Exercice 1. (q -développement des séries d'Eisenstein.)

i. Soient p, q et $r = p + q$ des variables. Vérifier que

$$\frac{1}{p^2q^2} = \frac{1}{p^2r^2} + \frac{1}{q^2r^2} + \frac{2}{pr^3} + \frac{2}{qr^3}.$$

ii. On introduit, avec Eisenstein, la série trigonométrique

$$(1) \quad \epsilon_1(z) := \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right).$$

Déduire de la question précédente une formule pour $\epsilon_1(x+y)$, puis que ϵ_1 satisfait l'équation différentielle

$$\epsilon_1^2(z) = -\epsilon_1'(z) + a,$$

où a est une constante à déterminer.

iii. En conclure que

$$\epsilon_1(z) = \pi \cot(\pi z) = -\pi i - 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \exp(2i\pi n z).$$

iv. En dérivant les deux formules de $\pi \cot(\pi z)$, prouver que, pour $q = e^{2i\pi z} \in D(0, 1)$ et $k \geq 2$,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z+n)^k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1} q^m.$$

v. En déduire pour k pair le q -développement de la série d'Eisenstein G_k :

$$G_k(\tau) := \sum'_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m+n\tau)^k} = 2\zeta(k) + 2 \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n,$$

où $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$ et $q = \exp(2i\pi\tau)$.

vi. De la formule de transformation modulaire de $\log \eta(\tau)$ (obtenue en cours), déduire celle de $G_2(\tau)$.

vii. On établit maintenant la réciproque de la question précédente. Soit

$$H_1(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m-1+n\tau)(m+n\tau)}$$

$$H(\tau) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m-1+n\tau)(m+n\tau)},$$

les sommations, ordonnées, portant sur les m, n différents de $(0, 0)$ et $(1, 0)$. Montrer que $H_1(\tau) = 2, H(\tau) = 2 - \frac{2i\pi}{\tau}$. En déduire que $G_2(-1/\tau) = \tau^2 G_2(\tau) - 2i\pi\tau$, et la formule de transformation modulaire de $\log \eta(\tau)$.

Exercice 2. Démontrer que, pour k pair, les séries d'Eisenstein $G_k(\tau)$ sont des formes modulaires de poids k pour $SL_2(\mathbb{Z})$. En déduire les valeurs en les points quadratiques imaginaires spéciaux (pour $j = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$) :

$$G_6(i) = G_4(j) = 0.$$

Exercice 3. (Nombres de Bernoulli). On les définit par la série génératrice $\frac{t}{e^t-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{t^k}{k!}$.

k	2	4	6	8	10	12	14	16
$-\frac{2k}{B_k}$	-24	240	-504	480	-264	65520/691	-24	16320/3617

- i. Montrer que les B_k sont rationnels, que $B_{2j+1} = 0$ si $j > 1$, que $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$ et $B_{12} = \frac{-691}{2730}$.
- ii. Montrer que $1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2k) z^{2k} = \pi z \cot(\pi z) = \pi i z + \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{(2i\pi z)^k}{k!}$.
- iii. En déduire que si k est pair, $2\zeta(k) = -\frac{(2i\pi)^k}{k!} B_k$, ou de manière équivalente $\zeta(-n) = (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1}$.
- iv. Normalisons la série d'Eisenstein $E_k = \lambda G_k$ de sorte que $E_k(\infty) = 1$. Montrer que $E_k(z) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n$.
- v. Montrer que $E_4^2 = E_8$ et en déduire la relation $\sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120 \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_3(i) \sigma_3(n-i)$.
- vi. Montrer que $E_4 E_6 = E_{10}$ et en déduire la relation $11\sigma_9(n) = 21\sigma_5(n) - 10\sigma_3(n) + 5040 \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_3(i) \sigma_5(n-i)$.

Exercice 4. Soit Γ un sous-groupe de $SL_2(\mathbb{R})$ et soit $\gamma \in \Gamma, \gamma \neq \pm Id$. Montrer que

- i. $|\operatorname{tr}(\gamma)| = 2 \iff \pm\gamma \cong \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \gamma$ possède un seul point fixe qui est dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. On dit alors que γ est parabolique et ses points fixes sont appelés des pointes de Γ . Prouver que si $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$, alors l'ensemble de ses pointes est $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$.
- ii. $|\operatorname{tr}(\gamma)| < 2 \iff \gamma \cong \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \iff \gamma$ possède deux points fixes conjugués τ et $\bar{\tau}$ dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. On dit alors que γ est un élément elliptique. Prouver que $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ est elliptique si, et seulement s'il est d'ordre fini. Trouver les points fixes des éléments elliptiques de $SL_2(\mathbb{Z})$, et décrire le corps $K = \mathbb{Q}(\tau)$.
- iii. $|\operatorname{tr}(\gamma)| > 2 \iff \gamma \cong \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}^*, |a| \neq 1 \iff \gamma$ possède deux points fixes distincts ω, ω' dans $\mathbb{R} \cup \infty$. On dit alors que γ est hyperbolique. Lorsque $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$, décrire le corps $F = \mathbb{Q}(\omega)$, et le sous-groupe de F^* engendré par a .

Exercice 5. Soit $\Gamma(1) = SL_2(\mathbb{Z})$ et $k \in \mathbb{N}$.

- i. Montrer que si $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma(1))$, alors $\tau \mapsto |f(\tau)|\Im(\tau)^{k/2}$ est invariante par $\Gamma(1)$.
- ii. Montrer que si $f \in \mathcal{S}_k(\Gamma(1))$, alors $\tau \mapsto |f(\tau)|\Im(\tau)^{k/2}$ est bornée.
- iii. Montrer que si $f \in \mathcal{S}_k(\Gamma(1))$ et $f(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \exp(2i\pi n\tau)$ est son q -développement à la pointe ∞ , alors $a_n = O(n^{k/2})$.

Exercice 6. Trouver une relation linéaire entre E_4^3, E_{12} et Δ . En déduire la congruence de Ramanujan

$$\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \pmod{691}.$$

Exercice 7. (sommés de k carrés, $k = 4, 8$.) La fonction $\Theta(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi n^2 \tau}$ est définie sur le demi-plan supérieur $\mathcal{H}$. Soit $k \geq 4$ un entier divisible par 4. Pour un entier $n \geq 0$, on note

$$\rho_k(n) = |\{(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{Z}^k, a_1^2 + \dots + a_k^2 = n\}|$$

le nombre de façons d'écrire n comme somme de k carrés.

a) Exprimer la série génératrice de la suite $n \mapsto \rho_k(n)$ en fonction de $\Theta(\tau)$.

b) Donner les équations fonctionnelles de Θ sous l'action de S , de T^2 , et de TS . En déduire un équivalent de la forme

$$\Theta(1 + i/t) \sim 2\sqrt{t}e^{-\pi t/4} \text{ quand } t \text{ tend vers } +\infty.$$

c) i) On note $\mathcal{E}_2(\tau) = E_2(\tau/2) - 4E_2(2\tau)$. Donner les équations fonctionnelles de $\mathcal{E}_2$ sous l'action de S et de T^2 .

On admet que le sous-groupe $G = \langle \pm S, \pm T^2 \rangle$ engendré par S et T^2 est d'indice 3 dans $PSL_2(\mathbb{Z})$, et que l'on a $PSL_2(\mathbb{Z}) = G \cdot \{\text{Id}, T, TS\}$.

ii) Trouver la forme normale de Hermite des deux matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} TS, \text{ et } \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = N = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} TS.$$

iii) Démontrer que $\mathcal{E}_2(1 + i/t) \sim -48t^2 e^{-\pi t}$ quand t tend vers $+\infty$.

Pour une constante $\lambda \in \mathbb{C}$ à déterminer plus tard, on note

$$f_2 = f_2(\lambda) = \Theta^4 + \lambda \mathcal{E}_2, \text{ puis } g_2 = f_2|_2 T, \text{ et } h_2 = f_2|_2 TS.$$

d) i) Déterminer l'unique valeur de λ telle que $f_2(\tau)$ tend vers 0 quand τ tend vers $i\infty$. Cette valeur sera fixée dans la suite.

ii) Montrer que $g_2(\tau)$ et $h_2(\tau)$ tendent vers 0 quand τ tend vers $i\infty$.

e) i) Montrer que $(f_2)^a + (g_2)^a + (h_2)^a = 0$ pour $a = 2, 4$ et 6 .

ii) En déduire que $f_2 = 0$, puis que

$$\rho_4(n) = 8 \sum_{4 \nmid m|n} m,$$

où la somme porte sur les diviseurs m de n non-divisibles par 4. En conclure que tout entier $n \geq 0$ est somme de 4 carrés.

f) Soit α, β, γ des nombres complexes. Donner les équations fonctionnelles de

$$\mathcal{E}_4^{\alpha, \beta, \gamma}(\tau) := \alpha E_4(\tau) + \beta E_4(\tau/2) + \gamma E_4(2\tau)$$

sous l'action de S , de T^2 .

g) On pose $f_4 = \Theta^8 + \mathcal{E}_4^{\alpha, \beta, \gamma}$, puis $g_4 = f_4|_4 T$ et $h_4 = f_4|_4 TS$. Déterminer des nombres complexes α, β, γ tels que $((f_4)^b + (g_4)^b + (h_4)^b = 0$ pour $b = 1, 2, 3$).

h) Exprimer Θ^8 en termes de la fonction $\mathcal{E}_4$ et E_4 , puis $\rho_8(n)$ en termes de $\sigma_3(n)$.