Eisenstein 和 Kronecker 的椭圆函数：现代化版

Pierre Charollois　Robert Sczech

Gotthold Eisenstein
1823–1852

Leopold Kronecker
1823–1891

这篇文章介绍了关于 Leopold Kronecker (克罗内克)[1]的讲座笔记的一系列最近的发现，该报告是在 1891 年 12 月其去世前几周的最后一次课上所做的．该笔记是由 F. von Dalwigk 记下的，详细阐述了 Kronecker 对 “Eisenstein (艾森斯坦)[2] 求和过程” 重要性的最后认可，这个 Eisenstein 求和过程, 就是为了处理现今称之为 Eisenstein 级数的条件收敛级数，是由 “他的青春时代的伙伴” 所发明的．我们借此机会来将 André Weil (韦伊) 那本著名的书 (1976) 用更现代化的语言简捷表述一下，Weil 的书中将 Eisenstein 和 Kronecker 的这些结果带回了光明．我们相信 Eisenstein 处理椭圆函数的方法事实上是 Kronecker 计划证明他那有远见卓识的 “青春之梦 [3]” 的一个非常重要的部分.

1. 引言

Leopold Kronecker 出生于 1823 年．当他在他的大学中给出题为 “关于依赖于两对实变量的椭圆函数 (On elliptic functions depending on two pairs of real variables)” 最后一次

译自： EMS Newsletter, issue 101, September 2016, p. 8–14, Elliptic Functions According to Eisenstein and Kronecker: An Update, Pierre Charollois and Robert Sczech, figure number 2.

Pierre Charollois 是法国巴黎第六大学的数学讲师，他的邮箱地址是 pierre.charollois@imj-prg.fr.

Robert Sczech 是纽瓦克 Rutgers 大学的数学副教授，他的邮箱地址是 sczech@rutgers.edu.

1) 德国数学家和逻辑学家, 1823–1891．其数学专长是数论和代数学. Kronecker 是 Ernst Kummer (库默尔，1810–1893) 的学生 (不是研究生) 和终身挚友．Kronecker 是一些科学院和学会的院士和会员：普鲁士科学院 (1861), 法国科学院 (1868), 英国皇家学会 (1884)． 第 25624 号小行星是以 Kronecker 名字命名的，该小行星是由 P. G. Comba 于 2000 年 1 月 6 日发现的.—— 校注

2) 德国数学家，1823–1852, 其专长为数论和分析学．他于 1845 年在柏林大学获得博士学位，导师是 E. Kummer. Gauss (高斯) 曾说过，只有 3 个划时代的数学家：Archimedes (阿基米德), Newton (牛顿) 和 Eisenstein. Eisenstein 于 1852 年因肺结核而英年早逝．于 1996 年 12 月 13 日发现的第 20174 号小行星是以其名字命名的．一个十分巧合的事是，这颗小行星的发现者恰为 25624 号 Kronecker 小行星的发现者 P. G. Comba.—— 校注

3) 作者在此用了 Kronecker 所用的德文 Jugendtraum.—— 校注

讲座的 15 天后，也就是在 1891 年 12 月 29 日 [1)], 他在柏林去世，终年 68 岁. 这些历史信息来自于最近在萨尔布吕肯 (Saarbrücken) 大学 [2)] 图书馆发现的讲座笔记. 在讨论这些手写笔记的内容和作者之前，我们想要回顾一下发现它们时的环境. 最初的发现源于 Franz Lemmermeyer 教授，他开始重新编写那个用老式风格书写的德文草书讲座笔记，但他最终并没有完成. 然后手稿便在图书馆迁移的过程中丢失了. 因为很想学习更多关于 Kronecker 的工作以及从他那所谓的 "亲爱的青春之梦" 中获得灵感，我们决定接受 Simone Schulze 的帮助继续在图书馆中寻找那份手稿. 经过数周的努力搜索，最终完整版的手稿被找到了，并且图书馆甚至还提供了高质量的电子复印版，现在这份复印版公众可以得到了 [Cw]. 我们感谢 Schulze 女士的帮助，我们也感谢 Franz-Josef Rosselli, 他将手写的德文草书 (在 19 世纪流行) 翻译成现代德文字体 [Cw].

手稿是由 Friedrich von Dalwigk 记录的，当时他还是一名研究生，刚完成关于多变量 θ 函数的博士论文 [vD]. 后来，von Dalwigk 成了马尔堡 (Marburg) 大学 [3)] 的应用数学教授 (1897—1923). 尽管这门课程只包含 6 次讲座 (因为 Kronecker 过早地去世), 手稿却写了整整 120 多页，以及还有许多附录. 附录部分由 von Dalwigk 所写，基于 Kronecker 一些已经发表的和 Kronecker 的 "Nachlass[4)]" 中的一些未发表的文章. Dalwigk 在手稿中明确地提到了单词 "Nachlass". 他可能从他在 Marburg 的同事 Hensel 那里取得了阅读这些文献的许可，因为当时 Hensel 控制了 Kronecker 所有的科学论文. 从 Hasse[5)] 和 Edwards [Ed] 那里得知，Kronecker 的一些私人资料在二战战乱时期丢失了. 很有可能它们被哥廷根附近一座旧矿山因弹药爆炸引起的火灾毁灭了. 在 1945 年，这座矿山通常是用来存放哥廷根图书馆的一些收藏的. 正如 Weil 在他的文章 [We 1] 中预测的那样，这个戏剧性的事件只是 Eisenstein 思想的继承被长期诅咒的一部分.

无论如何，这个手稿细节的处理和内容都是非凡的，这让我们不得不认为他原意就是打算写成一本书来发表的.

他的好友 Georg Cantor (康托尔) 是最新成立的德国数学协会 (DMV) 的第一任主席，他想要邀请 Kronecker 在 1891 年第一次年会上致开幕词. 而我们从 Kronecker 给 Georg Cantor 的一封信中得知他打算在这次会议上讲 Eisenstein"被遗忘" 的工作. 在那封信中，Kronecker 表示因为他的妻子 Fanni 过世而不能参加开幕式，他对此表示非常抱歉. 因此很有可能那个讲座笔记就是他本来想要在开幕式中做的报告的扩充版本.

Kronecker 的确是一个伟大的数学家，他在代数学和数论上都做了许多奠基性的贡献. 我们这里只提到了他的 "青春之梦". 从历史的角度来讲，"青春之梦" 直接导致了类域论的发现以及 Hilbert (希尔伯特) 第十二问题的提出 (关于给定数域的所有 Abel (阿

1) 根据他墓碑上的记录，Kronecker 卒于 1891 年 12 月 23 日.—— 原注
在网页 https://en.wikipedia.org/wiki/Leopold_Kronecker 上有 Kronecker 墓的照片.—— 校注

2) Saarbrücken 大学位于德国萨尔州首府萨尔布吕肯.—— 校注

3) 全称马尔堡菲利普大学 (Philipps-Universität Marburg), 位于德国黑森州马尔堡.—— 校注

4) "Nachlass" 是德语单词，在本文中的含义为 "未发表的遗作".—— 译注

5) 疑此处原文遗漏 "[HH]" 或 "[Ha]".—— 校注

贝尔) 扩张的解析生成), 这是经典代数数论里最杰出的问题之一. 植根于 Kronecker 和 Eisenstein 工作的著名 Stark 猜想给出了该问题的部分解答 (发表于 20 世纪 70 年代的 4 篇文章).

顺便说一下，我们想要指出两个关于 Kronecker 在数论上工作的标准参考文献. 第 1 个是 Siegel (西格尔) 的书《高等解析数论 (Advanced Analytic Number Theory)》 [Si] 的第 1 章，这一章主要是讲所谓的 Kronecker 极限公式以及一些应用 (Kronecker 关于 Pell (佩尔) 方程的解). 第 2 个参考文献是 André Weil 的书《 Eisenstein 和 Kronecker 的椭圆函数 (Elliptic Functions According to Eisenstein and Kronecker)》 [We 2]. 这篇讲座笔记的回顾可以粗略地看成是 Weil 书中讨论的内容的扩充和精细化. Weil 的书除了使 Eisenstein 的思想不被遗忘，重新绽放光彩，它也是许多 Eisenstein 和 Kronecker 的趣闻轶事有价值的来源. 我们觉得最有意思的事就是 Kronecker 在他博士论文答辩时宣称数学既是科学也是艺术；而他的朋友 Eisenstein 公开反驳道数学只是艺术.

2. Kronecker 和 Eisenstein 的工作

除了 1880 年 3 月 15 日给 Dedekind (戴德金) 的一封信以外，Kronecker 在他的文章中都没有关于 “青春之梦” 详尽的表述. 在那封信中，Kronecker 报告了他的猜想 (青春之梦) 的证明的最新进展：一个虚二次域 F 的所有 Abel 扩张是由某个具有复乘在 F 中的椭圆函数的可除值和其对应的奇异模生成的，也就是说，相应的椭圆曲线的 j– 不变量的值. 他表示希望很快地完成证明. 最后，他遗憾地不得不推迟对任意复数域找类似奇异模的问题 (Hilbert 第十二问题), 直到虚二次域的情形完全被解决. 10 年后，在他关于椭圆函数的讲座中，他完全没有提及关于青春之梦的工作，而是集中精力回顾和推广 Eisenstein 的工作.

接下来，我们想要解释为什么 Eisenstein 的方法在 Kronecker 对他的青春之梦设想的证明中也许是重要的步骤. 也就是说，我们将对 Eisenstein 在他的文章 [Eis 2] 中的基本例子稍作修改，在有理数域的 Abel 扩张这种比较简单的情况下来实现 Kronecker 的纲领.

令 u 为一个复数，并且不是整数. 那么陪集 $\mathbb{Z}+u \subset \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ 不包含零元素，因此级数

$$\phi(u) = \sum_{m\in\mathbb{Z}+u} \frac{1}{m}$$

的每一项都有明确的定义，但是该级数并不是绝对收敛的. 因此我们有必要确定求和的顺序. 按照 Eisenstein 的方法，我们定义：

$$\begin{aligned}\phi(u) &= \lim_{t\to+\infty} \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}+u\\ |m|<t}} \frac{1}{m} = \frac{1}{u} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{u+n}+\frac{1}{u-n}\right)\\ &= \frac{1}{u} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2u}{u^2-n^2}\end{aligned}$$

上面在右边的级数是绝对收敛的. 函数 ϕ 是奇函数，并且是 1- 周期的，因此 $\phi(\frac{1}{2}) = 0$.

下面，我们考虑特殊值 $\phi(\frac{1}{4})$, 并且我们得到：

$$\begin{aligned}\phi\left(\frac{1}{4}\right) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}+\frac{1}{4}} \frac{1}{m} = 4\sum_{\ell\in 4\mathbb{Z}+1}\frac{1}{\ell}\\ &= 4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots\right) = 4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \pi.\end{aligned}$$

现在我们可以来推导 ϕ 函数的基本性质，即加法公式了．为此，我们令 u, v, w 为 3 个复数，它们均不是整数，且使得 $u+v+w=0$. 那么方程

$$p+q+r=0 \tag{1}$$

在 $p\in\mathbb{Z}+u$, $q\in\mathbb{Z}+v$, $r\in\mathbb{Z}+w$ 时有无穷多个解，这些解可以通过令 p, q (或者 q, r 或者 r, p) 独立遍历得到．因为 $pqr\neq 0$, 方程 (1) 则变为

$$\frac{1}{pq}+\frac{1}{qr}+\frac{1}{rp}=0.$$

这种将上面的有理等式在方程 (1) 的所有解上做平均的方法是 Eisenstein 方法的起点，这是他在高中时从他的老师 Schellbach 那里学来的．因为得到的二重级数是条件收敛的，我们再次需要谨慎地考虑求和顺序．为此，我们选择 3 个非零的固定实参数 α, β, γ, 使得 $\alpha+\beta+\gamma=0$. 那么我们有

$$\alpha p-\beta q=\gamma q-\alpha r=\beta r-\gamma p,$$

这使得我们有

$$\sum_{|\alpha p-\beta q|<t}\frac{1}{pq}+\sum_{|\gamma q-\alpha r|<t}\frac{1}{qr}+\sum_{|\beta r-\gamma p|<t}\frac{1}{rp}=0.$$

很容易看出对任意的 $t>0$, 这些级数都是绝对收敛的．为了取极限 $t\to\infty$, 我们需要如下引理：

引理 2.1

$$\lim_{t\to\infty}\left(\sum_{|\alpha p-\beta q|<t}\frac{1}{pq}\right)=\phi(u)\phi(v)+\pi^2\operatorname{sign}\alpha\operatorname{sign}\beta.$$

关于这个引理的推广和证明，我们参考 [Scz 3, 定理 2]. 作为一个推论，我们得到

$$\phi(u)\phi(v)+\phi(v)\phi(w)+\phi(w)\phi(u)=\pi^2, \tag{2}$$

这便是函数 ϕ 的加法公式．为了不用引理 2.1 来证明 (2), 我们只需证明其左边与 u, v 无关，因为当 $u=v=\frac{1}{4}, w=-\frac{1}{2}$ 时，左边等于 π^2. 这是 Eisenstein 在方程 (2) 的原始证明中所用的方法.

为了研究算术应用，我们通过引入函数

$$c(u)=\frac{\phi(u)}{\phi(1/4)}=\frac{\phi(u)}{\pi}$$

及其 Cayley (凯莱) 变换

$$\mathbf{e}(u)=\frac{c(u)+i}{c(u)-i}$$

来消除周期 π. 由加法公式 (2) 立即得到

$$\mathbf{e}(u)\mathbf{e}(v)=\mathbf{e}(u+v).$$

由此即得 $\mathbf{e}(u)=e^{2\pi iu}$ 和 $c(u)=\cot(\pi u)$. 对余切函数的加法公式

$$c(u+v)=\frac{c(u)c(v)-1}{c(u)+c(v)}$$

进行迭代，得到公式

$$c(nu)=\frac{U_n(c(u))}{V_n(c(u))},\qquad n=1,2,3,4,\ldots, \tag{3}$$

其中多项式 $U_n,V_n\in\mathbb{Z}[t]$, 它们由

$$U_n(t)=\mathrm{Re}(t+i)^n,\quad V_n(t)=\mathrm{Im}(t+i)^n$$

显式给出. (3) 型公式在 19 世纪被称为 “变换 (transformation) 公式”. (3) 的椭圆函数类似物在 Kronecker 的工作中起到了重要的作用. 取 $u\in\mathbb{Q}$, 其分母 $n>1$, 我们推断出诸数 $c(u)$ 都是方程 $V_n(t)=0$ 的根，也就是说当 u 是非整数的有理数时，$c(u)$ 就是实代数数. 我们可以改进这个结果，并且给出一个更加精确的证明：

性质 2.2 $c(u)$ 是一个代数整数，当且仅当 n 不是一个奇素数的幂. 如果 $n=p^k$, 其中 p 是一个奇素数，$k>0$, 那么 $pc(u)$ 是一个代数整数. 此外，$c(u)$ 是单位，当且仅当 n 和 $n/2$ 都不是奇素数的幂.

定理 2.3 (Kronecker-Weber). 实数集合 $c(\mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z})$ 生成 $\mathbb{Q}$ 的极大 Abel 扩张的实子域.

Kronecker 对将这些结论推广到具有虚二次域中的理想作为周期格的椭圆函数的情形更感兴趣. 他面临的一个困难就是椭圆函数的加法公式一般地是代数的，而不像余切函数情形中那样是有理的. 据我们所知，如 Kronecker 所设想的青春之梦的证明始终未能完成.[1)] 除了虚二次域和有理数域的情形 (都和 Kronecker 的工作密切相关), 我们甚至都不知道 Hilbert 第十二问题是否有解. 这和 Weierstrass (魏尔斯特拉斯) 的一个经典定理有一定关系：每一个具有代数加法律的亚纯函数要么是椭圆的，要么是圆的，要么是有理的.

替代定义 $\phi(u)$ 的级数，Kronecker 更愿意研究更一般的级数

$$\phi(u,\xi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\mathbf{e}(-n\xi)}{u+n}=2\pi i\frac{\mathbf{e}(\xi u)}{\mathbf{e}(u)-1},\quad 0<\xi<1, \tag{4}$$

其中 u 仍是一个非整数的复数. 引入第 2 个变量 ξ 是由 Fourier (傅里叶) 分析所暗示的，这是非常自然的. 注意到极限情形

$$\lim_{\substack{\xi\to0\\ \xi>0}}\phi(u,\xi)=\phi(u)-i\pi,$$

1) 参考与 [HH] 中的解释 (c) 有关的评注.—— 原注

它将 $\phi(u,\xi)$ 与 Eisenstein 函数 ϕ 联系起来了. 方程 (4) 的右边本质上是 Bernoulli (贝努利) 多项式的母函数. 将左边展开成 u 的幂级数，我们得到 Bernoulli 多项式的 Fourier 展开. 把余切函数加法公式的上述证明方法应用到 $\phi(u,\xi)$ 上，这便给出了 Bernoulli 多项式的加法公式. 因为在分子中有因子 $\mathbf{e}(-n\xi)$, 该级数的收敛性比余切级数要稍微好一点，但仍然是条件收敛. 讲座笔记的一个本质部分是研究 (4) 的椭圆函数类比，写作 Kronecker 的记号便是：

$$Ser(\xi,\eta,u,\tau)=\lim_{N\to+\infty}\lim_{M\to+\infty}\sum_{n=-N}^{N}\sum_{m=-M}^{M}\frac{\mathbf{e}(-m\xi+n\eta)}{u+n\tau+m}, \tag{5}$$

其中 ξ,η 是一对实变量，τ 是上半平面中的一个点. 复变量 u 必须被限制在格 $\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$ 在 $\mathbb{C}$ 中的补集中. 记 $u=\sigma\tau+\rho$ 为 τ 和 1 具有实系数 σ 和 ρ 的线性组合，那么这个级数可以看成是两对实变量 $(\xi,\eta),(\sigma,\rho)$ 的函数，也即是该讲座题目中所提及的.

关于条件收敛的级数 (5) 的多种求和方式都在手稿中有所讨论. 首先注意一个事实，在所有情形中，求和得到的值与所选的极限过程无关. Kronecker 的主要结果便是将这些级数用 Jacobi (雅可比) θ 级数表达出来. 令

$$\begin{aligned}\theta(z,\tau)=\theta_1(z,\tau)&=\sum_{n\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}}\mathbf{e}\left(\frac{n^2\tau}{2}+n\Big(z-\frac{1}{2}\Big)\right)\\&=2q^{\frac{1}{8}}\sin(\pi z)\prod_{n\geq 1}(1-q^n)(1-q^n\mathbf{e}(z))(1-q^n\mathbf{e}(-z)),\end{aligned}$$

其中 z 是复变量，τ 是上半平面中的一个点，$q=\mathbf{e}(\tau)$.

定理 2.4 (Kronecker). *假设* $0<\mathrm{Im}u<\mathrm{Im}\tau$, *并且* $0<\xi<1$. *那么*

$$Ser(\xi,\eta,u,\tau)=\mathbf{e}(\xi u)\frac{\theta'(0,\tau)\theta(u+\eta+\xi\tau,\tau)}{\theta(u,\tau)\theta(\eta+\xi\tau,\tau)}. \tag{6}$$

这个结果令我们想起所谓的 Kronecker 极限公式, 虽然该公式并没有在讲座笔记中讨论, 但值得在这里加以叙述: 令 τ,τ' 为两个复数, 其中 $\mathrm{Im}\tau>0$, $\mathrm{Im}\tau'<0$, 并令 $0\leq\xi,\eta<1$ 为两个不全为零的实数. 令 $u=\eta-\xi\tau, v=\eta-\xi\tau'$, 则第二极限公式是恒等式

$$\frac{(\tau-\tau')}{2\pi i}\sum_{m,n}\frac{\mathbf{e}(m\xi+n\eta)}{(m\tau+n)(m\tau'+n)}=-\log\frac{\theta(u,\tau)\theta(v,-\tau')}{\eta(\tau)\eta(-\tau')}-\pi i\frac{(u-v)^2}{\tau-\tau'}, \tag{7}$$

其中 $\eta(\tau)$ 是 Dedekind η 函数，并且等式左边求和中需要把 $(m,n)=(0,0)$ 的项排除在外. 再一次地，收敛性只是条件的，因此我们必须考虑 (5) 中的求和顺序.

从历史角度来讲, 椭圆函数的复乘概念首次出现在 Abel 的工作中. Kronecker 讲座笔记的第 64—67 页致力于用 Kronecker 级数 $Ser\,(\xi,\eta,u,\tau)$ 来表示 Abel 所用的椭圆函数. 这或许是手稿中最重要的部分之一了，值得予以特别注意. 很有可能 Kronecker 青春之梦的概念是对 Abel 工作细致研究的结果.

3. 最新进展

把 Eisenstein 或者 Kronecker 遗产的完整讨论留给严肃的历史学家是明智的. 取而代之，我们给出刻划 Eisenstein 求和过程和 Kronecker 对于级数 $Ser\,(\xi,\eta,u,\tau)$ 的定理 2.4

特征的几个最新发展的一个简短综述.

3.1 代数性和 Eisenstein-Kronecker 数的 p–进解释

Weil 在他 1976 年的书中就已经观察到结合 Eisenstein 和 Kronecker 的方法可以直接地给出 Damerell 关于依附于虚二次域的 Hecke (赫克) 半角字符 (Grössencharacter) 的 L–函数值的代数性的经典结果 (1971).

Weil 也预感到他们的方法可以用来研究这些代数数的 p– 进性质. 在接下来的 10 年里, Manin (马宁)–Višik, Katz 和 Yager 等人的工作提供了这一族特殊值所期望的 p– 进解释. 为了给出对议论中一些结果的感受, 我们需要介绍 Bannai-Kobayashi (小林昭七) 基于 Kronecker 级数的一个近期的工作 (2010), 它使得他们得到了一个类似的构造.

我们的第 1 个任务是把 Ser 级数与 Hecke 风格的包含一个 s– 参数的级数联系起来. 令 τ 为上半平面中的一个复数, 并令 $A = \frac{\mathrm{Im}\tau}{\pi}$ 为格 $\Lambda = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ 的基本区的面积除以 π. 令 ψ 为特征 $\psi(z) = e^{\frac{z-\bar{z}}{A}}$. 对于整数 $a \geq 0$, 我们引入 Kronecker-Eisenstein 级数

$$K_a^*(z, w, s, \tau) = \sum_{\lambda\in\Lambda}^{*} \frac{(\bar{z}+\bar{\lambda})^a}{|z+\lambda|^{2s}}\psi(z\bar{w}), \qquad \mathrm{Re}(s) > a/2+1,$$

其中 $*$ 意味着如果 $z \in \Lambda$, 那么求和不包括 $\lambda = -z$ 这一项. 这是两个参数 $z \in \mathbb{C}\backslash\Lambda$ 和 $w \in \mathbb{C}$ 的连续函数, 并且它可以亚纯延拓到整个 s– 平面, 只可能在 $s = 0$ (如果 $a = 0, z \in \Lambda$) 和 $s = 1$ (如果 $a = 0, w \in \Lambda$) 处有极点. 此外, 它满足一个关联 s 处和 $a+1-s$ 处值的泛函方程. 令 $w = \eta + \xi\tau$, ξ, η 为两个实变量, 当我们对格不会产生歧义时, 将中心值 $K_1^*(z, w, 1, \tau)$ 简写为 $K(z, w)$. 利用 [We 1, §5, 第 72 页], 至少当 $z, w \notin \Lambda$ 时, 这个特殊的函数与 Kronecker 级数通过如下恒等式相联系

$$K(z, w) = K_1^*(z, w, 1, \tau) = Ser(\xi, \eta, z, \tau),$$

其中 $w = \eta + \xi\tau$. 用这套新的记号, 定理 2.4 可以重写成

$$K(z, w) = e^{z\bar{w}/A}\Theta(z, w),$$

其中

$$\Theta(z, w) = \frac{\theta'(0, \tau)\theta(z+w, \tau)}{\theta(z, \tau)\theta(w, \tau)} \tag{8}$$

表示出现在方程 (6) 中作为比的亚纯函数. 它将在接下来的部分充当一个重要的角色, 因此我们将其称为 “Kronecker θ 函数”, 这和 [BK] 中的术语一致.

给定一对整数 $a \geq 0$, $b > 0$, 以及复数 $z_0, w_0 \in \mathbb{C}$, 我们定义 Eisenstein-Kronecker 数为

$$e_{a,b}^*(z_0, w_0, \tau) = K_{a+b}^*(z_0, w_0, b, \tau).$$

当 $b > a+2$ 时, 这些数特别地包含绝对收敛的部分 Hecke L– 函数的值 [1)]

$$e_{a,b}^*(0, 0, \tau) = \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}}^{*} \frac{\overline{\lambda^a}}{\lambda^b},$$

1) 原文在下式求和符号上面漏了 $*$, 这里 $*$ 意味着 λ 不取 0 这一项.—— 译注

这可以看作 Bernoulli 数的椭圆函数类似物. 如此，Eisenstein-Kronecker 数便可被包装为一个生成级数，这个生成级数是余切函数和其相关联的函数 $\phi(u,\xi)$ 的椭圆函数类似物. 为了得到一个比较好的二变元生成级数，我们只需要平移和稍微地修改一下 Kronecker θ 函数便可，因而能够定义

$$\Theta_{z_0,w_0}(z,w)=e^{-\frac{(z_0+z)\overline{w_0}+w\overline{z_0}}{A}}\Theta(z_0+z,w_0+w).$$

它在 $z=w=0$ 附近的 Laurent (洛朗) 展开恰好展示了 Eisenstein-Kronecker 数的集合.

命题 3.1 固定 $z_0,w_0\in\mathbb{C}$. 在 $z=w=0$ 附近，我们有如下 Laurent 展开：

$$\Theta_{z_0,w_0}(z,w)=\psi(w_0\overline{z_0})\frac{\delta(z_0)}{z}+\frac{\delta(w_0)}{w}+\sum_{a\geq 0,b>0}(-1)^{a+b-1}\frac{e^*_{a,b}(z_0,w_0,\tau)}{a!A^a}z^{b-1}w^a, \tag{9}$$

其中当 $u\in\Lambda$ 时，$\delta(u)=1$; $u\notin\Lambda$ 时，$\delta(u)=0$.

另外，如果 τ 是一个 CM 点，并且 z_0,w_0 是格 Λ 上的两个挠点，那么这些系数是代数的.

定理 3.2[1)] 令 $\Lambda=\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$ 为 $\mathbb{C}$ 中的一个格. 复环面 $\mathbb{C}/\Lambda$ 具有复乘，其自同态环是虚二次域 k 的整数环的子环. 并假设该复环面有定义在某个数域 F 上的 Weierstrass 模型 E: $y^2=4x^3-g_2x-g_3$. 固定整数 $N>1$. 取两个复数 z_0,w_0, 使得 $Nz_0,Nw_0\in\Lambda$, 那么 (9) 中 Laurent 展开的系数包含在数域 $F(E[4N^2])$ 中 [2)]. 特别地，调整后的 Eisenstein-Kronecker 数

$$e^*_{a,b}(z_0,w_0,\tau)/A^a$$

是代数的.

关于证明可以参考 [BK] 的定理 1 和推论 2.11. 上面的构造使得 Bannai 和 Kobayashi 可以沿着这条路重新得到 Damerell 的结果.

令 p 为一个素数. Bernoulli 数和 Bernoulli 多项式满足一系列模 p 的幂次的同余式，也就是所谓的 “Kronecker 同余式”. 这些同余式在构造 Kubota-Leopoldt (洼田忠彦 – 列奥波特) p– 进 ζ 函数 $\zeta_p(s)$ $(s\in\mathbb{Z}_p)$ 时有重要作用，它们解释了 Riemann (黎曼) ζ 函数在负整数处的值是由诸 Bernoulli 数给出的.

类似地，Eisenstein-Kronecker 数也满足一系列同余式，它们是构造二变元 p– 进 L– 函数的基础. 因为 Bannai-Kobayashi 在他们的处理中也有生成级数，它们可以 p– 进地解释 Eisenstein-Kronecker 数，不仅仅像 Katz 的工作中那样只解决 p 在 k 中分裂的情形 (平常情形), 同样也解决了 p 在 k 中惯性的情形 (超奇异的情形).

顺便注意到在这种 p– 进框架下，Kronecker 极限公式 (7) 也是有反例的. 它最初是由 Katz (1976) 得到的，并且被证明在椭圆单位对应的 Euler (欧拉) 系统的研究中有极其重要的作用.

---

1) 按照第一作者的意见，对定理 3.2 略有修改.—— 校注

2) 需要注意的是在一些情形中，这些系数可以包含在更小的域中，因此域 $F(E[4N^2])$ 不一定是最佳选择.—— 译注

为了完成这个 p– 进框架，并为下文做准备，我们想要提一下 Colmez-Schneps [CS] 关于上述 Manin-Višik 和 Katz 构造的一个推广. Colmez 和 Schneps 考虑了对应于虚二次域 k 上的 n 次扩张 F 的 Hecke 特征的情况 (之前的就是 $n=1$ 的情形). 域 F 并不一定要是一个 CM 域. 基于 [Co] 的技术，通过解释从 Kronecker 型的 n 个*生成级数之积*某个线性组合的 Laurent 展开而得到的这些代数数，它们可以构造 F 的一个 p– 进 L– 函数，这 n 个生成级数中的每一个都在格 Λ 上的挠点处被赋值. 取命题 3.1– 定理 3.2 n 个复制，使得他们可以利用他们的恒等式 [CS, 方程 (31)] 将 $n=1$ 的情形推广到任意 $n \geq 1$ 的情形.

3.2 Hecke 本征形式的周期

令 (z_0, w_0) 为格 Λ 中的一对固定的 N 挠点. 作为变量 τ 的函数, 模形式 $e^*_{a,b}(z_0, w_0, \tau)$ 是主同余子群 $\Gamma(N)$ 的 Eisenstein 级数. 特别地，平移 Kronecker θ 函数在 $z=w=0$ 处的 Laurent 展开 (9), 是固定水平但权重递增的一系列 Eisenstein 级数的一个生成级数. 因此它在 Hecke 代数作用下的分解只有 Eisenstein 分支. 从这个角度来看，当我们考虑*两个 Kronecker θ 函数之积*时会有有趣的现象发生.

这样的乘积，至少在水平 1 的情形，包含了所有权重模形式的所有周期多项式的信息.[1)] 这是 Zagier 文章 [Za 1] 的主要结果. 我们下面就来描述它.

令 M_k 为 $SL_2(\mathbb{Z})$ 上权重 $k \geq 4$ 的模形式的 $\mathbb{C}$– 向量空间，令 $S_k \subset M_k$ 为尖点形式的子空间，并被赋以 Petersson (彼得松) 标量积 (f, g), 及其一组正规化的 Hecke 本征形式基 $\mathfrak{B}_k^{\mathrm{cusp}}$. $f \in S_k$ 对应的周期多项式是次数 $\leq k-2$ 的多项式，由

$$r_f(X) - \int_0^{i\infty} f(\tau)(\tau - X)^{k-2}\, d\tau$$

定义. Eichler (艾克勒)–Shimura (志村五郎)–Manin 理论蕴涵着映射 $f \mapsto r_f^{\mathrm{ev}}$ 和 $f \mapsto r_f^{\mathrm{od}}$ 都是单射，其中 r_f^{ev} 和 r_f^{od} 分别是多项式 r_f 的未定元次数只为偶数的部分和只为奇数的部分. 此外，如果 f 是正规化的 Hecke 本征形式，那么二变元多项式

$$R_f(X,Y) = \frac{r_f^{\mathrm{ev}}(X) r_f^{\mathrm{od}}(Y) + r_f^{\mathrm{od}}(X) r_f^{\mathrm{ev}}(Y)}{(2i)^{k-3}(f,f)} \in \mathbb{C}[X,Y]$$

在 $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ 的作用下变为 $R_{\sigma(f)} = \sigma(R_f)$, 因此 R_f 的系数在 f 的 Fourier 系数生成的数域中. 作为结论，对每一个整数 $k > 0$, 有限和

$$C_k^{\mathrm{cusp}}(X, Y, \tau) = \frac{1}{(k-2)!} \sum_{f \in \mathfrak{B}_k^{\mathrm{cusp}}} R_f(X,Y) f(\tau)$$

属于 $\mathbb{Q}[X,Y][[q]]$. 通过在 M_k 中 Eisenstein 级数的作用，Zagier 利用下述方便的方法使得这个尖点项更加完备. 对任意偶数 $k > 0$, 令 B_k 为第 k 个 Bernoulli 数，令

$$E_k(\tau) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{m \geq 1} \left(\sum_{d \mid m} d^{k-1} \right) q^m$$

1) 最近的一个非预印本 [CPZ] 指出对任意无平方因子的水平都有类似的结论成立.—— 原注

为 $SL_2(\mathbb{Z})$ 上权重 k 的正规化 Eisenstein 级数. 它在 $X^{-1}\mathbb{Q}[X]$ 中的一对周期函数由如下奇 (和偶) 有理函数定义

$$r_{E_k}^{\text{od}}(X)=\sum_{h=0}^{k}\frac{B_h}{h!}\frac{B_{k-h}}{(k-h)!}X^{h-1},\qquad r_{E_k}^{\text{ev}}(X)=X^{k-2}-1,$$

它们并且通过如下规则弥补了 Eisenstein 级数的贡献:

$$C_k^{\text{Eis}}(X,Y,\tau)=-\Big(r_{E_k}^{\text{ev}}(X)r_{E_k}^{\text{od}}(Y)+r_{E_k}^{\text{od}}(X)r_{E_k}^{\text{ev}}(Y)\Big)E_k(\tau).$$

这样, Zagier 的主要恒等式为生成级数建立了一个值得一提的闭公式

$$C_\tau(X,Y,T)=\frac{(X+Y)(XY-1)}{X^2Y^2T^2}+\sum_{k=2}^{\infty}(C_k^{\text{cusp}}+C_k^{\text{Eis}})T^{k-2},$$

它可以分解成两个 Kronecker θ 函数的乘积:

定理 3.3 (Zagier [Za1]) *在 $(XYT)^{-2}\mathbb{Q}[X,Y][[q,T]]$ 中, 我们有:*

$$C_\tau(X,Y,T)=\Theta(XT',YT')\Theta(T',-XYT')/\omega^2, \tag{10}$$

其中 $\omega=2\pi i$, $T'=T/\omega$.

方程 (10) 展示了 $SL_2(\mathbb{Z})$ 上任意想要的权重的 Hecke 本征形式完全的信息, 并且关于它们的周期多项式的信息也包含在了方程右边在 $T=0$ 处的 Laurent 展开中. 为了进一步支持这个断言, Zagier 在他的下一篇论文 [Za 2] 中解释了如何从方程 (10) 推得 $SL_2(\mathbb{Z})$ 上 Hecke 算子的 Eichler-Selberg 迹公式的初等证明.

周期多项式满足一系列在 $SL_2(\mathbb{Z})$ 作用下的线性关系. 利用方程 (10), 通过 Kronecker θ 函数满足的一些关系, 仔细考虑了这些上链关系 [Za 1, 第 461 页]. 一个典型的例子是

$$C_\tau(X,Y,T)+C_\tau\left(1-\frac{1}{X},Y,TX\right)+C_\tau\left(\frac{1}{1-X},Y,T(1-X)\right)=0, \tag{11}$$

这是周期函数的下述经典关系式的对应关系:

$$r_f|1+U+U^2=0,\quad U=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}.$$

在这篇文章剩下来的部分, 我们将要解释被适当调整过的 Eisenstein-Schellbach 方法是系统产生 $GL_n(\mathbb{Z})$ 上一般的 $(n-1)$– 上链关系的适当工具, 这些上链涉及到 n 个 Kronecker θ 函数的乘积, 其中方程 (11) 是一个非常特殊的情形.

3.3 GL_n 上的三角上链

令 $0<a,b<1$ 为两个有理数, $x,y\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ 为两个复参数. 我们记 $\{t\}\in(0,1)$ 为非整实数 t 的小数部分. 通过直接计算, 或者稍微推广一下引理 2.1, 我们可以得到如下等价于函数 $\phi(u,\xi)$ 加法公式的关系式:

$$\frac{\mathbf{e}(xa)\mathbf{e}(yb)}{(\mathbf{e}(x)-1)(\mathbf{e}(y)-1)}-\frac{\mathbf{e}((x+y)a)\mathbf{e}(y\{b-a\})}{(\mathbf{e}(x+y)-1)(\mathbf{e}(y)-1)}-\frac{\mathbf{e}((x+y)b)\mathbf{e}(x\{a-b\})}{(\mathbf{e}(x+y)-1)(e(x)-1)}=0. \tag{12}$$

正如文章 [Scz 2] 的作者指出的那样, 这个恒等式可以自然地重新用 $SL_2(\mathbb{Z})$ 的上同调群来表示, 其基础便是两个三角函数 $\phi(u,\xi)$ 的乘积. 给定两对数 $u=(u_1,u_2)$ 和 $\xi=(\xi_1,\xi_2)^t$,

我们令

$$\Phi(u,\xi)=\phi(u_1,\xi_1)\phi(u_2,\xi_2).$$

对任意矩阵 $A=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in SL_2(\mathbb{Z})$, 它对应了另一个矩阵 $\sigma=\left(\begin{smallmatrix}1&a\\0&c\end{smallmatrix}\right)\in M_2(\mathbb{Z})$, 如果 $c\neq 0$, 我们定义

$$\Psi\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}(u,\xi)=\operatorname{sign}(c)\sum_{\mu\in\mathbb{Z}^2/\sigma\mathbb{Z}^2}\Phi(u\sigma,\sigma^{-1}(\mu+\xi)).$$

当 $c=0$ 时，由定义有 $\Psi(A)(u,\xi)=0$. 在文章 [Scz 3, 推论，第 598 页] 中作者得到了较一般的群 $GL_n(\mathbb{Z})$ 的 $(n-1)$– 上链的关系式，下面的命题代表了 $n=2$ 的情形.

命题 3.4 令 $A,B\in SL_2(\mathbb{Z})$ 为两个矩阵. 对于 $\mathbb{C}^2$ 中一个稠密开区域中的任意一点 u, 和任一非零 $\xi\in\mathbb{Q}^2$, 下述非齐次 1– 上链关系式成立

$$\Psi(AB)(u,\xi)-\Psi(A)(u,\xi)-\Psi(B)(uA,A^{-1}\xi)=0.$$

加法公式 (12) 对应了这个命题中 $A=\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ 和 $B=\left(\begin{smallmatrix}1&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right)$ 的情况.

一般的 $(n-1)$– 上链 Ψ 在 $u=0$ 处 Laurent 展开的诸系数携带有更多的算术信息. 根据 [Scz 3, 定理 1] 中的主要结果，由一个次数为 n 的全实域 F 的诸基本单位生成的 Abel 群构造得到的 $(n-1)$– 闭链与 Ψ 配对，可以给出 Dedekind ζ 函数在非正的整数处的值 $\zeta_F(k)$, 因而证实了它们的有理性. 这便提供了 Klingen-Siegel 有理性结果的一个深深植根于 Eisenstein-Schellbach 方法的新证明.

由 Charollois 和 Dasgupta 后来引入的关于上链 Ψ 的积分形式用以研究 $\zeta_F(k)$ 值的整性，使他们得以推得 Cassou-Noguès 和 Deligne (德利涅)–Ribet p– 进 L– 函数的一个新构造.

结合他们的上同调构造和 Spiess 最近的工作，他们在 [CD] 中证明了这些 p– 进 L– 函数在 $s=0$ 处的消失阶至少等于 Gross (格罗斯) 猜想中所预料的阶. 这些结论也已经从 Wiles (怀尔斯) 关于 Iwasawa (岩泽健吉) 主猜想的证明中得知了.

3.4 依赖于四对实变量的椭圆函数

在最后这一节中我们的目标是给出三角上链 Ψ 的 q– 分解来构造一个椭圆上链，其中函数 $\phi(u,\xi)$ 这个角色现在由 Kronecker θ 函数来扮演. 我们将会清楚地看到我们之前遇到的三角关系只是椭圆情况下 $q\to 0$ 时，也就是 $\tau\to i\infty$ 时的特例.

Kronecker 并没有在他的椭圆函数研究中利用 Eisenstein-Schellbach 方法. 下面我们固定上半平面中的点 τ, 并且在方程 (12) 中首先施行变量变换

$$x\leftarrow n\tau+x,$$
$$y\leftarrow n'\tau+y.$$

我们接下来将这个方程乘上一对单位根 $\mathbf{e}(nr)\mathbf{e}(n's)$, 其中 $r,s\in\mathbb{Q}$, 然后再对 $n,n'\in\mathbb{Z}$ 求和. 我们记 $x_0=a\tau+r$, $y_0=b\tau+s$, $q=\mathbf{e}(\tau)$, 使得 x,x_0,y,y_0 的实部和虚部组成 4 对实变量. 那么第一个求和项变为

$$S := \mathbf{e}(xa)\mathbf{e}(yb)\sum_{n,n'\in\mathbb{Z}}\frac{\mathbf{e}(nr)q^{na}q^{n'b}\mathbf{e}(n's)}{(q^n\mathbf{e}(x)-1)(q^{n'}\mathbf{e}(y)-1)}.$$

假设 $0<a<1$ 保证了 $1>|q^a|>|q|$, 对 q^b 也类似，因此这个二重级数是绝对收敛的．和 S 可以自然地写成乘积的形式，其值通过连续两次使用 Kronecker 定理 2.4 推导而得：

$$S = \mathbf{e}(xa)\mathbf{e}(yb)\Theta(x,x_0)\Theta(y,y_0).$$

可以对方程 (12) 的第 2 项和第 3 项进行类似的求和过程．在对它们的公共因子 $\mathbf{e}(xa+yb)$ 简化后，我们得到恒等式

$$\Theta(x,x_0)\Theta(y,y_0)-\Theta(x+y,x_0)\Theta(y,y_0-x_0)-\Theta(x+y,y_0)\Theta(x,x_0-y_0)=0, \tag{13}$$

这个等式可以通过解析延拓来去除掉关于参数的限制性假设．方程 (13) 只是 Riemann θ 函数加法关系式的另一种形式，它也以 Fay 三割线恒等式知名．当 $\tau\to i\infty$ 时，它能推出方程 (12), 当我们选取参数 $x=XT'$, $x_0=YT'$, $y=-T'$, $y_0=XYT'$ 时，它可以推出方程 (11).

更一般地，对三角 $(n-1)$– 上链 Ψ 的重新求和给出了椭圆 $(n-1)$– 上链，我们称其为 $GL_n(\mathbb{Z})$ 上的 Eisenstein-Kronecker 上链 κ. 通过令 $\tau\to i\infty$, 我们也可以从 κ 得到 Ψ. κ 在零处 Laurent 展开的诸系数现在展示了模形式，事实上是一些不同权重和水平的 n 个 Eisenstein 级数的乘积之和，它们都是一个相容的 p– 进家族中的一员.

考虑由一个次数为 n 的全实域 F 的诸基本单位元构造出来的 $(n-1)$– 闭链，将其与上述椭圆 $(n-1)$– 上链 κ 配对，产生了 Hilbert 模群 $SL_2(\mathcal{O}_F)$ 上的 Hecke-Eisenstein 级数的拉回的生成级数，其各常数项恰好是 $\zeta_F(k)$ 函数在非正的整数 $k\leq 0$ 处的值．这些经典的模形式在 Siegel 对 Klingen-Siegel 定理的原始证明中起到了极其重要的作用．关于 Eisenstein-Kronecker 上链 κ 的构造及其性质可参看 [Ch].

参考文献

[BK] K. Bannai, S. Kobayashi. Algebraic theta functions and the p-adic interpolation of Eisenstein-Kronecker numbers. Duke Math. J. 153 no. 2 (2010) 229–295.

[Cw] P. Charollois. Professional webpage: `https://webusers.imj-prg.fr/~pierre.charollois/Kronecker.html`. Eventually these documents should be available on the arXiv.

[Ch] P. Charollois. The Eisenstein-Kronecker cocycle on GL_n. In preparation.

[CD] P. Charollois, S. Dasgupta. Integral Eisenstein cocycles on GL_n, I: Sczech's cocycle and p-adic L-functions of totally real fields. Cambridge J. of Math. 2 no.1 (2014), 49–90.

[CPZ] Y. Choie, Y. K. Park, D. Zagier. Periods of modular forms on $\Gamma_0(N)$ and products of Jacobi theta functions. Preprint (2016), available at `http://people.mpim-bonn.mpg.de/zagier/files/tex/CPZ/PERIODS.pdf`.

[Co] P. Colmez. Algébricité de valeurs spéciales de fonctions L. Invent. Math. 95 (1989), 161–205.

[CS] P. Colmez, L. Schneps. p-adic interpolation of special values of Hecke L-functions. Compositio Math. 82 (1992), 143-187.

[vD] F. von Dalwigk. Beiträge zur Theorie de Thetafunktionen von p Variablen. Dissertation, Halle (1891).

[Ed] H. M. Edwards. On the Kronecker Nachlass. Historia Mathematica 5 (1978), 419–426.

[Eis1] G. Eisenstein. Bemerkungen zu den elliptischen und Abelschen Transcendenten. J. Reine Angew. Math. 27 (1844) 185–191 (and Math. Werke I, p. 28–34 New-York. Chelsea (1975)) (and Remarques sur les transcendantes elliptiques et abéliennes. Journal de Liouville 10 (1845), 445–450).

[Eis2] G. Eisenstein. Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelproducte, aus welchen die elliptischen Functionen als Quotienten zusammengesetzt sind, und der mit ihnen zusammenhängenden Doppelreihen. J. Reine Angew. Math. 35 (1847), 153–274. (and Math. Werke I, 357–478. New-York. Chelsea (1975)).

[HH] K. Hensel, H. Hasse. Zusätze, in Kronecker's Werke, Band V, (1930) 507–515.

[Ha] H. Hasse. History of class field theory. in Cassels-Fröhlich (eds), Algebraic Number Theory, London: Academic Press (1967), 266–279.

[IO] T. Ishii, T. Oda. A short history on investigation of the special values of zeta and L-functions of totally real number fields. In Automorphic forms and zeta functions. Proc. of the conf. in memory of Tsuneo Arakawa, World Sci. Publ. (2006), 198–233.

[Ma] B. Mazur. Visions, Dreams and Mathematics. in Circles disturbed: the interplay of Mathematics and Narrative. A. Doxiadis, B. Mazur (eds). Princeton Univ. Press (2012) 243–273. With a companion interview, `http://thalesandfriends.org/2007/07/23/mazur-interviewed-by-corfield`.

[Ro] D. E. Rowe. Gottingen's SUB as repository for the papers of distinguished mathematicians. This volume, 39–44.

[Scha] N. Schappacher. On the history of Hilbert's twelfth problem. in Matériaux pour l'histoire des mathématiques au XXème siècle, Nice 1996. SMF, Paris (1998) 243–273.

[Sche] K. H. Schellbach. Die einfachsten periodischen Funktionen. J. Reine Angew. Math. 48 (1854), 207–236.

[Scz1] R. Sczech. Dedekindsummen mit elliptischen Funktionen. Invent. Math. 76 (1984), 523–551.

[Scz2] R. Sczech. Eisenstein group cocycles for $GL_2(\mathbb{Q})$ and values of L-functions in real quadratic fields. Comment. Math. Helv. 67 (1992), 363–382.

[Scz3] R. Sczech. Eisenstein group cocycles for GL_n and values of L-functions. Invent. Math. 113 (1993), no. 3, 581–616.

[Si] C. L. Siegel. Advanced Analytic Number Theory. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay: 1980.

[V] S. G. Vlǎdut. Kronecker's Jugendtraum and modular functions. Translated from Russian by M. Tsfasman. Studies in the Dev. of Modern Math 2, Gordon and Breach Sc. Pub., New-York, 1991.

[We1] A. Weil. Book review: Gotthold Eisenstein, Mathematische Werke. Bulletin of the AMS 82, vol. 5 (1976), 658–663. (and Oeuvres Sc., vol. III, [1976c], 368–403). Also included as a Foreword to Gotthold Eisenstein's Mathematische Werke in 2nd Edition, Chelsea Pub. Comp., 1989, p. V-XI.

[We2] A. Weil. Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker. 2nd Edition, Classics in Math. Springer-Verlag, Berlin, 1999. (1st Edition 1976.)

[Za1] D. Zagier. Periods of modular forms and Jacobi theta functions. Invent. Math. 104 (1991), 449–465.

[Za2] D. Zagier. Hecke operators and periods of modular forms. Israel Math. Conf. Proc. 3 (1990), 321–336.

(张浩 译 陆柱家 校)