Sorbonne Université | Faculté de Mathématiques
feuille de TD no3, Formes Modulaires | 2023–2024

Exercice 1. (congruence de Kronecker). Soit $p \geqslant 2$ un nombre premier et $\zeta = e^{2i\pi/p}$. Le but de cet exercice est d'établir la congruence suivante pour le polynôme de classes $F_p[X,Y] \in \mathbb{Z}[X,Y]$ associé au j-invariant et introduit en cours :

$$F_p(X,Y) \equiv (X^p - Y)(X - Y^p) \bmod p\mathbb{Z}[X,Y].$$

a) On dira que deux séries formelles $f = \sum a_n q^n$ et $g = \sum b_n q^n$ pour $SL_2(\mathbb{Z})$ à coefficients entiers sont congrues modulo p si $a_n = b_n \bmod p$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Montrer que $j(p\tau) \equiv j(\tau)^p \bmod p$.

b) Plus généralement, si deux Q séries formelles $f = \sum a_n Q^n$ et $g = \sum b_n Q^n$ sont à coefficients dans un sous-anneau $A \subset \mathbb{C}$ et I est un idéal de A, on dira que $f = g \bmod I$ lorsque $a_n - b_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Déduire de a) que $j(p\tau) = j(\tau)^p \bmod (1-\zeta)\mathbb{Z}[\zeta]$.

c) Montrer que pour toute matrice $\sigma_b = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & q \end{pmatrix}, 0 \leqslant b < p$,

$$j(\sigma_b \tau) = j(\tau) \bmod (1-\zeta)\mathbb{Z}[\zeta].$$

d) En déduire que $F(X,Y) = (X^p - Y)(X - Y^p) \bmod (1-\zeta)\mathbb{Z}[\zeta][X,Y]$, puis modulo $p\mathbb{Z}[X,Y]$.

Exercice 2. (borne de Hasse)

Soit $f = \sum_{n \geqslant 0} a_n q^n \in \mathcal{M}_k(SL_2(\mathbb{Z}))$ une forme propre et normalisée, i.e. $a_1(f) = 1$. Soit p un premier et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ les deux racines du polynôme $t^2 - a_p(f)t + p^{k-1}$.

i. Démontrer la formule
$$a_{p^r}(f) = \sum_{j=0}^{r} \alpha^j \beta^{r-j},\ r \geqslant 0.$$

ii. Calculer α et β dans le cas où f est la série d'Eisenstein.

iii. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
   a) $\mid a_p(f) \mid \leqslant 2p^{\frac{k-1}{2}}$.
   b) α et β sont deux nombres complexes conjugués de valeur absolue $p^{\frac{k-1}{2}}$.

iv. Montrer que si les conditions de la question précédente sont satisfaites pour tout premier p, alors les q-coefficients de f vérifient $\mid a_n(f) \mid \leqslant \sigma_0(n) n^{\frac{k-1}{2}}$.

Lorsque f est parabolique, deux résultats profonds de Pierre Deligne (1968,1974) démontrent que la condition a-b) est satisfaite.

TSVP

Exercice 3. Soit $d_k = \dim M_k(\Gamma(1), \mathbb{Q})$.

a) Montrer qu'il existe $f_0, \ldots, f_{d-1} \in M_k(\Gamma(1), \mathbb{Z})$ tel que, pour tout $0 \leqslant i, j < d$ le coefficient de q^i pour f_j est zéro, sauf pour $j = i$ où ce coefficient est 1.

b) Montrer que les f_j sont une $\mathbb{Z}$-base de $M_k(\Gamma(1), \mathbb{Z})$ (base de V. Miller).

c) Calculer ces formes modulo q^4 dans le cas de $M_{24}(\Gamma(1))$.

Exercice 4. Pour un entier n pair positif, on note $W_{\leqslant n}$ l'espace vectoriel des polynômes P de degré $\leqslant n$ qui vérifient les deux relations de période

$$P \mid_{-n} 1 + S = 0, \tag{1}$$

$$P \mid_{-n} 1 + U + U^2 = 0. \tag{2}$$

a) Déterminer une base et la dimension de $W_{\leqslant n}$ pour $n = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12$.

b) On rappelle qu'une forme modulaire $f(\tau) = a_0 + \sum_{m \geqslant 1} a_m q^m$ de poids k pour $SL_2(\mathbb{Z})$ satisfait l'équation fonctionnelle $f(-\frac{1}{\tau}) = \tau^k f(\tau)$. A une telle forme f on associe successivement la série

$$\tilde{f}(\tau) := \sum_{m \geqslant 1} \frac{a_m}{m^{k-1}} q^m, \; q = \exp(2i\pi\tau),$$

puis le "*polynôme de périodes*"

$$r_f(\tau) := \tilde{f}(\tau) - \tau^{k-2} \tilde{f}(-1/\tau).$$

On suppose que f est une forme modulaire parabolique (i.e. $a_0 = 0$) de poids k pour $SL_2(\mathbb{Z})$. Démontrer que r_f est un polynôme de $W_{\leqslant k-2}$.

c) Déterminer r_f lorsque $f = G_k$ est la série d'Eisenstein.

d) Expliquer pourquoi la fonction C_D dans l'exercice 5 n'est pas constante.

Exercice 5. Pour un entier $D > 0$, on considère l'ensemble $\mathcal{Q}(D)$ des fonctions quadratiques $Q(X) = aX^2 + bX + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $b^2 - 4ac = D$ et $a < 0$.

Pour chaque nombre réel x, Zagier considère les sommes

$$A_D(x) = \sum_{\substack{Q \in \mathcal{Q}(D), \\ Q(x) > 0}} Q(x), \quad B_D(x) = \sum_{\substack{Q \in \mathcal{Q}(D), \\ Q(x) > 0}} Q^3(x), \; C_D(x) = \sum_{\substack{Q \in \mathcal{Q}(D), \\ Q(x) > 0}} Q^5(x).$$

a) Montrer que la somme qui définit $A_5(0)$ est une somme finie.

b) Plus généralement, si $x \in \mathbb{Q}$ est un nombre rationnel, montrer que la somme qui définit $A_5(x), B_5(x), C_5(x)$ et même $A_D(x), B_D(x), C_D(x)$ est finie.

c) Calculer $A_5(0), A_5(\frac{1}{2}), A_5(\frac{1}{3})$. Idem avec $B_5(0), B_5(\frac{1}{2}), B_5(\frac{1}{3})$, puis $C_5(0), C_5(1/2), C_5(1/3)$.

d) i) Montrer que A_5 vérifie pour tout nombre rationnel x l'équation modulaire

$$x^2 A_5\left(\frac{1}{x}\right) - A_5(x) = 2x^2 - 2. \tag{3}$$

TSVP

ii) En déduire que $A_5(x) = 2$ pour tout nombre rationnel x.

iii) Montrer que

$$x^6 B_5(\frac{1}{x}) - B_5(x) = 2x^6 - 2, \quad \text{puis que } B_5(x) = 2.$$

iv) Montrer que $x^2 A_D(1/x) - A_D(x) = \alpha_D(x^2 - 1)$ pour une constante α_D et que $x^6 B_D(1/x) - B_D(x) = \beta_D(x^6 - 1)$, pour une constante β_D.

v) Montrer que $A_D = \alpha_D$ est constant, avec

$$\alpha_D = \sum_{b \in \mathbb{Z}, |b| < \sqrt{D}, b \equiv D \bmod 2} \sigma_1\left(\frac{D - b^2}{4}\right).$$

Formuler un énoncé analogue pour B_D.

vi) Qu'est-ce qu'il se passe pour $x^{10} C_D(\frac{1}{x}) - C_D(x)$? (Traiter l'exercice 4 pourra vous aider à répondre).