Exercice 1. On a défini dans le cours la famille des opérateurs de Hecke $(T_n)_{n \geq 1}$ qui opèrent sur l'espace $M_k(SL_2(\mathbb{Z}), \mathbb{C})$ des formes modulaires de poids k et de niveau $SL_2(\mathbb{Z})$.

- i. Calculer les coefficients de Fourier de $T_n f$ en fonction de ceux de f .
- ii. Montrer que la série d'Eisenstein E_k est vecteur propre de tous les T_n . Quelles sont les valeurs propres associées ?
- iii. Définir un opérateur T_2 opérant sur la fonction $j = j(\tau)$, et montrer que $T_2 j = Q_2(j)$ est un polynôme en j ; calculer ce polynôme Q_2 unitaire de degré 2.

Exercice 2. Une base de $S_{24}(\Gamma(1), \mathbb{Q})$ est donnée par $f_1 = E_4^3 \Delta = q + aq^2 + bq^3 + cq^4 + \dots$ et $f_2 = \Delta^2 = q^2 + dq^3 + eq^4 + \dots$, où $a = 696, b = 162252, c = 12831808, d = -48, e = 1080$.

- i) Ecrire la matrice des opérateurs de Hecke T_2 et T_3 dans cette base.
- ii) Vérifier que $T_2 T_3 = T_3 T_2$.
- iii) Déterminer une base de formes propres de Hecke normalisées pour $S_{24}(\Gamma(1))$. Dans quel corps de nombres vivent leurs coefficients ?

Exercice 3. (congruence de Kronecker). Soit $p \geq 2$ un nombre premier et $\zeta = e^{2i\pi/p}$. Le but de cet exercice est d'établir la congruence suivante pour le polynôme de classes $F_p[X, Y] \in \mathbb{Z}[X, Y]$ associé au j -invariant et introduit en cours :

$$F_p(X, Y) \equiv (X^p - Y)(X - Y^p) \pmod{p\mathbb{Z}[X, Y]}.$$

a) On dira que deux séries formelles $f = \sum a_n q^n$ et $g = \sum b_n q^n$ à coefficients entiers sont congrues modulo p si $a_n = b_n \pmod{p}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Montrer que $j(p\tau) \equiv j(\tau)^p \pmod{p}$.

b) Plus généralement, si deux Q séries formelles $f = \sum a_n Q^n$ et $g = \sum b_n Q^n$ sont à coefficients dans un sous-anneau $A \subset \mathbb{C}$ et I est un idéal de A , on dira que $f = g \pmod{I}$ lorsque $a_n - b_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Déduire de a) que $j(p\tau) = j(\tau)^p \pmod{(1 - \zeta)\mathbb{Z}[\zeta]}$.

c) Montrer que pour toute matrice $\sigma_b = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & q \end{pmatrix}, 0 \leq b < p$,

$$j(\sigma_b \tau) = j\left(\frac{\tau}{p}\right) \pmod{(1 - \zeta)\mathbb{Z}[\zeta]}.$$

d) En déduire que $F_p(X, Y) = (X^p - Y)(X - Y^p) \pmod{(1 - \zeta)\mathbb{Z}[\zeta][X, Y]}$, puis modulo $p\mathbb{Z}[X, Y]$.

Exercice 4. On se propose de démontrer l'identité de Ramanujan

$$\begin{aligned} & \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+zq^{2n-1})(1+z^{-1}q^{2n-1})(1-q^{2n})(1-\alpha\beta q^{2n})}{(1+\alpha zq^{2n-1})(1+\beta z^{-1}q^{2n-1})(1-\alpha q^{2n})(1-\beta q^{2n})} \\ &= 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(1-\alpha)(q^2-\alpha) \cdots (q^{2n-2}-\alpha)}{(1-\beta q^2)(1-\beta q^4) \cdots (1-\beta q^{2n})} q^n z^n \\ &+ \sum_{n \geq 1} \frac{(1-\beta)(q^2-\beta) \cdots (q^{2n-2}-\beta)}{(1-\alpha q^2)(1-\alpha q^4) \cdots (1-\alpha q^{2n})} q^n z^{-n}. \end{aligned}$$

a) Soit

$$\Phi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+zq^{2n-1})(1+z^{-1}q^{2n-1})}{(1+\alpha zq^{2n-1})(1+\beta z^{-1}q^{2n-1})}.$$

Démontrer que

$$(\beta + qz)\Phi(q^2z) = (1 + \alpha qz)\Phi(z).$$

b) En déduire que les coefficients du développement de Laurent $\Phi(z) = \sum_n c_n(\alpha, \beta)z^n$ vérifient pour $n \geq 0$

$$c_n(\alpha, \beta) = \frac{(1-\alpha)(q^2-\alpha) \cdots (q^{2n-2}-\alpha)}{(1-\beta q^2)(1-\beta q^4) \cdots (1-\beta q^{2n})} q^n c_0(\alpha, \beta).$$

c) En calculant le résidu de $\Phi(z)$ en $z = -(\alpha q)^{-1}$, calculer la valeur de c_0 et conclure.

Exercice 5. Soient $f \in M_k$ et $g \in M_\ell$ des formes modulaires de poids k et ℓ respectivement.

a) Montrer que $\ell f'g - kf g' \in M_{k+\ell+2}$.

b) Obtenir le développement de Fourier et les formules de transformations modulaires de $\frac{i\pi}{12}E_2 := \frac{d}{d\tau} \log \eta(\tau)$. Est-ce une forme modulaire ? De quel poids ?

c) Soit $D_0 = q \frac{d}{dq} = \frac{1}{2i\pi} \frac{d}{d\tau}$.

i. Montrer que l'opérateur $f \mapsto D_0 f - \frac{k}{12} E_2 f$ envoie M_k (resp. S_k) dans M_{k+2} (respectivement S_{k+2}).

ii. Trouver une constante c adaptée pour que $D_0 - cE_2$ envoie $\mathbb{C}E_2$ dans M_4 .

iii. Exprimer $D_0 \Delta$ et $D_0 E_{2k}$, pour $1 \leq k \leq 6$ en termes des $E_{2\ell}$ et Δ .

iv. Prouver que $\tau(n) \equiv n\sigma_5(n) \pmod{5}$.

d) Soit D l'opérateur différentiel $2i \frac{d}{dz}$ et $Z_r f(z) = \frac{r}{y} f(z) + Df(z)$, avec $y = \text{Im}(z)$.

d.i) Montrer que $Z_p Z_{p-2} \cdots Z_{-p+2} Z_{-p} = D^{p+1}$ pour tout $p \geq 0$.

d.ii) Etudier l'action de Z_r sur les formes de poids r .

e) Montrer que $\tau \mapsto E_2(\tau) - \frac{3}{\pi y}$ est faiblement modulaire de poids 2 pour $SL_2(\mathbb{Z})$.