Exercice 1. Soit $p \geqslant 3$ un nombre premier.

a) Montrer qu'un système de représentant de $\Gamma_0(p)\backslash\Gamma(1)$ est l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j & 1 \end{pmatrix}$ où $0 \leqslant j < p$.
b) En déduire que $\Gamma_0(p)$ possède deux pointes ∞ et 0.

Exercice 2. (séries d'Eisenstein de niveau N). Soit $N \geqslant 2$ un entier.

a) Montrer que $E_2(\tau) - NE_2(N\tau)$ est une forme modulaire pour $\Gamma_0(N)$.

Soit $k \geqslant 3$. On note u, v deux résidus modulo N.

b) Montrer que la série

$$G_k((u,v),N,\tau) := (2i\pi)^{-k} \sideset{}{'}\sum_{n\equiv u[N]} \sideset{}{'}\sum_{m\equiv v[N]} \frac{N^k}{(n\tau+m)^k} \tag{1}$$

est absolument convergente, et qu'elle vérifie pour tout $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$,

$$G_k((u,v),N,\tau) \mid_k \gamma = G_k((u,v)\gamma, N, \tau). \tag{2}$$

b) En déduire que $G_k((u,v),N,\tau)$ est une forme modulaire de poids k pour $\Gamma(N)$, dont le développement en série de Fourier à l'infini est

$$G_k((u,v),N,\tau) = \delta(\frac{u}{N})(\frac{N}{2i\pi})^k \sideset{}{'}\sum_{m\equiv v[N]} \frac{1}{m^k} + \sum_{n\equiv u[N], n>0} \sum_{m>0} \frac{1}{(k-1)!} m^{k-1} e^{2i\pi m \frac{(n\tau+v)}{N}}$$
$$+ \sum_{n\equiv -u[N], n>0} \sum_{m>0} \frac{(-1)^k}{(k-1)!} m^{k-1} e^{2i\pi m \frac{(n\tau-v)}{N}},$$

où $\delta(\frac{u}{N}) = 1$ si $u \equiv 0[N]$ et 0 sinon.
c) Proposer une définition de $G_2((u,v),N,\tau)$. Suggérer une démonstration de sa modularité.

Exercice 3. On rappelle que la fonction $\log\eta$ est définie sur le demi-plan de Poincaré par $\log\eta(\tau) := \frac{i\pi\tau}{12} - \sum_{n\geqslant 1} \sigma_{-1}(n) e^{2i\pi\tau}$. Pour toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ avec $c \neq 0$ on pose

$$\Phi_R(A) = (\frac{i\pi}{12})^{-1} \left(\log\eta(A\tau) - \log\eta(\tau) - \frac{1}{4}\log(-(c\tau+d)^2) \right),$$

où le logarithme est la branche réelle sur la demi-droite $\mathbb{R}_{>0}$, l'argument étant pris dans $]-\pi,\pi]$.

Lorsque $c = 0$ on pose $\Phi_R(A) = (\frac{i\pi}{12})^{-1} (\log\eta(A\tau) - \log\eta(\tau))$.

i. Calculer $\Phi_R(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$ et $\Phi_R(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$.

ii. Montrer que Φ_R définit une application $\Phi_R : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$.

iii. Montrer que pour toutes matrices $A, B \in SL_2(\mathbb{Z})$ on a

$$| \Phi_R(AB) - \Phi_R(A) - \Phi_R(B) | \leqslant 9.$$

iv. Montrer que le nombre rationnel $u(c,d) = \Phi_R(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) - (\frac{a+d}{c})$, noté $u(c,d) = -12\mathrm{sign}(c)s(c,d)$, ne dépend que de la paire c, d. (Indication : on pourra faire le changement de variable $\tau = -\frac{d}{c} + \frac{it}{c}$.).

v. Montrer que, pour $c > 0, d > 0$,

$$s(d,c) + s(c,d) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\left(\frac{c}{d} + \frac{d}{c} + \frac{1}{cd}\right).$$

vi. En observant que $s(c,d)$ ne dépend que de d modulo c, en déduire un algorithme de calcul de $s(d,c)$.

Exercice 4. Soit $N = 2, 3, 5, 11$ et k tels que $k(N+1) = 24$. Soit f une forme modulaire de $S_k(\Gamma_0(N))$. Montrer que f est proportionnelle à $(\eta(Nz)\eta(z))^k$.

Exercice 5. Soit $p \geqslant 3$ un nombre premier, η la fonction de Dedekind, et $\Delta = \eta^{24}$ la fonction de Ramanujan.

i. Montrer que $\Delta^p(\tau)/\Delta(p\tau)$ est une forme modulaire pour $\Gamma_0(p)$.

ii. Soit $F(\tau) = \prod_{j=1}^{p-1} G_3((0,j), p, \tau)$, (avec les notations de l'exercice précédent). Montrer que F est une forme modulaire de poids $3(p-1)$ pour $\Gamma_0(p)$ et que F^4 est proportionnelle à $\Delta^p(\tau)/\Delta(p\tau)$. En déduire que $(\eta(\tau)^p/\eta(p\tau))^6$ est dans $M_{3(p-1)}(\Gamma_0(p))$.

iii. On peut montrer que $(\eta(\tau)^p/\eta(p\tau))^2$ est dans $M_{p-1}(\Gamma_0(p))$.

Conclure que $f_{11}(\tau) := \eta(\tau)^2\eta(11\tau)^2$ est dans $S_2(\Gamma_0(11), \mathbb{Z})$. (c'est en fait la seule forme parabolique propre normalisée pour $\Gamma_0(11)$).

Exercice 6.