Nom :	**CHAROLLOIS**
Prénom :	**Pierre**

Grade :	Maître de Conférences
Etablissement :	Université Paris 6
Unité :	Institut de Mathématiques de Jussieu (UMR 7586)
Arrivée :	Dans l'équipe de théorie des nombres : septembre 2006.

État civil

Nom	**CHAROLLOIS**
Prénom	**Pierre**
Date de naissance	21 avril 1976 à Roanne, (42) France
Situation familiale	marié, deux enfants
Nationalité	Français

Coordonnées

Adresse professionnelle	Institut de mathématiques de Jussieu Université Paris 6 4 Place Jussieu 75005 Paris
Tél. professionnel	(+1) 01 44 27 85 71
e-mail	charollois@math.jussieu.fr
Adresse permanente	5 rue Réaumur 75003 Paris (France)

Cursus

sept. 2007 – janv. 2008	visiting scholar à Harvard
depuis sept. 2006	Maître de conférences à Paris 6.
2005 – 2006	stagiaire postdoctoral au CRM (Montréal), à l'invitation du professeur Henri Darmon.
2001 – 2004	**Thèse de Doctorat** à l'Université de Bordeaux 1.

Titre : *Sommes de Dedekind et périodes de formes modulaires de Hilbert.*

Directeurs :	Philippe Cassou-Noguès,	Université Bordeaux 1	
	Martin Taylor,	Université de Manchester	
(co-tutelle :	Bordeaux 1 et Université de Manchester)		
Soutenance :	13 décembre 2004		
Mention :	Très honorable		
Rapporteurs :	Pr. Roelof Bruggeman,	Université d'Utrecht	
	Pr. Henri Darmon,	Université McGill	
Jury :	Pr. Loïc Merel,	Univ. Paris 7,	Président
	Pr. Christophe Bavard,	Univ. Bordeaux 1,	Examinateurs
	Pr. Philippe Cassou-Noguès,	Univ. Bordeaux 1	
	Pr. Emmanuel Kowalski,	Univ. Bordeaux 1	
	Pr. Marc Perret,	Univ. Toulouse 2	
	Pr. Martin Taylor,	Univ. de Manchester	

Activités d'enseignement, décharges

En 2008, j'ai obtenu un congé CRCT (sur le contingent de l'université). Aucune délégation CNRS.

Ensuite, sur les 5 dernières années, service à temps complet comme maître de conférences à l'UPMC (192h ETD).

Divers cours comme préparation à l'agrégation (option C), L1 et L2 (suites et séries, intégrales généralisées).

Chargé de TD en M2 durant 6 années consécutives (cours : variétés abéliennes (M. Hindry), puis courbes elliptiques (J. Nekovar), puis théorie du corps de classes (L. Merel)). En particulier, j'ai encadré de multiples (10 en 6 ans) mémoires de M2 ou M1 (voir la liste complète plus bas), avec des étudiants qui ont tous poursuivi en thèse.

Activités de recherche

Thèmes de recherche développés :

Théorie des nombres, Valeurs spéciales de fonctions L, Conjectures de Stark, Sommes de Dedekind et leurs lois de réciprocité ; fonctions zêta p-adiques, conjecture de Gross, domaine de Shintani, cohomologie de $GL_n(\mathbb{Z})$.

Points forts :

• En collaboration avec Henri Darmon (2008), nous formulons un raffinement de la conjecture de Stark au moyen des formes modulaires de Hilbert. Nous établissons des tests numériques de cette conjecture forte.

• En collaboration avec Samit Dasgupta (2012, article en cours d'acceptation, CJM), nous donnos une preuve nouvelle de la construction des fonctions zêta p-adiques de Barsky/Cassou-Noguès/Deligne-Ribet. Notre méthode est basée sur les techniques de Eisenstein-Sczech qui nous permettent de construire des classes de cohomologie entières de $GL_n(\mathbb{Z})$. En corollaire, minoration de l'ordre d'annulation des fonctions L p-adiques en $s = 0$, comme prédit par la conjecture de Gross. Ce résultat était jusqu'ici déduit (pour $p > 2$) des travaux de Wiles sur la conjecture principale d'Iwasawa.

• En collaboration avec S. Dasgupta et M. Greenberg (soumis, 2013), nous construisons des classes de cohomologie pour $GL_n(\mathbb{Z})$ selon une technique différente, initiée par Shintani-Solomon. Nous démontrons que le cocycle ainsi obtenu est lié à celui construit par Sczech par un cobord explicite. En particulier, la méthode de Sczech et celle de Shintani-Solomon pour démontrer la rationalité des valeurs de fonctions zêtas de corps de nombres totalement réels aux entiers négatifs donnent lieu à des classes de cohomologie identiques. Notre résultat permet ainsi d'unifier ces deux approches jusqu'alors distinctes du théorème de rationalité de Klingen-Siegel.

• En collaboration avec M. Greenberg (2013), nous démontrons une conjecture de Lalìn-Rodrigue-Rogers sur la rationalité de valeurs spéciales de la fonction zêta sécante. Il s'agit d'une série de Dirichlet qu'ils ont introduit très récemment. Elle est analogue de la fonction de "zêta cotangente" de Lerch-Berndt-Arakawa, elle aussi associée à un réel quadratique réel ω. Les auteurs avaient conjecturé que, comme pour la fonction zêta cotangente, les valeurs en certains entiers négatifs de cette série de Dirichlet appartiennent au corps réel quadratique engendré par ω. Nous établissons leur conjecture dans une courte note, acceptée pour publication aux Annales Mathématiques du Québec (2014).

Publications

1) Pierre Charollois. "Sommes de Dedekind et périodes de formes modulaires de Hilbert". (Thèse, soutenue le 13/12/2004). Université Bordeaux 1, 193 pages.

2) Pierre Charollois. *"Sommes de Dedekind associées à un corps de nombres totalement réel"*. Journal de Crelle **610**, 125-147 (2007).
`http://people.math.jussieu.fr/~charollois/article_soumis1_pdf.pdf`

3) P. Charollois, Henri Darmon. *"Argument des unités de Stark et périodes de séries d'Eisenstein"*. Algebra & Number Theory (2008) **2** Vol 6, p. 655-688.
`http://people.math.jussieu.fr/~charollois/arguments.pdf`

4) P. Charollois. *"Generalized Fermat equations (d'après Halberstadt-Kraus)"*. in "Arithmetic Geometry". Clay Math. Proceedings, 8. AMS, Providence 2009.

5) P. Charollois, Samit Dasgupta. *"Integral Eisenstein cocycle on* GL_n*, I : Sczech's cocycle and p-adic L-functions of totally real fields"*. (statut de l'article, déc. 2013 : en attente d'acceptation par le comité éditorial de Cambridge Journal of Mathematics. Recommandé par l'éditeur Mark Kisin, en charge de l'article).
Préprint : `http://arxiv.org/abs/1206.3050`

6) P. Charollois, Samit Dasgupta, Matthew Greenberg. *"Integral Eisenstein cocycle on* GL_n*, II : Shintani's cocycle. "* (soumis, 2013).
Préprint : `http://people.math.jussieu.fr/~charollois/CDG_16.pdf`.

7) P. Charollois, Matthew Greenberg. *"Rationality of secant zeta values"*. Accepté pour publication aux Annales Mathématiques du Québec. (2014).
Préprint : `http://people.math.jussieu.fr/~charollois/secant_final.pdf`

Missions de longue durée à l'étranger sur invitation (autres que conférences)

• 1) stage postdoctoral de 2 ans à l'Université de McGill (Montréal) à l'invitation du Professeur Henri Darmon (2005-2006)

• 2) séjour de 1 mois à Gottingen : conférencier invité à l'école d'été 2006 du Clay Institute en géométrie arithmétique (17/07/06-11/08/06)

• 3) séjour de 4 mois à Harvard : visiting scholar invité (01/09/07-15/01/08).

• 4) séjour de 2 mois à UC Santa Cruz : chercheur invité (15/08/08-15/10/08). (collaboration avec Samit Dasgupta).

• 5) séjour de 2 mois à UC Santa Cruz : chercheur invité (1/3/09-1/5/09). (collaboration avec Samit Dasgupta).

• 6) séjour de 2 mois au CRM (Barcelone) : invited researcher (2009-2010).

• 7) séjour de 1 mois à Mc Gill University : chercheur invité. mars 2011. (collaboration avec Henri Darmon).

• 8) séjour de 3 semaines à Univ. of Tokyo : chercheur invité. octobre 2013. (collaboration avec Takayuki Oda).

à venir :
• 9) séjour de 2 mois au CRM Montréal. chercheur invité pour le semestre spécial en arithmétique (printemps 2015). cf la lettre d'invitation ci-jointe.

Activités d'encadrement

• **Encadrement de projet de recherche** à Chevaleret (mai-juin 2007)
Etudiant : Ronan Terpereau (ensuite en thèse avec Michel Brion, Grenoble)
Stage de magistére de l'ENS-Lyon , sujet : "Le théorème de Mordell-Weil."
• **Encadrement de projet de recherche** à Chevaleret (mai-juin 2008)
Etudiant : Pierre Le Boudec (ensuite en thèse avec Régis de la Bretèche, IMJ)
Stage de M2 de l'ENS-Lyon , sujet : "Gross-Stark units."
• **Encadrement de projet de recherche** à Chevaleret (mai-juin 2009)
Etudiant : Nicolas Provost (ensuite en thèse avec Loïc Merel, IMJ)
Stage de M2 de Paris 6 , sujet : "p-adic integral of Eisenstein series."
• **Encadrement de projet de recherche** à Chevaleret (mai-juin 2009)
Etudiant : Samuel Le Fourn (ensuite en thèse avec Pierre Parent, Bordeaux)
Stage de M1 de l'ENS-Lyon , sujet : "fonctions L associées à un Grossencharakter."

- **Encadrement de projet de recherche** à Chevaleret (mai-juin 2010)
Etudiante : Claire Glanois (ensuite en thèse avec Francis Brown, IMJ)
Stage de M1 de l'école Polytechnique , sujet : "périodes de courbes elliptiques CM"
- **Encadrement de projet de recherche** à Jussieu (mai-juin 2011)
Etudiant : Raphael Achet
Stage de M1 de l'ENS , sujet : "Cocycles Eisenstein pour GL_n."
- **Encadrement de projet de recherche** à Jussieu (mai-juin 2012)
Etudiant : Macarena Peche Irissary (ensuite en thèse avec Christophe Cornut, IMJ)
Stage de M1, Paris 6 , sujet : "Théorème de Elkies pour les courbes elliptiques supersingulières"
- **Encadrement de projet de recherche** à Jussieu (mai-juin 2012)
Etudiant : Giacomo Cherubini (ensuite en thèse avec Morten Risager, Copenhague)
Stage de M2, Paris 6 , sujet : "Formule de Bertolini-Darmon pour le pairing de Mazur-Tate".
- **Encadrement de projet de recherche** à Jussieu (mai-juin 2013)
Etudiant : Cyril Benezet
Stage de M1, Paris 6 , sujet : "Théorème de Herbrand"
- **Encadrement de projet de recherche** à Jussieu (mai-juin 2013)
Etudiant : Victor Cauchois
Stage de M1, Ecole Polytechnique , sujet : "classe de cohomologie de Eisenstein-Felder pour $SL_3(\mathbb{Z})$. "

Exposés récents comme orateur de séminaire

- 07/11/2007 : Séminaire de théorie des nombres de Harvard
- 20/11/2007 : Séminaire d'algèbre, Boston University
- 10/12/2007 : Colloquium, Rutgers-Newark University (USA)
- 10/10/2008 : Séminaire, UC Santa Cruz (USA)
- 7/4/2008 : Séminaire d'arithmétique, Lyon
- 11/2009 : Journée Dr Honoris Causa M.J. Taylor, Bordeaux
- mars. 2010 : Séminaire, UC Santa Cruz (USA)
- mars 2011 : QVNTS, Montréal
- mai 2012 : Séminaire algo, INRIA Rocquencourt
- oct. 2012 : Séminaire de Théorie des nombres de l'IMJ-PRG.
- mars 2013 : Séminaire de Théorie des nombres de Bordeaux
- mai 2013 : Séminaire de Théorie des nombres de Lyon
- 30 oct. 2013 : Number Theory seminar, Univ. of Tokyo

Exposés comme orateur à des conférences internationales

- 20-24/06/2005 : Conférence Gauss-Dirichlet, Gottingen
- 28/07/2006 : summer school à Gottingen organisée par le Clay Institute
- 03/06/2007 : conférence BIRS (Banff, Canada) Modular forms : arithmetic and computations
- 01/10/2007 : SAGE Days 7 : Stark-heegner points computations (Harvard)
- 06/2008 : conférence Canada-France à Montréal, session de théorie des nombres.
- 10/2009 : conférence "Sommes de Dedekind", Banff.
- 12/2009 : conférence "Cycles arithmétiques", CRM Barcelone.
- 20/6/2011 : conférence "Algorithmic of L-functions", Lyon.
- 29/9/2012 : conférence "Rational points on curves", Oxford.
- 30/8/2013 : workshop "Effective methods for Darmon points", Benasque.
- 19/9/2013 : workshop "Explicit formulae and Arakelov geometry", IMJ.
- 8/11/2013 : workshop "Harmonic analysis on spherical homogeneous spaces", (Hakuba, Japon).

à venir :

- mars 2014 : workshop "Théorie des nombres et applications", (CIRM).
- fév. 2015 : workshop "Regulators, Mahler measure and special values of L-functions", (Montréal).

Activités administratives

(Responsabilités anciennes)

- **Élu** en 2003 représentant des doctorants au conseil de l'Institut de Mathématiques de Bordeaux.
- **Co-organisateur** de la journée "Modules galoisiens et fonctions L" le 27 nov. 2004 à Bordeaux.
- **Co-organisateur** du workshop court "autour des conjectures de Stark", 1-3 nov. 2005, CRM (Montréal).

Responsabilités plus récentes :

- **Elu** au conseil de l'UFR de Maths de Paris 6 (2009-2013), et au conseil des enseignements.
- **(2007-2009) co-organisateur** avec Mladen Dimitrov du séminaire de théorie des nombres de Chevaleret.
- **(2009-2011) co-organisateur** avec Huayi Chen du séminaire de théorie des nombres de l'IMJ-PRG.
- **(oct. 2011). Co-organisateur** du workshop international "Cycles arithmétiques et fonctions L", à Banff (Canada)
- **(2011..) Co-organisateur** du séminaire de théorie des nombres Paris-Londres.

- **Membre** de la comission de spécialistes de Bordeaux, section 25, recrutement 2009.
- **Membre** du comité de sélection de Besançon, section 25, recrutement 2014.
- **Membre** du comité de sélection de Paris 6, section 25 : Recrutements 2013, 2014.
- **Rapporteur** pour *Experimental Maths., International journal of number theory, journal de théorie des nombres de Bordeaux...*.
- **Membre** à 80% de l'ANR "régulateurs", 2012-2016.

1 Bilan des travaux de recherche

1.1 Thématique de la recherche proposée

L'objectif premier de notre travail est d'obtenir de nouveaux résultats, à la fois théoriques et algorithmiques, en direction du 12ème problème de Hilbert (ou rêve de jeunesse de Kronecker) et des conjectures de Stark et de Gross-Stark. Pour cela, nous étudions les périodes de formes modulaires de Hilbert, en particulier de séries d'Eisenstein en plusieurs variables. Leurs périodes semblent fournir un substitut naturel de la notion d'unité modulaire en dimension supérieure.

Le $12^{\text{ème}}$ problème de Hilbert consiste à construire des générateurs des extensions abéliennes d'un corps de nombres comme valeur spéciale de certaines fonctions holomorphes en des points algébriques. Hilbert s'intéressait à l'existence de fonctions jouant pour un corps de base K quelconque le rôle joué par la fonction exponentielle lorsque $K = \mathbb{Q}$ ou par les formes modulaires lorsque K est quadratique imaginaire. En dehors de ces deux cas et des travaux de Shimura-Taniyama dans le cadre des corps CM, les fonctions transcendantes attendues font défaut, ainsi que les résultats d'algébricité.

La conjecture de Stark constitue une réponse partielle à ce problème : elle prédit essentiellement que le logarithme de la valeur absolue d'une certaine unité coïncide avec la valeur spéciale d'une fonction L en $s = 0$. On peut noter quelques différences avec la problématique de Hilbert :

1. pour changer d'unité on doit changer de fonction L;
2. on évalue toujours la fonction L en le même point ($s = 0$) ;
3. on récupère seulement le module de l'unité de Stark, et pas son argument.

1.2 Travail post-doctoral

Dans un travail post-doctoral en collaboration avec Henri Darmon ([C-Darmon], 2008), nous avons obtenu une formule analytique qui, sous forme conjecturale, devrait permettre de récupérer non seulement le module de l'unité de Stark mais aussi son argument. Cette formule fait apparaître une fonction holomorphe unique, en l'occurrence la primitive d'une série d'Eisenstein de poids 2, "évaluée" en des points algébriques. Nous proposons ainsi une construction des unités de Stark qui les rapproche du $12^{\text{ème}}$ problème de Hilbert. Cette construction fait apparaître une généralisation de la notion d'unité modulaire dans le contexte des formes modulaires en plusieurs variables. Notre conjecture de Stark "raffinée" [CDarmon, Conj. 2] se prête aux test numériques, et amène a posteriori à la construction explicite de corps de classes d'extension K/F ATR (comportant exactement une place complexe).

1.3 Travaux récents et perspectives

1.3.1 Fonctions zêta p-adique de Cassou-Noguès et Deligne-Ribet, conjecture de Gross

Dans un travail plus récent (2012) en collaboration avec Samit Dasgupta, nous avons construit certaines classes de la cohomologie Eisenstein de $GL_n(\mathbb{Z})$ qui permettent l'étude directe de l'intégralité des valeurs spéciales de fonctions zêta partielles d'un corps de nombres totalement réel de degré n.

Cette nouvelle approche, cohomologique, permet notamment de déduire des conséquences non-triviales pour la conjecture de Gross concernant l'ordre d'annulation en $s = 0$ des fonctions L p-adiques correspondantes. Nous donnons maintenant plus de détails sur ce travail [CD] et son contexte.

Soit F un corps de nombres totalement réel de degré n, et $\mathfrak{f}$ un idéal entier de F. A tout idéal fractionnaire $\mathfrak{a}$ premier à $\mathfrak{f}$ est associée la fonction zêta partielle

$$\zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}, s) = \sum_{\mathfrak{b} \sim \mathfrak{a}} \frac{1}{N\mathfrak{b}^s}, \qquad \mathrm{Re}(s) > 1. \tag{1}$$

Ici la sommation porte sur les idéaux entiers $\mathfrak{b} \subset F$ équivalents à $\mathfrak{a}$ dans le groupe des classes (au sens restreint) modulo $\mathfrak{f}$, que nous notons $G_{\mathfrak{f}}$. Un résultat classique de Siegel et Klingen affirme que la fonction zêta partielle $\zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}, s)$, qui peut être étendue en une fonction méromorphe sur le plan complexe, prend des valeurs rationnelles aux entiers négatifs $s = -k$.

La démonstration de Siegel repose sur l'observation que ces valeurs spéciales sont le terme constant de certaines séries d'Eisenstein pour le groupe modulaire de Hilbert associé à F. La rationalité du terme constant se déduit de la rationalité des autres coefficients, qui ont une forme explicite.

Shintani a donné une preuve alternative du théorème de Siegel–Klingen en utilisant une approche "géométrie des nombres". Il fixe un isomorphisme $F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n$, et considère un domaine fondamental D pour l'action des unité totalement positives de F congrues à 1 modulo $\mathfrak{f}$ sur le quadrant totalement positif de $\mathbb{R}^n$. Les fonctions zêta partielles de F peuvent alors s'exprimer comme une somme indexée par les points de D contenus dans certains réseaux de $\mathbb{R}^n$. Shintani évalue alors ces sommes à l'aide de techniques standard d'analyse complexe et les exprime explicitement en terme de sommes de produits de polynomes de Bernoulli.

En 1993, Sczech a donné encore une autre preuve du théorème de rationalité de Siegel–Klingen. Il a défini un cocycle “Eisenstein" Ψ sur $GL_n(\mathbb{Q})$ à valeurs dans l'espace des distributions à valeurs dans $\mathbb{Q}$, noté $M_{\mathbb{Q}}$. Il montre alors que la classe de cohomologie $[\Psi] \in H^{n-1}(GL_n(\mathbb{Q}), M_{\mathbb{Q}})$ peut être accouplée avec certaines classes du groupe dual en homologie, pour obtenir les valeurs spéciales de tous les corps de nombres totalement réels F de degré n aux entiers négatifs, démontrant ainsi leur rationalité.

Chacune de ces démonstrations du théorème de rationalité de Siegel–Klingen contient un raffinement entier. Deligne et Ribet ont établi un tel raffinement de la méthode de Siegel en poursuivant une idée initiée par Serre. Ils ont construit un modèle sur $\mathbb{Z}$ du schéma modulaire de Hilbert adéquat, et ont prouvé que ses fibres en caractéristique p sont géométriquement irréductibles. Entretemps, Barsky et Pi. Cassou-Noguès ont établi un raffinement entier des formules de Shintani et interprété ces résultats en termes de mesures p-adiques.

Le but premier de l'article en collaboration avec Samit Dasgupta [CD] est de fournir un tel raffinement pour le cocycle Ψ de Sczech. Nous "augmentons le niveau" en un premier ℓ, de sorte que nous définissons un cocycle Ψ_ℓ qui satisfait une propriété d'intégralité cruciale (voir [CD, Th. 4) pour une version précise). En application de nos résultats, nous pouvons donner une preuve nouvelle des célèbres théorèmes de Cassou-Noguès et Deligne-Ribet.

Théorème 1.1. *Soit $\mathfrak{c}$ un idéal entier de F premier à $\mathfrak{f}$ de norme ℓ. La fonction zêta partielle tordue*
$$\zeta_{\mathfrak{f},\mathfrak{c}}(\mathfrak{a}, s) = \zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}\mathfrak{c}, s) - N\mathfrak{c}^{1-s}\zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}, s) \tag{2}$$
prend des valeurs dans $\mathbb{Z}[1/\ell]$ aux entiers négatifs $s = -k$.

Nos résultats d'intégralité permettent en outre une construction nouvelle de la fonction zêta p-adique $\zeta_{\mathfrak{f},\mathfrak{c},p}(\mathfrak{a}, s)$ de Deligne-Ribet-Cassou-Noguès qui interpole les valeurs de la fonction zêta classique $\zeta_{\mathfrak{f},\mathfrak{c}}(\mathfrak{a}, s)$. Définissons $\zeta^*_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}, s)$ comme en (1), mais la somme étant restreinte aux idéaux $\mathfrak{b}$ premiers à p ; définissons $\zeta^*_{\mathfrak{f},\mathfrak{c}}(\mathfrak{a}, s)$ à partir de $\zeta^*_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}, s)$ comme en (2). Soit $\mathcal{W}$ l' *espace des poids* des homomorphismes continus de $\mathbb{Z}_p^*$ dans $\mathbb{C}_p^*$, où les entiers $k \in \mathbb{Z}$ s'injectent selon $x \mapsto x^k$.

Théorème 1.2. *Soit $\mathfrak{c}$ un idéal entier de F premier à $\mathfrak{f}p$ de norme ℓ. Il existe une unique fonction $\zeta_{\mathfrak{f},\mathfrak{c},p}(\mathfrak{a}, s)$ de la variable $s \in \mathcal{W}$, analytique, à valeurs dans $\mathbb{Z}_p$, telle que*
$$\zeta_{\mathfrak{f},\mathfrak{c},p}(\mathfrak{a}, -k) = \zeta^*_{\mathfrak{f},\mathfrak{c}}(\mathfrak{a}, -k)$$
pour tout entier négatif k.

Notre construction de la fonction zêta p-adique pour les corps de nombres totalement réels présente l'avantage crucial de nous permettre de nous embarquer dans une étude nouvelle du comportement du terme dominant de ces fonctions p-adiques en $s = 0$.

Pour pouvoir énoncer notre résultat principal, il est plus agréable de travailler avec les fonctions L p-adiques associées à des caractères, plutôt qu'avec les fonctions zêta partielles associées aux classes d'idéaux. Pour cela, soit $\chi : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \overline{\mathbb{Q}}^*$ un caractère d'ordre fini totallement impair de conducteur $\mathfrak{f}$. On fixe des plongements $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ et $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$, de sorte que χ prend ses valeurs dans $\mathbb{C}$ ou $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Soit
$$\omega : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \longrightarrow \mu_{p-1} \subset \overline{\mathbb{Q}}^*$$
le Teichmüller. Il y a une fonction L p-adique $L_{\mathfrak{c},p}(\chi\omega, s)\colon \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{C}_p^*$ associée au caractère totalement pair $\chi\omega$, donnée par
$$L_{\mathfrak{c},p}(\chi\omega, s) := \sum_{\mathfrak{a}\in G_{\mathfrak{f}}} \chi(\mathfrak{a}\mathfrak{c})\zeta_{\mathfrak{f},\mathfrak{c},p}(\mathfrak{a}, \langle\cdot\rangle^s),$$
où $\langle x\rangle = x/\omega(x)$ pour $x \in \mathbb{Z}_p^*$. La fonction $L_{\mathfrak{c},p}(\chi\omega, s)$ satisfait la propriété d'interpolation
$$\begin{aligned} L_{\mathfrak{c},p}(\chi\omega, -k) &= L^*_{\mathfrak{c}}(\chi\omega^{-k}, -k) \\ &:= L^*(\chi\omega^{-k}, -k)(1 - \chi\omega^{-k}(\mathfrak{c})N\mathfrak{c}^{1+k}) \end{aligned}$$
aux entiers $k \geq 0$,où $L^*(\chi, s)$ désigne la fonction L classique avec ses facteurs Eulériens en p supprimés.

Soit r_χ le nombre de premiers $\mathfrak{p}$ of F au-dessus de p tels que $\chi(\mathfrak{p}) = 1$. Il est bien connu que
$$\mathrm{ord}_{s=0}L^*_{\mathfrak{c}}(\chi, s) = \mathrm{ord}_{s=0}L^*(\chi, s) = r_\chi$$
(see [T, 2.6]). Dans [G], B. Gross a proposé

Conjecture 1 (Gross). *Nous avons*

$$ord_{s=0}L_{\mathfrak{c},p}(\chi\omega, s) = r_\chi.$$

En combinant notre approche cohomologique de la fonction L p-adique avec le formalisme de Spiess, nous prouvons le résultat partiel suivant en direction de la conjecture de Gross :

Théorème 1.3. *Nous avons*

$$ord_{s=0}L_{\mathfrak{c},p}(\chi\omega, s) \geq r_\chi.$$

Le résultat du Théorème 1.3 était déjà connu comme conséquence de la preuve de Wiles de la conjecture principale d'Iwasawa.

Notre méthode contraste avec celle de Wiles de part sa nature purement analytique : on calcule directement les premières $r_\chi - 1$ dérivées de $L_{\mathfrak{c},p}(\chi\omega, s)$ en $s = 0$ et on montre qu'elles s'annulent. Spiess a prouvé le Théorème 1.3 également en utilisant son formalisme [Sp2]. Ses classes de cohomologie sont définies au moyen de la méthiode de Shintani. Dans [CDG] nous produisons une comparaison directe entre les cocycle définis au moyen de la méthode de Sczech et celle de Shintani.

1.3.2 Construction de classes de cohomologie explicite pour GL_n. Comparaison entre la construction "à la Sczech" et celle "à la Shintani".

Par ailleurs, dans le travail ([CDG]) en collaboration avec Samit Dasgupta et Matthew Greenberg, nous démontrons comment produire une construction alternative de la classe Eisenstein $[\Psi_\ell]$ en utilisant la méthode de Shintani, prolongeant les travaux antérieurs de D. Solomon, R. Hill, P. Colmez et S. Dasgupta.

Il y a en fait 3 thèmes dans cet article. D'abord, nous définissons un $(n-1)$-cocycle pour GL_n à valeurs dans un certain espace de séries formelles $\mathbb{R}((z))^{\mathrm{hd}}$. L'idée de base pour définir un tel cocycle est connue. La valeur du cocycle en une t-uplet de matrices est la série génératrice de Shintani-Solomon associée au cône simplicial dont les générateurs sont les images d'un vecteur fixe sous l'action de ces matrices. La difficulté pour définir complètement le cocycle a deux origines :

- choisir quelles faces du bord inclure dans la définition du cône de manière cohérente,

- être capable de traiter le cas des situations dégénérées où les générateurs du cône ne sont pas en position générale.

La méthode de Hill pour résoudre ces problèmes est d'injecter $\mathbb{R}^n$ dans un certain corps ordonné à n indéterminées, et de perturber les générateurs du cône de sorte qu'ils soient en position générale. C'est la méthode de Hill qu'utilise [Sp2].

Notre méthode est reliée, mais un peu différente. Nous choisissons un vecteur auxiliaire $Q \in \mathbb{R}^n$ et nous incluons une face du cône simplicial si la perturbation de la face par un petit multiple positif de Q ramène la face à l'intérieur du cône. C'est aussi une idée introduite indépendamment par P. Colmez. Son application à la propriété de cocycle apparaît nouvelle.

En utilisant les formules de Shintani et Solomon, nous démontrons que le cocycle que nous construisons pour GL_n permet d'obtenir par spécialisation les valeurs spéciales aux entiers négatifs des fonctions zêta partielles de tous les corps de nombres totalement réels de degré n. Il s'agit pour l'essentiel d'une reformulation cohomologique de la démonstration par Shintani du résultat de rationalité de Klingen-Siegel.

Dans un deuxième temps, nous augmentons le niveau en un premier ℓ et produisons une version *entière* du cocycle de Shintani. De manière similaire à l'article [CD], nous en déduisons que l'ordre d'annulation des fonctions L p-adiques de Cassou-Noguès et Deligne-Ribet en $s = 0$ est au moins celui prédit par la conjecture de Gross.

Finalement, notre troisième et dernier résultat dans cet article est de démontrer que les cocycles pour $GL_n(\mathbb{Q})$ définis par la méthode de Sczech et celle de Shintani sont en fait cohomologues. Le fait que ces deux types de cocycles soient cohomologues avait longtemps été suspecté par les experts du domaine. Pour le démontrer, nous donnons explicitement le cobord qui les relie. Un point technique était que ces cocycles était a priori défini comme prenant des valeurs dans des modules distincts. L'idée d'introduire la perturbation par le vecteur Q a permis de les comparer dans un module commun.

1.3.3 Rationalité de valeurs spéciales de la fonction zêta "sécante".

En collaboration avec M. Greenberg (2013), nous démontrons une conjecture de Lalìn-Rodrigue-Rogers sur la rationalité de valeurs spéciales de la fonction zêta sécante. Il s'agit d'une série de Dirichlet qu'ils ont introduit très récemment. Elle est définie pour $Re(s) > 2$ et ω un nombre réel quadratique par la série

$$\psi(s, \omega) := \sum_{n \geq 1} \frac{\sec(\pi n \omega)}{n^s}.$$

C'est l'analogue de la fonction de "zêta cotangente" de Lerch-Berndt-Arakawa, et de toutes une famille de série introduite par Lerch, elles aussi associées à un réel quadratique réel ω. Les auteurs cités ci-dessus avaient conjecturé [LRR] que, comme pour la fonction zêta cotangente, les valeurs en certains entiers s négatifs de cette série de Dirichlet appartiennent au corps réel quadratique engendré par ω. Nous établissons leur conjecture dans une courte note [CG], acceptée pour publication aux Annales Mathématiques du Québec (2014).

Références

[Ba] D. Barsky. *Fonctions zêta p-adiques d'une classe de rayon des corps totalement réels.* Groupe d'étude d'analyse ultramétrique (5ème année 1977/78), exposé no. 16, 23 pp. errata 1978-1979.

[Ca] P. Cassou-Noguès. *Valeurs aux entiers négatifs des fonctions zêta et fonctions zêta p-adiques.* Invent. Math. **51** (1979), 29–59.

[Ch] Charollois, P. : *Sommes de Dedekind associées à un corps de nombres totalement réel.* Journal de Crelle **610**, 125-147 (2007).

[CDarmon] P. Charollois, H. Darmon : *Argument des unités de Stark et périodes de séries d'Eisenstein.* Algebra&Number Theory **2** Vol 6, p. 655-688 (2008).

[CD] P. Charollois, S. Dasgupta. *Integral Eisenstein cocycles on GL_n, I : Szech's cocycle and p-adic L-functions for totally real fields*, soumis (2012) ; http ://arxiv.org/abs/1206.3050.

[CG] P. Charollois, M. Greenberg. *Rationality of secant zeta values.* Accepté pour publication, Ann. Math. Québec (2014). `http://people.math.jussieu.fr/~charollois/secant_final.pdf`

[CDG] P. Charollois, S. Dasgupta, M. Greenberg. *Integral Eisenstein cocycles on GL_n, II : Shintani's method*, préprint Arxiv (2013).

[Co1] P. Colmez. *Résidu en $s = 1$ des fonctions zêta p-adiques.* Invent. Math. **91** (1988), 371–389.

[Da1] Darmon, H. : *Integration on $\mathcal{H}_p \times \mathcal{H}$.* Annals of Mathematics (2) **154**, 589-639 (2001).

[Da2] Darmon, H. : Rational points on modular elliptic curves. CBMS Regional Conference Series **101**. Conf. Board Math. Science, Washington D.C. AMS, Providence, RI : 2004.

[D-D] Darmon, H., Dasgupta, S. : *Elliptic units for real quadratic fields.* Annals of Mathematics (2) **163** 301-345 (2006).

[D-L] Darmon, H., Logan, A. : *Periods of Hilbert modular forms and rational points on elliptic curves.* Int. Math. Res. Not. **40**, 2153-2180 (2003).

[Das] S. Dasgupta. *Shintani Zeta Functions and Gross-Stark units for totally real fields.* Duke Math. Journal, **143** (2008), no.2, 225–279.

[DR] P. Deligne, K. Ribet. *Values of abelian L-functions at negative integers over totally real fields.* Invent. Math. **59** (1980), no 3, 227–286.

[G] B. Gross, *p-adic L-series at $s = 0$.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **28** (1981), no. 3, 979–994.

[GS] P. Gunnells, R. Sczech. *Evaluation of Dedekind sums, Eisenstein cocycles, and special values of L-functions.* Duke Math. Journal **118** (2003), no. 2, 229–260.

[LRR] Matilde Lalín, Francis Rodrigue and Matthew Rogers, *Secant zeta functions*, J. Math. Anal. Appl. **409** (2014), no. 1, 197 – 204.

[Sc] R. Sczech. *Eisenstein group cocycles for GL_n and values of L-functions.* Invent. Math. **113** (1993), no. 3, 581–616.

[Sp2] M. Spiess. *Shintani cocycles and vanishing order of p-adic Hecke L-series at* $s = 0$, preprint, available at http ://arxiv.org/abs/1203.6689.

[T] J. Tate. *On Stark's conjectures on the behavior of $L(s, \chi)$ at $s = 0$*. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA **28** (1981), 963–978.

[Wi] A. Wiles. *The Iwasawa conjecture for totally real fields*. Ann. of Math. (2) **131** (1990), no. 3, 493-540.