qui soit ouvert et relativement compact dans X_N , dont l'adhérence, notée K' , est envoyée par f^* dans $\text{int}(K_N)$. On se sert alors du lemme 1.5.1. Pour son utilisation, la lamination normalement dilatée par f est X_N . Aussi, le \mathcal{L} -fibré (F, \mathcal{F}) est (F_N, \mathcal{F}_N) . L'application Exp restreinte à un voisinage de la section nulle de F_N est bien une immersion de ce \mathcal{L}_N -fibré. On fixe enfin une connexion quelconque sur F_N et un voisinage compact W de K' dans X_N .

Le lemme 1.5.1 garantit alors l'existence d'un voisinage V_σ de la section nulle de $\Gamma_W F_N$ ¹⁴, d'un voisinage V_f de f dans $C^1(M, M)$ et d'une application continue :

$$\begin{aligned} V_\sigma \times V_f &\rightarrow \text{End}_{f|_{X_N}}^*(X_N, X_N) \times V_\sigma \\ (\sigma, f') &\mapsto (f'_\sigma, S_{f'}(\sigma)) \end{aligned}$$

telle que, pour chaque $f' \in V_f$, l'application $S_{f'}$ a un point fixe $\sigma_N(f')$ dépendant continûment de f' (cf preuve du théorème 1.2) vérifiant

$$\begin{array}{ccccc} & & f' & & \\ & & \rightarrow & & \\ & M & & M & \\ & \uparrow & & \uparrow & Exp \circ \sigma_N(f') \\ Exp \circ \sigma_N(f') & & & & \\ & K' & \rightarrow & X_N & \\ & & & & f'_{\sigma_N(f')} \end{array}$$

ainsi que $\sigma_N(f) = 0$ et $f'_0 = f^*$. On prolonge σ_N par la section nulle sur les autres strates. On note $f'_N := f'_{\sigma_N(f')|_{A_N}}$ et $i_N(f') := Exp \circ \sigma_N(f')$. Ainsi, la propriété fondamentale est vérifiée pour ces deux applications, quitte à réduire V_f .

5.3.4 Rang $p+1 \Rightarrow$ Rang p

Naïvement, l'idée est de tirer en arrière la section σ_{p+1} par le lemme 1.6.1. Cependant, cette préimage n'a *a priori* aucune raison de bien se recoller avec σ_{p+1} . Il s'agit donc de bien adapter

¹⁴On rappelle que $\Gamma_W F_N$ désigne les sections de F_N , étant des morphismes de (L_N, \mathcal{L}_N) dans (F_N, \mathcal{F}_N) et à support dans W .

σ_{p+1} . Cela va demander au préalable d'étudier la combinatoire topologique.

Étude topologique

Voici la zone de "recollement".

Propriété 5.3.2. Soit Δ le compact $C_p \cap K_{p+1}$.

Il existe un voisinage ouvert V_Δ de Δ arbitrairement petit qui soit relativement compact dans $V_p \cap A_{p+1}$ et tel que :

5.3.2.1 $f^*(adh(V_\Delta))$ est inclus dans $int(K_{p+1} \setminus V_\Delta)$.

5.3.2.2 $f^*(adh(A_{p+1}))$ est disjoint de $adh(V_\Delta)$.

Preuve

Comme Δ est inclus dans K_{p+1} , l'ouvert A_{p+1} est un voisinage de Δ . Par 5.1.2.2, le compact Δ est inclus dans V_p . Donc un voisinage de Δ assez petit sera inclus dans $V_p \cap A_{p+1}$.

Comme Δ est inclus dans K_{p+1} , l'image par f^* de Δ est incluse dans $int(K_{p+1})$, par 5.1.2.1. Or Δ est inclus dans $C_p \subset adh(K_{p+1}^c)$. Donc, un voisinage V_Δ de Δ assez petit vérifie 5.3.2.1.

Comme Δ est inclus dans $adh(K_{p+1}^c)$ et comme, par hypothèse de récurrence, $f^*(adh(A_{p+1}))$ est inclus dans $int(K_{p+1})$, un voisinage V_Δ de Δ assez petit vérifie 5.3.2.2.

Soit V'_Δ et V''_Δ des ouverts de A vérifiant :

$$\Delta \subset V''_\Delta \subset adh(V''_\Delta) \subset V'_\Delta \subset adh(V'_\Delta) \subset V_\Delta$$

Propriété 5.3.3. Pour chaque $j \geq p$, il existe deux voisinages ouverts et relativement compacts V'_{C_j} et V_{C_j} de C_j , vérifiant $adh(V'_{C_j}) \subset V_{C_j}$, tels que

$$\text{avec } A_p := \bigcup_{j \geq p} V'_{C_p} \text{ et } A'_{p+1} := \bigcup_{j > p} V_{C_p}, \text{ on a :}$$

5.3.3.0 A_p et A'_{p+1} sont des voisinages de K_p et K_{p+1} respectivement. De plus, A'_{p+1} est inclus dans A_{p+1} .

5.3.3.1 $f^*(adh(A_p \cup V_{C_p})) \subset int(K_p)$ et
 $f^*(adh(A_{p+1})) \subset int(K_{p+1}) \setminus adh(V_{C_p} \cup V_\Delta)$

5.3.3.2 $adh(V_{C_j}) \subset V_{X_j^{p+1}}$, pour $j > p$, et $adh(V_{C_p}) \subset V_p$.

5.3.3.3 Il existe une métrique riemannienne g sur M et $\lambda < 1$, tels que pour la métrique $i^*_{|L_p}g$ sur (L_p, \mathcal{L}_p) et tout $v \in (i^*TM/T\mathcal{L}_p)|_{V_{C_p} \cup V_\Delta}$:

$$\max(1, \|T_{\pi(v)}f^*_{|T\mathcal{L}_p}\|) \cdot \|v\| \leq \lambda \cdot \|[i^*Tf]_p(v)\|$$

5.3.3.4 Pour $j \geq p$, il existe un voisinage de $f^*(adh(V_{C_j}))$ sur lequel la section $\sigma_{p+1}(f')$ est à valeurs dans F_j , pour tout $f' \in V_f$.

5.3.3.5 $adh(V_{C_p}) \cap adh(A'_{p+1}) \subset V''_\Delta$

5.3.3.6 $V_{C_p} \cup A'_{p+1} \cup int(A_p^c) = A$

Preuve

Comme la réunion des compacts de $(C_j)_{j \geq p}$ est égale à K_p et que la réunion des compacts de $(C_j)_{j \geq p+1}$ est égale à K_{p+1} , on a simplement l'assertion 5.1.2.0. De plus, quand les voisinages $(V_{C_j})_{j \geq p}$ sont petits, les voisinages A_p et A'_{p+1} sont proches de K_p et K_{p+1} respectivement. Ainsi pour $(V_{C_j})_{j > p}$ assez petits, A'_{p+1} est inclus dans A_{p+1} .

La première partie de 5.3.3.1 provient de 5.1.2.1 pour $(V'_{C_j})_{j \geq p}$ assez petits. La deuxième partie de 5.3.3.1 est réalisée pour V_{C_p} et V_Δ assez petits d'après la propriété 5.3.1 qui affirme que le compact $adh(A_{p+1})$ est envoyé dans l'intérieur de K_{p+1} et le fait que C_p et Δ n'intersecte pas $int(K_{p+1})$.

L'inclusion 5.3.3.2 est une conséquence de la propriété 5 de 5.3.1, pour $(V_{C_j})_{j > p}$ assez petits, et de 5.1.2.2, pour V_{C_p} assez petit.

L'inégalité 5.3.3.3 est une conséquence de 5.1.2.3, avec V_{C_p} et V_Δ assez petits.

l'assertion 5.3.3.4 est une conséquence de la propriété 4 de 5.3.1, pour des voisinages $(V_{C_j})_{j > p}$ assez petits.

Pour obtenir l'assertion 5.3.3.5, on fixe V''_Δ et on considère les voisinages $(V_{C_j})_{j \geq p}$ assez petits.

L'assertion 5.3.3.6 est évidente.

Préimage de σ_{p+1} donnée par le lemme 1.6.1

Rappelons que l'on note \mathcal{T}_p la structure de treillis de laminations sur F_p induite par $\mathcal{T}_{|L_p}$.

Le lemme suivant s'apparente au lemme 1.6.1 et sera démontré dans la partie 5.3.5.

Lemme 5.3.4. Soient $K' := adh(V_\Delta \cup V_{C_p})$ et W un voisinage compact de K' dans V_p . On fixe une connexion ∇ et une norme $\|\cdot\|$ sur le \mathcal{L}_p -fibré (F_p, \mathcal{F}_p) .

Pour η' assez petit et V_f assez petit, il existe un voisinage V_σ de la section nulle dans ΓF_p ¹⁵ et une application continue :

$$S : V_f \times V'_\sigma \rightarrow V'_\sigma \cap \Gamma_W F_p$$

¹⁵On rappelle que ΓF_p désigne l'espace des sections de F_p étant des morphismes de \mathcal{L}_p dans \mathcal{F}_p .

$$(f', \sigma) \mapsto S_{f'}(\sigma)$$

avec $V'_\sigma = V_\sigma \cap \text{Mor}(\mathcal{T}_{|L_p}, \mathcal{T}_p)$ muni de la topologie induite par $\text{Mor}(\mathcal{T}_{|L_p}, \mathcal{T}_p)$.

et vérifiant les conditions suivantes :

1. La section $S_f(0_{F_p})$ est nulle.
2. Pour $x \in K'$, $f' \in V_f$ et $\sigma \in V'_\sigma$, le point $\text{Exp} \circ S_{f'}(\sigma)(x)$ est l'unique point d'intersection de l'image par Exp de la boule $B_{F_{p_x}}(0, \eta')$ avec la préimage par f' de $\text{Exp} \circ \sigma(\mathcal{L}_{pf^*(x)}^{\eta'})$.
3. Pour $f' \in V_f$ et $\delta > 0$, il existe $N \geq 0$ et $V_{f'}$ un voisinage de f' dans V_f tels que, pour $f'' \in V_{f'}$ et $n \geq N$, le diamètre de $S_{f''}^n(V'_\sigma)$ est inférieur à δ pour la norme $\|\cdot\|^\nabla$.
4. Pour $j \geq p$ et $x \in X_j \cap K'$, $f' \in V_f$ et $\sigma \in V'_\sigma$, soit $f'_\sigma(x) \in \mathcal{L}_{pf^*(x)}^{\eta'}$ défini par

$$f' \circ \text{Exp} \circ S_{f'}(\sigma)(x) = \text{Exp} \circ \sigma \circ f'_\sigma(x)$$

Si la dérivée partielle $\partial_{T_{f'_\sigma(x)}\mathcal{L}_j}(\text{Exp} \circ \sigma)$ est injective alors $\partial_{T_x\mathcal{L}_j}(\text{Exp} \circ S_{f'}(\sigma))$ l'est aussi.

On va montrer que, quitte à restreindre V_f , l'application $\sigma_{p+1|L_p}$ est continue de V_f dans V'_σ .

L'application i_{p+1} est continue de V_f dans $\text{Mor}(\mathcal{T}, M)$ et i est un morphisme \mathcal{T} -contrôlé. Donc, par régularité de l'application exponentielle, l'application :

$$\sigma'_{p+1} : f' \in V_f \longmapsto \left[x \in L_p \mapsto \exp_{i(x)}^{-1}(i_{p+1}(f')(x)) \right]$$

est continue de V_f dans $\text{Mor}_0(\mathcal{T}_{|L_p}, \mathcal{T}_p)$, par définition de la structure \mathcal{T}_p .

L'application $t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\epsilon t}{\sqrt{1+t^2}}$ est un difféomorphisme sur $] -\epsilon, \epsilon[$ dépendant régulièrement de $\epsilon > 0$. L'inverse de ce difféomorphisme est $t \in] -\epsilon, \epsilon[\mapsto \frac{t}{\sqrt{\epsilon^2 - t^2}}$.

Ainsi, l'application :

$$\sigma_{p+1|L_p} : f' \in V_f \longmapsto \left[x \in L_p \mapsto \frac{\sigma'_{p+1}(f')}{\sqrt{\epsilon^2 \circ i(x) - \|\sigma'_{p+1}(f')\|^2}} \right]$$

est une application continue de V_f dans $\text{Mor}_0(\mathcal{T}_{|L_p}, \mathcal{T}_p)$. Cela implique que $\sigma_{p+1|L_p}$ est une application continue de V_f dans ΓF_p . Comme σ_{p+1} s'annule en f , quitte à réduire V_f ,

$$\forall f' \in V_f, \quad \sigma_{p+1}(f')|_{L_p} \in V'_\sigma$$

Ainsi, l'application $f' \in V_f \mapsto \tilde{\sigma}_p(f') := S_{f'}(\sigma_{p+1}(f')|_{L_p})$ est bien définie et continue dans V'_σ munie de la topologie induite par $\text{Mor}_0(\mathcal{T}_{|L_p}, \mathcal{T}_p)$.

Recollement de σ_{p+1} avec sa préimage donnée par le lemme 5.3.4

On cherche à bien "recoller" $\tilde{\sigma}_p$ et σ_{p+1} . Pour cela nous avons besoin du lemme suivant, pour avoir une bonne structure algébrique locale sur les images par i_{p+1} de la structure de treillis \mathcal{T} .

Lemme 5.3.5. *Quitte à réduire η' puis V_f , il existe une application continue γ de V_f dans les morphismes $(\mathcal{T}_{p|\pi^{-1}(V_\Delta)}, \mathcal{T}_p)$ -contrôlés, respectant les fibres de F_p , qui vérifie, pour $x \in V_\Delta$ et $f' \in V_f$,*

1. le point $\gamma(f')(0_x)$ est égal à $\sigma_{p+1}(f')(x)$,
2. pour $j \geq p$ et $x \in V'_{C_j}$, il existe une plaque \mathcal{L}_{jx} contenant \mathcal{L}'_{jx} , telle que

$$\text{Exp} \circ \gamma(f')(F_{jx}^\perp \cap F_{px}) = i_{p+1}(f')(\mathcal{L}_{jx}) \pitchfork \text{Exp}(F_{px})$$

3. il existe $\delta > 0$, ne dépendant ni de x ni de f' , tel que $\gamma(f')|_{F_{px}}$ est un difféomorphisme sur un ouvert de F_{px} contenant $B_{F_{px}}(0_x, \delta)$.

Le lemme 5.3.5 sera démontré dans la partie 5.3.6. On continue maintenant la preuve de notre récurrence.

Par la conclusion 3 du lemme 5.3.5, quitte à réduire V_f , la section suivante est bien définie, pour $f' \in V_f$:

$$x \in V_\Delta \mapsto \gamma|_{F_{px}}^{-1}(f') \circ \tilde{\sigma}_p(f')(x)$$

En se ramenant à des cartes des voisinages tubulaires de \mathcal{T} et en utilisant le théorème des fonctions implicites, on montre¹⁶ que cette dernière section est $(\mathcal{T}|_{V_\Delta}, \mathcal{T}_p)$ -contrôlée et dépend continûment de $f' \in V_f$.

Soit $\rho \in \text{Mor}(\mathcal{T}, [0, 1])$ une fonction à support inclus dans V_Δ et valant 1 sur V'_Δ . On note \mathcal{T}_{i^*TM} la structure de treillis induite par \mathcal{T} sur i^*TM .

Soit alors σ_p^0 l'application définie, pour $f' \in V_f$, par :

$$\sigma_p^0(f') : A \rightarrow i^*TM$$

$$x \mapsto \begin{cases} \gamma(f')\left(\rho(x) \cdot \gamma|_{F_{px}}^{-1}(f') \circ \tilde{\sigma}_p(f')(x)\right) & \text{si } x \in V_\Delta \\ \sigma_{p+1}(f')(x) & \text{si } x \in V_\Delta^c \end{cases}$$

Comme le support de ρ est inclus dans V_Δ et que $\gamma(f')(0) = \sigma_{p+1}(f')$, l'application σ_p^0 est continue de V_f dans l'espace des sections $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_{i^*TM})$ -contrôlées de i^*TM . L'application σ_p^0 est égale à $\tilde{\sigma}_p$ sur $\text{adh}(V'_\Delta)$ et à σ_{p+1} sur le complémentaire de V_Δ .

Fait 5.3.6. *Quitte à réduire V_f et η' , pour $f' \in V_f$, $j > p$ et $x \in V'_{C_j}$,*

¹⁶Une preuve similaire sera effectuée en détail dans le lemme 5.3.7

5.3.6.1 le point $f' \circ \text{Exp} \circ \sigma_p^0(f')(x)$ appartient à $\text{Exp} \circ \sigma_p^0(f')(\mathcal{L}_{j f^*(x)}^{\eta'})$,

5.3.6.2 le point $\text{Exp} \circ \sigma_p^0(f')(x)$ appartient à $i_{p+1}(f')(\mathcal{L}_{j x}^{\eta'})$.

Preuve

Pour $x \in V_{C_j}' \setminus V_\Delta$, les points $\text{Exp} \circ \sigma_p^0(f')(x)$ et $i_{p+1}(f')(x)$ sont égaux. Par la propriété 2 de 5.3.1, les points $f' \circ i_{p+1}(f')(x)$ et $i_{p+1}(f') \circ f_{p+1}^*(x)$ sont égaux. Comme x appartient à l'ouvert A_{p+1} , par 5.3.2.2, quitte à réduire V_f , $f_{p+1}^*(x)$ n'appartient jamais à V_Δ , donc les points $i_{p+1}(f') \circ f_{p+1}^*(x)$ et $\text{Exp} \circ \sigma_p^0(f') \circ f_{p+1}^*(x)$ sont égaux. Enfin, par la propriété 5 de 5.3.1 et 5.3.3.2, $f_{p+1}^*(x)$ appartient à $\mathcal{L}_{j f^*(x)}^{\eta'}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} f' \circ \text{Exp} \circ \sigma_p^0(f')(x) &= f' \circ i_{p+1}(f')(x) = i_{p+1}(f') \circ f_{p+1}^*(x) \\ &= \text{Exp} \circ \sigma_p^0(f') \circ f_{p+1}^*(x) \in \text{Exp} \circ \sigma_p^0(f')(\mathcal{L}_{j f^*(x)}^{\eta'}) \end{aligned}$$

Pour $x \in V_\Delta \cap V_{C_j}'$ et $f' \in V_f$, on a :

$$\sigma_p^0(f')(x) = \gamma(f') \left(\rho(x) \cdot \gamma_{|F_{px}}^{-1}(f') \circ \tilde{\sigma}_p(f')(x) \right)$$

D'après le conclusion 2 du lemme 5.3.4, le point $\text{Exp} \circ \tilde{\sigma}_p(f')(x)$ est envoyé par f' dans $i_{p+1}(f')(\mathcal{L}_{p f^*(x)}^{\eta'})$. Quitte à réduire η' , la distance $d(f^*(V_{C_j}'), L_j^c)$ est strictement plus grande que $2\eta'$. Donc, par cohérence des voisinages tubulaires, on a $\mathcal{L}_{p f^*(x)}^{\eta'} \subset \mathcal{L}_{j f^*(x)}^{\eta'}$.

$$\Rightarrow f' \left(\text{Exp} \circ \tilde{\sigma}_p(f')(x) \right) \in i_{p+1}(f')(\mathcal{L}_{j f^*(x)}^{\eta'}) \quad (5.5)$$

D'après la dilatation normale exprimée dans 5.3.3.3, la cohérence des voisinages tubulaires et la propriété 2 de 5.3.1, pour y proche de $i(x)$ et f' proche de f , on a :

$$d\left(y, i_{p+1}(f')(\mathcal{L}_{j x}^{\eta'})\right) \leq d\left(f'(y), i_{p+1}(f')(\mathcal{L}_{j f^*(x)}^{\eta'})\right) \quad (5.6)$$

Donc, quitte à réduire V_f , d'après (5.5) et (5.6), le point $y := \text{Exp} \circ \tilde{\sigma}_p(f')(x)$ appartient à $i_{p+1}(f')(\mathcal{L}_{j x}^{\eta'})$. Comme $\tilde{\sigma}_p(f')(x)$ appartient à F_{px} , par la conclusion 2 du lemme 5.3.5, le point $\gamma_{|F_{px}}^{-1}(f') \circ \tilde{\sigma}_p(f')(x)$ appartient à $F_{jx}^\perp \cap F_{px}$. Donc, quitte à réduire V_f , le point $\text{Exp} \circ \sigma_p^0(f')(x)$ appartient à $i_{p+1}(f')(\mathcal{L}_{j x}^{\eta''})$, avec $\eta'' < \eta'$. Quitte à réduire V_f , par la propriété 5 de 5.3.1 et 5.3.3.2, on a :

$$f' \circ \text{Exp} \circ \sigma_p^0(f')(x) \in i_{p+1}(f')(\mathcal{L}_{j f^*(x)}^{\eta'}) \quad (5.7)$$

Par 5.3.2.1, L'image de $\text{adh}(V_\Delta)$ par f^* est disjointe de $\text{adh}(V_\Delta)$. Ainsi, au voisinage de $f^*(V_\Delta)$, l'application $\text{Exp} \circ \sigma_p^0$ est égal à i_{p+1} . Donc, quitte à réduire η' et V_f , les images de $\mathcal{L}_{j f^*(x)}^{\eta'}$ par $\text{Exp} \circ \sigma_p^0(f')$ et par $i_{p+1}(f')$ sont égales. L'assertion 5.3.6.1 provient ainsi de 5.7.

Montrons maintenant que, pour $f' \in V_f$, $q \geq p$ et $x \in A_{p+1} \cap L_q$, la différentielle $\partial_{T_x \mathcal{L}_q} \text{Exp} \circ \sigma_p^0(f')$ est injective. Grâce à la propriété 3 de 5.3.1, il suffit de vérifier cela pour $x \in V_\Delta$. Par la propriété 3 de 5.3.1 et le fait 5.3.6.2, il suffit de vérifier que $\partial_{T_x \mathcal{L}_j} \text{Exp} \circ \sigma_p^0(f')$ est injective pour $j > p$ tel que $x \in V_{C_j}'$. Pour $f' = f$, on a $\text{Exp} \circ \sigma_p^0(f') = i$, donc $\partial_{T_x \mathcal{L}_j} \text{Exp} \circ \sigma_p^0(f')$ est injective. Comme V_{C_j}' est relativement compact dans L_j et que l'application $\text{Exp} \circ \sigma_p^0|_{L_j}$ est continue de V_f dans $\text{Mor}(\mathcal{L}_j, M)$, quitte à réduire V_f , la différentielle $\partial_{T_x \mathcal{L}_j} \text{Exp} \circ \sigma_p^0(f')$ est toujours injective.

Construction de i_p

Par 5.3.3.6, la famille $(V_{C_p}, A'_{p+1}, \text{int}(A_p^c))$ est un recouvrement de A . Par l'annexe A.1.1, il existe une partition de l'unité $(r_1, r_2, r_3) \in \text{Mor}(\mathcal{T}, [0, 1])^3$ associée à ce recouvrement.

On définit, par récurrence, sur des voisinages de plus en plus petits de f :

$$f' \mapsto \sigma_p^{k+1}(f') := r_1 \cdot S_{f'}(\sigma_p^k(f')) + r_2 \cdot \sigma_p^0(f')|_{L_p}$$

D'après le lemme 5.3.4, l'application σ_p^k est continue d'un voisinage de f dans V'_σ muni de la topologie induite par $\text{Mor}_0(\mathcal{T}|_{L_p}, \mathcal{T}_p)$.

On va montrer que $(\sigma_p^k)_k$ converge vers une application σ_p dont la composition avec Exp est l'application i_p .

Description des valeurs de σ_p^k

On va maintenant décrire les valeurs de $\sigma_p^k(f')$ sur un voisinage de $V_{C_p}^c$, puis sur V'_Δ et enfin sur $V_{C_p} \setminus V''_\Delta$, pour tout $f' \in V_f$.

- Sur un voisinage de $V_{C_p}^c$, la section $\sigma_p^k(f')$ est égale à $r_2 \cdot \sigma_p^0(f')$. On a donc :

$$\text{sur un voisinage de } A_p \setminus V_{C_p}, \sigma_p^k(f') = \sigma_p^0(f') \quad (5.8)$$

- Sur V'_Δ , par la conclusion 2 du lemme 5.3.4, la section $S_{f'}(\sigma_p^k(f'))$ ne dépend que de $\sigma_p^k(f')$ sur un voisinage de $f^*(\text{adh}(V'_\Delta))$. Comme V_Δ est inclus dans A_{p+1} , d'après 5.3.3.1 :

$$f^*(\text{adh}(V_\Delta)) \subset K_{p+1} \setminus \text{adh}(V_{C_p}) \subset A_p \setminus \text{adh}(V_{C_p})$$

Donc sur un voisinage de $f^*(\text{adh}(V'_\Delta))$, les sections $\sigma_p^k(f')$ et $\sigma_p^0(f')$ sont égales. Comme $f^*(\text{adh}(V'_\Delta))$ est disjoint de $\text{adh}(V_\Delta)$, sur un voisinage de $f^*(\text{adh}(V'_\Delta))$, on a $\sigma_p^0(f') = \sigma_{p+1}(f')$. Comme V'_Δ est inclus dans K' , par la conclusion 2 du lemme 5.3.4, la section $S_{f'}(\sigma_p^k(f'))$ est égale à $S_{f'}(\sigma_{p+1}(f')) = \tilde{\sigma}_p(f')$ sur $\text{adh}(V'_\Delta)$. Comme σ_p^0 est égal à $\tilde{\sigma}_p$ sur V'_Δ , on a :

$$\forall x \in V'_\Delta, \sigma_p^k(f')(x) = (r_1 + r_2) \cdot \tilde{\sigma}_p(f')(x) = (r_1 + r_2) \cdot \sigma_p^0(f')(x)$$

$$\text{et } \forall x \in V'_\Delta \cap A_p, \sigma_p^k(f')(x) = \sigma_p^0(f')(x) = \tilde{\sigma}_p(f')(x) = S_{f'}(\sigma_p^{k-1}(f'))(x) \quad (5.9)$$

- On va maintenant étudier les valeurs de σ_p^k sur $V_{C_p} \setminus V''_\Delta$. Par 5.3.3.5, l'ensemble $V_{C_p} \setminus V''_\Delta$ est contenu dans A'_{p+1} . La fonction r_2 y est donc nulle. Soit $x \in V_{C_p} \setminus V''_\Delta \subset K'$. Par la conclusion 2 du lemme 5.3.4, $S_{f'}(\sigma_p^{k-1}(f'))(x)$ ne dépend que de $\sigma_p^{k-1}(x_1)$, où $x_1 := f'^*_{\sigma_p^{k-1}}(x)$ est η' -proche de $f^*(x)$ dans une plaque de \mathcal{L}_p . Par 5.3.3.1, on a $f^*(\text{adh}(V_{C_p})) \subset \text{int}(K_p)$, donc x_1 appartient à K_p .

Si on suppose de plus que x_1 appartient à $(A'_{p+1} \cup V''_\Delta)^c$, alors x_1 appartient à $K_p \setminus (A'_{p+1} \cup$

$V''_{\Delta} \subset V_{C_p} \setminus V''_{\Delta}$. On peut alors réitérer ce processus en construisant une η' -pseudo chaîne $(x_i)_{i=0}^{n_x}$ de f^* , qui respecte les plaques de \mathcal{L}_p , définie par :

$$\begin{cases} x_0 = x \\ x_{i+1} := f'^*_{\sigma_p^{k-i}}(x_i), \end{cases}$$

que l'on arrête quand $i = k$ ou $x_i \in V''_{\Delta} \cup A'_{p+1}$. On a donc $x_0 = x, \dots, x_i \in K_p \setminus (A'_{p+1} \cup V''_{\Delta}), \dots, x_{n_x} \in (A'_{p+1} \cup V''_{\Delta}) \cap K_p$ ou $n_x = k$.

On va montrer que :

$$\forall x \in V_{C_p} \setminus V''_{\Delta}, \quad \sigma_p^k(f')(x) = r_1(x) \cdot S_{f'}^{n_x}(\sigma_p^0(f'))(x) \quad (5.10)$$

$$\text{et } \forall x \in A_p \cap V_{C_p} \setminus V''_{\Delta}, \quad \sigma_p^k(f')(x) = S_{f'}^{n_x}(\sigma_p^0(f'))(x) \quad (5.11)$$

Pour $n_x = k$, ces égalités s'obtiennent par récurrence décroissante sur i le long de la chaîne $(x_i)_{i=0}^{n_x}$.

Pour $n_x < k$, d'après 5.3.3.5, le point x_{n_x} appartient à V''_{Δ} ou à $\text{adh}(V_{C_p})^c$, donc par (5.8) et (5.9), en effectuant une récurrence décroissante sur i le long de la chaîne $(x_i)_{i=0}^{n_x}$, on a aussi (5.10) et (5.11). De plus, n_x ne change pas pour un k plus grand. Donc la suite $(\sigma_p^k(f')(x))_k$ est stationnaire, par hypothèse iii) du théorème, quitte à réduire V_f .

On va montrer que, pour x' appartenant à un voisinage de $x \in V_{C_p} \setminus V''_{\Delta}$, on a :

$$\sigma_p^k(f')(x') = r_1(x') \cdot S_{f'}^{n_x}(\sigma_p^0(f'))(x'), \quad \text{si } k > n_x \quad (5.12)$$

On aura ainsi $\nabla \sigma_p^k(f')(x) = \nabla(r_1 \cdot S_{f'}^p(\sigma_p^0(f'))(x))$, avec $p = n_x$.

Comme $n_x < k$, le point x_{n_x} appartient à $V''_{\Delta} \cup A'_{p+1}$ qui est ouvert et donc $n_{x'}$ est inférieur ou égale à n_x pour x' voisin de x .

L'inégalité 5.12 est immédiate si $n_x = n_{x'}$. Supposons que $n_x > n_{x'}$. Par définition, $n_{x'}$ est non nul. Ainsi $x_{n_{x'}}$ appartient à $K_p \setminus (V''_{\Delta} \cup A'_{p+1})$ et est proche de $V''_{\Delta} \cup A'_{p+1}$ auquel $x'_{n_{x'}}$ appartient. Or $\partial A'_{p+1} \cap K_p$ est égal à $\partial A'_{p+1} \cap C_p$ qui est inclus dans V''_{Δ} par 5.3.3.5. Ainsi, $x_{n_{x'}}$ appartient à $\text{adh}(V''_{\Delta})$. Par 5.3.2.1, quitte à réduire V_f , on a toujours $n_x = n_{x'} + 1$ dans ce cas. De plus, sur le voisinage V''_{Δ} de $x_{n_{x'}}$, la section $\sigma_p^0(f')$ est égale à $\tilde{\sigma}_p$ qui est elle-même égale à $S_{f'}(\sigma_p^0(f'))$. D'où l'équation (5.12).

Convergence de $(\sigma_p^k)_k$

On commence par montrer que, quitte à réduire V_f , pour tout $k \geq 0$ et $f' \in V_f$, la section $\sigma_p^k(f')$ est définie. Soient W' un compact de L_p et $\delta > 0$ tels que

$$\{\sigma \in \Gamma F_p \cap \text{Mor}(\mathcal{T}_{L_p}, \mathcal{T}_p) : \forall x \in W', \|\sigma(x)\| + \|\nabla \sigma(x)\| < \delta\} \subset V'_\sigma$$

Par continuité de σ_p^0 , quitte à considérer V_f plus petit, pour $f' \in V_f$, on a :

$$\max_{W'} \left\{ \|r_2 \cdot \sigma_p^0(f')\| + \|\nabla(r_2 \cdot \sigma_p^0(f'))\| \right\} < \delta$$

$$\text{et } \max_{W'} \left\{ \|(r_1 + r_2) \cdot \sigma_p^0(f')\| + \|\nabla((r_1 + r_2) \cdot \sigma_p^0(f'))\| \right\} < \delta$$

Par la conclusion 3 du lemme 5.3.4, quitte à considérer V_f plus petit, il existe $N \geq 0$ tel que, pour $f' \in V_f$ et $n \geq N$, on a :

$$\sup_{W'} \left\{ \|r_1 \cdot S_{f'}^n(\sigma_p^0(f'))\| + \|\nabla(r_1 \cdot S_{f'}^n(\sigma_p^0(f')))\| \right\} < \delta$$

Aussi, par continuité de σ_p^0 et S , quitte à réduire de nouveau V_f , on a pour $n \leq N$ et pour $f' \in V_f$, on a :

$$\max_{W'} \left\{ \|r_1 \cdot S_{f'}^n(\sigma_{p|L_p}^0(f'))\| + \|\nabla(r_1 \cdot S_{f'}^n(\sigma_{p|L_p}^0(f')))\| \right\} < \delta$$

De la description des valeurs de σ_p^k , on peut conclure que $\sigma_p^k(f')$ est définie pour tout $f' \in V_f$ et $k \geq 0$.

On va maintenant construire σ_p . D'après, la conclusion 3 du lemme 5.3.4 et la description des valeurs de $(\sigma_p^k)_k$, cette suite converge dans $C^0(V_f, \Gamma F_p)$, vers une certaine application σ_p .

L'application σ_p se prolonge continûment sur $V_f \times A$ par $r_2 \cdot \sigma_p^0$ en dehors de V_{C_p} , en une application continue de V_f dans $C^0(A, i^*TM)$, que l'on note toujours σ_p .

Propriété de σ_p et i_p

On va montrer que σ_p est une application continue de V_f dans $Mor(\mathcal{T}, \mathcal{I}_{i^*TM})$.

Tout d'abord, l'application $\sigma_{p|L_p}$ est continue de V_f dans ΓF_p .

Quitte à réduire η' , on peut supposer cette constante inférieure à $\inf_{V_{C_p}} \eta$, où η est la fonction sur V_p fournie par l'hypothèse iii) du théorème. On définit U_j comme l'intérieur de l'ensemble des points de $V_{C_p}^c$ qui sortent par toute η' -pseudo-chaîne de V_{C_p} respectant \mathcal{L}_p et de longueur supérieure à j . Par la propriété 5.1.3, la suite d'ouverts $(U_j)_j$ est croissante et sa réunion est $V_{C_p} \setminus X_p$. D'après la description des valeurs de $(\sigma_p^k)_k$ pour $l > k > j$, les sections $\sigma_p^k(f')$ et $\sigma_p^l(f')$ sont égales sur U_j et sur un voisinage de $V_{C_p}^c$. Donc σ_p est continue de V_f dans $Mor(\mathcal{T}, \mathcal{I}_{i^*TM})$.

$$\text{Soit } i_p := Exp \circ \sigma_p$$

Montrons que :

$$\text{pour } j \geq p, \text{ sur un voisinage de } f^*(adh(V_{C_j}')),$$

$$\text{la section } \sigma_p(f') \text{ est à valeurs dans } F_j, \text{ pour tout } f' \in V_f \quad (5.13)$$

Comme σ_{p+1} et σ_p sont colinéaires sur le complémentaire de $V_{C_p} \cup V_\Delta$ et que sur ce dernier ensemble σ_p appartient à F_p , il suffit de montrer que $f^*(adh(A'_{p+1}))$ n'intersecte pas $adh(V_{C_p} \cup V_\Delta)$, ce qui est donné par 5.3.3.1.

En particulier, l'application i_p vérifie la propriété 4 de 5.3.1.

On va montrer maintenant que la restriction $i_{p|A_p}(f')$ est une immersion, pour $f' \in V_f$.

Par (5.8) et (5.9), sur un voisinage ouvert de $(V_{C_p}^c \cup V_\Delta'') \cap A_p$, la section $\sigma_p(f')$ est égale à $\sigma_p^0(f')$. Or $(V_{C_p}^c \cup V_\Delta'') \cap A_p$ est inclus dans A_{p+1} . On a vu que $Exp \circ \sigma_{p|A_{p+1}}^0(f')$ est une immersion. Donc $i_{p|(V_{C_p}^c \cup V_\Delta'') \cap A_p}(f')$ est une immersion.

On étudie maintenant la restriction de $i_p(f')$ à $V_{C_p}' \setminus V_\Delta''$ qui contient $V_{C_p}' \setminus A_{p+1}'$. Soit $x \in (V_{C_p}' \setminus V_\Delta'') \cap U_j$. On considère de nouveau la pseudo-chaîne $(x_k)_{k=0}^{n_x}$ respectant les plaques de \mathcal{L}_p associée à x . On va démontrer par récurrence décroissante sur $k \in \{0, \dots, n_x\}$, que quand $x_k \in X_l$ la différentielle $\partial_{T_{x_k} \mathcal{L}_l} Exp \circ S_{f'}^{n-k}(\sigma_p^0(f'))$ est injective. Pour $k = n_x$, $\partial_{T_{x_k} \mathcal{L}_l} Exp \circ S_{f'}^{n_x-k}(\sigma_p^0(f'))$ est égale à $\partial_{T_{x_k} \mathcal{L}_l} \sigma_p^0(f')$. L'élément x_k appartient à $K_p \cap (V_\Delta'' \cup A_{p+1}')$ qui est inclus dans A_{p+1} . Or, on a vu que $\partial_{T_{x_k} \mathcal{L}_l} Exp \circ \sigma_p^0(f')$ est injective sur $L_l \cap A_{p+1}$. Ainsi l'hypothèse de récurrence au rang n_x est bien vérifiée. On suppose que $\partial_{T_{x_k} \mathcal{L}_l} Exp \circ S_{f'}^{n-k}(\sigma_p^0(f'))$ est injective quand $x_k \in X_l$. Alors par la conclusion 4 du lemme 5.3.4, $\partial_{T_{x_{k-1}} \mathcal{L}_l} Exp \circ S_{f'}^{n-k+1}(\sigma_p^0(f'))$ est injective.

Ainsi, la propriété 3 de 5.3.1 est vérifiée.

Construction de la famille de voisinages adaptée \mathcal{V}^p

Pour $j \geq p$, d'après 5.3.3.2, on peut supposer η' assez petit pour que

$$d(f^*(V_{C_j}'), L_j^c) > 2\eta', \quad (5.14)$$

et que le fermé $adh(\mathcal{L}_{j f^*(x)}^{\eta'})$ soit un compact inclus dans $\mathcal{L}_{j f^*(x)}^{2\eta'}$ et dépende continûment de $x \in adh(V_{C_j}')$, dans l'espace des compacts non vides de A muni de la distance de Hausdorff. On peut maintenant définir $\mathcal{V}^p := (V_{X_k^p})_{k=p}^N$,

$$\text{avec } V_{X_j^p} := \left\{ x \in L_j \cap A_p ; \exists k \in \{p, \dots, j\} : x \in V_{C_k}' \text{ et } adh(\mathcal{L}_{k f^*(x)}^{\eta'}) \subset L_j \right\}$$

On remarque que, pour $j \geq p$, l'ensemble $V_{X_j^p}$ est ouvert. On va montrer que $V_{X_j^p}$ contient X_j^p . Soit $x \in X_j^p = X_j \cap A_p$. Comme $(V_{C_k}')_k$ recouvre A_p , il existe $k \in \{p, \dots, N\}$ tel que x appartient à V_{C_k}' . Puisque $V_{C_k}' \subset L_k$ intersecte X_j , l'entier k est inférieur à j . De plus, $f^*(x)$ appartient à X_j et le compact $adh(\mathcal{L}_{k f^*(x)}^{\eta'})$ est inclus dans $\mathcal{L}_{k f^*(x)}^{2\eta'}$. Donc, par la propriété 2.1.3, $adh(\mathcal{L}_{k f^*(x)}^{\eta'})$ est inclus dans X_j , lui-même inclus dans L_j . Ainsi, x appartient à $V_{X_j^p}$. Cela montre donc que X_j^p est contenu dans $V_{X_j^p}$.

On remarque enfin que $V_{X_j^p}$ contient V_{C_j}' et donc C_j , pour tout $j \geq p$. Ainsi une partie de la propriété 5 de 5.3.1 est démontrée.

Construction de $f' \mapsto f'_p^*$

Par l'inclusion 5.3.3.5, $V_{C_p} \cap A'_{p+1} \subset V''_{\Delta}$, donc on a $V'_{C_p} \setminus V''_{\Delta} \subset A_p \cap V_{C_p} \setminus A'_{p+1}$. Ainsi, pour tout k et $f' \in V_f$, par définition de σ_p^k , la section $\sigma_p^{k+1}(f')$ est égale à $S_{f'}(\sigma_p^k(f'))$, sur $V'_{C_p} \setminus V''_{\Delta}$. De plus, par (5.9), on a sur $V'_{C_p} \cup V''_{\Delta}$:

$$\forall f' \in V_f, \quad \sigma_p(f') = S_{f'}(\sigma_p(f'))$$

Comme V'_{C_p} est inclus dans K' , d'après la conclusion 2 du lemme 5.3.4, pour $x \in V'_{C_p}$ et $f' \in V_f$, on a :

$$f' \circ i_p(f')(x) \in i_p(f')(\mathcal{L}_{p f^*(x)}^{\eta'}) \quad (5.15)$$

D'après (5.8) et (5.9), sur $(A_p \setminus V_{C_p}) \cup (A_p \cap V'_{\Delta})$, les sections σ_p et σ_p^0 sont égales. Par 5.3.3.5, pour $j > p$, l'ouvert $V'_{C_j} \cap V_{C_p}$ est inclus dans V''_{Δ} . Donc sur $V'_{C_j} \subset A_p$, les sections σ_p et σ_p^0 sont égales. De plus, le compact $\text{adh}(V'_{C_j})$ est inclus dans A_{p+1} qui est envoyé dans $A_p \setminus \text{adh}(V_{C_p})$, par 5.3.3.1. Donc sur un voisinage du compact $f^*(\text{adh}(V'_{C_j}))$ les sections σ_p et σ_p^0 sont égales. Par le fait 5.3.6.1, on déduit que :

pour $x \in V'_{C_j}$ et $f' \in V_f$, on a :

$$f' \circ i_p(f')(x) \in i_p(f')(\mathcal{L}_{j f^*(x)}^{\eta'}) \quad (5.16)$$

Ainsi, (5.15) et (5.16) expriment :

pour $j \geq p$ et $x \in V'_{C_j}$ et $f' \in V_f$,

$$f' \circ i_p(f')(x) \in i_p(f')(\mathcal{L}_{j f^*(x)}^{\eta'}) \quad (5.17)$$

On rappelle que la restriction de Exp à un voisinage de la section nulle du \mathcal{L}_k -fibré (F_k, \mathcal{F}_k) est une immersion dans la variété M de même dimension. Par le théorème d'inversion locale, il existe une fonction strictement positive et continue ϵ_k sur L_k telle que pour x appartenant à L_k , la restriction de Exp à la plaque $\mathcal{F}_{k0_x}^{\epsilon_k(x)}$ est un difféomorphisme sur voisinage de $i(x) \in M$.

On note I_{kx}^{-1} l'application $Exp_{|\mathcal{F}_{k0_x}^{\epsilon_k(x)}}^{-1}$. Il existe ainsi un voisinage ouvert $G_k \subset L_k \times M$ du graphe de $i|_{L_k}$ tel que l'application suivante est bien définie :

$$\pi_k : G_k \rightarrow L_k$$

$$(x, y) \mapsto \pi_k^x(y) := \pi \circ I_{kx}^{-1}(y)$$

où π est la projection $F_k \rightarrow L_k$

Lemme 5.3.7. *L'application π_k est $((\mathcal{T} \times M)|_{G_k}, \mathcal{T})$ -contrôlée.*

Preuve

Il suffit de montrer que pour tout $(x_0, y_0) \in G_k$, si x_0 appartient à $X_j \geq X_k$ alors les différentielles $\partial_{T_y \mathcal{L}_j} I_{kx}^{-1}(y)$ et $\partial_{T_x M} I_{kx}^{-1}(y)$ existent et dépendent continûment de $(x, y) \in G_k$ au voisinage du couple (x_0, y_0) .

On pose $v_0 := I_{kx_0}^{-1}(y)$. Par définition de $I_{kx_0}^{-1}$, l'élément $\pi(v_0)$ appartient à une plaque de \mathcal{L}_k contenant x_0 . Par la propriété 2.1.3, $\pi(v_0)$ appartient à une plaque de X_j contenant x_0 . Il existe donc une carte ϕ du feuilletage $\mathcal{L}_k|_{L_j \cap L_k}$ de $\mathcal{L}_j|_{L_j \cap L_k}$, d'un voisinage U d'une plaque de \mathcal{L}_k contenant x_0 et $\pi(v_0)$. On peut supposer que ϕ s'écrit :

$$\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^{d_k} \times \mathbb{R}^{d_j - d_k} \times T$$

Soient (x_1^0, x_2^0, x_3^0) et (v_1^0, v_2^0, v_3^0) les coordonnées de respectivement x_0 et $\pi(v_0)$ via cette carte. On remarque que les couples (x_2^0, x_3^0) et (v_2^0, v_3^0) sont égaux. Quitte à réduire T et U , il existe un voisinage U_1 de v_1^0 dans \mathbb{R}^{d_k} tel que l'ouvert U' égal à $\phi^{-1}(U_1 \times \mathbb{R}^{d_j - d_k} \times T)$ est trivialisant pour F_k . Via la carte ϕ et cette trivialisatation, on identifiera U à $\mathbb{R}^{d_k} \times \mathbb{R}^{d_j - d_k} \times T$ et le fibré $F_k|_{U'}$ à $U_1 \times \mathbb{R}^{d_j - d_k} \times T \times \mathbb{R}^{n - d_k}$. Soit v_4^0 la quatrième coordonnée de v_0 dans cette identification. Via une carte de M , on peut enfin identifier à \mathbb{R}^n un voisinage de $y_0 \in M$. On considère l'application de classe C^1 suivante :

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R}^n \times C^0(T, U_1) \times \mathbb{R}^{d_j - d_k} \times C^0(T, \mathbb{R}^{n - d_k}) &\rightarrow C^0(T, \mathbb{R}^n) \\ (y, w_1, x_2, w_4) &\mapsto \left[x_3 \mapsto y - \text{Exp}\left(w_1(x_3), x_2, x_3, w_4(x_3)\right) \right] \end{aligned}$$

où les espaces de Banach des applications continues et bornées $C^0(T, \mathbb{R}^{d_k})$, $C^0(T, \mathbb{R}^{d_j - d_k})$ et $C^0(T, \mathbb{R}^n)$ sont munis de la norme uniforme.

Quitte à réduire T (et ainsi U et U'), il existe deux applications $w_1^0 \in C^0(T, U_1)$ et $w_4^0 \in C^0(T, \mathbb{R}^{d_j - d_k})$ telles que, pour $x_3 \in T$, le point $I_{k(x_1^0, x_2^0, x_3^0)}^{-1}(y_0)$ existe et a pour coordonnées $(w_1^0(x_3), x_2^0, x_3, w_4^0(x_3))$. On remarque que $w_1^0(x_3^0)$ est égal à v_1^0 et $w_4^0(x_3^0)$ est égal à v_4^0 . On a aussi :

$$\Psi(y_0, w_1^0, x_2^0, w_4^0) = 0$$

Par ailleurs, la différentielle $\partial_{T(C^0(T, U_1) \times C^0(T, \mathbb{R}^{n - d_k}))} \Psi$ au point $(y_0, w_1^0, x_2^0, w_4^0)$ est un isomorphisme car $Ti(T\mathcal{L}_k) \oplus F_k = i^*TM$.

On peut donc utiliser le théorème des fonctions implicites qui nous donne l'existence de voisinages V_y de $y_0 \in \mathbb{R}^n$, V_{w_1} de $w_1^0 \in C^0(T, U_1)$, V_{x_2} de $x_2^0 \in \mathbb{R}^{d_j - d_k}$, V_{w_4} de $w_4^0 \in C^0(T, \mathbb{R}^{n - d_k})$ et d'une application de classe C^1 :

$$\begin{aligned} \rho : V_y \times V_{x_2} &\rightarrow V_{w_1} \times V_{w_4} \\ (y, x_2) &\mapsto \left(\rho_1(y, x_2), \rho_4(y, x_2) \right) \end{aligned}$$

tels que $\rho(y_0, x_2^0)$ est égale à (w_1^0, w_4^0) et pour $(y, x_2) \in V_y \times V_{x_2}$

$$\Psi(y, \rho_1(y, x_2), x_2, \rho_4(y, x_2)) = 0$$

Cela implique que pour $x_3 \in T$, on a :

$$\text{Exp}(P) = y, \text{ avec } P := \left(\rho_1(y, x_2)(x_3), x_2, x_3, \rho_4(y, x_2)(x_3) \right)$$

pour $x = (x_1, x_2, x_3)$ assez proche de x_0 et y assez proche de y_0 , le point P appartient à $\mathcal{F}_{k0x}^{\epsilon_k(x)}$. Par unicité, le point $I_x^{-1}(y)$ est égal à P . L'application ρ étant de classe C^1 , cette application possède la régularité désirée.

Quitte à réduire V_f , pour $f' \in V_f$ l'ensemble $\{(f^*(x), f' \circ i_p(f'))\}; x \in V'_{C_k}\}$ est inclus dans G_k . L'application suivante est donc bien définie pour $f' \in V_f$:

$$V'_{C_k} \rightarrow L_k$$

$$x \mapsto \pi_k^{f^*(x)} \circ f' \circ i_p(f')(x)$$

D'après (5.13) et (5.17), quitte à réduire V_f , pour $k \geq p$, $x \in V_{C_k}'$ et $f' \in V_f$, on a :

$$i_p \circ \pi_k^{f^*(x)} \circ f' \circ i_p(f')(x) = f' \circ i_p(f')(x)$$

donc, pour $l \geq p$, sur l'intersection de V_{C_k}' et V_{C_l}' , on a :

$$i_p \circ \pi_k^{f^*(x)} \circ f' \circ i_p(f')(x) = i_p \circ \pi_l^{f^*(x)} \circ f' \circ i_p(f')(x)$$

Comme $i_p|_{A_p}$ est une immersion, quitte à considérer V_f plus petit, on a toujours :

$$\pi_k^{f^*(x)} \circ f' \circ i_p(f')(x) = \pi_l^{f^*(x)} \circ f' \circ i_p(f')(x)$$

On peut donc définir

$$V_f \xrightarrow{C^0} C^0(A_p, A_p)$$

$$f' \longmapsto (x \mapsto f_p^{f^*(x)} = \pi_j^{f^*(x)} \circ f' \circ i_p(f')(x), \text{ si } x \in V_{C_j}')$$

L'application $f' \mapsto (i_p(f'), f_p^{f^*})$ vérifie ainsi les propriétés 1 et 2 de 5.3.1.

Par régularité des applications définissant l'application $f' \mapsto f_p^{f^*}$, pour montrer que cette dernière est continue de V_f dans $End_{f^*}^p(\mathcal{T}|_{A_p})$, il suffit de prouver la propriété 5 de 5.3.1 :

$$\forall k \geq p, \forall x \in V_k^p, \forall f' \in V_f, f_p^{f^*}(x) \in \mathcal{L}_{kf^*(x)}^{\eta'}$$

Par définition de $V_{X_k}^p$, si x appartient à $V_{X_k}^p$, alors il existe $j \in \{p, \dots, k\}$, tel que x appartient à V_{C_j}' et la plaque $\mathcal{L}_{jf^*(x)}^{\eta'}$ est incluse dans $\mathcal{L}_{kf^*(x)}^{\eta'}$. Comme le point $f_p^{f^*}(x)$ appartient à $\mathcal{L}_{jf^*(x)}^{\eta'}$, il appartient aussi à $\mathcal{L}_{kf^*(x)}^{\eta'}$. Ce qu'il fallait démontrer. □

5.3.5 Preuve du lemme 5.3.4 préimage d'une perturbation de \mathcal{L}_p

On remarque tout d'abord que le lemme 1.6.1 démontre une partie importante du lemme 5.3.4. En effet, avec $(L_p, \mathcal{L}_p) = (L, \mathcal{L})$, $V_p = V$, $(F_p, \mathcal{F}_p) = (F, \mathcal{F})$, $K' = K$, $\eta = \eta'$, $V_\sigma' = V_\sigma \cap Mor(\mathcal{T}|_{L_p}, \mathcal{T}_p)$ et toutes autres données du lemme ayant les mêmes appellations, on obtient les conclusions 1, 2 et 3 du lemme 5.3.4. Aussi, par continuité de $(f', \sigma) \mapsto f_\sigma^{f^*}$, comme $f_\sigma^{f^*}$ coïncide avec f^* sur le complémentaire du compact W , η' peut être choisi arbitrairement petit, quitte à restreindre V_f . Il ne reste plus qu'à démontrer la régularité de S et la conclusion 4 du lemme. Pour cela, on va se replonger dans la preuve du lemme 1.6.1, en utilisant les notations propres au lemme 5.3.4.

Preuve de la régularité de S

On rappelle que l'on a construit par transversalité l'application S^0 , puis choisit une fonction $r \in Mor(\mathcal{L}_p, \mathbb{R})$ valant 1 sur un voisinage de K' et à support dans le domaine de définition W' de S^0 . On a alors défini l'application S par l'expression suivante :

$$\forall f \in V_f \text{ et } \forall \sigma \in V_\sigma, \quad S_{f'}(\sigma) := x \in L_p \mapsto \begin{cases} r(x) \cdot S_{f'}^0(\sigma)(x) & \text{si } x \in W' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par l'annexe A.1.2, on peut choisir r étant en plus \mathcal{T} -contrôlé. Ainsi, pour obtenir la régularité de S , il suffit de montrer la régularité de S^0 . Dans la preuve du lemme 1.6.1, on a montré que S^0 est une application continue de $V_f \times V_\sigma$ dans $\Gamma F_p|_{W'}$. Il reste donc à prouver que, pour $j > p$, x_0 appartenant à un voisinage de X_j intersecté avec W' , $f_0 \in V_f$ et $\sigma_0 \in V'_\sigma$, la différentielle $\partial_{T_{x_0} \mathcal{L}_j} S_{f'}^0(\sigma_0)$ existe et dépend continûment de ces trois variables.

On va montrer que l'ensemble

$$L_{jp} := \{x \in V_j \cap W'; adh(\mathcal{L}_{pf^*(x)}^{\eta'}) \subset L_j\}$$

est un voisinage de $X_j \cap W'$. Ainsi, on pourra considérer que x_0 appartient à L_{jp} .

Par précompacité de W' dans L_p , pour η' assez petit, $x \in W' \mapsto adh(\mathcal{L}_{px}^{\eta'})$ est continue pour la distance de Hausdorff sur les compacts de L_p . Donc, l'ensemble L_{jp} est un ouvert. Il reste donc à prouver que $X_j \cap W'$ est inclus dans L_{jp} .

Par précompacité de W' dans L_p , pour $\eta' > 0$ assez petit, pour tout $x \in X_j \cap W'$, l'ensemble $\mathcal{L}_{px}^{2\eta'}$ est une plaque qui contient l'adhérence de $\mathcal{L}_{px}^{\eta'}$. Par la propriété 2.1.3, la plaque $\mathcal{L}_{pf^*(x)}^{2\eta'}$ est incluse dans une seule strate de Σ qui est donc X_j . Ainsi, l'adhérence de $\mathcal{L}_{pf^*(x)}^{\eta'}$ est incluse dans $X_j \subset L_j$. Donc x appartient à L_{jp} .

On va démontrer la régularité suivant une méthode similaire à celle du lemme 1.6.1.

Tout d'abord, on va rappeler quelques éléments de cette preuve. Pour chaque $x \in W'$, il existe une carte de \mathcal{L}_p d'un petit voisinage distingué de celui-ci :

$$\phi : U'_1 \rightarrow V_u \times T, \quad V_u \subset \mathbb{R}^d$$

et un voisinage U_2 de l'adhérence de l'image par f^* de U'_1 . Au-dessus de U'_1 et U_2 , le fibré F_p est trivial et identifié à $U'_1 \times \mathbb{R}^{n-d_p}$ et $U_2 \times \mathbb{R}^{n-d_p}$. On a noté p_2 la projection canonique de chacune de ces identifications sur \mathbb{R}^{n-d_p} . Pour un certain voisinage V_l de 0 dans $C^0(T, \mathbb{R}^{n-d_p})$, on a remarqué que l'application :

$$\Psi : V_f \times V_\sigma \times V_u \times V_l \rightarrow C^0(T, \mathbb{R}^{n-d_p})$$

$$(f', \sigma, u, l) \mapsto [\Psi_{f'}(\tilde{\sigma}, u, l) = t \mapsto p_2(v) - p_2 \circ \sigma \circ \pi(v)]$$

$$\text{avec } v = \hat{f}'(x', l(t)), \quad x' = \phi^{-1}(u, t), \quad \hat{f}' = I_{pf^*(\cdot)}^{-1} \circ f' \circ Exp$$

est bien définie et à sa dérivée partielle suivant sa dernière variable qui existe et est inversible. De plus, Ψ s'annule en :

$$\left(f', \sigma, u, (t \mapsto p_2 \circ S_{f'}^0(\sigma) \circ \phi^{-1}(u, t)) \right).$$

On va maintenant adapter cette application à notre contexte, où x est égal à x_0 .

Comme x_0 appartient à L_{jp} , quitte à restreindre U'_1 et U_2 , on peut supposer que U'_1 est inclus dans L_{jp} , que U_2 est inclus dans L_j et que U'_1 est distingué pour le \mathcal{L}_j -feuilletage :

$$\phi' : U'_1 \rightarrow \mathbb{R}^{d_p} \times \mathbb{R}^{d_j - d_p} \times T'$$

Par régularité de $(F_p, \mathcal{T}_p) \rightarrow (L_p, \mathcal{T}_{|L_p})$, on peut supposer que nos identifications sont issues du voisinage tubulaire \mathcal{T}_p ayant une structure de \mathcal{L}_j -fibré .

Soit V'_l un petit voisinage de

$$\left\{ t \in T' \mapsto p_2 \circ S_{f'}(\sigma)(\phi'^{-1}(u, t))|_{U'_1}; f' \in V_f, \sigma \in V_\sigma \text{ et } u \in \mathbb{R}^{d_j} \right\}$$

dans l'espace de Banach des applications continues et bornées $C^0(T', \mathbb{R}^{n-d_p})$. Pour $f' \in V_f$ et $\sigma \in V'_\sigma$, l'application suivante

$$\Psi_{f', \sigma} : \mathbb{R}^{d_j} \times V'_l \rightarrow C^0(T', \mathbb{R}^{n-d_p})$$

$$(u, l) \mapsto [t \mapsto p_2(v) - p_2 \circ \sigma \circ \pi(v)]$$

$$\text{avec } v = \hat{f}'(x', l(t)), x' = \phi^{-1}(u, t) \text{ et } \hat{f}' = I_p^{-1} \circ f \circ \text{Exp}$$

est donc définie, de classe C^1 et dépend continûment de $f' \in V_f$ et $\sigma \in V'_\sigma$.

$$\text{Soient } \begin{cases} \phi'(x_0) =: (u_0, t_0) \in \mathbb{R}^{d_j} \times T' \\ M_0 := \left(u_0, (t \in T' \mapsto p_2 \circ S_{f_0}(\sigma_0) \circ \phi'^{-1}(u_0, t)) \right) \end{cases}$$

On a $\Psi_{f_0, \sigma_0}(M_0) = 0$.

Pour pouvoir utiliser le théorème des fonctions implicites, on va montrer que $\partial_{l'} \Psi_{f_0, \sigma_0}(M_0)$ est un isomorphisme. Pour $t' \in T'$, l'application linéaire :

$$l' \in C^0(T', \mathbb{R}^{n-d_p}) \mapsto T_{M_0} \Psi_{f_0, \sigma_0}(l')(t')$$

ne dépend de l' qu'en sa valeur en t' . La différentielle $\partial_{l'} \Psi_{f_0, \sigma_0}(M_0)$ est donc bijective si et seulement si, pour tous $t' \in T'$ et $l' \in C^0(T', \mathbb{R}^{n-d_p})$ ne s'annulant pas en t' , le vecteur $T_{M_0} \Psi_{f_0, \sigma_0}(l')(t')$ est non nul. Soient $x' := \phi'^{-1}(u_0, t')$, $(u, t) := \phi(x')$ et $l \in C^0(T, \mathbb{R}^{n-d_p})$ égal à $l'(t')$ en t . On remarque que

$$T_{M_0} \Psi_{f_0, \sigma_0}(l')(t') = T_{(\sigma_0, u, p_2 \circ S_{f_0}^0(\sigma_0) \circ \phi^{-1}(u, \cdot))} \Psi_{f_0}(l)(t).$$

Ce dernier n'est pas nul car $\partial_l \Psi_{f_0, \sigma_0}$ est inversible. Ainsi $\partial_l \Psi_{f_0, \sigma_0}(M_0)$ est bijective. Par le théorème de Banach-Steinhaus [24], on conclut que $\partial_l \Psi_{f_0, \sigma_0}(M_0)$ est un isomorphisme.

On peut donc utiliser le théorème des fonctions implicites au point M_0 , qui donne l'existence de voisinages V_f' de $f_0 \in C^1(M, M)$, V_σ'' de σ_0 dans V_σ' , V_u' de $\phi_1'(x_0) \in \mathbb{R}^{d_j}$, V_l' de $t \in T' \mapsto p_2 \circ S_{f_0}^0(\sigma_0) \circ \phi'^{-1}(u, t)$ dans $C^0(T', \mathbb{R}^{n-d_p})$ et enfin d'une application de classe C^1 , dépendant continûment de $f' \in V_f'$ et $\sigma \in V_\sigma''$:

$$\begin{aligned} \rho_{f', \sigma} &: V_u' \rightarrow V_l' \quad \text{vérifiant :} \\ \forall (u', l') \in V_u' \times V_l' & \\ \Psi_{f', \sigma}(u', l') = 0 &\iff l' = \rho_{f', \sigma}(u') \end{aligned}$$

On remarque que $U_1'' := \phi'^{-1}(V_u' \times T')$ est un voisinage de x_0 inclus dans U_1' et donc dans W' . Par unicité, on a donc pour tout $x \in U_1''$:

$$S_{f'}^0(\sigma')(x) = \left(x, \rho_{f', \sigma'}(\phi_1'(x)) \circ \phi_2'(x) \right)$$

Par continuité de ρ' dans les applications de classe C^1 , la différentielle $\partial_{T_x \mathcal{L}_j} S_{f'}^0(\sigma')$ existe et dépend continûment de $f' \in V_f'$, $\sigma \in V_\sigma'$ et $x \in U_1''$. Ce qu'il fallait démontrer.

Preuve de la conclusion 4 : injectivité de $T(\text{Exp} \circ S)$

Il s'agit de montrer que la différentielle $\partial_{T_x X_j}(\text{Exp} \circ S_{f'}(\sigma))$ est injective quand $\partial_{T_{f_\sigma'^*(x)} X_j}(\text{Exp} \circ \sigma)$ est injective, pour $f' \in V_f'$, $\sigma \in V_\sigma'$ et $x \in K' \cap X_j$.

La section $S_{f'}(\sigma)$ est une immersion de (L_p, \mathcal{L}_p) dans (F_p, \mathcal{F}_p) et la restriction de Exp à un voisinage de la section nulle de (F_p, \mathcal{F}_p) est une immersion dans M . Quitte à réduire V_f' , l'application $\text{Exp} \circ S_{f'}(\sigma)(x)$ est donc une immersion de \mathcal{L}_p dans M . Il ne reste plus qu'à montrer, pour $u \in T_x X_j \setminus T_x \mathcal{L}_p$, que le vecteur $T(\text{Exp} \circ S_{f'})(u)$ n'est pas nul.

Par le lemme 5.3.7, l'application suivante est $(\mathcal{T}_{|W'}, \mathcal{T}_{|L_p})$ -contrôlée :

$$\begin{aligned} f_\sigma'^* &: W' \rightarrow L_p \\ x &\mapsto \pi_p^{f_\sigma'^*(x)}(f' \circ \text{Exp} \circ S_{f'}^0(\sigma)(x)) \end{aligned}$$

Par définition de S^0 , on a pour tout $x' \in W'$:

$$f' \circ \text{Exp} \circ S_{f'}^0(\sigma)(x') = \text{Exp} \circ \sigma \circ f_\sigma'^*(x')$$

Ce qui implique :

$$\partial_{T_x X_j}(f' \circ \text{Exp} \circ S_{f'}^0(\sigma))(x) = \partial_{T_x X_j}(\text{Exp} \circ \sigma \circ f_\sigma'^*)$$

Il suffit donc de montrer que le vecteur $T(\text{Exp} \circ \sigma \circ f_\sigma'^*)(u)$ n'est pas nul. Comme par hypothèse $\partial_{T_{f_\sigma'^*(x)} X_j}(\text{Exp} \circ \sigma)$ est injective, il suffit de prouver que $T f_\sigma'^*(u)$ est non nul.

Comme f'_σ appartient à $Mor_{f^*}(\mathcal{L}_p|_{W'}, \mathcal{L}_p)$, il suffit de montrer que $T_x f^*(u)$ n'appartient pas à $T_{f^*(x)} \mathcal{L}_p$. Par dilatation normale et injectivité de Ti , le vecteur $Tf \circ T_x i(u)$ n'appartient pas à $Ti(T_{f^*(x)} \mathcal{L}_p)$. Ainsi, par commutativité du diagramme, le vecteur $T_x f^*(u) = (T_{f^*(x)} i)^{-1} \circ T(f \circ i)(u)$ n'appartient pas à $T_{f^*(x)} \mathcal{L}_p$.

5.3.6 Preuve du lemme 5.3.5 : construction d'une structure algébrique locale

Décompositions de F_p

Pour $x \in L_p$, soit :

$$I_x := \{j \in \{p+1, \dots, N\}; x \in V_{C_j}\} \cup \{p, N+1\} =: \{i_0(x) < \dots < i_{n_x+1}(x)\}$$

Soit F_{N+1} le fibré de la grassmannienne des 0-plans de i^*TM . Par le lemme 5.1.1, on a donc :

$$\begin{aligned} F_{px} &= F_{i_0x} \supset F_{i_1x} \supset \dots \supset F_{i_{n_x+1}x} = \{0\} \\ F_{px}^\perp &= F_{i_0x}^\perp \subset F_{i_1x}^\perp \subset \dots \subset F_{i_{n_x+1}x}^\perp = T_{i(x)}M \end{aligned}$$

La démonstration de ce lemme repose sur l'idée intuitive de décomposer chaque vecteur u de F_{px} suivant la somme orthogonale :

$$\bigoplus_{1 \leq k \leq n_x+1}^\perp F_{i_{k-1}x} \cap F_{i_kx}^\perp = F_{px}$$

En effet, la projection orthogonale de u dans $F_{i_{k-1}x} \cap F_{i_kx}^\perp$ appartient à $F_{px} \cap F_{i_kx}^\perp$ qui s'identifie à l'espace tangent de $Exp(F_{px}) \pitchfork i(f')(\mathcal{L}_{i_kx})$. On a alors envie de composer les flots géodésiques de ces vecteurs sur ces sous-variétés, pour obtenir l'application γ .

Un premier problème survient car cette décomposition en sous-espace n'est pas lisse (n_x n'est pas constant), ainsi cette composition n'est pas contrôlée, en général. On va donc commencer par construire une famille d'endomorphismes $(P_k)_k$, linéaires et contrôlés, tels que P_{i_k} s'apparente à la projection orthogonale de F_{px} sur $F_{i_{k-1}x} \cap F_{i_kx}^\perp$.

Pour $k \geq p+1$, soit p_k la projection orthogonale de $F_p|_{L_p \cap L_k}$ sur $F_p|_{L_p \cap L_k} \cap F_k^\perp|_{L_p \cap L_k}$. Par l'annexe A.1.2, il existe une fonction $\rho_k \in Mor(\mathcal{T}, [0, 1])$ valant 1 sur V'_{C_k} et à support inclus dans V_{C_k} .

Pour $k > p$, on définit par récurrence l'endomorphisme linéaire de F_p , au dessus de l'identité de L_p suivant :

$$P_k := \begin{cases} \rho_k \cdot \left(p_k - \sum_{p < j < k} P_j \right) & \text{sur } V_{C_k} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

avec la convention qu'une somme indicée par l'ensemble vide est nulle.

L'endomorphisme P_k est \mathcal{T}_p -contrôlé et vérifie le lemme suivant :

Lemme 5.3.8.

5.3.8.1) l'espace $P_k(F_{px})$ est inclus dans $F_p \cap F_k^\perp$, si $x \in V_{C_k}$, ou égal à $\{0\}$ si x appartient à un voisinage de $\text{adh}(V_{C_k}^c)$.

5.3.8.2) pour tout $j > k$ et $x \in L_j \cap L_p$, la restriction $P_k|_{F_{jx}}$ est nulle.

5.3.8.3) pour tout $x \in V_{C_k}'$, on a :

$$\sum_{l \in I_x \setminus \{p\}} P_{l|_{F_{px} \cap F_{kx}^\perp}} = \text{id}_{F_{px} \cap F_{kx}^\perp} \quad \text{et} \quad P_j|_{F_{px} \cap F_{kx}^\perp} = 0, \text{ si } j > k$$

Preuve

Les assertions 5.3.8.1 et 5.3.8.2 sont évidentes. De plus, pour $x \in V_{C_k}'$, on a :

$$\sum_{l \in I_x : p < l \leq k} P_{l|_{F_{px} \cap F_{kx}^\perp}} = \sum_{p < l \leq k} P_{l|_{F_{px} \cap F_{kx}^\perp}} = p_{k|_{F_{px} \cap F_{kx}^\perp}}$$

Pour montrer 5.3.8.3, il ne reste plus qu'à montrer que la restriction P_j à $F_{px} \cap F_{kx}^\perp$ est nulle pour $j > k$. Pour cela, on suppose par récurrence sur $j \geq k$ que

$$\sum_{p < l \leq j} P_{l|_{F_{px} \cap F_{kx}^\perp}} = p_{k|_{F_{px} \cap F_{kx}^\perp}}$$

On a bien :

$$\sum_{p < l \leq j+1} P_{l|_{F_{px} \cap F_{kx}^\perp}} = \rho_{j+1} \cdot (p_{j+1} - p_k)|_{F_{px} \cap F_{kx}^\perp} + p_{k|_{F_{px} \cap F_{kx}^\perp}} = p_{k|_{F_{px} \cap F_{kx}^\perp}}$$

Translations sur les voisinages tubulaires

Les voisinages tubulaires de \mathcal{T} étant des laminations munies d'une structure de classe C^1 , il existe un second problème dans cette idée : on ne peut pas considérer le flot géodésique sur la sous-variété $i(f')(\mathcal{L}_{i_k x}) \cap \text{Exp}(F_{px})$ induit par la métrique riemannienne de M . Pour des questions de régularité plus fines (de contrôle), on préfère considérer une application f'_k obtenue par transversalité de F_{kx} avec $\text{Exp}_{F_{px}}^{-1}(i(f')(\mathcal{L}_{i_k x}))$ dans la fibre F_{px} .

Pour chaque $k > p$, par précompacité de $V_{C_k} \cap V_\Delta$ dans L_k , quitte à réduire V_f , il existe $e > 0$ tel que, pour chaque $x \in V_{C_k} \cap V_\Delta$ et $f' \in V_f$, l'ensemble \mathcal{L}_{kx}^e est une plaque qui est plongée par $i_{p+1}(f')$, qui a son adhérence incluse dans L_k et qui intersecte transversalement le plongement de F_{px} par Exp . On peut supposer de plus, que quitte à rapprocher de $(Ti(T\mathcal{L}_j)^\perp)_j$ les relèvements $(N_j)_j$, cette intersection est l'image par Exp d'un graphe d'une application $s_k(f')$ d'un voisinage de $0_x \in F_{kx}^\perp \cap F_{px}$ dans F_{kx} , via l'identification de F_{px} avec $(F_{kx}^\perp \cap F_{px}) \times F_{kx}$. Quitte à réduire V_f , par précompacité de $V_{C_k} \cap V_\Delta$, il existe donc un voisinage ouvert O_k de la section nulle du fibré $(F_k^\perp \cap F_p)|_{V_{C_k} \cap V_\Delta}$, tel que

$$\forall x \in V_{C_k} \cap V_\Delta, \forall f' \in V_f,$$

$$\text{Exp}\left(\text{graph}(s_k(f')|_{O_k \cap F_{kx}^\perp \cap F_{px}})\right) \subset \text{Exp}(F_{px}) \pitchfork i_{p+1}(f')(\mathcal{L}_{kx}^e) \quad (5.18)$$

On va maintenant esquisser la preuve montrant que s_k est une application continue de V_f dans les morphismes contrôlés, pour les structures induites par \mathcal{T} sur $(F_k^\perp \cap F_p)|_{V_{C_k} \cap V_\Delta}$ et F_k .

Par transversalité, pour u appartenant à l'intersection du domaine de définition de s_k avec $F_{kx}^\perp \cap F_{px}$, $\text{Exp} \circ s_k(x, u)$ est l'unique point d'intersection de $\text{Exp}(\{F_{kx} + u\})$ avec $i_{p+1}(f')(\mathcal{L}_{kx}^e)$. Quitte à réduire e et V_f , cette dernière intersection peut être supposée transverse. Dans des ouverts distingués des voisinages tubulaires de \mathcal{T}_p et \mathcal{T} , l'application s_k peut donc être décrite de façon implicite, de façon à prouver que s_k est une application continue de V_f dans les morphismes d'un voisinage de la section nulle de $(F_k^\perp \cap F_p)|_{V_{C_k} \cap V_\Delta}$ dans le fibré $F_k|_{V_{C_k} \cap V_\Delta}$, au-dessus de l'identité de $V_{C_k} \cap V_\Delta$, contrôlés par les structures induites par $\mathcal{T}|_{V_{C_k} \cap V_\Delta}$ sur ces fibrés.

On note par $\mathcal{L}_{kp}^{xf'}$ l'ensemble $\text{Exp}_{|F_{px}}^{-1}(i_{p+1}(f')(\mathcal{L}_{kx}^e))$.

Soit F_p^2 le produit fibré au-dessus de L_p , de F_p avec lui-même. Sur un voisinage de la section nulle de $F_p^2|_{V_{C_k} \cap V_\Delta}$, on définit pour $f' \in V_f$:

$$\begin{aligned} f'_k &:= F_p^2|_{V_{C_k} \cap V_\Delta} \rightarrow F_p|_{V_{C_k} \cap V_\Delta} \\ (u, v) &\mapsto f'_{k,u}(v) := P_k(u) + p_k(v) + s_k(f') \circ (P_k(u) + p_k(v)) \end{aligned}$$

Par régularité des applications composant f'_k , ce dernier est un morphisme contrôlé pour les structures de treillis de laminations sur $F_p^2|_{V_{C_k} \cap V_\Delta}$ et $F_p|_{V_{C_k} \cap V_\Delta}$ induites par $\mathcal{T}|_{V_{C_k} \cap V_\Delta}$ (définies dans l'annexe A.3.2). De plus, pour cette topologie, l'application $f' \mapsto f'_k$ dépend continûment de f' .

On remarque que l'image de f'_k est incluse dans $\mathcal{L}_{kp}^{xf'}$. Aussi, la restriction de $f'_{k,0}$ à l'intersection de son domaine de définition avec $\mathcal{L}_{kp}^{xf'}$ est l'identité, pour $x \in V_{C_k} \cap V_\Delta$.

Comme $F_{kx}^\perp \cap F_{px}$ est proche de $Ti(T_x \mathcal{L}_k) \cap F_{px}$, qui est lui-même proche de l'espace tangent de $\text{Exp}(\mathcal{L}_{kp}^{xf'})$ au point $s_k(f')(0_x)$ (avec égalité en $f' = f$), la différentielle $\partial_u f'_k((0, 0)_x)$ est proche de l'application linéaire qui à $u \in F_{px}$ associe $P_k(u)$.

Définition de γ

On peut maintenant définir, sur un voisinage W de la section nulle de $F_p|_{V_\Delta}$, l'application :

$$\gamma^0(f')(u) := u - \sum_{k \in I_x \setminus \{p\}} P_k(u) + f_{i_n(x), u} \circ \cdots \circ f_{i_2(x), u} \circ f_{i_1(x), u} \circ \sigma_{p+1}(f')(x),$$

$$\text{avec } x := \pi(u)$$

On va montrer que l'application $f' \mapsto \gamma^0(f')$ est continue de V_f dans les morphismes $(\mathcal{T}_p|_W, \mathcal{T}_p)$ -contrôlés, laissant invariant les fibres de $F_p|_{V_\Delta}$.

Soit $x \in L_p$. Comme le recouvrement $(V_{C_k})_k$ est ouvert, il existe un voisinage V de x tel que $I_{x'}$ contient I_x , pour $x' \in V$. D'après 5.3.8.1), on peut supposer de plus que, la restriction $P_k|_{F_{px'}}$ est nulle, pour chaque $x \in V$ et $k \in I_{x'} \setminus I_x$. Ainsi, pour tout $u' \in F_{px'}$ et $k \in I_{x'} \setminus I_x$,

$$(f_{k,u'})|_{F_{px'}} = (f_{k,0})|_{F_{px'}} \quad \text{et} \quad \sum_{l \in I_{x'} \setminus \{p\}} P_l|_{F_{px'}} = \sum_{l \in I_x \setminus \{p\}} P_l|_{F_{px'}}$$

Soit $q \in I_x$ tel que $i_q(x) < k < i_{q+1}(x)$

Comme l'adhérence de $\mathcal{L}_{kx'}^e$ est incluse dans L_k , par cohérence des voisinages tubulaires de \mathcal{T} , $\mathcal{L}_{i_q p}^{x' f'}$ est inclus dans $\mathcal{L}_{kp}^{x' f'}$. De plus, l'image de $f_{i_q(x),u'}$ restreint à la fibre de x' est incluse dans $\mathcal{L}_{i_q p}^{x' f'}$, on a donc, sur leur domaine de définition :

$$f_{k,u'} \circ f_{i_q(x),u'} = f_{k,0} \circ f_{i_q(x),u'} = f_{i_q(x),u'}$$

Ainsi, pour tout $x' \in V$ et $u' \in F_{px'} \cap W$, on a :

$$\gamma^0(f')(u') := u' - \sum_{k \in I_x} P_k(u') + f_{i_n(x),u'} \circ \cdots \circ f_{i_2(x),u'} \circ f_{i_1(x),u'} \circ \sigma_{p+1}(f')(x')$$

On en conclut la continuité de l'application γ^0 de V_f dans $Mor(\mathcal{T}_p|_W, \mathcal{T}_p)$.

Quitte à réduire V_f et rapprocher les relèvements $(N_k)_k$ de $(Ti(T\mathcal{L}_k)^\perp)_k$, pour $f' \in V_f$, la dérivée partielle $\partial_{F_p} \gamma^0(f')(0)$ est uniformément proche de l'identité et donc bijective. Ainsi, avec W assez petit, pour $f' \in V_f$ et $x \in V_\Delta$, l'application $\gamma^0(f')|_{F_{px} \cap W}$ est un plongement.

Par précompacité de V_Δ , on peut supposer qu'il existe $\delta > 0$ tel que W contient le δ -voisinage de la section nulle de $F_p|_{V_\Delta}$.

On peut maintenant définir :

$$\gamma : f' \in V_f \longmapsto \left[u \in F_p|_{V_\Delta} \longmapsto \gamma^0(f') \left(\frac{\delta \cdot u}{\sqrt{1 + \|u\|^2}} \right) \right]$$

On remarque que γ vérifie bien les conclusions 1) et 3).

On va maintenant vérifier la conclusion 2). Soient $x \in V_\Delta \cap V_{C_q}'$ et $u \in F_{px} \cap F_{qx}^\perp$. Par 5.3.8.3, on a

$$u = \sum_{k \in I_x \setminus \{p\}} P_k(u)$$

De plus, toujours d'après 5.3.8.3, le vecteur $P_l(u)$ est nul, pour $l > q$. Ainsi, l'application $f_{i_l(x),u}$ est égale à $f_{i_l(x),0}$ et, par cohérence des voisinages tubulaires de \mathcal{T} , on a :

$$f_{i_n(x),u} \circ \cdots \circ f_{i_m(x),u} \circ \cdots \circ f_{i_1(x),u} \circ \sigma_{p+1}(f')(x) = f_{i_m(x),u} \circ \cdots \circ f_{i_1(x),u} \circ \sigma_{p+1}(f')(x)$$

Ainsi, $\gamma^0(u)$ est égal à $f_{i_m(x),u} \circ \dots \circ f_{i_1(x),u} \circ \sigma_{p+1}(f')(x)$. On a donc, pour $f' \in V_f$,

$$\text{Exp} \circ \gamma(f')(F_{px} \cap F_{qx}^\perp) \subset \text{Exp} \circ \gamma^0(f')(W \cap F_{px} \cap F_{qx}^\perp) \subset \text{Exp}(\mathcal{L}_{qp}^{xf'})$$

La sous-variété $\text{Exp}(\mathcal{L}_{qp}^{xf'}) = \text{Exp}(F_{px}) \cap i_{p+1}(f')(\mathcal{L}_{qx}^e)$ contient la sous-variété $\text{Exp} \circ \gamma(f')(F_{px} \cap F_{qx}^\perp)$ et ces sous-variétés sont de même dimension. Donc, il existe une plaque $\mathcal{L}_{qx}^{f'}$, incluse dans \mathcal{L}_{qx}^e , telle que :

$$\text{Exp} \circ \gamma(f')(F_{px} \cap F_{qx}^\perp) = \text{Exp}(F_{px}) \cap i_{p+1}(f')(\mathcal{L}_{qx}^{f'})$$

Comme $\text{Exp} \circ \gamma(f')(0)$ est égal à $i_{p+1}(f')(x)$, la plaque $\mathcal{L}_{qx}^{f'}$ contient le point x .

De plus, la dérivée partielle $\partial_{F_p} \gamma^0(f')$ est uniformément proche de l'identité. Donc, il existe $\eta' > 0$ tel que la plaque $\mathcal{L}_{qx}^{f'}$ contient $\mathcal{L}_{qx}^{\eta'}$, pour chaque $q > p$, $x \in V_\Delta^q$ et $f' \in V_f$.

Autrement dit, la conclusion 2) du lemme est vérifiée.

□

A

Analyse sur les laminations et les treillis

Sommaire

A.1	Partition de l'unité	135
A.1.1	Partition de l'unité sur une lamination	135
A.1.2	Partition de l'unité contrôlée sur une stratification de laminations	138
A.2	Densité des relèvements lisses d'une application lisse	140
A.2.1	Densité des relèvements lisses d'un morphisme d'une lamination dans un fibré en variétés	141
A.2.2	Densité des relèvements lisses d'un morphisme contrôlés dans un fibré en variétés	141
A.3	Fibré induit par une section de la grassmannienne	142
A.3.1	Fibré induit par une section de la grassmannienne au-dessus d'une lamination	142
A.3.2	Fibré induit par une section \mathcal{T} -contrôlée de la grassmannienne	143

A.1 Partition de l'unité

A.1.1 Partition de l'unité sur une lamination

- Propriété A.1.1.** 1. Soit L un espace métrique localement compact et séparable. Il existe alors une suite croissante de compacts $(K_n)_{n \geq 0}$ telle que son union soit égale à L et que pour chaque $n \geq 0$, le compact K_n soit inclus dans l'intérieur de K_{n+1} .
2. Soit (L, \mathcal{L}) une lamination. Il existe $(V_i)_i$ un recouvrement de L localement fini, tel que chaque ouvert V_i est relativement compact dans un ouvert distingué.

Preuve

1) Par compacité locale de L , pour $x \in L$, on peut définir la borne supérieure r_x des $r \in]0, 1[$ telle que la boule $B(x, r)$ soit relativement compacte. Comme L est séparable, il existe une partie $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dense dans L . Pour chaque

$x \in L$, il existe donc x_i à une distance strictement inférieure à $r_x/8$ de x . Ainsi la boule $B(x_i, r_x/4)$ est incluse dans $B(x, r_x/2)$. Cette dernière étant relativement compacte, il en est de même pour la boule $B(x_i, r_x/4)$, ce qui implique que $r_{x_i} \geq r_x/4$. On remarque que x appartient à la boule $B(x_i, r_x/8)$ qui est incluse dans $B(x_i, r_{x_i}/2)$. Donc la famille de boules relativement compactes $(B(x_i, r_{x_i}/2))_i$ est un recouvrement de L .

On pose alors $K_n := \cup_{0 \leq i \leq n} \text{adh}(B(x_i, r_{x_i}/2))$. La famille de compacts $(K_n)_n$ est bien croissante et son union est égale à L . Pour chaque $n \geq 0$, la famille $(K_n \setminus \text{int}(K_{n+p}))_{p \geq 0}$ est une suite décroissante de compacte dont l'intersection est vide :

$$\bigcap_{p \geq 0} K_n \setminus \text{int}(K_{n+p}) = K_n \setminus \bigcup_{p \geq 0} \text{int}(K_{n+p}) \subset K_n \setminus \bigcup_{i \geq 0} B(x_i, r_{x_i}/2) = \emptyset$$

Il existe donc $p \geq 0$ tel que $K_n \setminus \text{int}(K_{n+p})$ soit vide ; autrement dit K_n est inclus dans l'intérieur de K_{n+p} . Donc, quitte à extraire une sous-suite de $(K_n)_n$, on peut supposer que K_n est inclus dans l'intérieur de K_{n+1} .

2) Soit $(K_n)_n$ la suite de compacts donnée par 1). On note C_n le compact $K_n \setminus \text{int}(K_{n-1})$ (avec $K_{-1} = \emptyset$). Pour chaque $n \geq 0$ et $x \in C_n$, il existe $r_x^n > 0$ tel que $B(x, r_x^n)$ est disjointe de K_{n-2} , incluse dans K_{n+1} et dont l'adhérence (compacte) est incluse dans un ouvert distingué de \mathcal{L} . Par compacité de C_n , il existe une famille finie $(x_i)_{i \in I_n}$ d'éléments de C_n , telle que $(B(x_i, r_{x_i}^n))_n$ recouvre C_n . La famille $(V_i)_i := (B(x_i, r_{x_i}^n))_{n \geq 0, i \in I_n}$ est bien un recouvrement de L localement fini tel que chaque ouvert V_i inclus dans un ouvert distingué.

Proposition A.1. *Soit (L, \mathcal{L}) une lamination.*

1. Soient $\eta > 0$ et $x \in L$. Il existe alors une fonction positive $\rho \in \text{Mor}(\mathcal{L}, \mathbb{R})$ à support inclus dans $B(x, \eta)$ et telle que $\rho(x)$ soit strictement positive.
2. Étant donné $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement localement fini de L par des ouverts, il existe $(\rho_i)_i \in \text{Mor}(\mathcal{L}, \mathbb{R}^+)^I$ tel que $\sum_i \rho_i = 1$ et le support de ρ_i soit inclus dans U_i . On dira que $(\rho_i)_i$ est une partition de l'unité adaptée à $(U_i)_i$.
3. L'ensemble des morphismes de (L, \mathcal{L}) dans \mathbb{R} est dense dans l'espace des fonctions continues sur L pour la topologie C^0 forte.

Preuve

- 1) Soit $(U, \phi) \in \mathcal{L}$ une carte d'un voisinage de x qui s'écrit de la forme :

$$\phi : U \rightarrow V \times T$$

où V est un ouvert de \mathbb{R}^d et T est un espace métrique. On note ϕ_1 et ϕ_2 les coordonnées de ϕ et on suppose que $\phi_1(x) = 0$. Soit une fonction $\rho_1 \in C^1(V, \mathbb{R}^+)$ à support compact, telle que $\rho_1(0)$ est non nul et la préimage par ϕ de $\text{supp}(\rho_1) \times \{\phi_2(x)\}$ est incluse dans la boule $B(x, \eta)$. Par compacité, il existe un voisinage τ de $\phi_2(x)$ dans T tel que la préimage par ϕ de $\text{supp}(\rho_1) \times \tau$ est incluse dans la boule $B(x, \eta)$. Soit alors une fonction ρ_2 positive et continue sur T , à support dans τ et non nulle en $\phi_2(x)$. On définit alors :

$$\rho : y \mapsto \begin{cases} \rho_1 \circ \phi_1(y) \cdot \rho_2 \circ \phi_2(y) & \text{si } y \in U \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarque que la fonction ρ possède les propriétés requises.

2) On commence par admettre cette assertion quand I est fini. Soit $(K_n)_n$ la suite de compacts de L , donnée par la proposition A.1.1.1. On pose $K_{-1} = K_{-2} = \emptyset$. Pour chaque $n \geq 0$, il existe donc $r_n \in \text{Mor}(\mathcal{L}, [0, 1])$ valant

1 sur $K_n \setminus K_{n-1}$ et 0 sur $K_{n-2} \cup K_{n+1}^c$. Soit $I_n \subset I$ l'ensemble fini des ouverts U_i intersectant $K_{n+1} \setminus K_{n-2}$. Il existe donc $(\rho_i^n)_{i \in I_n}$ une partition de l'unité associée au recouvrement $(U_i)_{i \in I_n}$ de $\cup_{i \in I_n} U_i$. Soit alors

$$\rho_i := \frac{\sum_{\{n: I_n \ni i\}} r_n \cdot \rho_i^n}{\sum_n r_n} \in \text{Mor}(\mathcal{L}, \mathbb{R}^+),$$

qui est à support dans U_i et vérifie

$$\sum_i \rho_i = \frac{\sum_n r_n \sum_{i \in I_n} \rho_i^n}{\sum_n r_n} = \frac{\sum_n r_n}{\sum_n r_n} = 1$$

donc $(\rho_i)_i$ est une partition de l'unité associée à $(U_i)_i$. Il suffit donc de prouver l'existence d'une partition de l'unité quand I est fini.

On va montrer par récurrence que l'on peut se ramener au cas où le cardinal de I est 2. Si ce cardinal est $k+1 > 2$, par hypothèse de récurrence on a une partition de l'unité $(r_j)_{j=1}^k$ associée à $(U_j)_{j=1}^k$ sur la restriction de \mathcal{L} à $\cup_{j \leq k} U_j$ et une partition de l'unité (r_0, r_{k+1}) associée à $(\cup_{j \leq k} U_j, U_{k+1})$. On remarque alors que $((r_0 \cdot r_j)_{j=1}^k, r_{k+1})$ est une partition de l'unité associée à $(U_j)_{j=1}^{k+1}$.

On suppose donc que le recouvrement $(U_j)_j$ est formé des seuls éléments U_1 et U_2 . On va construire deux fermés F_1 et F_2 inclus dans respectivement U_1 et U_2 tels que l'union de F_1 et de F_2 soit L .

Si, par exemple, U_1 est égal à L , on choisit alors $F_1 = L$ et $F_2 = \emptyset$. Si ni U_1 ni U_2 ne recouvre L , on pose :

$$F_1 := \{x \in L; \quad d(x, U_1^c) \geq d(x, U_2^c)\} \quad \text{et} \quad F_2 := \{x \in L; \quad d(x, U_1^c) \leq d(x, U_2^c)\}$$

Bien sûr, ces deux ensembles sont des fermés qui recouvrent L . Supposons par l'absurde que F_2 n'est pas inclus dans U_2 . Il existe alors un élément x appartenant à $U_2^c \cap F_2$, qui vérifie donc :

$$d(x, U_1^c) \leq d(x, U_2^c) = 0$$

donc x appartient à l'intersection de U_1^c avec U_2^c qui est vide, ce qui est absurde. De façon symétrique, on montre que F_1 est inclus dans U_1 .

On va maintenant construire deux fonctions positives $r_1 \in \text{Mor}(\mathcal{L}, \mathbb{R})$ et $r_2 \in \text{Mor}(\mathcal{L}, \mathbb{R})$, telles que les fonctions r_1 et r_2 ne s'annulent pas sur respectivement F_1 et F_2 , et ont leur support inclus dans U_1 et U_2 . Les fonctions suivantes vérifieront donc l'assertion 2) :

$$\rho_1 := \frac{r_1}{r_1 + r_2} \quad \text{et} \quad \rho_2 := \frac{r_2}{r_1 + r_2}$$

On peut construire par exemple la fonction r_1 . Par la propriété A.1.1, il existe $(K_n)_n$ une suite croissante de compacts de L telle que l'union $\cup_n K_n$ est égale à L et, pour $n \geq 0$, l'intérieur de K_{n+1} contient K_n . On pose $C_n := K_n \setminus \text{int}(K_{n-1})$, avec $K_{-1} = \emptyset$. On note aussi $D_n := C_n \cap F_1$. Pour chaque $x \in D_n$, il existe $\eta_x^n > 0$ tel que la boule $B(x, \eta_x^n)$ n'intersecte pas K_{n-2} et soit incluse dans $K_{n+1} \cap U_1$. Soit alors ρ_x^n la fonction donnée par l'assertion 1) de cette proposition avec $\eta = \eta_x^n$, on note U_x^n l'ensemble des points où cette fonction est non nulle. On remarque que la famille d'ouverts $(U_x^n)_{x \in D_n}$ est un recouvrement du compact D_n . On en extrait un recouvrement fini $(U_{x_i}^n)_{i \in I_n}$. On remarque que la famille $(U_{x_i}^n)_{\{n \geq 0, i \in I_n\}}$ est un recouvrement localement fini de F_1 et inclus dans U_1 . La fonction suivante convient donc :

$$r_1 := \sum_{n \geq 0, i \in I_n} \rho_{x_i}^n$$

3) Soient $f \in C^0(L, \mathbb{R})$ et $\epsilon > 0$. On va construire une fonction $f' \in \text{Mor}(\mathcal{L}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$\sup_{x \in L} |f(x) - f'(x)| \leq \epsilon$$

Soit $(U_i)_i$ un recouvrement localement fini de L par des ouverts relativement compacts et distingués. Pour chaque i , fixons une carte $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^d \times T_i$. On note ϕ_{i1} et ϕ_{i2} ses coordonnées. Soit $(\rho_i)_i \in \text{Mor}(\mathcal{L}, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ une

partition de l'unité associée à $(U_i)_i$. Soit $W_i := U_i \setminus \rho^{-1}(\{0\})$ qui est relativement compact dans U_i .

Soit $r \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^+)$ une fonction à support dans la boule unité et d'intégrale égale à 1. Pour chaque i , soit $\epsilon_i > 0$ assez petit pour que la fonction suivante soit définie :

$$f_i : W_i \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{\epsilon_i^d} \int_{B(0, \epsilon_i)} f\left(\phi_i^{-1}\left(\phi_{i1}(x) + y, \phi_{i2}(x)\right)\right) \cdot r\left(\frac{y}{\epsilon_i}\right) dy$$

et vérifie $\sup_{W_i} |f_i - f| < \epsilon$. Par les propriétés classiques des convolutions, la fonction suivante possède les qualités requises :

$$x \mapsto \sum_{\{i; x \in U_i\}} \rho_i(x) \cdot f_i(x)$$

A.1.2 Partition de l'unité contrôlée sur une stratification de laminations

Proposition A.2. *Soit (A, Σ) un espace stratifié qui supporte une structure de treillis \mathcal{T} .*

1. *Soient $\eta > 0$ et $x \in A$. Il existe alors une fonction positive $\rho \in \text{Mor}(\mathcal{T}, \mathbb{R})$ de support inclus dans $B(x, \eta)$ et telle que $\rho(x)$ est non nul.*
2. *Pour tout $\eta > 0$ et toute fonction ρ_0 continue sur A , il existe une fonction ρ sur A \mathcal{T} -contrôlée telle que :*

$$\sup_{x \in A} |\rho - \rho_0(x)| \leq \eta$$

3. *Étant donné un recouvrement fini $(U_i)_{i \in I}$ de A par des ouverts, il existe $(\rho_i)_i \in \text{Mor}(\mathcal{T}, \mathbb{R}^+)^I$ tel que le support de ρ_i soit inclus dans U_i et $\sum_i \rho_i = 1$. On dira que $(\rho_i)_i$ est une partition de l'unité adaptée à $(U_i)_i$.*

Preuve

1-2) On va démontrer les assertions 1 et 2 en même temps. On remplacera toute les propositions concernant le signe des fonctions construites par, respectivement, les propositions concernant la distance à ρ_0 des fonctions construites.

On note $(X_p)_p$ et $(L_p)_p$ les laminations obtenues par la propriété 2.1.7 à partir de Σ et \mathcal{T} . Pour $k \geq 0$, soit $U_k := \cup_{p \leq k} L_p$.

On va construire par récurrence sur $k \geq 0$, une fonction ρ_k continue telle que, pour $j \leq k$, $\rho_k|_{L_j}$ est un morphisme de \mathcal{L}_j dans \mathbb{R} , que sa restriction à $U_j \setminus L_k$ est égale à celle de ρ_j , et que ρ_k est positive sur A , à support inclus dans $B(x, (1 - 2^{-k-1}) \cdot \eta)$ et ne s'annulant pas en x (resp. $\sup_A |\rho_k - \rho| \leq (1 - 2^{-k-1}) \cdot \eta$).

Pour l'étape $k = 0$, on choisit simplement une fonction ρ_0 continue sur A , positive, à support dans $B(x, \eta/2)$ et telle que $\rho_0(x) > 0$ (resp. pour l'étape $k = 0$, on prend la fonction ρ_0 donnée en hypothèse).

On suppose l'hypothèse de récurrence vérifiée pour $k \geq 0$. Par la propriété A.1.1, Il existe un recouvrement ouvert localement fini $(W_i)_i$ de L_{k+1} , tel que chaque ouvert W_i soit relativement compact dans un ouvert distingué de \mathcal{L}_{k+1} . Quitte à redécomposer chacun de ces ouverts en un nombre fini d'ouverts, on peut supposer de plus, que le diamètre de W_i est inférieur à la distance de W_i avec le complémentaire de L_{k+1} .

Pour chaque $j \leq k + 1$, on fixe une métrique riemannienne sur (L_j, \mathcal{L}_j) . On note pour un ouvert W dans L_j et $\lambda \in \text{Mor}(\mathcal{L}_j|_W, \mathbb{R})$:

$$\|\lambda\|_{\text{Mor}(\mathcal{L}_j|_W, \mathbb{R})} = \sup_{x \in W} \left(|\lambda(x)| + \|\partial_{T_x \mathcal{L}_j} \lambda\| \right)$$

où la norme $\|\cdot\|$ est subordonnée à norme induite par la métrique riemannienne sur $T\mathcal{L}_j$ et à la norme euclidienne sur \mathbb{R} .

On choisit alors une partition de l'unité $(\lambda_i)_i \in \text{Mor}(\mathcal{L}_{k+1}, \mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ associée à $(W_i)_i$. Pour chaque i , on pose

$$\epsilon_i := \frac{\eta}{2^{k+2+i}} \cdot \min\left(1, \frac{\text{diam}(W_i)}{\|\lambda_i\|_{\text{Mor}(\mathcal{L}_{k+1}, \mathbb{R})}}\right) > 0$$

Pour chaque i , on applique le lemme suivant, que l'on démontrera à la fin :

Lemme A.1.2. *Il existe une fonction $\rho'_i \in \text{Mor}(\mathcal{L}_{k+1}|_{W_i}, \mathbb{R})$ telle que :*

1. *Si l'adhérence de W_i est incluse dans L_j , pour $j \leq k$, alors on a :*

$$\|\rho_k|_{W_i} - \rho'_i\|_{\text{Mor}(\mathcal{L}_j|_{W_i}, \mathbb{R})} < \epsilon_i$$

Et dans le cas de l'assertion 1, on a de plus :

2. *Le support de ρ'_i est inclus dans le ϵ_i -voisinage du support de ρ_k .*
3. *La fonction ρ_i est positive et si $x \in W_i$, alors $\rho'_i(x)$ est non nul.*

On pose alors :

$$\rho_{k+1} : y \mapsto \begin{cases} \sum_i \lambda_i(y) \cdot \rho'_i(y) & \text{si } y \in L_{k+1} \\ \rho_k(y) & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour l'assertion 1, on a bien défini une fonction positive, ne s'annulant pas en x et, comme pour chaque i le support de ρ'_i est inclus dans le $\frac{\eta}{2^{k+2}}$ -voisinage du support de ρ_k , le support de ρ_{k+1} est inclus dans le $\frac{\eta}{2^{k+2}}$ -voisinage du support de ρ_k , donc dans $B(x, (1 - 2^{-k-2}) \cdot \eta)$.

Pour l'assertion 2, pour $y \in L_{k+1}$, le réel $|\rho_{k+1}(y) - \rho(y)|$ est inférieur à :

$$|\rho_k(y) - \rho(y)| + |\rho_k(y) - \rho_{k+1}(y)| \leq (1 - 2^{-k-1})\eta + \sum_i \lambda_i(y) \cdot \epsilon_i \leq (1 - 2^{-k-2}) \cdot \eta$$

et pour $y \in L_{k+1}^c$, le réel $|\rho_{k+1}(y) - \rho(y)|$ est égal à $|\rho_k(y) - \rho(y)|$ qui est inférieur à $(1 - 2^{-k-2}) \cdot \eta$.

On va montrer maintenant que, pour $j \leq k+1$, $\rho_{k+1}|_{L_j}$ est un morphisme de \mathcal{L}_j dans \mathbb{R} .

Par locale finitude du recouvrement $(W_i)_i$, on a bien $\rho_{k+1}|_{L_{k+1}} \in \text{Mor}(\mathcal{L}_{k+1}, \mathbb{R})$. Ainsi, pour $j \leq k$, la fonction $\rho_{k+1}|_{L_{k+1} \cap L_j}$ appartient à $\text{Mor}(\mathcal{L}_j|_{L_{k+1} \cap L_j}, \mathbb{R})$. De plus, pour $y \in L_{k+1}$:

$$|\rho_k(y) - \rho_{k+1}(y)| \leq \sum_i \lambda_i(y) \cdot |\rho'_i(y) - \rho_k(y)| \leq \sum_{i; x \in W_i} \epsilon_i \leq \sum_{i; x \in W_i} \frac{\eta \cdot \text{diam} W_i}{2^{i+2}} \leq \eta \cdot d(y, L_{k+1}^c) \quad (\text{A.1})$$

Ainsi, la fonction ρ_{k+1} est continue.

Pour $i \leq k$ et $x_0 \in L_i \setminus L_{k+1}$, il existe $r > 0$ tel que la boule $B(x_0, r)$ est incluse dans L_i . Pour $y \in B(x_0, r/2) \cap L_{k+1}$, si W_j contient y , alors $\text{adh}(W_j)$ est inclus dans L_i . Le réel $\|\partial_{T\mathcal{L}_i}(\rho_k - \rho_{k+1})(y)\|$ est donc inférieur à :

$$\sum_{\{j; W_j \ni y\}} \underbrace{\left\| \partial_{T\mathcal{L}_i} \lambda_j(y) \cdot (\rho'_j(y) - \rho_k(y)) \right\|}_{\leq \frac{\eta}{2^{k+2+j}} \cdot \text{diam} W_j} + \underbrace{\left\| \lambda_j(y) \cdot \partial_{T\mathcal{L}_i} (\rho'_j(y) - \rho_k(y)) \right\|}_{\leq \frac{\eta}{2^{k+2+j}} \cdot \text{diam} W_j}$$

Comme alors $\text{diam} W_j \leq d(y, x_0)$, on a :

$$\Rightarrow \|\partial_{T\mathcal{L}_i}(\rho_k - \rho_{k+1})(y)\| \leq \frac{\eta}{2} \cdot d(y, x_0) + \frac{\eta}{2} \cdot d(y, x_0) \leq \eta \cdot d(y, x_0) \quad (\text{A.2})$$

Par les équations (A.1) et (A.2), la restriction $\rho_{k+1}|_{L_i}$ est donc un morphisme de \mathcal{L}_i dans \mathbb{R} , pour chaque $i \leq k$.

Comme le recouvrement de A issu de \mathcal{T} est localement fini, il en est de même pour $(L_k)_k$. Ainsi la suite $(\rho_k)_k$ est localement stationnaire. Soit ρ la limite simple de $(\rho_k)_k$. Ainsi, cette application vérifie, pour tout $k \geq 0$, $\rho|_{L_k} \in \text{Mor}(\mathcal{L}_k, \mathbb{R})$. Donc, pour tout $X \in \Sigma$, la restriction de ρ à L_X est morphisme de \mathcal{L}_X dans \mathbb{R} . Par conséquent, ρ est un morphisme \mathcal{T} -contrôlé. De plus, l'assertion 1 (resp. 2) est bien vérifiée.

Preuve du Lemme A.1.2

Soit $(U, \phi) \in \mathcal{L}_{k+1}$ une carte telle que $\text{adh}(W_i)$ soit inclus dans U . Soient d_{k+1} la dimension de \mathcal{L}_{k+1} , V un ouvert de $\mathbb{R}^{d_{k+1}}$ et τ un espace métrique localement compact, tels que :

$$\begin{aligned} \phi : U &\xrightarrow{\sim} V \times \tau \\ x &\mapsto (\phi_1(x), \phi_2(x)) \end{aligned}$$

Soit une fonction $r \in C^\infty(\mathbb{R}^{d_{k+1}}, \mathbb{R}^+)$ de support inclus dans la boule unité, strictement positive à l'intérieur de cette boule et d'intégrale sur $\mathbb{R}^{d_{k+1}}$ égale à 1.

$$\begin{aligned} \text{Pour } z \in W_i, \text{ soit } \rho'_i(z) &= \frac{1}{\mu^{d_{k+1}}} \cdot \int_{y \in V} \rho_k \circ \phi^{-1}(y, \phi_2(z)) \cdot r\left(\frac{\phi_1(z) - y}{\mu}\right) dy \\ &\text{avec } \mu = \eta \cdot d(\phi_1(W_i), V^c) \text{ et } \eta \in]0, 1[\end{aligned}$$

D'après les propriétés classiques des convolutions, le fonction ρ'_i est un morphisme de $\mathcal{L}_{k+1}|_{W_i}$ dans \mathbb{R} .

On va maintenant prouver 1). Pour cela, on se sert de la formule suivante pour $x' \in W_i \subset \text{adh}(W_i) \subset L_j$:

$$\rho'_i(x') = \frac{1}{\mu^{d_{k+1}}} \cdot \int_{y \in B(0, \mu)} \rho(z) \cdot r\left(\frac{y}{\mu}\right) dy, \quad \text{avec } z := \phi^{-1}(\phi_1(x') - y, \phi_2(x'))$$

Quitte à réduire η , le point z appartient toujours à L_i .

$$\Rightarrow \partial_{T_{x'} \mathcal{L}_i} \rho'_i = \frac{1}{\mu^{d_{k+1}}} \cdot \int_{y \in B(0, \mu)} \partial_{T_z \mathcal{L}_i} \rho \circ \partial_{T_{x'} \mathcal{L}_i} z \cdot r\left(\frac{y}{\mu}\right) dy$$

Donc pour η assez petit, $\partial_{T_{x'} \mathcal{L}_i} z$ est proche de l'identité et $\partial_{T_z \mathcal{L}_i} \rho$ est proche de $\partial_{T_{x'} \mathcal{L}_j} \rho$, donc $\|\rho|_W - \rho'_i\|_{\text{Mor}(\mathcal{L}_i|_W, \mathbb{R})} < \epsilon_i$.

Dans le cas de l'assertion 1), pour η assez petit, on a bien la conclusion 2). La conclusion 3) est évidente.

3) On effectue la même preuve que celle de la proposition A.1. 2), en remplaçant ' L ' par ' A ' et ' $\text{Mor}(\mathcal{L}, \mathbb{R})$ ' par ' $\text{Mor}(\mathcal{T}, \mathbb{R})$ '.

A.2 Densité des relèvements lisses d'une application lisse

Dans cette partie, on désigne par G et M deux variétés riemanniennes et $p : G \rightarrow M$ un fibré de classe C^∞ .

Étant données une famille de réels $(r_k)_{k=1}^n \in [0, 1]^n$ et une famille d'éléments $(m_k)_{k=1}^n$ appartenant à une même fibre G_x de G et suffisamment proches les uns des autres, grâce à la métrique riemannienne sur G , on peut définir [13] le barycentre $\text{bar}\{(m_k)_{k=1}^n, (r_k)_{k=1}^n\} \in G_x$ de la famille $(m_k)_{k=1}^n$ pondérée par les coefficients $(r_k)_{k=1}^n \in [0, 1]^n$. Ce barycentre est une application de classe C^∞ du produit, du fibré produit G^n au-dessus de M , par $[0, 1]^n$, dans G . Ce barycentre ne

dépend pas de l'ordre de l'indexation $k \in \{1, \dots, n\}$. Enfin si l'on rajoute des éléments pondérés de coefficients nuls, le barycentre est inchangé.

A.2.1 Densité des relèvements lisses d'un morphisme d'une lamination dans un fibré en variétés

Soient (L, \mathcal{L}) une lamination et i un morphisme de (L, \mathcal{L}) dans M .

Proposition A.3. *L'ensemble des relèvements de i dans F qui sont des morphismes de (L, \mathcal{L}) dans G est dense dans l'ensemble des relèvements continus de i pour la topologie C^0 forte.*

Preuve

Soit N un relèvement continu de i et ϵ un réel strictement positif. On va montrer l'existence d'un relèvement $N' \in \text{Mor}(\mathcal{L}, G)$ de i tel que :

$$\sup_{x \in L} d(N(x), N'(x)) \leq \epsilon$$

En utilisant la propriété A.1.1, on construit un recouvrement localement fini $(U_k)_k$ de L , tel que pour chaque k , $N(U_k)$ est inclus dans un ouvert distingué V_k du fibré G . Cela signifie qu'il existe une trivialisation ϕ_k de classe C^∞ de V_k sur $p(V_k) \times \mathbb{R}^d$:

$$\phi_k : V_k \xrightarrow{\sim} p(V_k) \times \mathbb{R}^d$$

Comme N est un relèvement de i , pour chaque k , il existe une application F_k continue de U_k vers \mathbb{R}^d , telle que :

$$\begin{aligned} \phi_k \circ N|_{U_k} &: U_k \rightarrow p(U_k) \times \mathbb{R}^d \\ x &\mapsto (i(x), F_k(x)) \end{aligned}$$

Par la proposition A.1 2), il existe une partition de l'unité $(\rho_k)_k \in \text{Mor}(\mathcal{L}, [0, 1])^{\mathbb{N}}$ associée à $(U_k)_k$.

Par la proposition A.1 3), il existe donc, pour chaque k , un morphisme $F'_k \in \text{Mor}(\mathcal{L}|_{U_k}, \mathbb{R}^d)$ assez proche de $F|_{U_k}$, pour que le morphisme de laminations suivant soit bien défini :

$$\begin{aligned} N' &: L \rightarrow G \\ x &\mapsto \text{bar} \left\{ \left(F'_k(x) \right)_{\{k; x \in U_k\}}, \left(\rho_k(x) \right)_{\{k; x \in U_k\}} \right\} \end{aligned}$$

et vérifie pour chaque $x \in L$

$$d(N'(x), N(x)) \leq \epsilon$$

On note enfin que N' est bien un relèvement de i .

A.2.2 Densité des relèvements lisses d'un morphisme contrôlés dans un fibré en variétés

Soient (A, Σ) un espace stratifié supportant une structure de treillis \mathcal{T} et i un morphisme \mathcal{T} -contrôlé dans M .

Proposition A.4. *L'ensemble des relèvements de i dans F qui sont \mathcal{T} -contrôlés est dense dans l'ensemble des relèvements continus de i pour la topologie C^0 forte.*

Preuve

On effectue la même preuve que celle de la proposition A.3, en remplaçant ' L ' par ' A ', ' \mathcal{L} ' par ' \mathcal{T} ' et la proposition A.1 par la proposition A.2.

A.3 Fibré induit par une section de la grassmannienne

A.3.1 Fibré induit par une section de la grassmannienne au-dessus d'une lamination

Soient M une variété riemannienne et (L, \mathcal{L}) une lamination. Soient $k \geq 0$ et $G \rightarrow M$ le fibré au-dessus de M de la grassmannienne des k -plans de TM . Soient i un morphisme de \mathcal{L} dans M et $N \in \text{Mor}(\mathcal{L}, G)$ un relèvement de i dans $G \rightarrow M$.

Proposition A.5. *Le morphisme N définit canoniquement un \mathcal{L} -fibré vectoriel*

$$\pi : (F, \mathcal{F}) \rightarrow (L, \mathcal{L})$$

dont la fibre en x est $F_x := N(x)$.

Preuve

Pour $x \in L$, via une carte de M , on peut identifier un voisinage V de $i(x)$ à \mathbb{R}^n et l'espace tangent $TM|_U$ à $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Un petit voisinage U de x , distingué dans \mathcal{L} , est alors envoyé par i dans V et, pour $y \in U$, la projection orthogonale de $N(y)$ dans $N(x)$ est un isomorphisme linéaire. On note p_x la projection orthogonale de \mathbb{R}^n sur $N(x)$. L'application suivante est donc un homéomorphisme :

$$\Psi := F|_U \rightarrow U \times F_x$$

$$(y, v) \mapsto (y, p_x(v))$$

Comme N est un morphisme de laminations, l'application, qui à $(y, v) \in U \times N(x)$ associe l'image inverse de v dans $N(y) \subset \mathbb{R}^n$ par la restriction $p_x|_{N(y)}$, est un morphisme de $\mathcal{L}|_U \times N(x)$ dans \mathbb{R}^n . On considère maintenant un autre homéomorphisme Ψ' construit par cette procédure sur un voisinage U' de $x' \in U'$. L'homéomorphisme suivant est donc un isomorphisme de la lamination $\mathcal{L}|_{U' \cap U} \times F_x$ sur la lamination $\mathcal{L}|_{U' \cap U} \times F_{x'}$:

$$\Psi' \circ \Psi^{-1} : U' \cap U \times F_x \rightarrow U' \cap U \times F_{x'}$$

$$(y, v) \mapsto (y, p_{x'} \circ p_{x|N(y)}^{-1}(v))$$

Il vient alors que les homéomorphismes du type suivant sont des cartes qui engendrent une structure de lamination \mathcal{F} sur F :

$$(I \circ \Psi_2, \phi \circ \Psi_1)$$

Avec Ψ construit par la procédure ci-dessus, Ψ_1 et Ψ_2 les coordonnées de Ψ , I un isomorphisme de F_x sur \mathbb{R}^{n-d} et $\phi \in \mathcal{L}$ une carte de U .

On remarque que pour cette structure, Ψ est une trivialisaton du \mathcal{L} -fibré F .

A.3.2 Fibré induit par une section \mathcal{T} -contrôlée de la grassmannienne

Soient M une variété riemannienne et (A, Σ) un espace stratifié, supportant une structure de treillis \mathcal{T} . Soient $k \geq 0$ et G le fibré au-dessus de M de la grassmannienne des k -plans de TM . Soient $i \in \text{Mor}(\mathcal{T}, M)$ et N un relèvement \mathcal{T} -contrôlé de i dans G .

Proposition A.6. *Le morphisme N définit canoniquement un fibré vectoriel*

$$\pi : F \rightarrow A$$

dont la fibre F_x de $x \in A$ est $N(x)$. La stratification Σ induit une stratification Σ' sur F dont chaque strate est supportée par $X' := \pi^{-1}(X)$, pour une strate $X \in \Sigma$. La structure de treillis $\mathcal{T} = (L_X, \mathcal{L}_X)_{X \in \Sigma}$ induit alors une structure de treillis $\mathcal{T}' = (L_{X'}, \mathcal{L}_{X'})_{X' \in \Sigma'}$ sur (A', Σ') , telle que $L_{X'} := \pi^{-1}(L_X)$, $(L_{X'}, \mathcal{L}_{X'})$ soit un \mathcal{L}_X -fibré vectoriel et π soit $(\mathcal{T}', \mathcal{T})$ -contrôlé.

Preuve

D'après la proposition A.5, pour chaque $X \in \Sigma$, $F|_{L_X}$ supporte une structure de \mathcal{L}_X -fibré $(L_{X'}, \mathcal{L}_{X'})$ canonique. Il s'agit donc de montrer que Σ' est une stratification de laminations et \mathcal{T}' est une structure de treillis sur (F, Σ') . Pour chaque $X \in \Sigma$, il est clair que $L_{X'}$ est un voisinage ouvert de X' et que ce dernier est une partie $\mathcal{L}_{X'}$ -admissible. D'autre part, pour $(X', Y') \in \Sigma'^2$, on a $X' \cap \text{adh}(Y') = \pi^{-1}(X \cap \text{adh}(Y))$, car $\text{adh}(\pi^{-1}(Y))$ est égal à $\pi^{-1}(\text{adh}(Y))$. Donc cette intersection est vide ou X' est inclus dans $\text{adh}(Y')$ et $X \leq Y$. Ainsi Σ' est bien une stratification de F .

Il reste donc à montrer que si $X \leq Y$ alors $(L_{X'} \cap L_{Y'}, \mathcal{L}_{X' \cap Y'})$ est un feuilletage de $(L_{X'} \cap L_{Y'}, \mathcal{L}_{Y' \cap X' \cap Y'})$.

On reprend les notations de la preuve de la proposition A.5. On suppose que le point x appartient à $\pi(L_{X'} \cap L_{Y'}) = L_X \cap L_Y$ et que (U, ϕ) est une carte du feuilletage $(L_X \cap L_Y, \mathcal{L}_{Y|L_X \cap L_Y})$ de $(L_X \cap L_Y, \mathcal{L}_{Y|L_X \cap L_Y})$. On remarque alors que l'application :

$$(y, v) \in F|_U \rightarrow (I \circ p_x(v), \phi(y))$$

est une carte de $\mathcal{L}_{X'}$ et de $\mathcal{L}_{Y'}$.

B

Expansivité par plaques

La définition de l'expansivité par plaques dans le cadre des difféomorphismes normalement hyperboliques sur une lamination est rappelée dans la section 4.1.

L'expansivité par plaques est vérifiée dans tous les exemples de laminations compactes, normalement dilatées ou hyperboliques connus. Cependant, il n'est pas connu si toute lamination compacte, normalement dilatée ou hyperbolique est expansive par plaques. On ne sait pas non plus s'il est nécessaire qu'une lamination soit expansive par plaques pour persister (en tant que lamination plongée).

Dans le cadre des difféomorphismes normalement hyperboliques, à notre connaissance, il existe essentiellement deux résultats, tous les deux issus de [11].

Propriété B.0.1 (Hirsh-Pugh-Shub). *Soit (L, \mathcal{L}) une lamination compacte plongée dans une variété M . Soit f un difféomorphisme normalement hyperbolique sur cette lamination. Alors f est expansive par plaques sur (L, \mathcal{L}) si \mathcal{L} est une partie saturée d'un feuilletage C^1 d'un ouvert de M*

Le deuxième résultat a été renforcé dans [23] et nécessite la définition de la *Lyapunov stabilité* : Soit f un difféomorphisme préservant une lamination compacte (L, \mathcal{L}) plongée et identifiée à son image dans M . On dira que f est *Lyapunov stable* sur \mathcal{L} si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in L$ et $n \geq 0$, la plaque¹⁷ $f^n(\mathcal{L}_x^\delta)$ est incluse dans \mathcal{L}_x^ϵ .

On remarque si f est une isométrie sur \mathcal{L} alors f Lyapunov stable sur L .

Proposition B.1 (Rodriguez Hertz- Ures). *Soit (L, \mathcal{L}) une lamination compacte plongée dans une variété M . Soit f un difféomorphisme de M préservant (L, \mathcal{L}) .*

- *Si f est Lyapunov stable sur \mathcal{L} et dilate normalement cette lamination, alors f est expansive par plaques.*

¹⁷On rappelle que l'on note \mathcal{L}_x^δ l'union des plaques de diamètre inférieur à δ et contenant x

- Si f est normalement hyperbolique sur cette lamination et si f et f^{-1} sont Lyapunov stables sur \mathcal{L} , alors f est expansive par plaques.

Pour contexte des endomorphismes, on n'a pas pu s'empêcher de généraliser le résultat précédant :

Proposition B.2. *Sous les hypothèses du théorème 1.2, on suppose de plus que la lamination (L, \mathcal{L}) est plongée. On pose alors $\mathcal{L}' := \mathcal{L}|_{L'}$. On suppose qu'il existe $A > 0$ et $\delta > 0$ tels que, pour tout $x \in L'$, l'ensemble $\mathcal{L}'_x{}^A$ est relativement compact dans la feuille de x et on a pour $n \geq 0$:*

$$f^{*n}(\mathcal{L}'_x{}^\delta) \subset \mathcal{L}'_{f^{*n}(x)}{}^A$$

Alors f^* est expansive par plaques sur (L', \mathcal{L}') .

Démonstration. Cette preuve reprend beaucoup d'idées de [23], en particulier celle d'éloigner les pseudo-orbites en considérant leur image par f^* .

Pour alléger les notations, on identifie L avec son image dans M . Ainsi, l'espace L est muni de la métrique issue de M . Comme L' est relativement compact dans L qui est plongé dans M , on a toujours l'existence de $A > 0$ et $\delta > 0$ tels que, pour tout $x \in L'$ et $n \geq 0$, l'ensemble $\mathcal{L}'_x{}^A$ est relativement compact dans la feuille de x et vérifie :

$$f^n(\mathcal{L}'_x{}^\delta) \subset \mathcal{L}'_{f^n(x)}{}^A$$

On munit M d'une métrique adaptée à la dilatation normale de \mathcal{L} par f sur $\text{adh}(L')$. On note \exp l'application exponentielle associée à cette métrique. Ainsi, il existe un champ de cônes sur L' dans $TM|_{L'}$ tel que, pour chaque $x \in L'$, il existe un sous-espace vectoriel maximal inclus dans $C(x)$ et supplémentaire à $T_x\mathcal{L}$ dans T_xM vérifiant de plus :

il existe $\epsilon_0 > 0$ et $\lambda > 1$ tels que pour tout $x \in L'$ et $u \in C(x)$ de norme inférieure à ϵ_0 , on a :

$$v := \exp_{f(x)}^{-1} \circ f \circ \exp_x(u) \in C(f(x)) \quad \text{et} \quad \|v\| \geq \lambda \|u\| \tag{B.1}$$

Par précompacité, quitte à réduire $\epsilon_0 > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour $(x, y) \in L'^2$ vérifiant $y = \exp_x(u)$, avec $u \in C(x)$ de norme dans $[\epsilon_0 / \sup_{L'} \|Tf\|, \epsilon_0]$, on a

$$d(\mathcal{L}'_x{}^A, \mathcal{L}'_y{}^A) > \eta \tag{B.2}$$

Soit alors $p \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda^p \cdot \eta > \epsilon_0$.

De plus, quitte à réduire $\delta > 0$, on peut supposer δ inférieur à $\frac{\epsilon_0}{\sup_{L'} \|Tf\|^p}$.

Fait B.0.2. *Il existe $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$ tel que, pour tout couple de ϵ -pseudo-orbites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ qui respectent les plaques de \mathcal{L}' et qui vérifient*

$$d(x_n, y_n) < \epsilon \quad \text{et} \quad y_n \notin \mathcal{L}'_{x_n}{}^\epsilon, \quad \forall n \geq 0,$$

il existe une suite $(z_n)_n \in L^{\mathbb{N}}$ qui vérifie, pour $n \geq 0$:

$$z_n \in \exp_{x_n}(B_{C(x_n)}(0, \delta)), z_n \in \mathcal{L}'_{y_n}{}^{2\epsilon},$$

$$z_n \notin \mathcal{L}'_{x_n}{}^{2\epsilon}, f^p(z_n) \in \mathcal{L}'_{z_{n+p}}{}^\delta \text{ et } f^p(x_n) \in \mathcal{L}'_{x_{n+p}}{}^\delta$$

On aura montré la proposition s'il n'existe pas de telles pseudo-orbites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$. On va raisonner par l'absurde en supposant ainsi l'existence de $(x_n)_n$ et $(z_n)_n$.

Les deux dernières propriétés impliquent, par définition de δ , que pour tout $k \geq 0$ et $j \geq 0$, $(f^k(x_{pn+j}))_n$ et $(f^k(y_{pn+j}))_n$ sont des A -pseudo-orbites de f^p qui respectent les plaques de \mathcal{L}' .

Pour $k \geq 0$, soit $M_k := \sup_n d(f^k(x_n), f^k(z_n))$. Le réel M_0 appartient à $]0, \epsilon_0 / \sup_{L'} \|Tf\|^p[$. De plus, si $M_j < \epsilon_0$ pour tout $j \leq k$, par (B.1) et le fait B.0.2, le réel M_{k+1} appartient à $[\lambda M_k, \sup_{L'} \|Tf\| M_k]$. Il existe donc $k_0 \geq 0$ tel que M_{k_0+p} appartient à $]\epsilon_0 / \sup_{L'} \|Tf\|, \epsilon_0[$ et M_j est inférieur à ϵ_0 pour $j \leq k_0 + p$. Il existe ainsi $n_0 \geq 0$ tel que

$$d(f^{k_0+p}(x_{n_0}), f^{k_0+p}(z_{n_0})) \in \left[\frac{\epsilon_0}{\sup_{L'} \|Tf\|}, \epsilon_0 \right]$$

On a donc, par B.2 :

$$d(f^{k_0}(x_{n_0+p}), f^{k_0}(z_{n_0+p})) > \eta$$

Ainsi, comme $\lambda^p \eta$ est strictement supérieur à ϵ_0 , on a :

$$d(f^{k_0+p}(x_{n_0+p}), f^{k_0+p}(z_{n_0+p})) > \epsilon_0$$

Ce qui contredit $M_{k_0+p} \leq \epsilon_0$. □

Remarque Sous les hypothèse du théorème 1.2, si les feuilles de \mathcal{L} sont les compasantes connexes des fibres d'un fibré, alors f^* est expansive par plaques sur \mathcal{L}' d'après la proposition B.2.

La propriété équivalente à la propriété B.0.1 est la suivante :

Propriété B.0.3. *Sous les hypothèses du théorème 1.2, on suppose de plus que (L, \mathcal{L}) est plongée. On note $\mathcal{L}' := \mathcal{L}|_{L'}$. Si \mathcal{L} est une partie saturée d'un feuilletage C^1 sur un ouvert de M , alors f est expansive par plaques sur (L', \mathcal{L}') .*

Démonstration. Pour alléger les notations, on identifie L avec son image dans M . Ainsi, l'espace L est muni de la métrique issue de M . On suppose que M est munie d'une métrique adaptée à la dilatation normale de \mathcal{L} par f sur $\text{adh}(L')$. On note \exp l'application exponentielle associée à cette métrique. Ainsi, il existe un champ de cônes C sur L' dans $TM|_{L'}$ tel que, pour chaque $x \in L'$, il existe un sous-espace vectoriel maximal inclus dans $C(x)$ et supplémentaire à $T_x \mathcal{L}$ dans $T_x M$, vérifiant de plus que :

il existe $\epsilon_0 > 0$ et $\lambda > 1$ tels que, pour tous $x \in L'$ et $u \in C(x)$ de norme inférieure à ϵ_0 , on a :

$$v := \exp_{f(x)}^{-1} \circ f \circ \exp_x(u) \in C(f(x)) \quad \text{et} \quad \|v\| \geq \lambda \|u\| \quad (\text{B.3})$$

De plus, pour ϵ_0 assez petit, par hypothèse de feuilletage C^1 , il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $(x, y) \in L'^2$, si $y \in \exp(C(x) \cap B_{TxM}(0, \epsilon_0))$, la distance $d(\mathcal{L}_x^{\epsilon_0}, \mathcal{L}_y^{\epsilon_0})$ est supérieure à $Cd(x, y)$. Soit $p \geq 0$ tel que $C\lambda^p > 2$. Il existe alors $\epsilon_1 \in]0, \epsilon_0[$ assez petit tel que toute ϵ -pseudo-orbite $(x_n)_n$ respectant les plaques de \mathcal{L}' , $(x_{np})_n$ est une ϵ_0 -pseudo-orbite pour f^p qui respecte les plaques de \mathcal{L}' . Il existe $\epsilon \in]0, \epsilon_1[$ tel que, pour tout couple $\left((x_n)_n, (y_n)_n \right)$ de ϵ -pseudo-orbites de f , respectant les plaques de \mathcal{L}' , qui vérifie :

$$d(x_n, y_n) < \epsilon, \quad \forall n \geq 0.$$

Il existe $z_n \in \mathcal{L}_{y_n}^{2\epsilon}$ tel que z_n appartient à $\exp(C(x_n) \cap B(0_{x_n}, \epsilon_0))$, la distance $d(z_n, x_n)$ est inférieure à ϵ_1 et $(z_n)_n$ est une ϵ_1 -pseudo-orbite de f^* respectant les plaques de \mathcal{L}' . Il vient alors que $(z_{pn})_n$ et $(x_{pn})_n$ sont des ϵ_0 -pseudo-orbites de f^p qui respectent les plaques de \mathcal{L}' , telles que z_{pn} appartient à $\exp(C(x_{pn}) \cap B(0_{x_{pn}}, \epsilon_0))$, la distance $d(z_{pn}, x_{pn})$ est inférieure à ϵ_0 . La distance $d(f^p(z_{pn}), f^p(x_{pn}))$ est donc supérieure à $\lambda^p d(z_{pn}, x_{pn})$. De plus, la distance $d(f^p(z_{pn}), f^p(x_{pn}))$ est inférieure à $d(z_{p(n+1)}, x_{p(n+1)})/C$. Donc la distance $d(z_{p(n+1)}, x_{p(n+1)})$ est deux fois plus grande que $d(z_{pn}, x_{pn})$. On conclut que $d(z_{pn}, x_{pn})$ est supérieure à $2^n d(z_0, x_0)$ et inférieure à ϵ_0 , ce qui implique l'égalité de x_0 et z_0 . Ainsi, x_0 appartient à $\mathcal{L}_{y_0}^{2\epsilon}$. \square

Remarques

- Sous les hypothèses du théorème 2.1, si pour chaque strate $X \in \Sigma_{|A'}$ les hypothèses de la proposition ou de la propriété ci-dessus sont vérifiées sur une partie L' relativement compacte dans X et telle que :

$$f^*(adh(L')) \subset L', \quad adh(L') \subset int\left(f^{*-1}(adh(L'))\right) \quad \text{et} \quad \cup_{n \geq 0} f^{*-n}(adh(L')) = X \quad (\text{B.4})$$

on peut alors réduire et étendre la constante d'expansivité par plaques sur L' en fonction ϵ pour laquelle f^* est expansive par plaques sur X , comme dans la partie 5.3.2. Il existe forcément un ouvert vérifiant la condition (B.4) : on pourra considérer $int(K_p) \cap X'_p$ pour la strate X'_p , avec les notations de la démonstration du théorème 2.1

Bibliographie

- [1] V. I. Arnol'd, S. M. Guseïn-Zade, and A. N. Varchenko. *Singularities of differentiable maps. Vol. I*, volume 82 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1985. The classification of critical points, caustics and wave fronts, Translated from the Russian by Ian Porteous and Mark Reynolds.
- [2] K. Bekka. C-régularité et trivialité topologique. In *Singularity theory and its applications, Part I (Coventry, 1988/1989)*, volume 1462 of *Lecture Notes in Math.*, pages 42–62. Springer, Berlin, 1991.
- [3] Christian Bonatti, Lorenzo J. Díaz, and Marcelo Viana. *Dynamics beyond uniform hyperbolicity*, volume 102 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2005. A global geometric and probabilistic perspective, Mathematical Physics, III.
- [4] Jérôme Buzzi, Olivier Sester, and Masato Tsujii. Weakly expanding skew-products of quadratic maps. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 23(5) :1401–1414, 2003.
- [5] Jean Cerf. Topologie de certains espaces de plongements. *Bull. Soc. Math. France*, 89 :227–380, 1961.
- [6] W. de Melo. Structural stability of diffeomorphisms on two-manifolds. *Invent. Math.*, 21 :233–246, 1973.
- [7] Adrien Douady. Variétés à bord anguleux et voisinages tubulaires. In *Séminaire Henri Cartan, 1961/62, Exp. 1*, page 11. Secrétariat mathématique, Paris, 1961/1962.
- [8] Étienne Ghys. Laminations par surfaces de Riemann. In *Dynamique et géométrie complexes (Lyon, 1997)*, volume 8 of *Panor. Synthèses*, pages ix, xi, 49–95. Soc. Math. France, Paris, 1999.
- [9] Nikolaz Gourmelon. Adapted metrics for dominated splittings. *Preprint*.
- [10] Jacek Graczyk and Grzegorz Świątek. *The real Fatou conjecture*, volume 144 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1998.
- [11] M. W. Hirsch, C. C. Pugh, and M. Shub. *Invariant manifolds*. Springer-Verlag, Berlin, 1977. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 583.

- [12] Morris W. Hirsch. *Differential topology*. Springer-Verlag, New York, 1976. Graduate Texts in Mathematics, No. 33.
- [13] H. Karcher. Riemannian center of mass and mollifier smoothing. *Comm. Pure Appl. Math.*, 30(5) :509–541, 1977.
- [14] Mikhail Lyubich. Dynamics of quadratic polynomials. I, II. *Acta Math.*, 178(2) :185–247, 247–297, 1997.
- [15] Ricardo Mañé. Persistent manifolds are normally hyperbolic. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 246 :261–283, 1978.
- [16] Ricardo Mañé. A proof of the C^1 stability conjecture. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (66) :161–210, 1988.
- [17] John N. Mather. Stratifications and mappings. In *Dynamical systems (Proc. Sympos., Univ. Bahia, Salvador, 1971)*, pages 195–232. Academic Press, New York, 1973.
- [18] John Milnor. *Dynamics in one complex variable*, volume 160 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, third edition, 2006.
- [19] Claudio Murolo and David Trotman. Semidifférentiabilité et version lisse de la conjecture de fibration de Whitney. *Advanced Studies in Pure Mathematics*, (43) :271–309, 2006.
- [20] J. Palis and S. Smale. Structural stability theorems. In *Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968)*, pages 223–231. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970.
- [21] J. W. Robbin. A structural stability theorem. *Ann. of Math. (2)*, 94 :447–493, 1971.
- [22] Clark Robinson. Structural stability of C^1 diffeomorphisms. *J. Differential Equations*, 22(1) :28–73, 1976.
- [23] F. Rodriguez Hertz, M.A. Rodriguez Hertz, and R. Ures. A survey on partially hyperbolic dynamics. *arXiv :math.DS*.
- [24] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Masson, Paris, 1980. Translated from the first English edition by N. Dhombres and F. Hoffman, Third printing.
- [25] Michael Shub. Endomorphisms of compact differentiable manifolds. *Amer. J. Math.*, 91 :175–199, 1969.
- [26] Michael Shub. *Stabilité globale des systèmes dynamiques*, volume 56 of *Astérisque*. Société Mathématique de France, Paris, 1978. With an English preface and summary.
- [27] S. Smale. Differentiable dynamical systems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73 :747–817, 1967.
- [28] R. Thom. Local topological properties of differentiable mappings. In *Differential Analysis, Bombay Colloq.*, pages 191–202. Oxford Univ. Press, London, 1964.

-
- [29] David J. A. Trotman. Geometric versions of Whitney regularity for smooth stratifications. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 12(4) :453–463, 1979.
- [30] Marcelo Viana. Multidimensional nonhyperbolic attractors. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (85) :63–96, 1997.
- [31] Hassler Whitney. Local properties of analytic varieties. In *Differential and Combinatorial Topology (A Symposium in Honor of Marston Morse)*, pages 205–244. Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1965.
- [32] Hassler Whitney. Tangents to an analytic variety. *Ann. of Math. (2)*, 81 :496–549, 1965.
- [33] Jean-Christophe Yoccoz. Introduction to hyperbolic dynamics. In *Real and complex dynamical systems (Hillerød, 1993)*, volume 464 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 265–291. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995.