Sorbonne Université — M2 de Mathématiques Fondamentales

TD no3, Formes Modulaires — 2024–2025

Exercice 1. Pour un entier n pair positif, on note $W_{\leqslant n}$ l'espace vectoriel des polynômes P de degré $\leqslant n$ qui vérifient les deux relations de période

$$P\,|_{-n}\, 1+S=0, \tag{1}$$
$$P\,|_{-n}\, 1+U+U^2=0. \tag{2}$$

a) Déterminer une base et la dimension de $W_{\leqslant n}$ pour $n=0,2,4,6,8,10,12$.

b) On rappelle qu'une forme modulaire $f(\tau)=a_0+\sum_{m\geqslant 1} a_m q^m$ de poids k pour $SL_2(\mathbb{Z})$ satisfait l'équation fonctionnelle $f(-\frac{1}{\tau})=\tau^k f(\tau)$. A une telle forme f on associe successivement la série

$$\tilde{f}(\tau):=\sum_{m\geqslant 1}\frac{a_m}{m^{k-1}}q^m,\ q=\exp(2i\pi\tau),$$

puis le "*polynôme de périodes*"

$$r_f(\tau):=\tilde{f}(\tau)-\tau^{k-2}\tilde{f}(-1/\tau).$$

On suppose que f est une forme modulaire parabolique (i.e. $a_0=0$) de poids k pour $SL_2(\mathbb{Z})$. Démontrer que r_f est un polynôme de $W_{\leqslant k-2}$.

c) Déterminer r_f lorsque $f=G_k$ est la série d'Eisenstein. Est-il à coefficients rationnels ?

d) Rappeler pourquoi les deux polynômes associés (en un sens à préciser) à Δ sont à coefficients rationnels.

Exercice 2. Soit $p\geqslant 3$ un nombre premier.

a) Montrer qu'un système de représentant de $\Gamma_0(p)\backslash\Gamma(1)$ est l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0\\j&1\end{pmatrix}$ où $0\leqslant j<p$.

b) En déduire que $\Gamma_0(p)$ possède deux pointes ∞ et 0.

c) Montrer que $\Delta^p(\tau)/\Delta(p\tau)$ est une forme modulaire pour $\Gamma_0(p)$.

Exercice 3. (séries d'Eisenstein de niveau f et théorie CM)

1) Soit $a\in\mathbb{Z}$ un entier, et $f>0$. Pour $k\geqslant 2$ on note $S(a,f;k)$ la série absolument convergente

$$S(a,f;k)=\sum_{0\neq n\in a+f\mathbb{Z}} n^{-k},$$

où la sommation porte sur les entiers non-nuls n congrus à a modulo f.

1.a) Donner une formule pour $S(0,f;k)$.

1.b) On suppose maintenant que $(a, f) = 1$. On note $\zeta_f = \exp(2i\pi/f)$. Montrer qu'il existe un polynôme Q, à coefficients dans $\mathbb{Z}$, tel que

$$(k-1)! f^k S(a, f; k) = (2i\pi)^k Q(\zeta_f^a)/(1-\zeta_f^a)^k.$$

1.c) Lorsque $f = p$ est premier, montrer que $(1-\zeta_p^a)$ est un diviseur propre de p dans $\mathbb{Z}[\zeta_p]$. Lorsque f possède au moins deux facteurs premiers distincts, montrer que $1-\zeta_f^a$ est une unité.

2) Pour $k \geqslant 3$ et des entiers (a, b) et $\tau \in \mathcal{H}$, on pose

$$G_k((a, b), f, \tau) = \sum_{m \equiv a, n \equiv b}{}' \frac{1}{(m\tau + n)^k},$$

la sommation portant sur les entiers m, n dans $\mathbb{Z}$ avec $m \equiv a \bmod f$ et $n \equiv b \bmod f$ (et $(m, n) \neq (0, 0)$).

Expliquer pourquoi $\tau \mapsto G_k((a, b), f, \tau)$ est une forme modulaire de poids k pour $\Gamma(f)$, dont le développement de Fourier à l'infini vérifie

$$G_k((a, b), f, \tau) = \delta(\frac{a}{f}) S(b, f; k) + \frac{(-2i\pi)^k}{f^k (k-1)!} \sum_{m, m'} m^{k-1} \operatorname{sign}(m) \zeta_f^{mb} q^{\frac{mm'}{f}}, \tag{3}$$

la sommation portant sur les paires m, m' d'entiers avec $mm' > 0$ et $m' \equiv a \bmod f$. Aussi, $\delta(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Z}$, et $\delta(x) = 0$ sinon.

3.a) Soit K un corps quadratique imaginaire, $\tau_0 \in \mathcal{H} \cap K$ un point à multiplication complexe et $f > 0$ un entier. Démontrer que, pour tous les entiers $a, b \in \mathbb{Z}$, le nombre complexe

$$\alpha_k((a, b), f, \tau_0) = \frac{G_k((a, b), f, \tau_0)}{(2i\pi\eta(\tau_0)^2)^k}$$

est un nombre algébrique.

3.b) On suppose que p est un nombre premier, et que $(a, b, p) = 1$. Démontrer qu'il existe un entier $m = m_0(k)$, à déterminer, de sorte que

$$(k-1)! p^m \alpha_k((a, b), p, \tau_0)$$

est un entier algébrique.

3.c) Quel genre de résultat d'intégralité similaire à 3.b) pouvez-vous obtenir lorsque a et b sont tous les deux divisibles par p ?

4) Proposer une définition de $G_2((u, v), f, \tau)$. Suggérer une démonstration de sa modularité.