
INTRODUCTION AUX FORMES MODULAIRES

par

Pierre Charollois

December 12, 2023

Table des matières

1. Premiers exemples d'équations modulaires.....	2
1.1. Séries d'Eisenstein.....	2
1.2. Les fonctions thêta de Jacobi.....	3
1.3. Le logarithme de la fonction η de Dedekind.....	6
2. Formes modulaires pour $SL_2(\mathbf{Z})$	7
2.1. Action de $SL_2(\mathbf{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré.....	7
2.2. Formes modulaires pour $\Gamma(1)$	11
2.3. Calcul des dimensions.....	15
2.4. Exemples.....	20
2.5. Rationalité des coefficients de Fourier.....	20
3. j -invariant et multiplication complexe.....	21
3.1. L'invariant j	21
3.2. Multiplication Complexe.....	24
4. Fonction L d'une forme modulaire.....	27
4.1. La fonction τ de Ramanujan et ses coefficients $\tau(n)$	27
4.2. fonction $L(f, s)$: équation fonctionnelle.....	29
5. Opérateurs de Hecke.....	30
5.1. Opérateurs de Hecke pour les formes modulaires de niveau $\Gamma(1)$...	30
5.2. Produit scalaire de Petersson.....	35
5.3. Les opérateurs de Hecke et le produit de Petersson.....	37
6. Opérateurs différentiels sur les formes modulaires; Théorème de Damerell	38
6.1. Opérateurs différentiels sur les formes modulaires.....	38
6.2. Séries d'Eisenstein presque-holomorphes $G_{k,r}$	39
6.3. Compléments de M. Complexe: Théorème de Damerell.....	41
6.4. Le polynôme de périodes de $f \in S_k(\Gamma(1))$	42
6.5. Identité de Haberland et premières conséquences.....	43

6.6. "Polynôme" de périodes de séries d'Eisenstein.....	45
7. Méthode de Rankin.....	48
8. Formes modulaires sur des sous-groupes de congruence.....	50
9. Séries d'Eisenstein réelles-analytiques et applications.....	51
9.1. La série d'Eisenstein réelle analytique $E(z, s)$	51
9.2. Application no.1 : la méthode de Rankin-Selberg.....	53
9.3. Application no 2 : formule limite de Kronecker.....	54
Références.....	55

Ce polycopié donne une introduction aux formes modulaires. Dans la première partie les références sont les notes de Chenevier [1], le cours de A. Minguez, le Cours d'arithmétique de Serre [10], le livre de Godement [7] et celui de Cohen-Strömberg [4]. Pour cette partie le lecteur est supposé juste maîtriser les bases de l'analyse complexe. Dans la deuxième partie, on suivra le livre de A. Weil. Si vous trouvez des coquilles faites-le moi savoir !

1. Premiers exemples d'équations modulaires

Le demi-plan supérieur $\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbf{C} : \text{Im } \tau > 0\}$ est stable sous les homographies $\tau \mapsto \tau + 1$ et $\tau \mapsto -1/\tau$. Dans cette première partie, de nature illustrative, nous présentons des exemples de fonctions f holomorphes périodiques sur \mathbb{H} qui vérifient des équations fonctionnelles agréables reliant $f(-\frac{1}{\tau})$ à $f(\tau)$. Une équation fonctionnelle de ce type est dite *modulaire*. La transformée de Mellin fournit un dictionnaire qui permet d'en déduire certaines équations fonctionnelles de séries de Dirichlet, et vice-versa.

1.1. Séries d'Eisenstein. —

Proposition 1.1. — Soit $k \geq 4$ un entier pair. La série $\sum_{(m,n) \in (\mathbf{Z}^2)^*} \frac{1}{(m\tau + n)^k}$ est absolument convergente sur \mathbb{H} . On note $G_k(\tau)$ sa somme. Alors G_k est holomorphe sur \mathbb{H} , non-nulle. Elle est 1-périodique, tend vers $2\zeta(k)$ quand $\tau \rightarrow i\infty$ et satisfait pour tout $\tau \in \mathbb{H}$ l'équation modulaire

$$G_k\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^k G_k(\tau).$$

Démonstration. — Fixons $A, A', B \in \mathbf{R}_{>0}$ et notons $\mathcal{D}_{A,A',B}$ l'ensemble des $\tau \in \mathbb{H}$ tels que $A' > \text{Im } \tau > A$ et $|\text{Re } \tau| < B$. Vérifions qu'il existe un réel $C > 0$ tel que pour tout $(\nu, \mu) \in \mathbf{R}^2 - \{0\}$ et tout $\tau \in \mathcal{D}_{A,A',B}$ alors $|\nu\tau + \mu| > C \sup(|\nu|, |\mu|)$.

Soit $\tau \in \mathcal{D}_{A,A',B}$. D'une part pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ on a $|\tau + \lambda| > A$. D'autre part, la fonction $\lambda \mapsto |\lambda\tau + 1|^2$, par étude de ses variations, atteint son min en $\lambda = -\frac{\text{Re}(\tau)}{\text{Im}(\tau) + \text{Re}(\tau)^2}$, et sa borne inférieure est $\frac{\text{Im}(\tau)}{\text{Im}(\tau) + \text{Re}(\tau)^2}$ sur \mathbf{R} . En particulier, il existe $\delta = \delta(A, A', B) = \frac{A}{A' + B^2} > 0$ avec $|\lambda\tau + 1| > \delta$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}, \tau \in \mathcal{D}_{A,A',B}$. Ainsi $C = \min(A, \delta)$ convient.

Si $s \geq 1$ il y a exactement $8s$ couples $(m, n) \in \mathbf{Z}^2$ tels que $\sup(|m|, |n|) = s$. On déduit la majoration

$$\sum_{(m,n) \in (\mathbf{Z}^2)^*} \frac{1}{|m\tau + n|^k} < \frac{1}{C^k} \sum_{s \geq 1} \frac{8s}{s^k}$$

pour tout $\tau \in \mathcal{D}_{A,A',B}$. Ainsi, la série de l'énoncé est normalement convergente sur $\mathcal{D}_{A,A',B}$. En particulier $G_k(\tau)$ est une fonction holomorphe dans \mathbb{H} . Par convergence absolue de $G_k(\tau)$ les bijections $(m, n) \mapsto (m, n + m)$ et $(m, n) \mapsto (n, -m)$ entraînent les identités $G_k(\tau + 1) = G_k(\tau)$ et $G_k(-1/\tau) = \tau^k G_k(\tau)$ pour tout $\tau \in \mathbb{H}$.

Enfin faisons tendre $\text{Im } \tau$ vers l'infini. Par invariance sous T , on peut garder $\tau \in \mathcal{D}_{1,1}$. La fonction $\tau \mapsto \frac{1}{(m\tau + n)^k}$ tend vers $\frac{1}{n^k}$ ou 0 selon que $m = 0$ ou non. Par convergence uniforme de G_k sur $\mathcal{D}_{1,1}$ on peut intervertir limite et sommation et l'on obtient que $G_k(\tau) \rightarrow 2\zeta(k)$. \square

1.2. Les fonctions thêta de Jacobi. —

1.2.1. La fonction θ . — Considérons la fonction d'une variable réelle $t > 0$ définie par la somme :

$$\theta(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{-t\pi n^2}.$$

Cette série à termes positifs est bien évidemment convergente, et fonction décroissante de $t > 0$. Elle satisfait l'équation fonctionnelle suivante, due à Poisson, qui est comme on le verra un ingrédient clé dans la preuve de l'équation fonctionnelle de la fonction ζ de Riemann.

Proposition 1.2. — Pour tout réel $t > 0$ on a :

$$\theta(1/t) = \sqrt{t} \theta(t).$$

Démonstration. — Notons $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ l'espace de fonctions de Schwartz, c'est-à-dire, l'espace des fonctions \mathcal{C}^∞ telles que pour tous entiers $n, m \geq 0$ on ait $x^n f^{(m)}(x) \rightarrow 0$ quand $|x| \rightarrow \infty$. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, f est en particulier sommable de sorte que sa transformée de Fourier :

$$\begin{aligned} \widehat{f} : \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{C} \\ y &\mapsto \int_{\mathbf{R}} f(x) e^{-2\pi ixy} dx \end{aligned}$$

est bien définie.

Lemme 1.3 (Formule de Poisson). — Pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ on a :

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \widehat{f}(n).$$

Démonstration. — Soit $\phi(x) = \sum_{m \in \mathbf{Z}} f(x + m)$. Cette série de fonctions converge normalement sur tout segment, ainsi que toutes ses dérivées, par hypothèse sur f . Elle définit donc une fonction \mathcal{C}^∞ et 1-périodique de la variable réelle x . Ses coefficients de Fourier sont données par la formule :

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^1 \phi(x) e^{-2\pi i x n} dx = \sum_{m \in \mathbf{Z}} \int_m^{m+1} f(x) e^{-2\pi i x n} dx \\ &= \int_{\mathbf{R}} f(x) e^{-2\pi i x n} dx = \widehat{f}(n). \end{aligned}$$

(L'intervention somme/intégrale est loisible car f est sommable sur \mathbf{R}). La fonction ϕ étant \mathcal{C}^∞ , sa série de Fourier $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x}$ est absolument convergente vers $\phi(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. On conclut en prenant $x = 0$, et l'on montre au passage que les deux sommes de l'énoncé sont absolument convergentes. \square

Lemme 1.4. — Si $t \in \mathbf{R}_{>0}$, la fonction :

$$f_t : x \mapsto e^{-\pi t x^2}$$

est dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ et vérifie :

$$\widehat{f}_t(y) = \frac{1}{\sqrt{t}} f_{1/t}(y).$$

Démonstration. — Il est clair que $f_t \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. On a :

$$\begin{aligned} \widehat{f}_t(y) &= \int_{\mathbf{R}} e^{-\pi t x^2} e^{-2\pi i x y} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{\mathbf{R}} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \frac{y}{\sqrt{t}}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} \widehat{f}_1\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right). \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que $\widehat{f}_1 = f_1$, c'est-à-dire que la fonction $x \mapsto e^{-\pi x^2}$ est égale à sa transformée de Fourier. C'est un fait bien connu dû à Gauss (et laissé en exercice). \square

Pour conclure la preuve de la proposition 1.2, il suffit d'appliquer la formule de Poisson à la fonction f_t . \square

1.2.2. La fonction Θ . — Jacobi a introduit une variante à deux variables de la fonction θ . Si $z \in \mathbf{C}$ et $\tau \in \mathbb{H}$, il pose

$$\Theta(z; \tau) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{\pi i \tau n^2 + 2\pi i n z}.$$

Cette série est manifestement normalement convergente sur toute partie de $\mathbf{C} \times \mathbb{H}$ de la forme $\{(z, \tau) : \operatorname{Im} z > A, \operatorname{Im} \tau > B\}$ où $A \in \mathbf{R}$ et $B \in \mathbf{R}_{>0}$. Cela justifie la définition, et montre que la fonction $(z, \tau) \mapsto \Theta(z; \tau)$ est holomorphe en chacune de variables, l'autre

étant fixée. On observe que si $t > 0$, alors $\Theta(0; it) = \theta(t)$: on retrouve la fonction précédente sur l'axe imaginaire, quand $z = 0$.

Il est clair que :

$$\Theta(z + 1; \tau) = \Theta(z; \tau) \quad \text{et} \quad \Theta(z + \tau; \tau) = e^{-i\pi\tau - 2i\pi z} \Theta(z; \tau).$$

Ainsi à τ fixé ces formules expriment le comportement de la fonction $z \mapsto \Theta(z; \tau)$ par rapport au réseau $\mathbf{Z} + \tau\mathbf{Z}$ de \mathbf{C} ; leur application originale est d'ailleurs à la construction de fonctions méromorphes sur \mathbf{C} invariantes par un tel réseau. Leur dépendance en la variable τ , que l'on peut voir comme paramétrant le réseau $\mathbf{Z} + \tau\mathbf{Z}$ est encore plus remarquable.

Proposition 1.5. — Pour tout paramètre $z \in \mathbf{C}$ et tout $\tau \in \mathbb{H}$ on a les relations :

$$\Theta(z; \tau + 2) = \Theta(z; \tau) \quad \text{et} \quad \Theta(z; -1/\tau) = \sqrt{-i\tau} e^{\pi i \tau z^2} \Theta(\tau z; \tau)$$

(dans cette formule la notation désigne la racine carrée de $\sqrt{-i\tau}$ dont la partie réelle est > 0 .)

Démonstration. — L'identité $\Theta(z; \tau + 2) = \Theta(z; \tau)$ est immédiate. Pour la seconde on a besoin d'un lemme :

Lemme 1.6. — Si $z \in \mathbf{C}$ et $\tau \in \mathbb{H}$, la fonction :

$$\begin{aligned} \psi : \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{C} \\ x &\mapsto e^{i\pi\tau x^2 + 2\pi izx} \end{aligned}$$

est dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ et de transformée de Fourier

$$\widehat{\psi} : y \mapsto \frac{1}{\sqrt{-i\tau}} e^{-\frac{i\pi}{\tau}(y-z)^2}.$$

Démonstration. — Posons $g_\tau(x) = e^{i\pi\tau x^2}$. La transformée de Fourier de $x \mapsto g_\tau(x)e^{2i\pi zx}$ est $\widehat{g}_\tau(y - z)$. Du coup on peut supposer $z = 0$. Fixons $y \in \mathbf{R}$. On veut démontrer l'égalité :

$$\widehat{g}_\tau(y) = \frac{1}{\sqrt{-i\tau}} g_{-1/\tau}(y).$$

Lorsque $\tau = it$ avec t réel positif c'est exactement le lemme 1.4. D'après le principe de zéros isolés, il suffit donc de vérifier que les deux termes de cette égalité sont des fonction holomorphes de la variable τ dans \mathbb{H} . C'est clair pour $\tau \mapsto g_{-1/\tau}(y)$ et $\tau \mapsto \sqrt{-i\tau}$ (cette dernière est une racine continue de la fonction $\tau \mapsto -i\tau$ qui n s'annule pas sur \mathbb{H}). En ce qui concerne $\widehat{g}_\tau(y)$ cela se déduit de l'holomorphicité de $\tau \mapsto g_\tau(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ et de l'inégalité $|e^{\pi i \tau x^2}| \leq e^{-\pi x^2 \text{Im} \tau}$. \square

Revenons à la preuve de la proposition 1.5. On applique l'identité de Poisson à ψ et l'on en déduit le résultat voulu. \square

Comme l'a remarqué Riemann, la formule de transformation modulaire de $\theta(t)$ implique une équation fonctionnelle et le prolongement analytique de la fonction zêta $\zeta(s) := \sum_{n \geq 1} n^{-s}$.

Proposition 1.2.1. — *La fonction $\zeta(s)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur \mathbb{C} , sauf en $s = 1$ où elle possède un pôle simple de résidu 1. De plus, elle satisfait l'équation fonctionnelle*

$$\xi(s) = \xi(1 - s),$$

où $\xi(s)$ est la fonction zêta complète $\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2}) \zeta(s)$, qui n'a que des pôles simples situés en $s = 0, 1$.

Démonstration. — A partir de $\pi^{-s} \Gamma(s) / n^{2s} = \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^s \frac{dt}{t}$, il vient après sommation

$$\pi^{-s} \Gamma(s) \zeta(2s) = \int_0^\infty \left(\frac{\theta(t) - 1}{2} \right) t^s \frac{dt}{t}.$$

On casse cette intégrale en $t = 1$, et l'on effectue le changement de variable $t \mapsto \frac{1}{t}$ dans le morceau \int_0^1 . En combinant avec la Prop. 1.2 il s'ensuit que

$$\pi^{-s} \Gamma(s) \zeta(2s) = -\frac{1}{2s} - \frac{1}{1-2s} + \int_1^\infty \left(\frac{\theta(t) - 1}{2} \right) (t^s + t^{\frac{1}{2}-s}) \frac{dt}{t},$$

ce qui implique le résultat. □

1.3. Le logarithme de la fonction η de Dedekind. — Comme on vient de le voir dans la partie précédente, la transformée de Mellin d'une équation modulaire $\tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$ permet d'obtenir l'équation fonctionnelle d'une série de Dirichlet sous $s \mapsto 1 - s$. Ce dictionnaire fonctionne aussi dans l'autre sens, comme l'a souligné Hecke. Nous présentons ici une première illustration de ce principe, indiquée par A. Weil (1968). On peut aussi le considérer une incarnation élémentaire du Théorème réciproque de Weil, qui se place dans un cadre bien plus général.

1.3.1. Pôles de $(2\pi)^{-s} \Gamma(s) \zeta(s) \zeta(s+1)$. — Une analyse de la Prop. 1.2.1 montre que $\Phi(s) := (2\pi)^{-s} \Gamma(s) \zeta(s) \zeta(s+1)$ est holomorphe sur \mathbb{C} , sauf en $s = 0$ où elle possède un pôle double, et en $s = \pm 1$ où elle possède un pôle simple de résidu $\pm \frac{\zeta(2)}{2\pi} = \pm \pi/12$. C'est une fonction paire : $\Phi(s) = \Phi(-s)$, donnée pour $\operatorname{Re}(s) > 1$ par la série de Dirichlet

$$\Phi(s) = (2\pi)^{-s} \Gamma(s) \sum_{n,m \geq 1} \frac{1}{m(nm)^s}.$$

1.3.2. Application à $\log \eta$ et Δ . —

Définition 1.3.1. — *Pour $\tau \in \mathbb{H}$, la fonction η de Dedekind est*

$$\eta(\tau) := \exp\left(\frac{i\pi\tau}{12}\right) \prod_{n \geq 1} (1 - q^n),$$

et son logarithme est la choix de la branche

$$\log \eta(\tau) := \frac{i\pi\tau}{12} - \sum_{n,m \geq 1} \frac{q^{mn}}{m}, \quad q = \exp(2i\pi\tau).$$

La fonction Δ de Ramanujan est

$$\Delta(\tau) = \eta^{24}(\tau) = q \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{24}$$

Proposition 1.3.2. — On a

$$\log \eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \log \eta(\tau) + \frac{1}{2} \log\left(\frac{\tau}{i}\right).$$

En particulier,

$$\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{i}} \eta(\tau), \quad \text{tandis que } \Delta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^{12} \Delta(\tau).$$

(la branche pour la racine carrée est réelle positive sur l'axe réel positif).

Démonstration. — La fonction Φ est essentiellement la transformée de Mellin de la fonction $F(\tau) = \frac{i\pi\tau}{12} - \log \eta(\tau)$. Précisément, on a

$$\Phi(s) = \int_0^\infty F(it) t^s \frac{dt}{t}, \quad F(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Phi(s) \left(\frac{\tau}{i}\right)^{-s} ds.$$

La première formule est valable si $\operatorname{Re}(s) > 1$, la seconde pour $\sigma > 1$ (transformée de Mellin inverse), à condition que Φ soit à décroissance rapide, ce qui est le cas (cf [7]).

La méthode de Hecke consiste à ramener la droite verticale $\operatorname{Re}(s) = \sigma$ en $\operatorname{Re}(s) = -\sigma$, puis à utiliser l'équation fonctionnelle de Φ . Ce faisant, on doit tenir compte des pôles de l'intégrande contenus à l'intérieur de la bande $-\sigma \leq \operatorname{Re}(s) \leq \sigma$. Il s'ensuit que

$$F(\tau) = -\frac{i\pi}{12\tau} + \frac{i\pi\tau}{12} + \frac{1}{2} \log\left(\frac{\tau}{i}\right) + \frac{1}{2i\pi} \int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} \Phi(s) \left(\frac{\tau}{i}\right)^{-s} ds.$$

L'équation fonctionnelle de $\Phi(s)$ permet de conclure. On renvoie le lecteur à [7], p. 284 pour plus de détails. \square

2. Formes modulaires pour $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$

2.1. Action de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré.— Soit K un corps. Le groupe $\mathrm{GL}_2(K)$ agit naturellement sur K^2 puis sur l'ensemble $\mathbf{P}^1(K)$ des droites vectorielles de ce dernier. Cette action est triviale sur le centre K^\times et se factorise en une action fidèle de $\mathrm{PGL}_2(K)$. On pose

$$\widehat{K} = K \sqcup \{\infty\}.$$

Cet ensemble s'identifie à $\mathbf{P}^1(\mathbf{K})$ en envoyant tout élément $z \in \mathbf{K}$ sur la droite engendrée par $\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$ et le symbole ∞ sur celle engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Par transport de structure on en déduit une action de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{K})$ sur $\widehat{\mathbf{K}}$, que l'on notera $(\gamma, z) \mapsto \gamma z$. Explicitement, si γ désigne l'élément $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{K})$ et si $z \in \mathbf{K}$ est tel que $cz + d \neq 0$ on constate les égalités :

$$(2.1) \quad \gamma \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az + b \\ cz + d \end{pmatrix} = (cz + d) \begin{pmatrix} \frac{az+b}{cz+d} \\ 1 \end{pmatrix}$$

et l'on retrouve la formule bien connue $\gamma z = \frac{az+b}{cz+d}$. De plus si on a $c \neq 0$ (resp. $c = 0$) alors $\gamma \infty = \frac{a}{c}$ et $\gamma(\frac{-d}{c}) = \infty$ (resp. $d \neq 0$ et $\gamma \infty = \infty$). Ces bijections de $\widehat{\mathbf{K}}$ sont appelées homographies : par exemple $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ correspond à l'homographie "affine" $z \mapsto az + b$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ à "l'inversion" $z \mapsto \frac{-1}{z}$.

Etant donné l'élément $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{K})$ il est de coutume de noter $j(\gamma, z)$ l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &\rightarrow \mathbf{K} \\ z &\mapsto cz + d. \end{aligned}$$

La formule (2.1) nous dit que $j(\gamma, z)$ satisfait la relation dite de 1-cocycle, ou d'homomorphisme croisé :

$$(2.2) \quad j(\gamma\gamma', z) = j(\gamma, \gamma'z)j(\gamma', z)$$

valable pour tous $\gamma, \gamma' \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{K})$ et tout $z \in \mathbf{K}$.

2.1.1. — Ces rappels s'appliquent à $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ auquel cas $\widehat{\mathbf{C}}$ n'est autre que la sphère de Riemann. Le sous-groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ agit par restriction sur cette sphère, en préservant $\widehat{\mathbf{R}}$, ainsi que son complémentaire $\mathbf{C} - \mathbf{R}$. Cet ouvert a deux composantes connexes, l'une d'elles étant l'ouvert :

$$\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbf{C} : \mathrm{Im} \tau > 0\}$$

appelé le demi-plan de Poincaré. Si $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ et $z \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$, alors $cz + d \neq 0$ et

$$(2.3) \quad \mathrm{Im} \gamma z = \det \gamma \frac{\mathrm{Im} z}{|cz + d|^2}.$$

En particulier $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ préserve le demi-plan de Poincaré. L'action des homographies de la forme $\tau \mapsto a\tau + b$ avec $a \in \mathbf{R}_{>0}$, $b \in \mathbf{R}$ montre bien que l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ sur \mathbb{H}

est transitive. Un petit calcul montre que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ fixe i si, et seulement si, $a = d$ et $b = -c$. La condition du déterminant donne en plus $a^2 + b^2 = 1$, donc le fixateur de i dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ est $\mathrm{SO}_2(\mathbf{R})$. Cela implique que l'application $\gamma \mapsto \gamma i$ induit une bijection

$$\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})/\mathrm{SO}_2(\mathbf{R}) \simeq \mathbb{H}.$$

2.1.2. — Analysons l'action du sous-groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur \mathbb{H} . Pour des raisons que l'on comprendra plus tard on note $\Gamma(1) = \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. Deux éléments importants de ce groupe sont $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $S\tau = -\frac{1}{\tau}$ et $T\tau = \tau + 1$. On a les relations $S^2 = -I_2$, $ST = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et donc $(ST)^3 = -I_2$, $S(i) = i$, $ST(\rho) = \rho$, où $\rho = e^{2i\pi/3}$. On pose $\mathcal{F} = \{\tau \in \mathbb{H} : |\mathrm{Re} \tau| \leq \frac{1}{2} \text{ et } |\tau| \geq 1\}$.

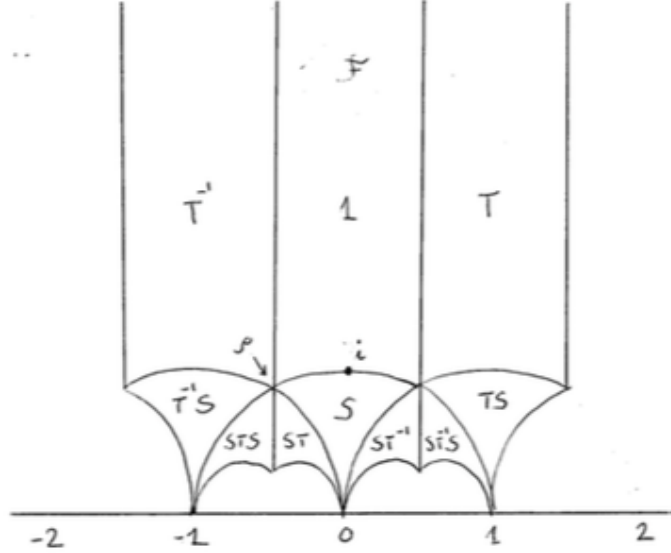


FIGURE 1. Le pavage de \mathbb{H} par la $\Gamma(1)$ -orbite de \mathcal{F}

- Théorème 2.1.** — (1) Pour tout $\tau \in \mathbb{H}$, il existe $\gamma \in \Gamma(1)$ tel que $\gamma\tau \in \mathcal{F}$.
 (2) Si τ, τ' sont deux points distincts de \mathcal{F} tels que $\Gamma(1)\tau = \Gamma(1)\tau'$ alors :
 (a) Soit $\mathrm{Re} \tau = \pm 1/2$ et $\tau' = \tau \pm 1$.
 (b) Soit $|\tau| = 1$ et $\tau' = -\frac{1}{\tau}$.
 (3) Si $\tau \in \mathcal{F}$ alors le stabilisateur de τ dans $\Gamma(1)$ est $\{\pm 1\}$ sauf si $\tau = i$ (resp. $\rho, -\rho^2$), auquel cas c'est le sous-groupe (fini) engendré par S (resp. ST).

Démonstration. — Soit $\tau \in \mathbb{H}$ fixé. La forme quadratique

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^2 &\rightarrow \mathbf{R} \\ (c, d) &\mapsto |c\tau + d|^2 \end{aligned}$$

est définie positive. Elle admet donc un minimum sur $\mathbf{Z}^2 - 0$. D'après la formule (2.3) il y a donc un sens à considérer l'ensemble $E \subset \Gamma(1)\tau$ des éléments τ' tels que $\text{Im } \tau'$ soit maximal. Il est invariant par $\tau' \mapsto \tau' + 1$ de sorte qu'il existe $\tau' \in E$ tel que $|\text{Re } \tau'| \leq \frac{1}{2}$. Mais $-\frac{1}{\tau'} \in \Gamma(1)\tau$ et $\text{Im } \frac{-1}{\tau'} = \frac{\text{Im } \tau'}{|\tau'|^2}$ donc $|\tau'| \geq 1$. Ainsi $\tau' \in \Gamma(1)\tau \cap \mathcal{F}$.

Observons que cette démonstration montre en fait que $G\tau \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ où G désigne le sous-groupe de $\Gamma(1)$ engendré par S et T .

Pour montrer (2) et (3) considérons $\tau, \tau' \in \mathcal{F}$ (non nécessairement distincts) tels que $\text{Im } \tau' \geq \text{Im } \tau$ et tels que $\tau' = \gamma\tau$, où $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbf{Z})$. Par (2.3) on a $|c\tau + d| \leq 1$ et en particulier $|c\text{Im } \tau| \leq 1$ donc $|c| \leq 1$. Si $c = 0$ alors $d = a = \pm 1$ donc $\pm\gamma$ est une puissance de T et on est dans le premier cas du (2). Sinon on peut supposer $c = 1$, quitte à remplacer γ par $-\gamma$. On voit sur le dessin que $|\tau + d| \leq 1$ entraîne $|\tau| = 1, |d| \leq 1$ et que l'on est dans l'un de cas suivants.

(1) $d = 0$. Alors $b = -1$ et $\tau' = a - \frac{1}{\tau}$, puis $a = 0$ car $|\text{Re } \frac{-1}{\tau}| < 1/2$. Ainsi $\gamma = S$ et $\tau' = \tau = i$, l'on conclut.

(2) $d = 1, \tau = \rho$. et $d = 0, -1$. Si $d = 0$ on a encore $b = -1, \tau' = a - \frac{1}{\rho} = a - \rho^2$. Cela montre que soit $\tau' = \rho^2, a = 0, \gamma = \pm S$, soit $\tau' = \tau, a = -1$ et $\gamma = (ST)^2$.

(3) Le cas $\tau = -\rho^2$ et $d = 0, -1$ se traite de manière similaire au cas (2).

□

Définition 2.2. — Soit $\Gamma \subset \text{SL}_2(\mathbf{R})$. Un *domaine fondamental* pour l'action de Γ dans \mathbb{H} est un ouvert connexe D tel que :

- (1) Pour tout $\gamma \in \Gamma, \gamma D \cap D \neq \emptyset$ implique $\gamma = \pm 1$.
- (2) On a $\mathbb{H} = \cup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \overline{D}$ où \overline{D} désigné l'adhérence de D .

Corollaire 2.3. — $\text{Int}(\mathcal{F})$ est un domaine fondamental de l'action de $\Gamma(1)$ sur \mathbb{H} .

On peut aussi profiter pour prouver le corollaire suivant (qui peut aussi être montré de manière directe sans difficulté).

Corollaire 2.4. — $\Gamma(1)$ est engendré par S et T .

Démonstration. — Soit G le sous-groupe de $\Gamma(1)$ engendré par S et T . Soit $\tau \in \text{Int}(\mathcal{F})$ et soit $\gamma \in \Gamma(1)$. D'après la remarque après la preuve du (1) ci-dessus, il existe $g \in G$ tel que $g^{-1}\gamma\tau \in \mathcal{F}$. Ainsi $g^{-1}\gamma \in \text{SL}_2(\mathbf{Z})$ fixe τ . On déduit de (3) que $g^{-1}\gamma = \pm I_2$. Au final on a $\gamma \in G$ car $-I_2 = S^2 \in G$. □

Remarque 2.1.1. — Il résulte du corollaire précédent que $\text{SL}_2(\mathbf{Z})$ est aussi engendré par S et $U = ST$. L'image de S et U dans $\text{PSL}_2(\mathbf{Z})$ est d'ordre 2 et 3 respectivement. On peut montrer, cf par ex. [http://www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/grouptheory/SL\(2,Z\).pdf](http://www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/grouptheory/SL(2,Z).pdf) que $\text{PSL}_2(\mathbf{Z})$ est le groupe libre sur les lettres $\overline{S}, \overline{U}$: toute matrice A dans $\text{PSL}_2(\mathbf{Z})$ s'écrit de manière unique comme un produit de \overline{S} et \overline{U} .

2.2. Formes modulaires pour $\Gamma(1)$. — L'application $(f, \gamma) \mapsto (\tau \mapsto f(\gamma\tau))$ définit une action à droite du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ sur le \mathbf{C} -espace vectoriel des fonctions $\mathbb{H} \rightarrow \mathbf{C}$, c'est même une représentation linéaire. Plus généralement, on définit une fonction $f[\gamma]_k : \mathbb{H} \rightarrow \mathbf{C}$ en posant

$$f[\gamma]_k(\tau) = j(\gamma, \tau)^{-k} f(\gamma\tau).$$

Cela a un sens car $j(\gamma, \tau) \neq 0$ pour tout $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ et tout $\tau \in \mathbb{H}$. On vérifie que (2.2) équivaut à dire que $(f, \gamma) \mapsto f[\gamma]_k$ est une action à droite de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$ sur l'espace des fonctions $\mathbb{H} \rightarrow \mathbf{C}$ appelée action de poids k .

Proposition-Définition 2.2.1. — Une fonction $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbf{C}$ est dite faiblement modulaire de poids k (de niveau $\Gamma(1)$) si $f = f[\gamma]_k$ pour tout $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. Autrement dit si

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k f(\tau), \quad \forall \tau \in \mathbb{H}, \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}),$$

ou ce qui revient au même si $f(\tau + 1) = f(\tau)$ et $f(-1/\tau) = \tau^k f(\tau)$ pour tout $\tau \in \mathbb{H}$. On dit aussi que f satisfait la propriété d'automorphie ou encore que f est automorphe.

Démonstration. — Comme $\Gamma(1)$ est engendré par S et T , le fait d'être fixé par $\Gamma(1)$ équivaut à être fixé par S et T . \square

Notons $\mathcal{O}(\mathbb{H})$ l'espace vectoriel des fonctions holomorphes $\mathbb{H} \rightarrow \mathbf{C}$. Les homographies de \mathbb{H} étant des transformations bi-holomorphes, l'action de poids k de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ préserve le sous-espace $\mathcal{O}(\mathbb{H})$.

Définition 2.5. — Une forme modulaire de poids k (de niveau $\Gamma(1)$) est une fonction holomorphe $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbf{C}$ telle que :

- (1) f est faiblement modulaire de poids k (de niveau $\Gamma(1)$).
- (2) $f(\tau)$ admet une limite finie quand $\mathrm{Im} \tau \rightarrow \infty$, que l'on note $f(\infty)$.

On note $M_k(\Gamma(1))$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{O}(\mathbb{H})$ des formes modulaires de poids k et niveau $\Gamma(1)$.

Remarque 2.6. — (1) Les relations $S^2 = -I_2$ et $f[-I_2]_k = (-1)^k f$ montrent que si $f \in M_k(\Gamma(1))$, alors $f = (-1)^k f$ de sorte que $M_k(\Gamma(1)) = 0$ si k est impair.

(2) De même si $f \in M_k(\Gamma(1))$ alors $f(i) = f[S]_k(i) = i^k f(i)$ et $f(\rho) = f[ST]_k(\rho) = \rho^k f(\rho)$ donc $f(i) = 0$ si $k \not\equiv 0 \pmod{4}$, et $f(\rho) = 0$ si $k \not\equiv 0 \pmod{3}$.

(3) Les fonctions constantes sont de poids 0 (on verra que ce sont les seules). La fonction 0 est une forme modulaire de poids quelconque.

(4) Si f et g sont des formes modulaires de poids k et k' (et niveau $\Gamma(1)$) alors le produit fg est une forme modulaire de poids $k + k'$ (et niveau $\Gamma(1)$) et donc l'espace

$$M(\Gamma(1)) = \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} M_k(\Gamma(1))$$

a une structure très remarquable de \mathbf{C} -algèbre graduée.

(5) La condition (2) de la définition 2.5 rend l'espace $M_k(\Gamma(1))$ de dimension finie. L'une des choses que l'on fera c'est calculer les dimensions de ces espaces.

Notons que si $z \in \mathbf{C}$, alors $|e^{2i\pi z}| = e^{-2\pi \operatorname{Im} z}$. Soit $D = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ le disque unité ouvert. On considère l'application

$$\begin{aligned} q : \mathbb{H} &\rightarrow D - \{0\} \\ \tau &\mapsto e^{2i\pi\tau}. \end{aligned}$$

Cette application induit une bijection $\langle T \rangle \backslash \mathbb{H} \simeq D - \{0\}$. Autrement dit, si $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbf{C}$ est telle que $f(\tau + 1) = f(\tau)$ il existe une unique fonction $\tilde{f} : D - \{0\} \rightarrow \mathbf{C}$ telle que $f(\tau) = \tilde{f}(q)$.

Soit $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbf{C}$ telle que $f(\tau + 1) = f(\tau)$. Observons que f est une fonction holomorphe si, et seulement si, \tilde{f} est une fonction holomorphe sur $D - \{0\}$. En effet, pour tout $\tau_0 \in \mathbb{H}$, l'application q induit une bijection bi-holomorphe entre le voisinage ouvert $\{\tau \in \mathbb{H} : |\operatorname{Re}(\tau - \tau_0)| < 1/2\}$ de τ_0 dans \mathbb{H} et le voisinage ouvert $D - \mathbf{R}_{\leq 0} e^{2i\pi \operatorname{Re} \tau_0}$ de $q(\tau_0)$ (un inverse s'obtient en considérant une branche du logarithme complexe). Si f est holomorphe il y a donc équivalence entre :

- (1) $f(\tau)$ admet une limite finie quand $\operatorname{Im} \tau \rightarrow \infty$;
- (2) $|f(\tau)|$ est bornée sur $\{\tau \in \mathbb{H} : \operatorname{Im} \tau > 1\}$;
- (3) $|\tilde{f}(q)|$ est bornée au voisinage de $q = 0$;
- (4) $\tilde{f}(q)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur tout D ;
- (5) $\tilde{f}(q)$ admet un développement en série entière en 0 de rayon de convergence ≥ 1 .

Dans ce cas on dira que f est *holomorphe à l'infini*.

Proposition-Définition 2.2.2. — Soit $f \in M_k(\Gamma(1))$. La forme f admet un unique développement

$$f(\tau) = \sum_{n \geq 0} a_n(f) q^n$$

avec $a_n(f) \in \mathbf{C}$ pour tout entier $n \geq 0$ normalement convergent sur toute partie de \mathbb{H} de la forme $\operatorname{Im} \tau > A$, $A \in \mathbf{R}_{>0}$. Ce développement est appelé *développement de Fourier*, ou *q-développement*, de la forme f et les $a_n(f)$ sont ses coefficients de Fourier. On a $a_0(f) = f(\infty)$.

Remarque 2.7. — Comme nous le verrons, et de manière un peu surprenante, la suite des coefficients de Fourier de chaque forme modulaire est en général d'un intérêt arithmétique considérable.

Si l'on assouplit un peu la contrainte d'holomorphie sur les formes modulaires, on a la définition suivante.

Définition 2.8. — Une *fonction* modulaire de poids k (de niveau $\Gamma(1)$) est une fonction méromorphe $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbf{C}$ telle que :

- (1) f est faiblement modulaire de poids k (de niveau $\Gamma(1)$).
- (2) $f(\tau)$ est méromorphe à l'infini, c'est-à-dire, elle admet un q -développement de la forme $f(\tau) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n(f) q^n$, avec $a_n = 0$ si $n \ll 0$.

On verra également que l'on peut assouplir encore plus ces conditions en considérant des formes modulaires *analytiques réelles* du paramètre τ , comme par exemple la série d'Eisenstein $E(\tau, s)$. On parle alors de formes de Maass.

2.2.1. Formes modulaires comme fonctions de réseaux. — On rappelle qu'un réseau dans un \mathbf{R} -espace vectoriel V de dimension finie est un sous-groupe Λ de V satisfaisant aux conditions équivalentes suivantes :

- (1) Λ est discret et V/Λ est compact;
- (2) Λ est discret et engendre le \mathbf{R} -espace vectoriel V ;
- (3) Il existe une \mathbf{R} -base (e_1, \dots, e_n) de V qui est une \mathbf{Z} -base de Λ (c'est-à-dire $\Lambda = \mathbf{Z}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbf{Z}e_n$).

Soit \mathcal{R} l'ensemble des réseaux de \mathbf{C} en tant que \mathbf{R} -espace vectoriel.

Maintenant, un réseau $\Lambda \in \mathcal{R}$ admet une base (ω_1, ω_2) comme \mathbf{Z} -module. Toutes les bases se déduisent l'une de l'autre par action de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$ sur le vecteur colonne $\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^2$. On peut ordonner la base de sorte que $\mathrm{Im}(\omega_1/\omega_2) > 0$.

Les bases ainsi ordonnées se déduisent l'une de l'autre par action de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. On obtient ainsi une bijection entre l'ensemble \mathcal{R} des réseaux et l'ensemble $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \backslash \mathcal{V}$ des vecteurs $\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^2$ avec $\omega_1/\omega_2 \in \mathbb{H}$ modulo l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. Via cette bijection, l'action par homothétie de \mathbf{C}^\times sur \mathcal{R} correspond à l'action par homothétie sur \mathcal{V} . L'application $\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \mapsto \omega_1/\omega_2$ induit une bijection de $\mathcal{V}/\mathbf{C}^\times$ sur \mathbb{H} . On déduit :

Proposition 2.9. — *L'application $\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \mapsto \omega_1/\omega_2$ induit par passage au quotient une bijection entre*

$$\mathcal{R}/\mathbf{C}^\times \simeq \mathbb{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) := Y(1).$$

Remarque 2.10. — On apprend, par exemple dans le cours de courbes elliptiques, que l'on peut associer à chaque réseau $\Lambda \in \mathbf{C}$ une courbe elliptique $E_\Lambda = \mathbf{C}/\Lambda$. Deux réseaux Λ et Λ' définissent des courbes elliptiques isomorphes si et seulement si ils sont homothétiques. Cela donne une troisième interprétation de $Y(1)$: c'est l'ensemble des classes d'isomorphisme de courbes elliptiques (le mot "modulaire" renvoie à la notion d'"espace de module", *i.e.* d'espace qui classe certains objets.)

Revenons maintenant aux formes modulaires de niveau $\Gamma(1)$. Il est intéressant d'exprimer la propriété de modularité en termes de fonctions sur les réseaux.

Une fonction sur \mathcal{R} est dite homogène de poids k si

$$\forall \Lambda \in \mathcal{R}, \forall \alpha \in \mathbf{C}^\times, \varphi(\alpha\Lambda) = \alpha^{-k}\varphi(\Lambda)$$

Notons $\Lambda_\tau := \tau\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$. L'égalité $\Lambda_{\gamma\tau} = j(\gamma, \tau)^{-1}\Lambda_\tau$ montre que l'application $\varphi \mapsto f$ définie par $f(\tau) = \varphi(\Lambda_\tau)$ est une bijection

$$\{\text{Fonctions homogènes de poids } k \text{ sur } \mathcal{R}\} \leftrightarrow \{\text{Fonctions faiblement modulaires de poids } k \text{ de niveau } \Gamma(1)\}$$

dont la bijection réciproque est donnée par $\varphi(\Lambda) = \omega_2^{-k} f(\omega_1/\omega_2)$ où $\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$ est n'importe quelle base de Λ telle que $\omega_1/\omega_2 \in \mathbb{H}$.

On peut donc identifier les formes modulaires de poids k (et niveau $\Gamma(1)$) avec certaines fonctions de homogènes de poids k sur \mathcal{R} .

2.2.2. Exemples: séries d'Eisenstein. — La manière la plus naïve de fabriquer une fonction de poids k sur \mathcal{R} est de poser

$$G_k(\Lambda) := \sum_{\omega \in \Lambda^*} \frac{1}{\omega^k}$$

où $\Lambda^* = \Lambda \setminus \{0\}$. La fonction correspondante sur \mathbb{H} s'écrit

$$\sum_{(m,n) \in (\mathbf{Z}^2)^*} \frac{1}{(m\tau + n)^k}.$$

Proposition 2.11. — Soit $k \geq 4$ un entier pair. La série $\sum_{(m,n) \in (\mathbf{Z}^2)^*} \frac{1}{(m\tau + n)^k}$ est absolument convergente sur \mathbb{H} . On note $G_k(\tau)$ sa somme. Alors $G_k \in M_k(\Gamma(1))$ et $G_k(\infty) = 2\zeta(k)$. En particulier $G_k \neq 0$.

Démonstration. — C'est une reformulation de la Prop. 1.1. □

Remarque 2.12. — Si $k \geq 4$ on pose $E_k = \frac{1}{2\zeta(k)} G_k \in M_k(\Gamma(1))$ la série de Eisenstein normalisée de sorte que l'on ait $E_k(\infty) = 1$. L'application :

$$\begin{aligned} M_k(\Gamma(1)) &\rightarrow \mathbf{C} \\ f &\mapsto f(\infty) \end{aligned}$$

est une application linéaire. Son noyau, noté $S_k(\Gamma(1))$, est le sous-espace des formes modulaires paraboliques ("cuspidal" en anglais). Si $k \geq 4$ il est donc engendré par tous les éléments de la forme $f - f(\infty)E_k$.

Corollaire 2.13. — Pour tout entier pair $k \geq 4$ on a $M_k = S_k \oplus \mathbf{C}G_k$.

Remarque 2.14 (Lien avec les courbes elliptiques). — Soit $\Lambda \in \mathcal{R}$ et considérons la série de la variable $x \in \mathbf{C}$

$$\wp'_\Lambda(x) = -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(x - \omega)^3}.$$

Elle converge normalement sur tout domaine fondamental pour Λ , une fois qu'on enlève le nombre fini de termes qui y ont un pôle. Cette fonction est donc Λ -périodique, holomorphe

en dehors de Λ et possède des pôles d'ordre 3 en chaque $\omega \in \Lambda$. Cette fonction admet une primitive, la fonction \wp_Λ de Weierstrass en $x \in \mathbf{C}$

$$\wp_\Lambda(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{\omega \in \Lambda} \left(\frac{1}{(x - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

elle aussi Λ -périodique et méromorphe, mais avec des pôles d'ordre 2 en $\omega \in \Lambda$.

Ainsi \wp_Λ et \wp'_Λ descendent en des fonctions méromorphes sur \mathbf{C}/Λ . Les $G_k(\Lambda)$ apparaissent dans le développement de Laurent de \wp_Λ :

$$\wp_\Lambda(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{k=2}^{\infty} (2k-1)G_{2k}(\Lambda)x^{2k-2}.$$

En raisonnant sur les pôles possibles d'une fonction méromorphe générale sur \mathbf{C}/Λ , on montre que les corps de fonctions méromorphes Λ -périodiques $\mathcal{M}_{\mathbf{C}/\Lambda}$ est égal à $\mathbf{C}(\wp_\Lambda, \wp'_\Lambda)$. Avec le même genre d'idées, on montre que la fonction

$$\wp_\Lambda'^2 - 4\wp_\Lambda^3 + g_2(\Lambda)\wp_\Lambda + g_3(\Lambda)$$

(où $g_2(\Lambda) = 60G_4(\Lambda)$ et $g_3(\Lambda) = 140G_6(\Lambda)$) est holomorphe, donc constante, puis nulle. Ceci donne une présentation du corps $\mathcal{M}_{\mathbf{C}/\Lambda}$ et montre que l'application

$$\mathbf{C}/\Lambda \longrightarrow \mathbf{P}^2(\mathbf{C}), \quad x \neq 0 \mapsto [\wp(x) : \wp'(x) : 1], \quad 0 \mapsto [0 : 1 : 0]$$

est un isomorphisme de \mathbf{C}/Λ sur la surface de Riemann associée à la courbe elliptique d'équation

$$(2.4) \quad y^2 = 4x^3 - g_2(\Lambda)x - g_3(\Lambda).$$

Cette courbe est non-singulière : si $\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^2$ est une base de Λ et que l'on note $e_1 = \wp_\Lambda(\omega_1/2)$, $e_2 = \wp_\Lambda(\omega_2/2)$ et $e_3 = \wp_\Lambda(\frac{\omega_1+\omega_2}{2})$ on montre que (2.4) s'écrit sous la forme

$$y^2 = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3).$$

Définition 2.15 (Fonction Δ de Ramanujan). — La fonction $\Delta = \frac{1}{1728}(E_4^3 - E_6^2) = q - 24q^2 + 252q^3 + \dots$ est une forme modulaire parabolique de poids 12 et niveau $\Gamma(1)$.

2.3. Calcul des dimensions. — Le théorème principal de cette section est le suivant :

Théorème 2.16. — Soit $k \in \mathbf{Z}$.

(1) L'espace $M_k(\Gamma(1))$ admet pour base les $E_4^r E_6^s$ avec $(r, s) \in \mathbf{N}^2$ vérifiant $4r + 6s = k$ (c'est-à-dire l'algèbre $M(\Gamma(1))$ est l'algèbre des polynômes en E_4 et E_6).

(2)

$$\dim_{\mathbf{C}}(M_k(\Gamma(1))) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ impair} \\ \lfloor \frac{k}{12} \rfloor & \text{si } k \equiv 2 \pmod{12} \\ \lfloor \frac{k}{12} \rfloor + 1 & \text{si } k \equiv 0, 4, 6, 8, 10 \pmod{12} \end{cases}$$

(3) La multiplication par Δ définit un isomorphisme :

$$\begin{aligned} M_{k-12}(\Gamma(1)) &\simeq S_k(\Gamma(1)) \\ f &\mapsto \Delta f. \end{aligned}$$

Démonstration. — Le plan de la preuve est le suivant :

- On calcule à la main les dimensions de $M_k(\Gamma(1))$, $k \leq 10$.
- On prouve (3).
- Par récurrence et le corollaire 2.13 on déduit (2).
- On prouve (1).

Soient $f \in M_k(\Gamma(1))$ et $P \in \mathbb{H}$. L'entier n tel que $f(\tau)/(\tau - P)^n$ est holomorphe et non-zéro en P s'appelle l'ordre de f en P et on le note $v_P(f)$. On note aussi e_P le cardinal du stabilisateur de P dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$. Les entiers $v_P(f)$ et e_P ne dépendent que de la $\Gamma(1)$ -orbite de P (pour e_P c'est clair; pour $v_P(f)$ cela découle du fait que pour tout $\gamma \in \Gamma(1)$, on a $f(\gamma P) = j(\gamma, P)^k f(P)$).

De plus d'après le théorème 2.1, on a $e_i = 2$, $e_\rho = 3$ et $e_P = 1$ si P n'est pas dans l'orbite de i ou ρ . On note enfin $v_\infty(f)$ l'ordre d'annulation de \tilde{f} en 0. La clé dans la preuve du théorème 2.16 est le lemme suivant :

Lemme 2.17 (Lemme $k/12$). — Soient $k \in \mathbf{Z}$, $f \in M_k(\Gamma(1))$ non nulle. On a la relation :

$$v_\infty(f) + \sum_{P \in \Gamma \backslash \mathbb{H}} \frac{v_P(f)}{e_P} = \frac{k}{12}.$$

Remarque 2.18. — On peut aussi écrire cette formule sous la forme

$$(2.5) \quad v_\infty(f) + \frac{v_i(f)}{2} + \frac{v_\rho(f)}{3} + \sum_P v_P(f) = \frac{k}{12}$$

la somme portant sur les points de $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ différents des classes de i et de ρ .

Remarque 2.19. — Toutes les quantités de cet énoncé sont positives et il fait partie de l'énoncé que la somme de gauche est en fait une somme finie.

Démonstration. — Soit $f \in M_k(\Gamma(1))$ non nulle. Rappelons que la $\Gamma(1)$ -orbite de tout zéro de f rencontre le domaine \mathcal{F} . Si $r > 0$ est un réel, posons $\Omega_r = \{\tau \in \mathbb{H}, \mathrm{Im} \tau > r\}$. La fonction \tilde{f} étant holomorphe en 0, il existe $r > 0$ tel que f n'admette pas de zéro dans Ω_r . La partie $\mathcal{F} - \Omega_r$ étant compacte, la fonction holomorphe f n'y admet qu'un nombre fini de zéros (qui sont isolés). Cela montre que le nombre de $\Gamma(1)$ -orbites de points constitués de zéros de f est fini (et donc que la somme apparaissant dans la formule (2.5) a tous ses termes nuls sauf au plus un nombre fini d'entre eux).

Considérons le contour \mathcal{C} indiqué par la figure 2. Sur cette figure, les zéros éventuels de f qui sont dans $\partial \mathcal{F} - \{i, \rho, -\rho^2\}$ et de partie réelle $1/2$ (resp. de module 1) sont notés λ (resp. μ). En particulier ce contour ne contient aucun zéro de f . On suppose que chaque portion de cercle dessinée est de rayon suffisamment petit de sorte que le

disque bordé ne contienne que le point indiqué pour éventuel zéro (c'est-à-dire $i, \rho, -\rho^2$, l'un des $\lambda, \lambda + 1$ ou l'un des $\mu, -1/\mu$).

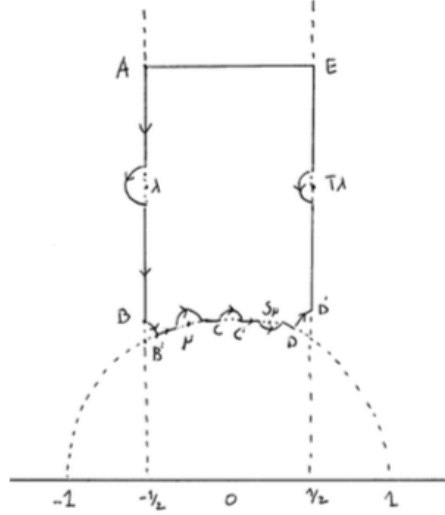


FIGURE 2. Le contour \mathcal{C} dans la preuve du lemme $k/12$

Nous noterons γ_{XY} le chemin portion de \mathcal{C} allant de X à Y (dans ce sens). Le chemin $\gamma_{D'E}$ est par définition le chemin $T\gamma_{BA}$. De même on a choisi $\gamma_{C'D} = S\gamma_{CB'}$. Enfin on suppose que γ_{EA} est de partie imaginaire r suffisamment grande de sorte qu'aucun zéro de f ne soit de partie imaginaire $> r$. L'existence d'un tel contour est justifié par le fait que les zéros sont isolés. Remarquons qu'on a construit notre parcours de sorte que chaque $\Gamma(1)$ -orbite d'un zéro contient exactement un représentant dans l'intérieur de \mathcal{C} sauf pour i et ρ qu'on laisse à l'extérieur.

La formule des résidus s'écrit alors :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau = \sum_P v_P(f)$$

la somme portant sur les points de $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ différents des classes de i et de ρ .

Examinons maintenant les contributions des diverses portions du contour.

(1) Les fonctions f et f' étant T -invariantes on observe d'abord que :

$$\int_{\gamma_{AB}} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau = \int_{T\gamma_{AB}} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau = - \int_{\gamma_{D'E}} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau.$$

(2) Le chemin $\omega(t) := e^{2\pi i \gamma_{EA}(t)}$ est un cercle de centre 0 dans D faisant un tour dans le sens indirect. On en déduit :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{EA}} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau = \frac{1}{2i\pi} \int_{\omega} \frac{\tilde{f}'(q)}{\tilde{f}(q)} dq = -v_{\infty}(f).$$

(3) De plus par modularité on a

$$\frac{((f \circ S)(\tau))'}{f \circ S(\tau)} = \frac{k}{\tau} + \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}$$

de sorte que :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{B'C}} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{B'C}} \frac{k}{\tau} d\tau + \frac{1}{2i\pi} \int_{S\gamma_{B'C}} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau$$

avec $\gamma_{C'D} = S\gamma_{CB'}$.

Lorsque le point B' tend vers ρ , C tend vers i , et lorsque les portions de cercles autour des points notés μ sont de rayon tendant vers 0 alors l'intégrale $\frac{1}{i} \int_{\gamma_{B'C}} \frac{1}{\tau}$ tend vers l'angle orienté défini par ρ , 0 et i c'est-à-dire $-\frac{\pi}{6}$.

(4) De même lorsque B et B' tendent vers ρ alors l'intégrale de chemin

$$\frac{1}{i} \int_{\gamma_{BB'}} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau$$

tend vers l'angle orienté défini par B , i et B' (c'est-à-dire $-\frac{\pi}{3}$) multiplié par $v_\rho(f)$.

(5) Enfin lorsque C et C' tendent vers i alors l'intégrale de chemin

$$\frac{1}{i} \int_{\gamma_{CC'}} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau$$

tend vers $\pi v_i(f)$.

On conclut mettant les identités bout à bout. □

Montrons finalement le théorème 2.16

On sait que $M_k(\Gamma(1))$ est nul si k est impair. Si on fait $k = 2$ ou $k < 0$, puisque chacun des $\text{ord}_\tau(f)$ dans (2.5) est ≥ 0 , on constate qu'il n'y a pas de f satisfaisant cette égalité. Donc

$$M_k(\Gamma(1)) = 0$$

si $k = 2$ ou $k < 0$.

On a pour les mêmes raisons que $S_k = 0$ si $k < 12$ car $v_\infty(f) \geq 1$ et $M_0 = \mathbf{C}$. On déduit du corollaire 2.13 que $M_k = \mathbf{C}E_k$ si $k = 4, 6, 8$ ou 10 .

Si on applique la formule (2.5) à $k = 4$ et $f = E_4$ on déduit que $E_4(i) \neq 0$ (car $E_4(\rho) = 0$ par la remarque 2.6(2)).

Si on applique la formule (2.5) à Δ , on en déduit que

$$S_{12}(\Gamma(1)) = \mathbf{C} \cdot \Delta,$$

et en particulier les deux définitions précédentes de Δ coïncident d'après la Prop. 1.3.2 : il n'y a qu'une seule forme de poids 12 dont le développement de Fourier commence par q , et l'on a donc l'identité

$$\Delta(\tau) = q \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{24} = \frac{1}{1728} (E_4^3 - E_6^2).$$

Maintenant, puisque Δ ne s'annule pas sur \mathbb{H} (au vu de son produit infini, ou bien au vu du lemme $k/12$ en poids $k = 12$), l'application $f \mapsto \Delta \cdot f$ induit un isomorphisme

$$M_k(\Gamma(1)) \simeq S_{k+12}(\Gamma(1))$$

pour tout $k \in \mathbf{N}$. Grâce aux calculs des M_k pour $k < 12$ et au corollaire 2.13 on en déduit

$$\dim_{\mathbf{C}}(M_k(\Gamma(1))) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ impair} \\ \lfloor \frac{k}{12} \rfloor & \text{si } k \equiv 2 \pmod{12} \\ \lfloor \frac{k}{12} \rfloor + 1 & \text{si } k \equiv 0, 4, 6, 8, 10 \pmod{12} \end{cases}$$

Prouvons enfin que l'algèbre $M(\Gamma(1))$ est l'algèbre des polynômes en E_4 et E_6 .

Il s'agit de montrer que pour $k \in 2\mathbf{N}$, la famille des $E_4^n E_6^m$ où $n, m \in \mathbf{N}$ et $4n + 6m = k$ est une base de $M_k(\Gamma(1))$. On l'a déjà vérifié pour $k \leq 10$.

Montrons par récurrence que cette famille est génératrice pour $k \geq 12$. Choisissons pour cela n, m tels que $4n + 6m = k$, et soit $f \in M_k$. Puisque $E_4^n E_6^m(\infty) = 1$ alors $f - E_4^n E_6^m f(\infty)$ est parabolique. Mais alors $f - \lambda E_4^n E_6^m f(\infty) = \Delta g$ pour $g \in M_{k-12}$, et par récurrence, on conclut que $f \in \mathbf{C}[E_4, E_6]$.

Montrons maintenant que cette famille est libre. On a besoin du

Lemme 2.3.1. — Soient f_1, \dots, f_N des formes modulaires non-nulles de poids distincts. Elles forment une famille libre sur \mathbf{C} .

Démonstration. — (du lemme). Supposons $a_1 f_1 + \dots + a_N f_N = 0$. Pour toute matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$ et $t \in \mathbb{H}$ on a donc $a_1 (c\tau + d)^{k_1} f_1(\tau) + \dots + a_N (c\tau + d)^{k_N} f_N(\tau) = 0$. En fixant $d = 1$, c'est une équation polynomiale en c avec une infinité de solutions $c \in \mathbb{Z}$. Comme les polynômes $(c\tau + 1)^{k_j}$ sont de degrés k_j échelonnés, chacun des coefficients est nul, ce qui implique que les a_j sont nuls. \square

Supposons maintenant que E_4, E_6 sont algébriquement dépendants. Il existe alors $P \in \mathbf{C}[X, Y]$ qui vérifie $P(E_4, E_6) = 0$. D'après le lemme, on peut identifier dans cette égalité les composantes qui sont des formes modulaires de poids $h \geq 0$. Pour chaque $h \geq 0$ fixé, on a donc une identité $\sum_{n, m \geq 0, 4n + 6m = h} a_{n, m} E_4^n E_6^m = 0$ où tous les coefficients $a_{n, m}$ sont non-nuls. Soit (n_0, m_0) tel que $4n_0 + 6m_0 = h$ avec $m_0 \geq 0$ maximal. En évaluant $E_4^{n_0} E_6^{m_0}$ en $\tau = i$, on trouve un zéro d'ordre exactement m_0 , tandis que les autres termes s'annulent à un ordre $< m_0$. Ceci implique que $m_0 = 0$, donc que E_6 n'apparaît pas dans ces identités. Il ne reste que des relations algébriques impliquant E_4 , et le même raisonnement sur l'ordre d'annulation en $\tau = \rho$ de E_4^n (ou le lemme 2.3.1) permet de conclure. \square

Remarque 2.20. — Le lemme $k/12$ est aussi vrai pour des fonctions modulaires. Dans ce cas les $v_P(f)$ sont des entiers non nécessairement positifs.

2.4. Exemples. — La théorie de formes modulaires a fait l'objet de plusieurs conjectures célèbres comme la conjecture de Ramanujan ou la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil. L'une des beautés de cette théorie sont ses applications arithmétiques. On va en donner quelques exemples dans ce paragraphe.

2.4.1. — Posons $q = \exp(2i\pi z)$. Les formes ou fonctions modulaires ci-dessus ont des q -développements remarquables obtenus à une époque où les "fonctions spéciales" avaient la primauté. Un exercice de TD expliquera le développement

$$(2.6) \quad E_k(z) := \frac{1}{2\zeta(k)} G_k(z) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

où les B_k sont les nombres de Bernoulli et $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$. On montrera que les B_k sont rationnels et faciles à calculer. En particulier E_4 et E_6 sont à coefficients entiers comme le montre le tableau suivant : Par dimensions on a $E_4^2 = E_8$ et donc on trouve

k	2	4	6	8	10	12	14	16
$-\frac{2k}{B_k}$	-24	240	-504	480	-264	65520/691	-24	16320/3617

$$\sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120 \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_3(i) \sigma_3(n-i)$$

On a aussi $E_4 E_6 = E_{10}$ d'où on peut déduire la relation

$$11\sigma_9(n) = 21\sigma_5(n) - 10\sigma_3(n) + 5040 \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_3(i) \sigma_5(n-i).$$

Ces identités sont tout à fait non triviales!

On peut maintenant expliquer la normalisation $\frac{1}{1728}$ de Δ . Puisque $1728 = 2 \times 504 + 3 \times 240$, en développant la définition 2.15 et la formule (2.6) pour $k = 4, 6$ on trouve que :

$$\Delta = q - 24q^2 + 252q^3 + \dots$$

On verra plus loin d'autres propriétés remarquables des coefficients de Δ , dues à Ramanujan.

2.5. Rationalité des coefficients de Fourier. — La table précédente montre que E_4, E_6, E_8, E_{10} ont des coefficients de Fourier *entiers*. En particulier, l'algèbre $\mathbb{C}[E_4, E_6]$ est engendrée par des formes modulaires à coefficients de Fourier entiers.

Corollaire 2.5.1. — $M_k(\Gamma(1))$ possède une \mathbb{C} -base constituée de formes modulaires $E_4^n E_6^m$ à coefficients entiers.

Ce phénomène est riche de promesses, puisqu'il signale une structure arithmétique plus fine, sur \mathbb{Q} et même \mathbb{Z} . : il est louable d'étudier le sous-anneau des formes modulaires à coefficients dans \mathbb{Z} , ou même de regarder leur réduction \pmod{p} ... ce qu'ont initié Swinnerton-Dyer et Serre, et qui a conduit aux formes modulaires p -adiques.

Dans cette partie, on se contentera de définir $M_k(\Gamma(1), \mathbb{Q})$, resp. $M_k(\Gamma(1), \mathbb{Z})$, le sous-groupe de $M_k(\Gamma(1))$ formé des formes modulaires dont tous les coefficients de Fourier sont rationnels, resp. entiers.

Proposition 2.21. —

$$\dim_{\mathbb{Q}} M_k(\Gamma(1), \mathbb{Q}) = \dim_{\mathbb{C}} M_k(\Gamma(1)).$$

Par ailleurs, $M_k(\Gamma(1), \mathbb{Z})$ possède une \mathbb{Z} -base.

Démonstration. — La famille des $E_4^n E_6^m$ est une \mathbb{C} -base de $M_k(\Gamma(1))$, elle est donc libre sur \mathbb{Q} . De plus l'application a_n qui à f associe son n -ième coefficient de Fourier $a_n(f)$ est une forme linéaire sur $M_k(\Gamma(1))$, et sur $M_k(\Gamma(1), \mathbb{Q})$. L'orthogonal de $\text{Vect}(a_n)$ est réduit à $\{0\}$, car si une forme a tous ses coeff. de Fourier nuls, elle est nulle. $M_k(\Gamma(1))$ étant un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie d_k , on en déduit par dualité que les formes linéaires a_n engendrent le dual $M_k(\Gamma(1))^*$ de $M_k(\Gamma(1))$. Il existe donc une collection de d_k coefficients de Fourier $a_{n_l}(f), l = 1, \dots, d_k$ qui caractérisent $f \in M_k(\Gamma(1))$ (ce ne sont toutefois pas forcément ses premiers d_k coefficients). Soit maintenant $f \in M_k(\Gamma(1), \mathbb{Q})$. Le rang, sur \mathbb{C} ou \mathbb{Q} , de la famille des $(f, E_4^n E_6^m)_{4n+6m=k}$ est alors d_k , puisque l'on peut calculer ce rang comme étant celui d'une matrice carrée à coefficients rationnels, celle de taille $d_k + 1$ formée de leurs coefficients de Fourier a_{n_l} . Montrons finalement par récurrence sur le poids k que $M_k(\Gamma(1), \mathbb{Z})$ possède une base à coefficients entiers. On l'a vérifié pour $k < 12$. De plus, toute forme f s'écrit $f = a_0 E_4^n E_6^m + \Delta g$, avec a_0 complexe et g a priori de poids $k - 12$. Lorsque f est à coefficients entiers, alors $a_0 = f(\infty)$ est entier. De plus, Δg est à coefficients entiers, ce qui implique que g l'est, puisque $\Delta = q + \dots \in \mathbb{Z}[[q]]$ est "unitaire", i.e. commence par q . On conclut par récurrence sur k . (NB : il n'est pas vrai que la base est de la forme $E_4^n E_6^m$, le poids $k = 12$ fournit déjà un contre-exemple). \square

3. j -invariant et multiplication complexe.

3.1. L'invariant j . — On définit $j = \frac{E_4^3}{\Delta}$

Proposition 3.1. — (1) j est une fonction modulaire de poids 0.

(2) j a un zéro en $\tau = \rho$ et un pôle simple à l'infini.

(3) Par passage au quotient j définit une bijection :

$$j : \Gamma(1) \backslash \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Démonstration. — 1) est une conséquence du fait que $E_4^3, \Delta \in M_{12}(\Gamma(1))$. 2) découle de l'étude de zéros de E_4 et Δ dans la preuve du théorème 2.16. Prouvons 3). Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Il suffit alors de montrer que la forme modulaire $f_\lambda = E_4^3 - \lambda \Delta$ a un unique zéro modulo $\Gamma(1)$. Si on applique le lemme $k/12$ à f_λ on voit que les seules solutions possibles sont :

- (1) Il existe $P \neq i, \rho$ tel que f_λ a un zéro simple en P et pas d'autre zéros ailleurs.
- (2) i est un zéro double de f_λ qui n'a pas d'autre zéro ailleurs.
- (3) ρ est un zéro triple de f_λ qui n'a pas d'autre zéro ailleurs.

Dans tous les cas on conclut que f_λ a un et un seul zéro. \square

Remarque 3.2. — Si on note $\{Ell\}$ l'ensemble de courbes elliptiques à isomorphisme près on a vu une série des bijections :

$$\{Ell\} \longleftrightarrow \mathcal{R}/\mathbf{C} \longleftrightarrow \Gamma(1)\backslash\mathbb{H} \longleftrightarrow \mathbf{C}$$

$$E_\Lambda \longleftarrow \Lambda \longrightarrow \tau_\Lambda \longrightarrow j(\tau_\Lambda)$$

Via ces bijections, on associe à chaque courbe elliptique E_Λ un invariant $j(\tau_\Lambda)$, appelé invariant j , qui a des très bonnes propriétés.

Proposition 3.3. — Soit $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction méromorphe. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) f est une fonction modulaire de poids 0.
- (ii) f est le quotient de deux formes modulaires de même poids.
- (iii) f est une fonction rationnelle en $j : f \in \mathbb{C}(j)$.

Démonstration. — Il est clair que (iii) implique (ii) et que (ii) implique (i). Montrons que (i) implique (iii). Soit f une fonction modulaire. Puisque j n'a qu'un seul zéro (en ρ), quitte à multiplier f par un polynôme en j on peut supposer que f est holomorphe sur \mathbb{H} . De même il existe n tel que $g := \Delta^n f$ est holomorphe à l'infini. Alors $g \in M_{12n}(\Gamma(1))$. Elle donc une combinaison linéaire des $E_4^r E_6^s$ avec $4r + 6s = 12n$. Par linéarité il suffit donc de montrer la proposition pour $g = E_4^r E_6^s$ avec $4r + 6s = 12n$, c'est-à-dire, $f = \frac{E_4^r E_6^s}{\Delta^n}$. Mais $4r + 6s = 12n$ implique que r est de la forme $3k$ et s est de la forme $2k'$ avec $k + k' = n$. Alors $f = \frac{E_4^{3k} E_6^{2k'}}{\Delta^{k+k'}}$. Il suffit enfin de montrer que $\frac{E_4^3}{\Delta}$ et $\frac{E_6^2}{\Delta}$ sont des fractions rationnelles en j ce qui est évident. \square

Remarque 3.4. — (1) On lit sur le développement de Fourier que $\frac{\Delta'(\tau)}{\Delta(\tau)} = 2\pi i E_2(\tau)$, où

$$(3.1) \quad E_2(\tau) := 1 - 24 \sum_{n \geq 1} \sigma_1(n) q^n$$

(on peut aussi introduire par analogie $G_2 = \frac{\pi^2}{3} E_2$). Comme $\Delta(-\frac{1}{\tau}) = \tau^{12} \Delta(\tau)$, on en déduit par un calcul direct que $E_2(-\frac{1}{\tau}) = \tau^2 E_2(\tau) + \frac{12}{2i\pi} \tau$. Plus généralement,

$$(3.2) \quad E_2\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^2 E_2(\tau) + \frac{12c}{2i\pi} (c\tau + d).$$

(2) On a

$$\begin{aligned} j(\tau) &:= \frac{E_4^3(\tau)}{\Delta(\tau)} = \frac{(1 + 240q + 2160q^2 + \dots)^3}{q - 24q^2 + 252q^3 + \dots} \\ &= \frac{1}{q} \frac{(1 + 240q + 2160q^2 + \dots)^3}{1 - 24q + 252q^2 + \dots} \\ &= \frac{1}{q} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + \dots \end{aligned}$$

Tous les coefficients de j sont donc aussi des entiers, puisque ceux de E_4^3 et $1/\Delta$ le sont. Si l'on écrit

$$j(\tau) = \frac{1}{q} + 744 + \sum_{n=1}^{\infty} c(n)q^n$$

les $c(n)$ satisfont des congruences remarquables :

$$\begin{aligned} n \equiv 0[2^a] &\Rightarrow c(n) \equiv 0[2^{3a+8}] \\ n \equiv 0[3^a] &\Rightarrow c(n) \equiv 0[3^{2a+3}] \\ n \equiv 0[5^a] &\Rightarrow c(n) \equiv 0[5^{a+1}] \\ n \equiv 0[7^a] &\Rightarrow c(n) \equiv 0[7^a] \\ n \equiv 0[11^a] &\Rightarrow c(n) \equiv 0[11^a] \end{aligned}$$

Voir le livre d'Apostol pour une preuve. Les coefficients $c(n)$, par exemple

$$196884 = r_2 + 1, \quad 21493760 = r_3 + r_2 + 1, \dots$$

ont aussi un rapport avec les dimensions r_j des représentations irréductibles du groupe Monstre, voir les articles de Conway, Borcherds 1992. Petersson (1932) puis Rademacher (1938), par des méthodes différentes, ont obtenu l'estimation asymptotique

$$c(n) \simeq \frac{e^{4\pi\sqrt{n}}}{\sqrt{2} n^{\frac{3}{4}}}.$$

Notons enfin la variante arithmétique de la Prop. 3.1 utilisée dans la suite (avec des A variés, entre autres $A = \mathbb{Q}$ et $A = \mathbb{Z}$) :

Proposition 3.5. — *Soit*

$$f = \frac{a_{-m}}{q^m} + \frac{a_{-(m-1)}}{q^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{q} + a_0 + a_1q + \dots$$

une fonction modulaire de poids zéro pour $\Gamma(1)$, holomorphe sur \mathcal{H} . Soit A un sous-anneau de \mathbb{C} contenant au moins ses $m + 1$ premiers coefficients de Fourier : $a_{-m}, \dots, a_0 \in A$. Alors $f \in A[j]$, c'est-à-dire que f est un polynôme en j à coefficients dans A .

Démonstration. — On procède par récurrence sur l'ordre $m \geq 0$ du pôle à l'infini de f . On déduit de la Rem. 3.4 que $j^m = 1/q^m + \dots$ est à coefficients de Fourier entiers, de sorte que $f - a_{-m}j^m$ est encore à coefficients de Fourier dans A , tandis que son pôle à l'infini est d'ordre $< m$. On conclut en observant que si f n'a pas de pôle à l'infini, alors elle est de poids zéro, holomorphe sur \mathbb{H} , donc elle est constante d'après le Th. 2.16. \square

3.2. Multiplication Complexe. — Soit $n \geq 1$ un entier. On note \mathcal{D}_n l'ensemble des matrices $M \in M_2(\mathbb{Z})$ de déterminant n .

Les matrices S et T opèrent par multiplication à gauche sur une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de \mathcal{D}_n et permettent d'effectuer l'algorithme d'Euclide entre a et c . On en déduit immédiatement (cf Lemme plus bas) qu'un système de représentants pour les orbites $SL_2(\mathbb{Z})\mathcal{D}_n$ est l'ensemble fini (de taille $\sigma_1(n)$)

$$(3.3) \quad S_n = \left\{ \alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_n, ad = n, a, d > 0, 0 \leq b < d \right\},$$

en associant à $M \in \mathcal{D}_n$ sa forme normale de Hermite $\alpha \in S_n$.

Pour $\tau \in \mathbb{H}$ on introduit alors le polynôme

$$(3.4) \quad \Phi_n(X, \tau) := \prod_{\alpha \in S_n} (X - j \circ \alpha) = \sum s_m(\tau) X^m.$$

On va montrer successivement que

- (1) $s_m(\tau)$ est $SL_2(\mathbb{Z})$ -invariante.
- (2) $s_m \in \mathbb{C}[j]$.
- (3) $s_m = P_m(j) \in \mathbb{Z}[j]$, de sorte que $F_n(X, Y) = \sum P_m(Y) X^m$ est dans $\mathbb{Z}[X, Y]$.
- (4) Le polynôme $H_n(X) := F_n(X, X) \in \mathbb{Z}[X]$ a pour coefficient dominant ± 1 lorsque n n'est pas un carré.

Démonstration. — (inspirée de Cox, et Silverman). Fixons $\gamma \in \Gamma(1)$. Comme S_n est un système de représentants, pour tout $\alpha \in S_n$ il existe un unique $\alpha' \in S_n, \delta \in \Gamma(1)$ tels que $\alpha\gamma = \delta\alpha'$, de sorte que $j(\alpha\gamma\tau) = j(\delta\alpha'\tau) = j(\alpha'\tau)$. L'application $i_\gamma : \alpha \mapsto \alpha'$ est une permutation de l'ensemble fini S_n , ce qui implique que $\Phi_n(X, \gamma\tau) = \Phi_n(X, \tau)$ et par suite $s_m(\gamma\tau) = s_m(\tau)$, ce qui prouve (1).

Comme les $j(\alpha\tau)$, et donc les $s_m(\tau)$, sont holomorphes sur \mathbb{H} , il suffit pour établir (2) de vérifier qu'elles sont méromorphes à la pointe infini. Le développement de Fourier de $j(\alpha\tau)$ est facile à calculer. Il s'écrit naturellement en termes des variables $Q = \exp(2i\pi\tau/n)$ et $\zeta = \exp(2i\pi/n)$, puisque l'on trouve par substitution

$$j(\alpha\tau) = j\left(\frac{a\tau + b}{d}\right) = j\left(\frac{a^2\tau + ab}{n}\right) = \frac{\zeta^{-ab}}{Q^{a^2}} + c_0 + \sum_{k \geq 1} c_k \zeta^{abk} Q^{a^2k},$$

où les $c_k \in \mathbb{Z}$ sont les coefficients du q -développement de $j(\tau)$. Il s'ensuit que les fonctions $Q^{n^2} j(\alpha\tau)$ et $Q^{n^2m} s_m(\tau)$, ou encore $Q^{n^2\sigma_1(n)} s_m(\tau)$, sont bornées, donc méromorphes, à la

pointe $\tau = i\infty$. Le point (2) résulte alors de la Prop. 3.5 avec $A = \mathbb{C}$. Il peut même être précisé en $s_m \in \mathbb{Z}[\zeta][j]$ en choisissant $A = \mathbb{Z}[\zeta]$ dans cette proposition.

Pour établir le point (3), commençons par montrer que les Q -coefficients de Fourier de $s_m(\tau)$ sont fixés par les automorphismes de corps de $\mathbb{Q}(\zeta)$. Pour $1 \leq r < n$ premier à n , nous notons $\Psi_r \in \text{Aut}(\mathbb{Q}(\zeta))$ l'automorphisme qui envoie ζ sur ζ^r . Alors Ψ_r agit sur les Q -coefficients de Fourier de $j(\alpha\tau)$ selon la règle

$$j(\alpha\tau)^{\Psi_r} = \frac{\zeta^{-abr}}{Q^{a^2}} + c_0 + \sum_{k \geq 1} c_k \zeta^{abr k} Q^{a^2 k} = j\left(\frac{a\tau + abr}{n}\right).$$

Notons $0 \leq b'_r < d$ le reste de la division euclidienne de br par d , et $\alpha'_r := \begin{pmatrix} a & b'_r \\ 0 & d \end{pmatrix} \in S_n$

la matrice correspondante. Le calcul précédent montre que $j(\alpha\tau)^{\Psi_r} = j(\alpha'_r\tau)$, et que Ψ_r induit une permutation des éléments $\alpha \in S_n$. Par suite, les coeff. du Q -développement de s_m sont invariants sous Ψ_r , ils sont donc rationnels. On a établi que s_m est 1-périodique, donc ce Q -développement est un q -développement. La Prop. 3.5 avec $A = \mathbb{Q}$ assure alors que $s_m \in \mathbb{Q}[j]$. Rappelons que s_m est aussi un polynôme en j à coefficients dans $\mathbb{Z}[\zeta]$. Comme l'anneau \mathbb{Z} est factoriel, il est intégralement clos, donc $\mathbb{Z}[\zeta] \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ et le point (3) est prouvé.

Pour prouver (4), on calcule le Q -coefficients de Fourier de tête de

$$F_n(j, j) = \prod_{\alpha \in S_n} \left(\left(\frac{1}{Q^n} + \dots \right) - \left(\frac{\zeta^{-ab}}{Q^{a^2}} - \dots \right) \right).$$

Lorsque n n'est pas un carré, $Q^{-a^2}\zeta^{-ab}$ n'est pas compensé par Q^n , donc ce coefficient de tête est une racine de l'unité. Le coefficient dominant de $H_n(X, X)$ est le produit de ces racines de l'unités. Comme il est aussi dans \mathbb{Z} , c'est donc ± 1 . □

Corollaire 3.2.1. — (*forme faible de la Multiplication Complexe*). Soit $\tau_0 \in \mathbb{H}$ qui appartient à un corps quadratique imaginaire K . (on dit alors que τ_0 est un point CM, à Multiplication Complexe). Alors $j(\tau_0)$ est algébrique sur \mathbb{Q} . C'est même un entier algébrique.

Démonstration. — Il suffit, d'après ce qui précède, de montrer que $j(\tau_0)$ annule un des polynômes $H_n(X) \in \mathbb{Z}[X]$ pour un entier n qui n'est pas un carré parfait. Or, par hypothèse τ_0 satisfait une équation quadratique $A\tau_0^2 + B\tau_0 + C$ avec des entiers (A, B, C) , et $n_0 = 4AC - B^2 > 0$. Comme τ_0 est fixé par la matrice $\begin{pmatrix} -B & -2C \\ 2A & B \end{pmatrix}$ de déterminant n_0 , on a bien $H_{n_0}(j(\tau_0)) = 0$, ce qui conclut d'après le point (4) précédent lorsque n_0 n'est pas un carré parfait.

Lorsque $n_0 = t^2$ est un carré parfait, alors $\tau_0 \in \mathbb{Q}(i)$. Nous traitons séparément ce cas, avec une méthode qui met en valeur les *endomorphismes supplémentaires* dont jouissent les réseaux engendrés par un point à Multiplication Complexe.

Commençons par supposer que $\mathbb{Z}\tau_0 + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}[i]$. Choisissons $\rho \in \mathbb{Z}[i]$ dont la norme $\rho\bar{\rho}$ n'est pas un carré, par exemple $\rho = 1 + i$. (en particulier, un tel ρ n'est pas dans \mathbb{Z}). En écrivant que la multiplication par ρ est un endomorphisme $\mathbb{Z}[i]$, il vient $\rho = c\tau_0 + d$, $\rho\tau_0 = a\tau_0 + b$, et l'on obtient τ_0 comme point fixe de la matrice $\beta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à coefficients entiers. Son déterminant satisfait $\text{Im}(\tau_0) = (ad - bc)\text{Im}(\tau_0)/|c\tau_0 + d|^2$. Ce dénominateur est $|c\tau_0 + d|^2 = \rho\bar{\rho} = 2$, de sorte que $ad - bc = 2$ n'est pas un carré, et β est dans S_2 . On conclut encore avec le point (4) précédent.

On suppose maintenant seulement que $\Lambda = \mathbb{Z}\tau_0 + \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}(i)$ est un groupe abélien de rang 2. Alors, en chassant les dénominateurs de τ_0 , on peut trouver entier $N > 0$ tel que $N\Lambda$ est un sous-groupe d'indice fini m de $\mathbb{Z}[i]$. En écrivant cette fois que $m\rho N\Lambda = c\tau_0 + d$ et $m\rho N\Lambda\tau_0$ sont dans $N\Lambda$, on trouve des entiers a, b, c, d tels que $\tau_0 = \frac{a\tau_0 + b}{c\tau_0 + d}$. Il s'ensuit de manière similaire que $ad - bc = |c\tau_0 + d|^2 = (mNA)^2\rho\bar{\rho} = 2(mNA)^2$ n'est pas un carré, et l'on conclut comme avant.

(Autre preuve possible pour traiter le cas où $4AC - B^2 = n = m^2$ carré: on peut supposer que A, B, C sont premiers entre eux. Alors on prend $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $b = -C, c = A, d - a = B$, et M fixe τ_0 . Alors $(a, b, c, d) = 1$, et $\det M = ad - bc = a^2 + Ba + CA$. Si $\det M = m^2$ est un carré, alors $(2a + B)^2 - (2m)^2 = B^2 - 4AC$. Mais cette égalité n'a lieu que pour un nombre fini de a .) \square

On fait maintenant un bootstrap sur le cas particulier établi précédemment. On aura d'abord besoin du

Lemme 3.2.2. — Soit f une fonction modulaire de poids zéro pour $\Gamma(1)$, méromorphe sur \mathcal{H} . On suppose que le q -développement de f au voisinage de $i\infty$ est à coefficients dans un corps F . Alors $f \in F(j)$.

Démonstration. — On cherche d'abord deux polynômes P et $Q \in \mathbb{C}[X]$, à coefficients inconnus p_j, q_k , tels que $P(j(\tau)) = f(\tau)Q(j(\tau))$. En remplaçant j par son q -développement, on obtient un système linéaire (de taille infinie), à coefficients dans F , dont les p_j et les q_k sont solutions. D'après la Prop. 3.3, ce système linéaire possède une solution non-triviale P, Q à coefficients complexes. Cette solution est même unique, si l'on demande que le degré de Q soit minimal. Ceci permet de se ramener à un nombre fini d'hyperplans, dont l'intersection, sur \mathbb{C} , est la droite (P, Q) . Par la méthode du pivot de Gauss, ce système linéaire fini, à coefficients dans F , possède donc une solution (unique) à coefficients dans F . \square

Théorème 3.2.3. — a) Soit $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction modulaire de poids zéro, méromorphe sur \mathbb{H} , dont les coefficients de Fourier à la pointe infinie sont algébriques. Alors, pour tout point τ_0 CM dans \mathbb{H} , le nombre $f(\tau_0)$ est un nombre algébrique.

b) Soit τ_0 un point CM. Il existe une constante $\Omega = \Omega_{\tau_0} = \eta(\tau_0)^2$ telle que $E_4(\tau_0)/\Omega^4$ et $E_6(\tau_0)/\Omega^6$ soient des entiers algébriques.

De plus, si g est une fonction modulaire de poids k avec des coefficients de Fourier algébriques, alors $g(\tau_0)/\Omega^k$ est un nombre algébrique.

Démonstration. — a) D'après le lemme précédent, on a $f \in \overline{\mathbb{Q}}(j)$ (elle est même de la forme $f = \frac{(j-\alpha_1)\dots(j-\alpha_N)}{(j-\beta_1)\dots(j-\beta_M)}$ avec des α_j, β_k algébriques). On conclut alors puisque $j(\tau_0) \in \overline{\mathbb{Q}}$.

b) $j(\tau_0)^{\frac{1}{3}} := E_4(\tau_0)/\Omega^4$ est un entier algébrique, ainsi que $E_6(\tau_0)/\Omega^6 = \sqrt{j(\tau_0) - 1728}$. On conclut en observant que $(E_4/E_6)^{k/2}g$ relève du cas a). \square

4. Fonction L d'une forme modulaire

4.1. La fonction τ de Ramanujan et ses coefficients $\tau(n)$. — On écrit maintenant

$$\Delta(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)q^n$$

en développant le produit infini pour Δ . Cela définit une suite de coefficients $\tau(n) \in \mathbb{Z}$. La fonction $n \mapsto \tau(n)$ est appelée la fonction tau de Ramanujan. Il a calculé les premiers 30 valeurs de $\tau(n)$ en 1915, et a observé plusieurs propriétés remarquables :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tau(n)$	1	-24	252	-1472	4830	-6048	-16744	84480	-113643	-115920

(1) $\tau(nm) = \tau(n)\tau(m)$ si $(n, m) = 1$, et $\tau(p^{r+1}) = \tau(p^r)\tau(p) - p^{11}\tau(p^{r-1})$ si p est premier.

(2) $|\tau(p)| \leq 2p^{\frac{11}{2}}$, pour p premier.

La première conjecture, de multiplicativité, a été établie par Mordell en 1916 (on en verra une preuve un peu plus tard dans le cours), et a été le déclencheur de la théorie des opérateurs de Hecke T_p (1937).

La conjecture 2) s'est révélée encore plus profonde. Elle a suscité énormément de travaux. Citons, par ordre chronologique, l'estimation $\tau(n) = O(n^{\frac{12}{2}-\frac{1}{5}})$ (Rankin, 1939) comme application de la méthode de Rankin-Selberg. Elle a été améliorée en $\tau(n) = O(n^{\frac{12}{2}-\frac{1}{4}+\epsilon})$ par Selberg (1965), comme application des estimées de Weil sur les sommes de Kloosterman.

La conjecture de Ramanujan n'a été prouvée qu'en 1974 par Deligne comme conséquence de sa preuve des conjectures de Weil (et son résultat, aussi profond, que ces conjectures impliquent celle de Ramanujan). La conjecture de Ramanujan reste un problème ouvert majeur pour les formes modulaires non-holomorphes (Maass forms), et pour les groupes autres que SL_2 .

Nous nous contenterons de la proposition suivante, bien plus faible :

Proposition 4.1 (Hecke 1930). — Soit $f \in M_k(\Gamma(1))$, $f = a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n q^n$. Alors

a) $a_n = O(n^{k-1})$,

tandis que si f est parabolique on a l'estimation plus précise :

b) $a_n = O(n^{k/2})$, c'est-à-dire il existe une constante C telle que $|a_n| \leq Cn^{k/2}$ pour tout $n \geq 1$.

Démonstration. — Il suffit de démontrer le cas Eisenstein et le cas parabolique séparément. Dans le premier cas,

$$0 \leq \sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1} \leq n^{k-1} \sum_{d=1}^{\infty} d^{-(k-1)} = n^{k-1} \zeta(k-1),$$

donc $\sigma_{k-1}(n) = O(n^{k-1})$.

Lorsque f est parabolique, $a_0 = 0$ de sorte que

$$(4.1) \quad |f(\tau)| = O(q) = O(e^{-2\pi y}), \quad (y = \text{Im } \tau),$$

quand q tend vers 0. Posons $\psi(\tau) = |f(\tau)|y^{k/2}$. Aussi ϕ est $\Gamma(1)$ -invariante et continue sur \mathcal{F} . Alors (4.1) montre que $\psi(\tau)$ tend vers 0 quand y tend vers l'infini. Cela implique que ψ est bornée sur \mathbb{H} , c'est-à-dire il existe M telle que $|f(\tau)| \leq My^{-k/2}$.

On récupère le coefficient de Fourier a_n en intégrant terme à terme la série de Fourier :

$$a_n = \int_0^1 f(x + iy) e^{-2i\pi nx} e^{2\pi ny} dx.$$

On déduit que

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq \int_0^1 |f(x + iy)| |q^{-n}| dx \\ &\leq \int_0^1 My^{-k/2} e^{2\pi ny} dx \\ &= My^{-k/2} e^{2\pi ny}. \end{aligned}$$

Cela est vrai pour tout $y > 0$. On choisit $y = 1/n$ et on trouve que $|a_n| \leq Cn^{k/2}$ avec $C = Me^{2\pi}$. \square

Remarque : En appliquant la formule de Parseval à $|f(z)|^2 \text{Im}(z)^k$, on obtient par ailleurs facilement que

$$\sum_{n \leq N} |a_n|^2 = O(N^k);$$

ceci amène à deviner que la vraie taille des coefficients de Fourier a_n n'est pas celle donnée par la borne de Hecke;

Signalons également la conjecture de Lehmer (1947) : $\tau(n) \neq 0$ pour tout $n \geq 1$. Cette conjecture est équivalente à l'irrationalité des coefficients de Fourier de formes de Maass harmoniques, cf Th. 12.5 de <https://projecteuclid.org/euclid.cdm/1254748659>.

4.2. fonction $L(f, s)$: équation fonctionnelle. — A toute forme modulaire $f(\tau) = a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n q^n \in M_k(\Gamma(1))$ de poids k on associe la série de Dirichlet

$$L(f, s) := \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}.$$

Cette série de Dirichlet converge absolument pour $Re(s) > k$ d'après la Prop. 4.1, et même pour $Re(s) > k/2 + 1$ lorsque f est parabolique.

Dans le cas où $f = F_k = -\frac{B_k}{2k} + \sum_{n \geq 1} \sigma_{k-1}(n)q^n$ est la série d'Eisenstein de poids k , cette série de Dirichlet est bien connue puisque

$$(4.2) \quad L(F_k, s) = \sum_{n \geq 1} \frac{\sigma_{k-1}(n)}{n^s} = \sum_{m, n \geq 1} \frac{m^{k-1}}{(mn)^s}$$

$$(4.3) \quad = \zeta(s)\zeta(s-k+1).$$

On constate que $L(F_k, s)$ possède un prolongement méromorphe à \mathbb{C} , et qu'elle satisfait une équation fonctionnelle $s \leftrightarrow k-s$.

Comme le montre la proposition suivante, ces deux propriétés sont valables pour toutes les formes modulaires de niveau $\Gamma(1)$ ⁽¹⁾.

Proposition 4.2. — Soit $f = \sum_{n \geq 0} a_n q^n \in M_k(\Gamma(1))$. Alors $L(f, s) = \sum_{n \geq 1} a_n n^{-s}$ se prolonge en une fonction méromorphe sur \mathbb{C} . $L(f, s)$ est entière lorsque f est parabolique, et elle possède un pôle simple en $s = k$ de résidu $\frac{(2\pi)^k}{(k-1)!} a_0$ sinon.

De plus, elle satisfait l'équation fonctionnelle

$$(2\pi)^{-s} \Gamma(s) L(f, s) = (-1)^{\frac{k}{2}} (2\pi)^{s-k} \Gamma(k-s) L(f, k-s).$$

Démonstration. — On note $\phi(t) = f(it) - a_0$ pour $t > 0$. La modularité de f implique que

$$(4.4) \quad \phi\left(\frac{1}{t}\right) = (-1)^{\frac{k}{2}} t^k \phi(t) + a_0 (1 - (-1)^{\frac{k}{2}} t^k).$$

De manière semblable à la Prop. 1.2.1, il suffit de prendre la transformée de Mellin de $\phi(t)$, de casser l'intégrale en $t = 1$ et utiliser (4.4) pour faire apparaître deux termes intégrés de la forme \int_1^∞ . Parce que f est parabolique, ces deux termes définissent chacun une fonction entière de la variable s . Ils sont permutés lorsque s devient $k-s$. \square

Pour motiver le chapitre qui suit et qui concerne les produits Eulériens, observons que la fonction zêta de Riemann $\zeta(z) = \prod_p (1 - p^{-z})^{-1}$ possède un produit Eulérien. C'est donc aussi le cas de $L(E_k) = \zeta(s)\zeta(s-k+1)$. Le facteur d'Euler en p devient un polynôme de degré 2 en p^{-s} .

⁽¹⁾ : en niveau Γ , il est nécessaire que f soit propre pour l'opérateur d'Atkin-Lehner w_N pour avoir une équation fonctionnelle, puisque la matrice d'involution S n'est pas dans Γ en général

Mentionnons un autre exemple modulaire, associé cette fois à

$$\theta^2(2z) = \left(\sum_n q^{n^2} \right)^2 = 1 + 4 \sum_{m>0} r_2(m) q^m$$

(pas tout à fait modulaire pour $\Gamma(1)$, mais tant pis). Ses coefficients de Fourier sont les $r_2(m)$, qui compte la façon d'écrire m comme somme de deux carrés. La fonction $L(\theta^2, s)$ associée est alors reconnue comme une fonction classique :

$$\begin{aligned} L(\theta^2, s) &= \sum_{m \geq 1} \frac{r_2(m)}{m^s} = \frac{1}{4} \sum_{(0,0) \neq (a,b) \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{(a^2 + b^2)^s} \\ &= \sum_{0 \neq \alpha = a+ib \in \mathbb{Z}[i]/\mathbb{Z}[i]^\times} \frac{1}{(\alpha \bar{\alpha})^s} = \zeta_{\mathbb{Q}(i)}(s) \end{aligned}$$

n'est autre que la fonction zêta de Dedekind du corps quadratique imaginaire $\mathbb{Q}(i)$. Là encore, cette fonction possède un développement en produit Eulérien puisque pour $\operatorname{Re}(s) > 1$ on a

$$\zeta_{\mathbb{Q}(i)}(s) = \zeta(s) L(s, \chi_4) = \prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - p^{-s})^{-1} (1 - \chi_4(p) p^{-s})^{-1},$$

où χ_4 est la caractère de Dirichlet non-trivial modulo 4. Les facteurs d'Euler en p sont de nouveau des polynômes de degré 2 en p^{-s} .

5. Opérateurs de Hecke

5.1. Opérateurs de Hecke pour les formes modulaires de niveau $\Gamma(1)$. — On va étudier l'action des opérateurs de Hecke en niveau $\Gamma(1)$, beaucoup plus simple et intuitive qu'en niveau supérieur. Rappelons la conjecture de Ramanujan $\tau(nm) = \tau(n)\tau(m)$ si n et m sont premiers entre eux. Même si c'était Mordell qui l'a prouvée, c'est Hecke qui a développé une théorie générale qui montre que les coefficients de Fourier des formes modulaires ont de propriétés multiplicatives (remarquons que c'est aussi le cas pour les séries d'Eisenstein puisque $\sigma_{k-1}(n)\sigma_{k-1}(m) = \sigma_{k-1}(nm)$ si n et m sont premiers entre eux).

L'idée de Hecke est la suivante. Supposons qu'on définit opérateur :

$$U_p \left(\sum a_n q^n \right) = \sum a_{pn} q^n.$$

Supposons que $\sum a_n q^n$ est une forme modulaire qui appartient à un espace de dimension 1. Si on peut montrer que U_p préserve cet espace, alors $U_p(\sum a_n q^n) = \lambda_p(\sum a_n q^n)$, pour un certain $\lambda_p \in \mathbb{C}$. Cela implique que $a_{pn} = a_n \lambda_p$. Si on normalise de sorte que $a_1 = 1$ alors $a_p = \lambda_p$ et donc $a_{pn} = a_n a_p$.

Par contre la fonction τ de Ramanujan n'est pas totalement multiplicative, on a $\tau(p^2) \neq \tau(p)^2$. Il a conjecturé que pour $p|n$ on devrait avoir $\tau(pn) = \tau(p)\tau(n) - p^{11}\tau(n/p)$. Si on

avait donc à deviner le bon opérateur (en poids 12 ce serait

$$T_p(\sum a_n q^n) := \sum_{p \nmid n} a_{pn} q^n + \sum_{p|n} (a_{pn} + p^{11} a_{n/p}) q^n.$$

On pourrait définir les opérateurs de Hecke sur les coefficients de Fourier mais ce sera plus intéressant (et naturel) de définir leur action sur les réseaux. Soit \mathcal{R} l'ensemble des réseaux de \mathbf{C} . Notons $\mathbf{Z}(\mathcal{R})$ le \mathbf{Z} -module libre de base $\{[\Lambda] : \Lambda \in \mathcal{R}\}$. On définit deux familles d'opérateurs $T(n), R(n) : \mathbf{Z}[\mathcal{R}] \rightarrow \mathbf{Z}[\mathcal{R}]$, $n \in \mathbf{N}$ par les formules

$$(5.1) \quad \begin{aligned} T(n)([\Lambda]) &:= \sum_{[\Lambda:\Lambda']=n} [\Lambda'] \\ R(n)([\Lambda]) &:= [n\Lambda]. \end{aligned}$$

La somme dans (5.1) est finie car tout $\Lambda \in \mathcal{R}$ tel que $[\Lambda : \Lambda'] = n$ vérifie que $n\Lambda \subset \Lambda'$ et $\Lambda/n\Lambda \simeq (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^2$ est fini.

Proposition 5.1. — *Les opérateurs $T(n)$ et $R(n)$ satisfont les propriétés suivantes :*

- (1) $R(n) \circ R(m) = R(nm)$;
- (2) $R(n) \circ T(m) = T(m) \circ R(n)$.
- (3) $T(nm) = T(n) \circ T(m)$ si $(n, m) = 1$.
- (4) $T(p^{r+1}) = T(p) \circ T(p^r) - pR(p) \circ T(p^{r-1})$ si p est premier.

Démonstration. — Les assertions (1) et (2) sont triviales. (3) résulte de l'identité de Bezout, qui montre que dans un groupe abélien d'ordre mn , avec m premier à n , il n'y a qu'un sous-groupe d'ordre n . Pour (4), on doit distinguer selon qu'un réseau d'indice p^{r+1} de Λ est inclus dans $p\Lambda$ ou pas. On renvoie à [Serre, Prop. 10 p. 98] pour les détails. \square

Corollaire 5.2. — *Les $T(p^n)$ sont des polynômes en $T(p)$ et $R(p)$, pour p premier. L'algèbre engendrée par les opérateurs de Hecke $T(p), p \in \mathcal{P}$ et les $R(n)$ est commutative. Elle contient les $T(n)$.*

On fait agir ces opérateurs sur les fonctions sur \mathcal{R} (étendues par linéarité en des fonctions sur $\mathbf{Z}[\mathcal{R}]$). Plus précisément si $F : \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{C}$ on a

$$\begin{aligned} (T(n)F)(\Lambda) &= \sum_{[\Lambda:\Lambda']=n} F(\Lambda'); \\ (R(n)F)(\Lambda) &= F(n\Lambda). \end{aligned}$$

Il est clair que les fonctions homogènes de poids k sont préservées par ces opérateurs. On déduit de la correspondance entre fonctions homogènes de poids k et les fonctions faiblement modulaires de poids k et niveau $\Gamma(1)$, donnée par $F(\Lambda(\omega_1, \omega_2)) = \omega_2^{-k} f(\omega_1/\omega_2)$, une action sur les fonctions faiblement modulaires de poids k sous $\Gamma(1)$.

Le lemme suivant permet d'expliciter cette action :

Lemme 5.3. — *Tout réseau d'indice n dans $\Lambda_\tau = \tau\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ est de la forme $(a\tau + b)\mathbf{Z} \oplus d\mathbf{Z}$ pour une unique matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ telle que $ad = n$, $a > 0$, et $0 \leq b < d$.*

Démonstration. — L'action de S et T par multiplication à gauche sur $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ permet d'écrire l'algorithme d'Euclide entre a et c . On met le dernier reste non-nul en haut à gauche, c'est $a' = \text{pgcd}(a, c)$, avec un zéro dessous. La matrice obtenue est alors de la forme $\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}$. Une dernière division euclidienne $b' = d'q + r', 0 \leq r' < d'$ permet d'obtenir un représentant dans S_n comme en 3, où l'on a déjà rencontré ce système de représentants (forme normale de Hermite). L'unicité est facile. \square

Remarque 5.4. — En particulier si $n = p$ est premier les réseaux d'indice p de $\tau\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ sont $p\tau\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ et $(\tau + b)\mathbf{Z} \oplus p\mathbf{Z}$ avec $0 \leq b < p$.

Soit f une fonction faiblement modulaire de poids k et niveau $\Gamma(1)$. Alors cette action se décrit de façon explicite par la formule suivante :

$$T(n)f(\tau) = n^{k-1} \sum_{\substack{a \geq 1, ad=n \\ 0 \leq b < d}} d^{-k} f\left(\frac{a\tau + b}{d}\right).$$

Le facteur de normalisation n^{k-1} qui apparaît dans la formule a été ajouté pour avoir de formules entières. En effet, on a la proposition suivante :

Proposition 5.5. — Soit f une fonction faiblement modulaire de poids k et niveau $\Gamma(1)$. Si $f(\tau) = \sum_m a_m q^m$ est le q -développement de f , alors $T(n)f(\tau) = \sum_m b_m q^m$ où

$$b_m = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} a_{mn/d^2}.$$

Démonstration. — Ce sera prouvé en TD. \square

Corollaire 5.6. — Avec les mêmes notations, $b_1 = a_n$.

Corollaire 5.7. — Les opérateurs $T(n)$ préservent $M_k(\Gamma(1))$ et $S_k(\Gamma(1))$.

Théorème 5.8. — Soit $f = \sum_m a_m q^m$ une forme modulaire non nulle de poids k et niveau $\Gamma(1)$. Supposons que f est vecteur propre de tous les $T(n)$, pour la valeur propre $\lambda(n)$. Alors :

- (1) $a_1 \neq 0$.
- (2) $a_n = a_1 \cdot \lambda(n)$
- (3) De plus les valeurs propres $\lambda(n)$ sont des nombres réels, et des entiers algébriques.

Démonstration. — Si f est vecteur propre de tous les $T(n)$, pour la valeur propre $\lambda(n)$, alors les coefficient b_1 de $T(n)f$ est $\lambda(n)a_1$. Mais le corollaire 5.6 nous dit que $b_1 = a_n$. Du coup $a_n = a_1 \cdot \lambda(n)$ pour tout n et comme f est non nulle on a $a_1 \neq 0$. Les opérateurs T_n préservent $S_k(\Gamma(1), \mathbb{Z})$. Ils ont donc un polynôme caractéristique à coefficients entiers, d'après la Prop. 2.21. \square

Corollaire 5.9. — (Multiplicité un) Deux formes modulaires de poids k et niveau $\Gamma(1)$ qui sont vecteurs propres de tous les $T(n)$, pour les mêmes valeurs propres $\lambda(n)$, sont proportionnelles.

Corollaire 5.10. — Soit $f = \sum_m a_m q^m$ une forme modulaire non nulle de poids k et niveau $\Gamma(1)$. Supposons que f est vecteur propre de tous les $T(n)$, pour la valeur propre $\lambda(n)$. Supposons aussi que f est normalisée de sorte que $a_1 = 1$. Alors

- (1) $a_{nm} = a_n a_m$ si n et m sont premiers entre eux.
- (2) $a_{p^{r+1}} = a_{p^r} a_p - p^{k-1} a_{p^{r-1}}$ si p est premier.

Démonstration. — En effet les valeurs propres $\lambda(n)$ satisfont les propriétés (3) et (4) de la proposition 5.1. \square

On en déduit la première conjecture de Ramanujan.

Corollaire 5.11. — Soit $\Delta = \sum_n \tau(n) q^n$ le q -développement de la fonction Δ de Jacobi. Alors :

- (1) $\tau(nm) = \tau(n)\tau(m)$ si n et m sont premiers entre eux.
- (2) $\tau(p^{r+1}) = \tau(p^r)\tau(p) - p^{11}\tau(p^{r-1})$ si p est premier.

Démonstration. — En effet $\Delta \in S_{12}(\Gamma(1))$ qui est un espace vectoriel de dimension 1 préservé par tous les $T(n)$. Elle est donc vecteur propre pour eux. Le corollaire découle du corollaire précédent. \square

5.1.1. Intermède : Séries de Poincaré. — Nous présentons ici une méthode générale pour fabriquer des formes modulaires de niveau $\Gamma(1)$. Elle est aussi efficace dans le cas d'un sous-groupe de congruence. La façon standard pour construire de fonctions Γ -invariantes à partir d'une fonction quelconque f est de construire la somme

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma x).$$

Le problème est que le plus souvent cette somme ne converge pas !

Pour construire une forme modulaire de niveau Γ une idée naïve serait alors de partir d'une fonction quelconque f et de fabriquer la série $\varphi(\tau) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma\tau)/j(\gamma, \tau)^k$. La formule $j(\gamma\gamma', \tau) = j(\gamma, \gamma'\tau)j(\gamma', \tau)$ montre qu'une telle fonction serait bien faiblement modulaire de poids k pour Γ . Le problème est qu'une telle série ne peut pas converger car, par exemple, $j(\gamma, \tau) = 1$ pour une infinité de γ . Justement, pour contourner le problème, notons

$$\Gamma_\infty^+ := \{\gamma \in \Gamma(1), j(\gamma, \tau) = 1\} = \Gamma(1) \cap \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathbf{Z}},$$

un sous-groupe d'indice 2 dans Γ_∞ (le fixateur de ∞ dans $\Gamma(1)$), et partons d'une fonction f qui est déjà invariante par Γ_∞^+ . Alors la fonction $\varphi(\tau) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty^+ \setminus \Gamma(1)} f(\gamma\tau)/j(\gamma, \tau)^k$ a plus de chance de converger (absolument), et dans ce cas elle serait encore faiblement

modulaire de poids k . Dans cette somme, γ décrit un ensemble de représentants des classes à gauche selon Γ_∞^+ dans $\Gamma(1)$.

Des exemples typiques de fonctions holomorphes f invariantes sous Γ_∞^+ sont les $f(\tau) = \exp(2i\pi n\tau)$, $n \in \mathbf{Z}$.

Proposition 5.12. — *La série de Poincaré de poids $k \geq 3$ et “caractère” $m \in \mathbf{N}$*

$$P_m(\tau) := \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty^+ \backslash \Gamma(1)} j(\gamma, \tau)^{-k} \exp(2i\pi m\gamma\tau)$$

définit une forme modulaire $P_m \in M_k(\Gamma(1))$. De plus :

- (1) Si $m > 0$, $P_m \in S_k(\Gamma(1))$.
- (2) Pour $n = 0$, on a $P_0(\infty) = 1$.

Remarque 5.13. — On verra plus tard que, avec certaines hypothèses, les séries de Poincaré engendrent $M_k(\Gamma(1))$.

Démonstration. — Pour trouver un ensemble agréable de représentants de $\Gamma_\infty^+ \backslash \Gamma(1)$, partons de l'égalité $\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + mc & b + md \\ c & d \end{pmatrix}$. Elle nous dit pour tout $(c, d) \in \mathbf{Z}^2$ premiers entre eux il existe une seule classe d'éléments $\gamma_{c,d} \in \Gamma_\infty^+ \backslash \Gamma(1)$ dont la deuxième ligne est $(c \ d)$.

Il s'ensuit que $\sum_{\Gamma_\infty^+ \backslash \Gamma} |j(\gamma, \tau)^{-k} \exp(2i\pi m\gamma\tau)| \leq \sum_{(c,d) \neq (0,0)} \frac{1}{|c\tau + d|^k}$ dont on a vu qu'elle converge uniformément sur un domaine fondamental dès que $k \geq 3$. On en déduit la convergence normale sur les domaines fondamentaux (et donc sur les compacts) de la série de Poincaré et donc son holomorphicité sur \mathbb{H} .

Pour $\alpha \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ la formule

$$P_m(\alpha\tau) = \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty^+ \backslash \Gamma(1)} \exp(2i\pi m\tau) \Big|_k \gamma\alpha = P_m(\tau)$$

puisque $\gamma\alpha$ parcourt $\Gamma_\infty^+ \backslash \Gamma(1)$ lorsque γ parcourt $\Gamma(1)$, ce qui montre que P_m est bien faiblement modulaire de poids k .

D'un autre côté, la convergence normale est sur un domaine fondamental, et l'on peut prendre la limite quand $\tau \rightarrow i\infty$ terme à terme,

$$\lim_{\mathrm{Im}(\tau) \rightarrow \infty} P_m(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty^+ \backslash (\Gamma\alpha \cap \Gamma(1)_\infty)} \lim_{\mathrm{Im}(\tau) \rightarrow \infty} (j(\gamma, \tau)^{-k} \cdot \exp(2i\pi m\gamma\tau)).$$

La limite ci-dessus est nulle si $m > 0$ tandis qu'on obtient la formule de l'énoncé pour $P_0(\infty)$, puisqu'ici $j(\gamma, \tau) = -1$ si $\gamma \in \Gamma_\infty^+ \backslash \Gamma_\infty^+$ et $j(\gamma, \tau) = 1$ pour $\gamma \in \Gamma_\infty^+$. \square

5.1.2. Lien avec les séries d'Eisenstein. — Supposons $m = 0$. Comme dans la preuve précédente, on peut prendre des représentants de $\Gamma(1)_\infty^+ \backslash \Gamma(1)$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où (c, d) décrit l'ensemble des lignes possibles pour une matrice dans $\Gamma(1)$, c'est-à-dire tous les (c, d) dont le pgcd vaut 1. On a donc

$$P_0(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in \Gamma(1)_\infty^+ \backslash \Gamma(1)} j(\gamma, \tau)^{-k} = \frac{1}{2} \sum_{\text{pgcd}(c,d)=1} \frac{1}{(c\tau + d)^k}.$$

La ressemblance avec G_k n'est pas parfaite, mais on peut réarranger G_k comme on l'a vu en TD :

$$G_k(\tau) = \sum_{(c,d) \neq (0,0)} \frac{1}{(c\tau + d)^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\text{pgcd}(c,d)=1} \frac{1}{(cn\tau + dn)^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \sum_{\text{pgcd}(c,d)=1} \frac{1}{(c\tau + d)^k}$$

pour obtenir que $G_k(\tau) = 2\zeta(k)P_0(\tau)$ et finalement $P_0(\tau) = E_k(\tau)$.

5.2. Produit scalaire de Petersson. — On rappelle que \mathbb{H} possède une mesure invariante sous $\text{SL}_2(\mathbf{R})$, dite "mesure de Poincaré", donnée par $d\mu(\tau) = \frac{1}{y^2} dx \cdot dy = \frac{i}{2\text{Im}(\tau)^2} d\tau \cdot d\bar{\tau}$.

Si $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbf{C}$ est une fonction continue et bornée, alors pour tout $\alpha \in \text{SL}_2(\mathbf{Z})$, l'intégrale $\int_{\mathcal{F}} f(\alpha\tau) d\mu(\tau)$ de f sur le domaine fondamental $\mathcal{F} = \{\tau, |\text{Re}(\tau)| \leq 1/2, |\tau| \geq 1\}$ converge absolument.

Notons maintenant $X(\Gamma(1)) = \Gamma(1) \backslash \mathbb{H}$ et supposons f invariante par $\Gamma(1)$ (et toujours bornée). Alors $\int_{\mathcal{F}} f(\tau) d\mu(\tau)$ existe et

$$\int_{X(\Gamma(1))} f \cdot d\mu = \int_{\mathcal{F}} f(\tau) d\mu(\tau).$$

Cela s'applique à la fonction constante 1 et on note $V_{\Gamma(1)} := \int_{X(\Gamma(1))} d\mu$ le volume de $X(\Gamma(1))$. On peut calculer⁽²⁾ $V_{\Gamma(1)} = \pi/3$.

Soit maintenant $f, g \in M_k(\Gamma(1))$. La relation $\text{Im}(\gamma\tau) = \text{Im}(\tau) |j(\gamma, \tau)|^{-2}$ montre que la fonction $h(\tau) := \text{Im}(\tau)^k f(\tau) \overline{g(\tau)}$ est invariante par Γ .

Lemme 5.14. — *Si de plus, l'une des deux formes f ou g est parabolique, alors cette fonction h est bornée sur \mathbb{H} .*

Démonstration. — La preuve est la même que celle de la proposition 4.1. □

Définition 5.15. — Pour $f \in S_k(\Gamma(1))$, $g \in M_k(\Gamma(1))$, on appelle

$$\langle f, g \rangle := \int_{X(\Gamma(1))} \text{Im}(\tau)^k f(\tau) \overline{g(\tau)} d\mu(\tau)$$

le produit scalaire de Petersson de f et g .

⁽²⁾Plus généralement, on peut montrer que l'aire d'un triangle géodésique dans $\mathbb{H} \cup \mathbf{P}^1(\mathbf{R})$ vaut π moins la somme des angles.

La restriction à $S_k(\Gamma(1)) \times S_k(\Gamma(1))$ est un produit hermitien défini positif.

Théorème 5.16. — Soit $f \in S_k(\Gamma(1))$ de développement $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$. Alors pour toute série de Poincaré $P_m(\tau) := \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in \Gamma_{\infty}^+ \setminus \Gamma} j(\gamma, \tau)^{-k} \exp(2i\pi m \gamma \tau)$ on a

$$\langle f, P_m \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } m = 0 \\ \frac{(k-2)!}{2(4\pi m)^{k-1}} a_m & \text{pour } m \geq 1 \end{cases}$$

La conséquence la plus intéressante de ce théorème est que toutes les formes paraboliques sont combinaisons linéaires de séries de Poincaré. En effet, toute forme parabolique orthogonale aux P_m , $m > 0$ est nulle.

Corollaire 5.17. — $S_k(\Gamma(1))$ est engendré par les P_m , $m > 0$.

Démonstration (du théorème). — Vu l'absolue convergence de la série définissant P_m on peut écrire (en notant \mathcal{F} un domaine fondamental pour $\Gamma(1)$)

$$\begin{aligned} 2\langle f, P_m \rangle &= \sum_{\gamma \in \Gamma_{\infty}^+ \setminus \Gamma(1)} \int_{\mathcal{F}} \operatorname{Im}(\tau)^k f(\tau) \overline{j(\gamma, \tau)^{-k}} \exp(-2i\pi m \overline{\gamma \tau}) d\mu(\tau) \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma_{\infty}^+ \setminus \Gamma(1)} \int_{\mathcal{F}} \operatorname{Im}(\gamma \tau)^k j(\gamma, \tau)^k f(\tau) \exp(-2i\pi m \overline{\gamma \tau}) d\mu(\tau) \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma_{\infty}^+ \setminus \Gamma(1)} \int_{\mathcal{F}} \operatorname{Im}(\gamma \tau)^k j(\gamma^{-1}, \gamma \tau)^{-k} f(\gamma^{-1} \gamma \tau) \exp(-2i\pi m \overline{\gamma \tau}) d\mu(\tau) \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma_{\infty}^+ \setminus \Gamma(1)} \int_{\mathcal{F}} \operatorname{Im}(\gamma \tau)^k f(\gamma \tau) \exp(-2i\pi m \overline{\gamma \tau}) d\mu(\tau) \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma_{\infty}^+ \setminus \Gamma(1)} \int_{\gamma \mathcal{F}} \operatorname{Im}(\tau)^k f(\tau) \exp(-2i\pi m \overline{\tau}) d\mu(\tau) \end{aligned}$$

Pour la deuxième ligne on utilise $\operatorname{Im}(\tau) = \operatorname{Im}(\gamma \tau) |j(\gamma, \tau)|^2$, pour la troisième ligne on utilise $1 = j(\gamma^{-1} \gamma, \tau) = j(\gamma^{-1}, \gamma \tau) j(\gamma, \tau)$ et pour la quatrième on utilise l'automorphie de f . Maintenant, on remarque que $\bigsqcup_{\gamma \in \Gamma_{\infty}^+ \setminus \Gamma(1)} \gamma \mathcal{F}$ est un domaine fondamental pour Γ_{∞}^+ , qui dépend du choix de représentants des Γ_{∞}^+ -classes à gauche. On peut choisir ces représentants de sorte que cette réunion soit (un ouvert dense du) le domaine fondamental agréable rectangulaire $\mathcal{S}q = \{\tau, 0 \leq \operatorname{Re}(\tau) \leq 1\}$. On peut donc écrire

$$(5.2) \quad 2\langle f, P_m \rangle = \int_{y=0}^{\infty} \int_{x=0}^1 y^{k-2} f(x+iy) \exp(-2i\pi m x) \exp(-2\pi m y) dx dy$$

Insérons le développement $f(x+iy) = \sum_{q>0} a_q \exp(2i\pi q x) \exp(-2\pi q y)$ et intervertissons intégrales et sommes. On obtient

$$2\langle f, P_m \rangle = a_m \int_0^{\infty} y^{k-2} \exp(-4\pi m y) dy$$

et des intégrations par parties montrent la formule annoncée. \square

5.3. Les opérateurs de Hecke et le produit de Petersson. — Dans le chapitre précédent nous avons trouvé une base (non explicite) de l'espace de formes paraboliques avec de bonnes propriétés, les P_m .

Nous allons en déduire que les $T(n)$ sont auto-adjoints pour le produit scalaire de Petersson. Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 5.18. — *La série de Poincaré P_m vérifie l'identité*

$$T_n P_m = \sum_{d|m,n} \left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} P_{mn/d^2}.$$

Démonstration. — $(T_n P_m)(\tau) = n^{k-1} \sum_{\alpha \in S_n} P_m(\alpha\tau)$. Soit \mathcal{V} un système de représentants de $\Gamma_\infty^+ \backslash \Gamma(1)$. Il n'est pas difficile de montrer que pour tout $u \in \mathcal{V}$, et tout $\alpha \in S_n$, il existe un unique triplet $t \in \Gamma_\infty^+$, $v \in \mathcal{V}$ et $\beta \in S_n$ tels que $u\alpha = t\beta v$. Alors

$$(5.3) \quad (T_n P_m)(\tau) = n^{k-1} \sum_{\beta \in S_n} \sum_{v \in \mathcal{V}} \exp(2i\pi m t \beta v \tau) j(\beta v, \tau)^{-k}$$

$$(5.4) \quad = n^{k-1} \sum_{\beta = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in S_n} \sum_{v \in \mathcal{V}} d^{-k} \exp(2i\pi m \frac{av\tau + b}{d}) j(v, \tau)^{-k}.$$

Comme la somme $\sum_{b=0}^{d-1} \exp(2i\pi m \frac{b}{d})$ est nulle sauf si d divise m , auquel cas elle vaut d , on conclut facilement. \square

Proposition 5.19. — *Pour $f, g \in S_k(\Gamma(1))$ on a $\langle T_n f, g \rangle = \langle f, T_n g \rangle$: les opérateurs T_n sont autoadjoints pour le produit scalaire de Petersson.*

Démonstration. — Puisque les séries de Poincaré engendrent $S_k(\Gamma(1))$ d'après le Cor. 5.17, il suffit de tester l'identité souhaitée sur $g = P_m$. Celle-ci résulte alors directement des lemmes 5.18 et de la Prop.5.5. \square

Corollaire 5.20. — *L'espace $S_k(\Gamma(1))$ admet une base orthogonale formée de formes qui sont des vecteurs propres pour tous les T_n . De plus, si $f(\tau) = \sum_{n>0} a(n)q^n$ est une forme propre et de valeurs propres $(\lambda(n))_{n \in \mathbf{N}^*}$, alors*

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, a(n) = a(1)\lambda(n).$$

En particulier, si f est normalisée de sorte que $a(1) = 1$, (on dit que f est une forme de Hecke), on a les propriétés :

$$(5.5) \quad \begin{cases} i) & a(nm) = a(n)a(m) \text{ si } (n, m) = 1 \\ ii) & a(p^{r+1}) = a(p)a(p^r) - p^{k-1}a(p^{r-1}) \text{ pour } p \text{ premier, } r \geq 1. \end{cases}$$

Démonstration. — L'existence d'une base orthogonale de formes propres découle de la diagonalisabilité des T_n (qui sont auto-adjoints), et de la commutativité de $\mathbf{Z}[T_n, n \geq 1]$ qui permet une diagonalisation simultanée.

Pour $f \in M_k(\Gamma(1))$, on a vu que le terme en q dans le q -développement de $f[T(n)]'_k(\tau)$ est $a(n)$. Le terme en q de $\lambda(n)f$ est $a(1)\lambda(n)$ d'où l'égalité $a(n) = a(1)\lambda(n)$.

Enfin lorsque $a(1) = 1$, les formules annoncées sont équivalentes aux mêmes formules pour $\lambda(n)$. Or les $\lambda(n)$ sont les valeurs en $T(n)$ d'un homomorphisme d'algèbres $\lambda : \mathbf{Z}[T_n, n \geq 1] \rightarrow \mathbf{C}$, donc vérifient les égalités.

$$\begin{cases} \lambda(nm) = \lambda(n)\lambda(m) \text{ si } (n, m) = 1 \\ \lambda(p^{r+1}) = \lambda(p)\lambda(p^r) - p^{k-1}\lambda(p^{r-1}) \text{ pour } p \text{ premier, } r \geq 1. \end{cases}$$

□

Remarque 5.21. — La seconde conjecture de Ramanujan, sur la taille des $\tau(n)$ se généralise ainsi : si $f \in S_k(\Gamma(1))$ est une forme propre et normalisée, alors $a(n) = o(n^{(k-1)/2+\varepsilon})$ pour tout $\varepsilon > 0$. Cette conjecture, dite "de Ramanujan-Petersson", équivaut (cf TD) à ce que les racines u_p, v_p du polynôme $X^2 - a(p)X + p^{k-1}$ soient conjuguées complexes (et donc de module $p^{(k-1)/2}$). Des travaux de Shimura ont montré comment cette conjecture était impliquée par les "conjectures de Weil" sur la taille du nombre de points rationnels de certaines variétés sur des corps finis, lesquelles conjectures de Weil ont finalement été démontrées par Deligne à l'aide de la cohomologie étale de Grothendieck.

Proposition 5.22. — Pour une forme parabolique propre et normalisée, la somme de Dirichlet $L(f, s) = \sum a(n)n^{-s}$ converge pour $\operatorname{Re}(s) > k/2$ et admet un produit Eulerien

$$L(s, f) = \prod_p \frac{1}{1 - a(p)p^{-s} + p^{k-1-2s}}.$$

Démonstration. — En effet, $\sum a(n)n^{-s} = \prod_p \left(\sum_{h=0}^{\infty} \frac{a(p^h)}{p^{hs}} \right)$ par multiplicativité des a_n , (5.5) i). Puisque la relation (5.5) ii) est équivalente à l'identité des séries formelles

$$(1 - a(p)X + p^{k-1}X^2) \left(\sum_{h=0}^{\infty} a(p^h)X^h \right) = 1,$$

on en déduit le produit Eulerien attendu. □

La conjecture de Ramanujan-Petersson implique la convergence pour $\operatorname{Re}(s) > (k+1)/2$.

6. Opérateurs différentiels sur les formes modulaires; Théorème de Damerell

6.1. Opérateurs différentiels sur les formes modulaires. — Soit D l'opérateur différentiel $D = 2i \frac{d}{dz} = \frac{d}{dy} + i \frac{d}{dx}$ et

$$Z_r f(z) = \frac{r}{y} f(z) + Df(z),$$

avec $y = \operatorname{Im}(z)$ et $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbf{C}$.

Cet opérateur, qui coïncide avec D en poids zéro, envoie une fonction faiblement modulaire de poids r sur une fonction faiblement modulaire de poids $r + 2$, quitte à lui faire perdre le bénéfice d'être holomorphe. On rappelle que l'action de poids r du groupe $\Gamma(1)$, et par extension linéaire l'anneau de groupe $\mathbb{Z}[\Gamma(1)]$, sur les fonctions $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ selon la règle $(f |_r \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})(\tau) = (c\tau + d)^{-r} f(\frac{a\tau+b}{c\tau+d})$.

Proposition 6.1. — *i) L'opérateur différentiel Z_r satisfait, pour toute $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ et toute $\gamma \in \Gamma(1)$:*

$$(6.1) \quad Z_r(f |_r \gamma) = (Z_r f) |_{r+2} \gamma.$$

ii) De plus $Z_p Z_{p-2} \cdots Z_{-p} = D^{p+1}$ pour tout $p \geq 0$.

Démonstration. — (Godement). Pour i), il suffit de le vérifier pour $\gamma = T$ et $\gamma = S$. Seul le cas $\gamma = S$ est délicat. On part de $f |_k S(z) = z^{-k} f(-1/z)$.

Pour ii) on procède par récurrence sur r . Le cas $r = 0$ est immédiat, tandis que

$$Z_1 \circ Z_{-1} f = \left(\frac{1}{y} + D\right) \left(-\frac{f}{y} + Df\right) = \frac{f}{y^2} - \frac{Df}{y^2} - \frac{f}{y^2} + \frac{Df}{y^2} + D^2 f.$$

Pour l'hérédité on calcule

$$\begin{aligned} Z_p Z_{p-2} \cdots Z_{-p} f &= Z_p D^{p-1} Z_{-p} f \\ &= \left(\frac{p}{y} + D\right) \circ D^{p-1} \left(-p \frac{f}{y} + Df\right) \\ &= \frac{-p^2 D^{p-1}(f/y)}{y} + \frac{p D^p f}{y} - p D^p (f/y) + D^{p+1} f \end{aligned}$$

Il suffit donc de prouver que

$$\frac{-p^2 D^{p-1}(f/y)}{y} + \frac{p D^p (f)}{y} - p D^p (f/y) = 0,$$

ce qui, changeant f en fy , revient à vérifier que $D^p(fy) = p D^{p-1} f + y D^p f$. Cette dernière identité est facile à établir par récurrence sur p . \square

6.2. Séries d'Eisenstein presque-holomorphes $G_{k,r}$. — Dans cette partie, on introduit les séries d'Eisenstein réelles analytiques E_2^* et $G_{k,r}$ utilisées dans le théorème de Damerell. On démontre qu'elles sont obtenues comme image de séries d'Eisenstein holomorphes G_j sous l'application des opérateurs différentiels de Shimura-Maass Z_r . On démontre également que les séries $G_{k,r}$ sont des polynômes en E_2^*, E_4, E_6 .

Définition 6.2. — Soit $\tau = x + iy \in \mathbb{H}$ et $L = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ un réseau. On définit pour $k \geq 3, r \geq 0$,

$$(6.2) \quad G_{k,r}(\tau) := y^{-r} \sum_{0 \neq \omega \in L} \frac{\bar{\omega}^r}{\omega^{k+r}},$$

et

$$(6.3) \quad E_2^*(\tau) = E_2(\tau) - \frac{3}{\pi y}.$$

Proposition 6.3. — *Les séries $G_{k,r}$ sont absolument convergentes. Ce sont des fonctions faiblement modulaires de poids $k+2r$ et de niveau $\Gamma(1)$. La fonction E_2^* est faiblement modulaire de poids 2 et de niveau $\Gamma(1)$.*

Démonstration. — L'égalité $|\frac{\bar{\omega}^r}{\omega^{k+r}}| = \frac{1}{|\omega|^k}$ assure la convergence absolue des $G_{k,r}$ en vertu de la Prop. 1.1. Leur modularité résulte de ce que, si $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$, $\text{Im}(\gamma\tau) = \text{Im}(\tau)/|c\tau + d|^2$. En ce qui concerne E_2^* , sa modularité se déduit de la formule de transformation de E_2 obtenue en remarque 3.4. \square

Lemme 6.2.1. — *Soit $f \in M_k(\Gamma(1), \mathbb{C})$ une forme modulaire de poids k et de niveau $\Gamma(1)$. Alors $\Theta(f) := \frac{12}{2i\pi}f' - kE_2f$ est une forme modulaire de poids $k+2$. En d'autres termes, l'opérateur de Ramanujan Θ envoie $M_k(\Gamma(1), \mathbb{C})$ dans $M_{k+2}(\Gamma(1), \mathbb{C})$. Il envoie aussi $M_k(\Gamma(1), \mathbb{Q})$ dans $M_{k+2}(\Gamma(1), \mathbb{Q})$. On a également*

$$(6.4) \quad \frac{12}{2i\pi}E_2' = (E_2^2 - E_4).$$

Démonstration. — Il est clair que Θf est holomorphe sur \mathbb{H} , et bornée à l'infini, parce que f et E_2 le sont. Il ne reste qu'à vérifier sa modularité, qui résulte de la formule de transformation de f' et de celle de E_2 obtenue dans la remarque 3.4. On vérifie également que $E_2' - 2i\pi E_2^2$ est une forme modulaire de poids 4, donc elle est proportionnelle à E_4 . Comme elle tend vers $-2i\pi$ quand $\tau \rightarrow i\infty$, elle est égale à $-2i\pi E_4$. \square

La proposition qui suit exprime les séries presque holomorphes $G_{k,r}$ comme images des séries d'Eisenstein G_k sous l'action des opérateurs de Shimura-Maass Z_k étudiés dans la Prop. 6.1.

Proposition 6.4. — *Pour $r \geq 0$ et $k \geq 2$ on note $Z_k^0 = Z_k$, et $Z_k^{r+1} = Z_{k+2r+2} \circ Z_k^r$. Alors*

$$(6.5) \quad \begin{aligned} Z_k^r G_k &= \frac{(k+r)!}{(k-1)!} G_{k,r+1} \\ Z_2 E_2^* &= \frac{\pi}{3} (E_4 - (E_2^*)^2). \end{aligned}$$

Démonstration. — On procède par récurrence sur r . C'est un calcul direct en dérivant la série $G_{k,r}$ terme à terme. Quant à l'identité (6.5), c'est une reformulation de (6.4). \square

Corollaire 6.2.2. — *Pour tout $k \geq 4, r \geq 0$ on a*

$$G_{k,r} \in \pi^{k+r} \mathbb{Q}[E_2^*, E_4, E_6].$$

Démonstration. — Par récurrence sur $r \geq 0$. On sait que E_k est un polynôme en E_4, E_6 , ce qui résout le cas $r = 0$. Pour passer de r à $r + 1$, on combine le lemme 6.2.1, la Prop. 6.4, et l'identité facile

$$Z_{k+l}(fg) = Z_k(f)g + fZ_lg.$$

En la spécialisant lorsque f est un polynôme en E_4, E_6 et $g = (E_2^*)^h$, il vient

$$Z_{k+2h}(f \cdot (E_2^*)^h) = Z_{k+2h-2}(f \cdot (E_2^*)^{h-1})E_2^* + fZ_2E_2^*.$$

Procédons par récurrence sur $h \geq 0$. Supposons d'abord que $h = 0$. Soit $f \in \mathbb{Q}[E_4, E_6]$ de poids k . Le lemme 6.2.1 montre que $\Theta(f)$ est dans $\mathbb{Q}[E_4, E_6]$. Comme $Z_k(f) = -\frac{\pi}{3}(\Theta(f) + kfE_2^*)$, on a obtenu l'initialisation $h = 0$. On passe ensuite de h à $h + 1$ observant que $Z_2E_2^*$ est dans $\pi\mathbb{Q}[E_2^*, E_4]$ d'après (6.5). \square

6.3. Compléments de M. Compele: Théorème de Damerell. — On veut étendre les résultats de multiplication complexe aux séries $G_{k,r}$. On commence par traiter le cas de E_2^* .

Proposition 6.5. — *Soit $\tau_0 \in \mathcal{H}$ un point CM, et $\Omega_{\tau_0} = \eta(\tau_0)^2$. Alors $E_2^*(\tau_0)/\Omega_{\tau_0}^2$ est un nombre algébrique.*

Démonstration. — Pour toute matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de déterminant n , la fonction $\tau \mapsto E_2^*(\tau) - n(c\tau + d)^{-2}E_2^*(\frac{a\tau+b}{c\tau+d})$ est une application holomorphe sur \mathcal{H} . Il en résulte de façon semblable au cas de (3.4) que

$$\Psi_n(X, \tau) := \prod_{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_n} (X - E_2^*(\tau) + nd^{-2}E_2^*(\frac{a\tau+b}{d})) = \sum_{h=0}^{|\mathcal{S}_n|} s_h(\tau)X^{\sigma_1(n)-h}$$

est un polynôme de degré $\sigma_1(n)$ dont les coefficients $s_h(\tau)$ sont des formes modulaires de $M_{2h}(\Gamma(1), \mathbb{Q})$. En particulier, lorsque $\tau_0 \in \mathcal{H} \cap K$ est un point CM, $s_h(\tau_0)/\Omega_{\tau_0}^{2h}$ est un nombre algébrique (Th. 3.2.3.b)). Un tel point τ_0 est fixé par une matrice $M_0 \in M_2(\mathbb{Z})$, de déterminant n qui n'est pas un carré. Par suite, $E_2^*(\tau_0)(1 - n(c_0\tau_0 + d_0)^{-2})/\Omega_{\tau_0}^2$ est une racine du polynôme unitaire $\Omega_{\tau_0}^{-2\sigma_1(n)}\Psi_n(X\Omega_{\tau_0}^2, \tau_0)$ à coefficients algébriques, donc c'est un nombre algébrique. Pour plus de détails on renvoie le lecteur à [12], p. 81. \square

Théorème 6.3.1. — *(Damerell) Soit $\tau_0 \in \mathcal{H}$ un point CM, et $\Omega_{\tau_0} = \eta(\tau_0)^2$. Alors pour tout $k \geq 4, r \geq 0$, le nombre $\frac{G_{k,r}(\tau_0)}{\pi^{k+r}\Omega_{\tau_0}^{k+2r}}$ est un nombre algébrique.*

Démonstration. — D'après le corollaire 6.2.2 (ou plutôt sa preuve), $\frac{G_{k,r}}{\pi^{k+r}}$ est une combinaison linéaire à coefficients rationnels de $(E_2^*)^a E_4^b E_6^c$, avec $2a + 4b + 6c = k + 2r$. Le résultat d'algébricité s'obtient donc en combinant la Prop. 6.5 et le Th. 3.2.3. \square

6.4. Le polynôme de périodes de $f \in S_k(\Gamma(1))$. — Soit $f = a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n q^n$ une forme modulaire de poids k et de niveau $\Gamma(1)$. On lui associe successivement la série

$$\tilde{f}(\tau) := \sum_{m \geq 1} \frac{a_m}{m^{k-1}} q^m, \quad q = \exp(2i\pi\tau), \tau \in \mathbb{H},$$

puis le "polynôme de périodes"

$$r_f(\tau) := \tilde{f}(\tau) - \tau^{k-2} \tilde{f}(-1/\tau).$$

Théorème 6.4.1. — Lorsque f est parabolique, $r_f(\tau)$ est un polynôme en τ de degré $\leq k - 2$. Il satisfait de plus les contraintes linéaires

$$r_f |_{-k+2} (\text{Id} + S) = r_f |_{-k+2} (\text{Id} + U + U^2) = 0,$$

où l'on rappelle que $U = ST$ est d'ordre 3 dans $PSL_2(\mathbb{Z})$.

Démonstration. —

$$\begin{aligned} D^{k-1} r_f &= Z_{k-2} \circ \cdots \circ Z_{-k+2} r_f = Z_{k-2} \circ \cdots \circ Z_{-k+2} (\tilde{f} |_{-k+2} \text{Id} - S) \\ &= \left(Z_{k-2} \circ \cdots \circ Z_{-k+2} \tilde{f} \right) |_k \text{Id} - S \\ &= D^{k-1} \tilde{f} |_k \text{Id} - S \\ &= (-4i\pi)^{k-1} f |_k \text{Id} - S = 0 \end{aligned}$$

grâce à des applications répétées de la Prop. 6.1. La dernière égalité traduit le fait que $f(\tau) = \tau^{-k} f(\frac{1}{\tau})$. On observe que \tilde{f} est 1-périodique, donc $\tilde{f} |_{-k+2} T = \tilde{f}$. Les équations fonctionnelles de r_f résultent alors de

$$\begin{aligned} r_f |_{-k+2} \text{Id} + S &= \tilde{f} |_{-k+2} (\text{Id} - S)(\text{Id} + S) = \tilde{f} |_{-k+2} (\text{Id} - S^2) = 0, \\ r_f |_{-k+2} \text{Id} + U + U^2 &= \tilde{f} |_{-k+2} (\text{Id} - S)(\text{Id} + ST + (ST)^2) \\ &= \tilde{f} |_{-k+2} \text{Id} + ST + (ST)^2 - S - T - TST \\ &= \tilde{f} |_{-k+2} ST + (ST)^2 - S - TST \\ &= \tilde{f} |_{-k+2} (ST)^2 - S. \end{aligned}$$

Cette dernière quantité est nulle puisque $TSTST = S$ par un calcul direct. \square

Lorsque f est parabolique, on a l'expression alternative suivante pour le polynôme $r_f(X)$ qui fait naturellement apparaître ses coefficients comme des valeurs de la fonction $L(f, s)$ dans la bande critique :

Lemme 6.4.2. —

$$\frac{-w!}{(2i\pi)^{w+1}} r_f(X) = \int_0^{i\infty} f(u)(u - X)^w du = \sum_{j=0}^w \binom{w}{j} r_j(f) (-1)^j X^{w-j},$$

où

$$r_j(f) = i \int_0^\infty f(it)(it)^j dt = j!L(f, j+1)/(2i\pi)^{j+1}.$$

Démonstration. — Si l'on pose $F(z) = \int_z^{i\infty} f(u)(u-z)^w du$, on constate d'une part que $F(z) - z^w F(-1/z) = \int_0^{i\infty} f(u)(u-z)^w du$, mais aussi, par intégrations par parties successives, que $F(z) = w! \sum_{n \geq 1} a_n e^{2i\pi n z} / (2i\pi n)^{w+1} = -\frac{w!}{(2i\pi)^{w+1}} \tilde{f}(z)$. \square

6.5. Identité de Haberland et premières conséquences. — Soit $V_k = \{P \in \mathbb{C}[X], \deg P \leq k-2\}$ et $W_k \subset V_k$ le sous-espace des polynômes P tels que $P \mid 1+S = P \mid 1+U+U^2 = 0$. (action en poids $-w, w = k-2$).

Dans cette section, nous montrons que l'application "polynôme de périodes" $r : f \mapsto r_f$ est injective de $S_k(\Gamma(1))$ dans W_k . La démonstration repose sur l'identité de Haberland.

On commence par introduire un accouplement bilinéaire non-dégénéré \langle, \rangle sur V_k ,

$$\left\langle \sum_{h=0}^w a_h X^h, \sum_{h=0}^w b_h X^h \right\rangle = \sum_{h=0}^w \frac{(-1)^h a_h b_{w-h}}{\binom{w}{h}}.$$

On vérifie par un calcul direct que $\langle (aX+b)^w, (cX+d)^w \rangle = (ad-bc)^w$, et la propriété d'invariance

$$(6.6) \quad \langle P \mid \gamma, Q \mid \gamma \rangle = \langle P, Q \rangle$$

pour $\gamma = S, T$ puis tout $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$.

Théorème 6.5.1. — (Haberland) Soit $k \geq 4$ un entier pair. Il existe une constante $\lambda_k \in i/\pi^{2k-2}\mathbb{Q}^*$ telle que, pour toute $f, g \in S_k(\Gamma(1), \mathbb{C})$ on ait

$$(f, g) = \lambda_k \langle r_f \mid T - T^{-1}, \overline{r_g} \rangle.$$

Démonstration. — Soit $F(z) = \int_z^{i\infty} f(u)(u-\bar{z})^w du$, de sorte que $\frac{\partial}{\partial z} F = -f(z)(z-\bar{z})^w$. La formule de Stokes montre que

$$\begin{aligned} (f, g) &= (2i)^{k-1} \int_{\mathcal{F}} f(z) \overline{g(z)} (z-\bar{z})^w dz d\bar{z} \\ &= (2i)^{k-1} \int_{\partial\mathcal{F}} F(z) \overline{g(z)} dz. \end{aligned}$$

Comme F et g sont 1-périodiques, les contributions verticales du bord $\partial\mathcal{F}$ disparaissent, et ne reste que le bord inférieur, arc de cercle C entre $\rho = s^2$ et $-\bar{\rho} = s = e^{i\pi/3}$. Ce bord est parcouru deux fois sous l'involution S , de sorte que

$$\begin{aligned} (f, g) &= i(2i)^w \int_C [F(z)\overline{g(z)}dz - F(Sz)\overline{g(Sz)dSz}] \\ &= i(2i)^w \int_C [F(z) - \bar{z}^w F(Sz)]\overline{g(z)}d\bar{z}. \end{aligned}$$

Mais

$$F(z) - \bar{z}^w F(Sz) = \int_0^\infty f(u)(u - \bar{z})^w du = \frac{-w!}{(2i\pi)^{w+1}} r_f(\bar{z}).$$

d'après le lemme 6.4.2. Pour alléger les notations posons

$$(6.7) \quad \mu_k = \frac{-w!}{(2i\pi)^{w+1}}.$$

Ainsi

$$(6.8) \quad (f, g) = i(2i)^w \frac{-w!}{(2i\pi)^{w+1}} \int_{s^2} r_f(\bar{z})\overline{g(z)}d\bar{z}$$

$$(6.9) \quad = i(2i)^w \mu_k \langle r_f, \bar{H}(X) \rangle,$$

où $H(X) = \int_{s^2} g(z)(z - X)^w dz$. L'intégrale, holomorphe, qui définit H peut être découpée en ∞ , ce qui amène à introduire $H_{z_0}(X) = \int_{z_0}^\infty g(z)(z - X)^w dz$, de sorte que

$$H(X) = H_{s^2} - H_s = H_{s^2} | 1 - T^{-1}.$$

Comme $U = ST$ fixe s^2 , il vient $H_{s^2} | 1 - U^2 = \int_0^\infty g(u)(u - X)^w du = \mu_k r_g(X)$, tandis que $(U - U^2)(1 - U) = 1 + U + U^2 - 3U^2$ appliqué à r_f donne

$$\begin{aligned} \langle r_f, \bar{H}(X) \rangle &= \langle r_f, \bar{H}_{s^2} | 1 - T^{-1} \rangle = \langle r_f | 1 - T, \bar{H}_{s^2} \rangle \\ &= \langle r_f | 1 + ST, \bar{H}_{s^2} \rangle = \langle r_f | -U^2, \bar{H}_{s^2} \rangle \\ &= \frac{1}{3} \langle r_f | (U - U^2)(1 - U), \bar{H}_{s^2} \rangle = \frac{1}{3} \langle r_f | U - U^2, \bar{H}_{s^2} | 1 - U^2 \rangle \\ &= \frac{\mu_k}{3} \langle r_f | ST - U^{-1}, \bar{r}_g \rangle = \frac{\mu_k}{3} (\langle r_f | -T, \bar{r}_g \rangle - \langle r_f | T^{-1}, \bar{r}_g | S \rangle) \\ &= \frac{\mu_k}{3} \langle r_f | -T + T^{-1}, \bar{r}_g | S \rangle. \end{aligned}$$

On conclut en reportant dans (6.9) en posant $\lambda_k = i(2i)^w \mu_k^2/3$. \square

On déduit immédiatement de l'identité de Haberland que l'application de périodes $r : f \mapsto r_f$ est injective sur S_k .

Notons $P = P^+ + P^-$ les parties paires et impaires d'un polynôme $P \in V_k$.

L'accouplement de Haberland est nul lorsque P et Q sont de parité opposée. Comme en outre $P | T - T^{-1}$ est de parité opposée à celle de P , il s'ensuit facilement que les deux applications linéaires $r^\pm : g \mapsto r_g^\pm$ sont également injectives sur S_k . Par ailleurs, comme $\epsilon = \text{Diag}(-1, 0)$ vérifie $\epsilon S = -S\epsilon$, il s'ensuit immédiatement que $r_f^\pm = \tilde{f} | (1 - S) | 1 \pm \epsilon$ est encore dans W_k .

On peut montrer (cf. [Cohen-Strömberg]) que $\dim W_k^- = \dim S_k$, ce qui prouve que r^- est bijective, tandis que $\dim W_k^+ = 1 + \dim S_k$, ce qui prouve que r^+ possède une image contenue dans un hyperplan de W_k .

Lorsque le poids $k = 12$, on a vu en TD que $W_{12}^- = \mathbb{C}(4X^9 - 25X^7 + 42X^5 - 25X^3 + 4X)$ est de dimension 1. ⁽³⁾ De plus, le Lemme 6.4.2 assure que $r_f = r_f^+ + r_f^-$ avec r_f^+ réel, et r_f^- imaginaire pur. On a donc démontré :

Théorème 6.5.2. — (Eichler-Shimura pour r_Δ^-) Il existe une constante $\Omega^- \in i\mathbb{R}^*$ telle que

$$r_\Delta^-(X) = \Omega^-(4X^9 - 25X^7 + 42X^5 - 25X^3 + 4X).$$

En particulier, les ratios $r_j(\Delta)/r_9(\Delta)$, $j = 1, 3, 5, 7$ sont des nombres rationnels.

On va obtenir un énoncé similaire pour r_Δ^+ , mais il faut travailler un peu plus car la série d'Eisenstein E_{12} contribue également à W_{12}^+ .

6.6. "Polynôme" de périodes de séries d'Eisenstein. — Lorsque f est la série d'Eisenstein $F_k = -\frac{B_k}{2k} + \sum_{n \geq 1} \sigma_{k-1}(n)q^n$, de poids k , la "primitive" associée devient

$$\tilde{F}_k(\tau) := \sum_{n \geq 1} \frac{\sigma_{k-1}(n)}{n^{k-1}} q^n = \sum_{n \geq 1} \sigma_{1-k}(n) q^n,$$

à cause de la formule de dualité entre poids positifs et poids négatifs

$$(6.10) \quad n^{k-1} \sigma_{1-k}(n) = \sigma_{k-1}(n).$$

En particulier, on doit penser aux séries \tilde{F}_k comme des séries d'Eisenstein de poids négatifs.⁽⁴⁾ Elles sont 1-périodiques, et leur "polynôme" de périodes r_{F_k} mesure leur défaut de modularité. Ce n'est pas exactement un polynôme, mais seulement une fraction rationnelle, car $D^{k-1}\tilde{F}_k$ diffère de F_k par une constante, donc n'est pas modulaire. Toutefois $r_{F_k} \in \mathbb{C}(\tau)$ est donné explicitement par le résultat suivant.

Proposition 6.6. — Pour tout $m \geq 1$, $\tau \in \mathbb{H}$,

$$\tilde{F}_{2m+2} |_{-2m} (\text{Id} - S) = \frac{\zeta(2m+1)}{2} (\tau^{2m} - 1) - \frac{(2\pi i)^{2m}}{2i} \sum_{j=0}^{m+1} \frac{B_{2j} B_{2m-2j+2}}{(2j)!(2m-2j+2)!} \tau^{2j-1}.$$

En particulier, la partie paire $r_{F_k}^+(\tau) = \frac{r_{F_k}(\tau) + r_{F_k}(-\tau)}{2} = \frac{\zeta(k-1)}{2} (\tau^{k-2} - 1)$ est un polynôme de $\mathbb{C}_{\leq k-2}^+[\tau]$ qui vérifie les contraintes linéaires du Th. 6.4.1, tandis que $r_{F_k}^-$ est une fraction rationnelle impaire qui possède un pôle simple en $\tau = 0$.

⁽³⁾On note que $r_9(\Delta)$ (ainsi que $r_8(\Delta), r_{10}(\Delta)$) ne sont pas nuls, car ils s'expriment en fonction de $L(\Delta, s)$ dans un demi-plan où le produit Eulérien est convergent.

⁽⁴⁾C'est certainement le point de vue de Ramanujan, qui mentionne la dualité $\sigma_{k-1} = n^{k-1} \sigma_{1-k}(n)$ et considère la famille complète pour $k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. — On introduit la fonction impaire de $\tau \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$

$$f_m(\tau) := \sum_{n \geq 1} \frac{\cot(\pi n \tau)}{n^{2m+1}}.$$

C'est une fonction impaire de la variable τ , et lorsque τ est dans le demi-plan supérieur on a $\cot(\pi n \tau) = i \frac{q^n + 1}{q^n - 1}$, de sorte que $f_m(\tau) = -i\zeta(2m+1) - 2i\tilde{F}_{2m+2}(\tau)$. Nous prouvons le théorème en établissant une identité correspondante pour la série génératrice des $f_m(\tau)$,

$$\begin{aligned} g(x, \tau) &= \sum_{m \geq 1} f_m(\tau) x^{2m} \\ &= \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} \frac{\cot(\pi n \tau)}{n^{2m+1}} x^{2m} \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{\cot(\pi n \tau)}{n} \sum_{m \geq 1} \frac{x^{2m}}{n^{2m}} \\ &= \sum_{n \geq 1} \cot(\pi n \tau) \frac{x^2}{n(n^2 - x^2)}, \end{aligned}$$

les sommes en jeu étant absolument convergentes. La (longue) preuve qui va suivre a pour objet de rendre rigoureuse la sommation, sur $m, n \in \mathbb{Z}^2$, de l'identité lumineuse entre fractions rationnelles

$$\frac{1}{(n\tau + m)(n + x)} = \left(\frac{\tau}{n\tau + m} - \frac{1}{n + x} \right) \frac{1}{(x\tau + m)}$$

qui provient d'une décomposition en éléments simples, et qui conduit directement au résultat souhaité.⁽⁵⁾

La fonction cotangente admet le développement en séries

$$(6.11) \quad \pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2} = \frac{1}{z} + 2\pi h(z).$$

En insérant ceci il vient

$$(6.12) \quad \pi g(x, \tau) = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n\tau} + 2n\tau \sum_{m \geq 1} \frac{1}{n^2\tau^2 - m^2} \right) \frac{x^2}{n(n^2 - x^2)} = A(x, \tau) + B(x, \tau)$$

où

$$A(x, \tau) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^2}{\tau n^2 (x^2 - n^2)}, \quad \text{and} \quad B(x, \tau) = \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 1} \frac{2\tau x^2}{(n^2\tau^2 - m^2)(n^2 - x^2)}.$$

⁽⁵⁾ Bien entendu, Ramanujan (et Lerch avant lui) a anticipé cette équation fonctionnelle dans son (lost) Notebook.

Nous évaluons A et B séparément. Réarrangeant (6.11), nous trouvons

$$(6.13) \quad A(x, \tau) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^2}{\tau n^2 (n^2 - x^2)} = \frac{1}{\tau} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n^2 - x^2} - \frac{1}{n^2} \right) = -\frac{\pi h(x)}{2\tau x} - \frac{\zeta(2)}{\tau}.$$

Pour évaluer B , il est utile de poser

$$B_{m,n}(x, \tau) = \frac{2\tau x^2}{(n^2 \tau^2 - m^2)(n^2 - x^2)}.$$

Regardons $(n^2 \tau^2 - m^2)(n^2 - x^2)$ comme un polynôme en n et pratiquons une *décomposition en éléments simples* :

$$\begin{aligned} B_{m,n}(x, \tau) &= \frac{2\tau x^2}{(\tau^2 x^2 - m^2)(n^2 - x^2)} - \frac{2\tau x^2}{(m^2/\tau^2 - n^2)(m^2 - \tau^2 x^2)} \\ &= \frac{2\tau x^2}{(\tau^2 x^2 - m^2)(n^2 - x^2)} - B_{n,m} \left(\tau x, \frac{1}{\tau} \right). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} B(x, \tau) &= \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 1} \frac{2\tau x^2}{(\tau^2 x^2 - m^2)(n^2 - x^2)} - B \left(\tau x, \frac{1}{\tau} \right) \\ &= x \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 - x^2} 2\tau x \sum_{m \geq 1} \frac{1}{\tau^2 x^2 - m^2} - B \left(\tau x, \frac{1}{\tau} \right) \\ &= -\frac{\pi^2 h(x) h(\tau x)}{2} - B \left(\tau x, \frac{1}{\tau} \right) \end{aligned}$$

En reportant, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \pi g(x, \tau) + \pi g \left(\tau x, \frac{1}{\tau} \right) &= A(x, \tau) + B(x, \tau) + A \left(\tau x, \frac{1}{\tau} \right) + B \left(\tau x, \frac{1}{\tau} \right) \\ &= -\frac{\pi h(x)}{2\tau x} - \frac{\zeta(2)}{\tau} - \frac{\pi h(\tau x)}{2x} - \tau \zeta(2) - \frac{\pi^2 h(x) h(\tau x)}{2} \\ &= -\frac{\pi^2}{2} \left(\frac{1}{\pi x} + h(x) \right) \left(\frac{1}{\pi \tau x} + h(\tau x) \right) + \frac{1}{2\tau x^2} - \left(\tau + \frac{1}{\tau} \right) \zeta(2) \\ &= -\frac{\pi^2}{2} \cot(\pi x) \cot(\pi \tau x) + \frac{1}{2\tau x^2} - \left(\tau + \frac{1}{\tau} \right) \zeta(2) \end{aligned}$$

Nous avons établi :

$$(6.14) \quad g(x, \tau) + g \left(\tau x, \frac{1}{\tau} \right) = -\frac{\pi}{2} \cot(\pi x) \cot(\pi \tau x) + \frac{1}{2\pi \tau x^2} - \frac{\pi}{6} \left(\tau + \frac{1}{\tau} \right)$$

Identifiant les coefficients de x^{2m} des deux côtés dans le développement de Taylor,

$$\cot(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1},$$

nous trouvons l'équation modulaire

$$f_m(\tau) + \tau^{2m} f_m\left(\frac{1}{\tau}\right) = (2\pi i)^{2m+1} \sum_{j=0}^{m+1} \frac{B_{2j} B_{2m-2j+2}}{(2j)!(2m-2j+2)!} \tau^{2j-1}, \quad m \geq 1,$$

qui implique le résultat. □

7. Méthode de Rankin

Parce que W_{12}^+ est de dimension 2, on sait déjà que $r_{\Delta}^+ = a(X^{10} - 1) + bX^2(X^2 - 1)^3$ pour des constantes réelles non-nulles a, b . Cette partie a pour prétexte de démontrer que a/b est un nombre rationnel, ce qui nous permet d'introduire une identité fameuse de Rankin pour le produit scalaire $\langle f, E_{k-l} E_l \rangle$.

On observe d'abord que la formule de Haberland, combinée avec le calcul direct

$$\langle (X+1)^{10} - (X-1)^{10}, r_{\Delta}^- \rangle = 0,$$

montre que

$$(7.1) \quad (\Delta, \Delta) = \lambda_{12} \Omega^{-b} = i \frac{\Omega^{-b} \mu}{\pi^{22}},$$

où μ est un nombre rationnel non-nul.

Théorème 7.0.1. — Soient $f = \sum a_n q^n \in S_k(\Gamma(1))$ une forme cuspidale poids k , et $g = \sum b_n q^n \in M_l(\Gamma(1))$, avec $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ et $4 \leq l < k/2$. Alors

$$(7.2) \quad (f, g E_{k-l}) = \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^{k-1}} \sum_{n \geq 1} \frac{a_n b_n}{n^{k-1}}.$$

Démonstration. — Comme pour (5.2), on déplie somme et intégrale en manipulant

$$\begin{aligned}
(f, gE_{k-l}) &= \int_{\Gamma(1) \backslash \mathbb{H}} \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma(1)} y(\gamma z)^k \bar{g}(\gamma z) f(\gamma z) \frac{dx(\gamma z) dy(\gamma z)}{y^2(\gamma z)} \\
&= \int_{\Gamma_\infty \backslash \mathbb{H}} y^k \bar{g}(z) f(z) \frac{dx dy}{y^2} \\
&= \int_{y=0}^{\infty} \int_{x=0}^1 y^k \bar{g}(z) f(z) \frac{dx dy}{y^2} \\
&= \sum_{m \geq 0, n \geq 1} a_n b_m \int_{y=0}^{\infty} e^{-2\pi y(n+m)} y^k \int_{x=0}^1 e^{2i\pi(m-n)x} \frac{dx dy}{y^2} \\
&= \sum_{m=n \geq 1} a_n b_m \int_{y=0}^{\infty} e^{-4\pi y n} y^k \frac{dy}{y^2} \\
&= \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^{k-1}} \sum_{n \geq 1} \frac{a_n b_n}{n^{k-1}}.
\end{aligned}$$

On remarque que la série est absolument convergente, puisque l'on dispose des estimations $|a_n| = O(n^{k/2})$ et $|b_n| = O(n^{l-1})$. \square

Lorsque les coefficients a_n et b_n sont tous les deux multiplicatifs, alors la série de Dirichlet $\mathcal{D}(f, g, s) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n b_n}{n^s}$ possède en outre un développement en produit Eulérien (on renvoie pour une preuve similaire au Th.9.2.1 un peu plus loin). Dans le cas $g = E_l$ on trouve en particulier

$$\mathcal{D}(f, E_l, s) = \frac{L(f, s) L(f, s-l+1)}{\zeta(2s+2-k-l)}.$$

Lorsque $f = \Delta$ et $g = E_4$, la formule (7.2) de Rankin donne donc exactement

$$(7.3) \quad \langle \Delta, E_4 E_8 \rangle = \frac{\Gamma(11)}{(4\pi)^{11}} \frac{L(\Delta, 11) L(\Delta, 8)}{\zeta(8)}.$$

On sait que $(\Delta, E_{12}) = 0$ d'après le Th. 5.16. En écrivant seulement des égalités à des rationnels près et en combinant avec le Lemme 6.4.2, l'égalité (7.3) s'écrit aussi

$$\begin{aligned}
(\Delta, \Delta) &\equiv \frac{(2i\pi)^{11+8}}{\pi^{19}} r_{10}(\Delta) r_7(\Delta) \\
&\equiv i r_{10}(\Delta) r_7(\Delta) \\
&\equiv i \frac{a\Omega^-}{(2i\pi)^{22}}.
\end{aligned}$$

En comparant cette égalité avec (7.1), on en conclut que a/b est un nombre rationnel.

En effectuant les calculs plus précisément, on trouve $\frac{a}{b} = -\frac{36}{691}$, de sorte que

$$(7.4) \quad r_{\Delta}^+ = \Omega^+ \left(-\frac{36}{691}(X^{10} - 1) + X^2(X^2 - 1)^3 \right).$$

8. Formes modulaires sur des sous-groupes de congruence

Définition 8.1. — Soit $N \geq 2$ un entier. Le groupe $\Gamma(N) = \{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}), \gamma \equiv \text{Id} \pmod{N}\}$ est appelé sous-groupe principal de congruence de niveau N . Il est d'indice fini dans $SL_2(\mathbb{Z})$.

Plus généralement, on dit qu'un sous-groupe d'indice fini $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de congruence de niveau N s'il contient $\Gamma(N)$, et que N est minimal pour cette propriété.

Une forme modulaire f de poids $k \geq 0$ (possiblement pair ou impair) et de niveau N sur un tel groupe de congruence Γ est alors une fonction holomorphe $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$, qui vérifie $f|_k \gamma = f$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, et qui est *holomorphe aux pointes*, au sens où, pour tout $\gamma' \in SL_2(\mathbb{Z})$, on a un développement de Taylor

$$(f|_k \gamma')(\tau) = a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n e^{2i\pi \frac{n\tau}{N}}.$$

Si $a_0 = 0$ on dit que f est parabolique à la pointe $\gamma'\infty$. C'est une forme parabolique, ou cuspidale, si elle est holomorphe à toutes les pointes. On note $M_k(\Gamma, \mathbb{C})$, resp. $S_k(\Gamma, \mathbb{C})$ le \mathbb{C} -espace vectoriel des formes modulaires (resp. des formes paraboliques) de poids k pour Γ .

On verra des exemples explicites en TD.

Deux sont groupes de congruences importants sont

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}), c \equiv 0 \pmod{N} \right\},$$

et

$$\Gamma_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}), \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}.$$

Noter que la matrice T est dans $\Gamma_0(N)$ et dans $\Gamma_1(N)$, mais pas dans $\Gamma(N)$: les formes modulaires pour $\Gamma(N)$ sont a priori seulement N -périodiques.

Proposition 8.2. — Soit $\alpha \in M_2(\mathbb{Z})$ de déterminant $D > 0$ et f une forme modulaire de poids k pour un sous-groupe de congruence Γ de niveau N . Alors $f|_k \alpha$ est modulaire pour le groupe $\Gamma' = \alpha^{-1}\Gamma\alpha \cap SL_2(\mathbb{Z})$, qui est un sous-groupe de congruence.

Démonstration. — On supposera que $\Gamma = \Gamma(N)$ pour simplifier. Soit $\gamma \in \Gamma(ND)$. Commençons par vérifier que γ est dans Γ' . En effet, $\alpha\gamma\alpha^{-1} = \alpha(\text{Id} + ND\beta)\alpha^{-1}$ pour une matrice $\beta \in M_2(\mathbb{Z})$. Ainsi $\alpha\gamma\alpha^{-1}$ est dans $\Gamma(N)$ car $D\alpha^{-1}$ est à coefficients entiers. Ainsi Γ' est un sous-groupe de congruence.

Si $\gamma' = \alpha^{-1}\gamma\alpha$ est dans Γ' , alors immédiatement $f | \alpha | \gamma' = f | \alpha$. Le fait que f soit holomorphe aux pointes de Γ' n'est pas très difficile, sachant que f l'était. \square

Exemples. Pour certains choix de α , la forme modulaire $f | \alpha$ possède un développement de Fourier remarquable. Notons $f = \sum_{n \geq 0} a_n q^n$ une forme modulaire 1-périodique, et $m \geq 1$.

(1) $f | V_m := m^{-\frac{k}{2}} f |_k \begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = f(m\tau)$ a pour développement de Fourier

$$f | V_m = \sum_{n \geq 0} a_n q^{mn}.$$

(2) $f | U_m := m^{-\frac{k}{2}-1} \sum_{j=1}^m f |_k \begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & m \end{pmatrix}$ a pour développement de Fourier

$$f | U_m = \sum_{n \geq 0} a_{nm} q^n.$$

Lemme 8.0.1. — Soit Γ un sous-groupe de congruence de niveau N et $k \geq 0$ un entier. Alors il existe une constante $B = B(N, k)$ telle que, si f est une forme modulaire de poids k pour Γ telle que $\text{ord}_\infty(f) \geq B$, alors $f = 0$.

Corollaire 8.0.2. — $M_k(\Gamma, \mathbb{C})$ est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie.

Démonstration. — (le lemme implique le corollaire) Soit f_1, \dots, f_{B+1} une famille de formes modulaires de $M_k(\Gamma, \mathbb{C})$. Soit N la matrice rectangulaire de taille $(B, B+1)$ formée des coefficients de Fourier $a_i(f_j)$, $1 \leq i \leq B$, $1 \leq j \leq B+1$. Elle possède un noyau non-nul, donc il existe $0 \neq x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{B+1}$ tel que $f = x_1 f_1 + \dots + \dots f_{B+1}$ est une forme modulaire dont les B premiers coefficients de Fourier à l'infini sont nuls. D'après le lemme, $f = 0$ et la famille est donc liée. \square

Démonstration. — (du lemme 8.0.1, cf F. Brunault) Lorsque $\Gamma = \Gamma(1)$, le lemme est une conséquence directe du lemme $k/12$ (on peut par exemple prendre $B = [k/12] + 1$).

Dans le cas général, soit f une forme modulaire (non nulle pour) Γ de poids k et de niveau N . On note m l'indice de Γ dans $\Gamma(1)$. Soit $h = \prod_{\gamma_j \in \Gamma \setminus \Gamma(1)} f | \gamma_j$. C'est une forme modulaire de poids km pour $\Gamma(1)$. Le lemme " km "/12 appliqué à h est une formule qui majore l'ordre d'annulation de f à l'infini, et permet de conclure en choisissant cette fois $B = [km/12] + 1$. \square

9. Séries d'Eisenstein réelles-analytiques et applications

9.1. La série d'Eisenstein réelle analytique $E(z, s)$. — La référence pour les détails de cette partie est [9], chap. 20. On définit pour $\tau = x + iy \in \mathbb{H}$ et $\text{Re}(s) > 1$ la série d'Eisenstein réelle-analytique

$$E(\tau, s) = \sum_{(0,0) \neq (m,n) \in \mathbb{Z}^2} \frac{y^s}{|m\tau + n|^{2s}}.$$

Théorème 9.1.1. — 1) $E(\tau, s)$ est absolument convergente pour $\operatorname{Re}(s) > 1$. Elle définit une fonction de classe C^∞ de x, y .

2) $E(\tau, s)$ est faiblement modulaire de poids 0 et de niveau $\Gamma(1)$.

3) $E(\tau, s)$ se prolonge en une fonction méromorphe de la variable s , avec un seul pôle, simple, en $s = 1$ de résidu π indépendant de τ .

4) $\pi^{-s}\Gamma(s)E(\tau, s)$ est invariante sous $s \mapsto 1 - s$.

5) $E(x + iy, s) = O(y^\sigma)$, $\sigma = \operatorname{Re}(s)$.

6) On a le développement de Fourier

$$(9.1) \quad \pi^{-s}\Gamma(s)E(\tau, s) = I(s) + I(1 - s) + 2\sqrt{y} \sum_{0 \neq l \in \mathbb{Z}} |l|^{\frac{1}{2}-s} \sigma_{2s-1}(|l|) K_{s-\frac{1}{2}}(\pi y |l|) e^{2\pi i l x},$$

où $I(s) = 2\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s)y^s$ et $K_s(x) = \int_0^\infty e^{x(t+\frac{1}{t})} t^s \frac{dt}{t}$.

Démonstration. — Les assertions 1) et 2) se démontrent comme pour la Prop. 1.1. Les assertions 3-4-5 résultent des propriétés de la fonction de Bessel K_s (cf [9] chap. 20), notamment la symétrie $K_s = K_{-s}$ et du développement (9.1), dont nous donnons maintenant une justification.

On utilise la transformée de Mellin $\frac{\Gamma(s)}{a^s} = \int_0^\infty e^{-at} t^s \frac{dt}{t}$ avec $a = |m\tau + n|^2$. En séparant la contribution $I(s)$ correspondant à $m = 0$, il reste à calculer

$$\sum_{m \neq 0, n \in \mathbb{Z}} \int_0^\infty e^{-\pi(mx+n)^2 t - \pi y^2 m^2 t} t^s \frac{dt}{t}.$$

On développe le terme $(mx + n)^2 = m^2 x^2 + 2mnx + n^2$ et l'on combine avec la Prop. 1.5 qui assure que $\Theta(imx, it) = \Theta(mx, -\frac{1}{it}) e^{\pi t m^2 x^2} / \sqrt{t}$. La contribution de $n = 0$ donne le terme $I(1 - s)$, tandis qu'il subsiste

$$2 \sum_{m \geq 1, 0 \neq n \in \mathbb{Z}} e^{2i\pi x mn} \int_0^\infty e^{-\pi(y^2 m^2 t + \frac{n^2}{t})} t^{s-\frac{1}{2}} \frac{dt}{t}.$$

Cette dernière intégrale n'est autre que la fonction de Bessel

$$K_{s-\frac{1}{2}}(\sqrt{\pi} y m, \sqrt{\pi} |n|) = \left(\frac{|n|}{y m} \right)^{s-\frac{1}{2}} K_{s-\frac{1}{2}}(\pi y m |n|),$$

ce qui permet de conclure en posant $l = mn$. □

Remarque 9.1.2. — Soit

$$\Theta_{x+iy}(\tau) = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}^2} e^{i\pi \frac{\tau}{y} |m(x+iy)+n|^2}.$$

On peut aussi déduire, par transformée de Mellin, les propriétés 3) et 4) de $E(z, s)$ dans le Th.9.1.1 de l'équation modulaire "en poids 1" satisfaite par $\Theta_z(\tau)$:

$$(9.2) \quad \Theta_z\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{\tau}{i} \Theta_z(\tau).$$

Cette équation (9.2) se déduit d'une double utilisation de la Prop. 1.5 pour la fonction Theta de Jacobi.

9.2. Application no.1 : la méthode de Rankin-Selberg. — Soient $f, g \in S_k(\Gamma(1))$. On va calculer le produit scalaire de Petersson $\langle fE(\cdot, s), g \rangle$ comme une fonction L . Celle-ci va en particulier hériter des bonnes propriétés de $s \mapsto E(\cdot, s)$.

Il est en fait plus facile de mener le calcul avec

$$\tilde{E}(\tau, s) = \sum_{\gamma = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma(1)} \text{Im}(\gamma\tau)^s = \zeta(2s)^{-1} E(\tau, s).$$

Proposition 9.1. — (Formule de Rankin-Selberg) Lorsque $f = \sum a_n q^n$ et $g = \sum b_n q^n$ sont des formes paraboliques de même poids et $\text{Re}(s) > 1$, on a

$$(9.3) \quad \langle f\tilde{E}(\cdot, s), g \rangle = (4\pi)^{-(s+k-1)} \Gamma(s+k-1) \sum_{n \geq 1} \frac{a_n \bar{b}_n}{n^{s+k-1}}.$$

En particulier, cette série de Dirichlet possède un prolongement méromorphe pour $s \in \mathbb{C}$.

Démonstration. — Comme f ou g est parabolique et que \tilde{E} satisfait l'estimée du Th. 9.1.1, le produit scalaire de Petersson

$$\langle f\tilde{E}(\cdot, s), g \rangle = \int_{\mathcal{F}} y^k f(\tau) \tilde{E}(\tau, s) \bar{g}(\tau) dx dy / y^2$$

converge. Des manipulations semblables à celles conduisant à l'Eq. (5.2) permettent d'obtenir la formule souhaitée. Le prolongement analytique est une conséquence du Th. 9.1.1. (on trouvera plus de détails sur la vignette de P. Garrett http://www-users.math.umn.edu/~garrett/m/v/basic_rankin_selberg.pdf). \square

Théorème 9.2.1. — Soient $f = \sum a_n q^n, g = \sum b_n q^n$ deux formes propres cuspidales normalisées de poids k . Alors la fonction

$$L(f \times g, s) = \zeta(2s - 2k + 2) \sum_{n \geq 1} \frac{a_n b_n}{n^s}$$

se prolonge en une fonction méromorphe sur \mathbb{C} . Elle s'écrit comme un produit Eulérien

$$L(f \times g, s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{(1 - \alpha_p \beta_p p^{-s})(1 - \alpha_p \beta'_p p^{-s})(1 - \alpha'_p \beta_p p^{-s})(1 - \alpha'_p \beta'_p p^{-s})},$$

où $(1 - a_p X + p^{k-1} X^2) = (1 - \alpha_p X)(1 - \alpha'_p X)$ et $(1 - b_p X + p^{k-1} X^2) = (1 - \beta_p X)(1 - \beta'_p X)$. La fonction L complète $\Lambda(f \times g, s) := \Gamma(s)\Gamma(s - k + 1)(2\pi)^{-2s} L(f \times g, s)$ est invariante sous $s \mapsto 2k - 1 - s$.

Démonstration. — Le prolongement analytique et l'équation fonctionnelle sont des conséquences de la Prop. 9.1, en observant que b_n est réel puisque g est une forme de Hecke. Il reste à justifier l'existence du produit Eulérien. On sait que $\sum a_{p^r} x^r = \frac{1}{(1-\alpha_p x)(1-\alpha'_p x)}$ et $\sum b_{p^r} x^r = \frac{1}{(1-\beta_p x)(1-\beta'_p x)}$ puisque f et g sont des formes de Hecke. Une décomposition en éléments simples permet alors de montrer que

$$\sum_{r \geq 0} a_{p^r} b_{p^r} x^r = \frac{(1 - \alpha_p \alpha'_p \beta_p \beta'_p x^2)}{(1 - \alpha_p \beta_p x)(1 - \alpha_p \beta'_p x)(1 - \alpha'_p \beta_p x)(1 - \alpha'_p \beta'_p x)}.$$

En choisissant $x = p^{-s}$, le résultat s'ensuit par multiplicité de la suite $a_n b_n$. (on trouvera plus de détails sur la vignette de P. Garrett http://www-users.math.umn.edu/~garrett/m/v/basic_rankin_selberg.pdf) \square

9.3. Application no 2 : formule limite de Kronecker. —

Corollaire 9.3.1 (Première formule limite de Kronecker "classique")

Le développement de Taylor des séries d'Eisenstein non-holomorphes $\tilde{E}(\tau, s)$ et $E(\tau, s)$ est donné au voisinage de $s = 0$ par

$$(9.4) \quad \tilde{E}(\tau, s) = 1 + \left(\log y |\eta(\tau)|^4 \right) + O(s^2),$$

$$E(\tau, s) = -\frac{1}{2} - s \left(\log 2 - \gamma + \frac{1}{2} \log y |\eta(\tau)|^4 \right) + O(s^2),$$

où γ est la constante d'Euler et $\tau = x + iy$. De manière équivalente, en $s = 1$ on a

$$(9.5) \quad E(\tau, s) = \frac{\pi}{s-1} - 2\pi \left(\log 2 - \gamma + \frac{1}{2} \log y |\eta(\tau)|^4 \right) + O(s-1),$$

Démonstration. — On fait tendre s vers zéro dans (9.1), en notant que $K_{\frac{1}{2}}(c) = \sqrt{\frac{\pi}{c}} e^{-2c}$. La contribution modulaire provient de l'identité

$$\sum_{0 \neq l \in \mathbb{Z}} \sigma_{-1}(|l|) e^{2i\pi l x - 2\pi |l| y} = 2\operatorname{Re} \left(-\log \eta(x + iy) + \frac{i\pi\tau}{12} \right).$$

L'équation fonctionnelle reliant $E(\tau, s)$ à $E(\tau, 1-s)$ permet d'obtenir le développement de Laurent en $s = 1$. \square

Noter que le terme principal de la formule limite de Kronecker s'écrit également

$$(9.6) \quad \log(y |\eta(\tau)|^4) = \frac{1}{12} \log(y^{12} |\Delta(\tau)|^2)$$

en terme de la fonction Δ de Ramanujan. C'est une fonction faiblement modulaire de poids zéro.

Soit K un corps quadratique imaginaire et $\tau_0 \in \mathcal{H} \cap K$ un point CM. Il résulte immédiatement du théorème 9.1.1 que la fonction zêta partielle

$$\zeta_K(\mathbb{Z} + \tau_0\mathbb{Z}, s) = \sum_{\mu \in \mathbb{Z} + \tau_0\mathbb{Z}} \frac{1}{|\mu|^{2s}}$$

possède un prolongement méromorphe à \mathbb{C} . La formule limite de Kronecker (9.5) établit d'abord que en $s = 1$, elle possède un pôle simple de résidu π (c'est essentiellement le contenu de la formule des classes pour K). De plus, le terme suivant dans son développement de Laurent en $s = 1$ dépend de τ_0 . En utilisant l'équation fonctionnelle de $E(\tau_0, s)$ sous $s \mapsto 1 - s$, on arrive de façon équivalente à l'identité (à des constantes près)

$$(9.7) \quad \zeta'_K(\mathbb{Z} + \tau_0\mathbb{Z}, 0) \simeq \log((\text{Im } \tau_0)|\eta(\tau_0)|^4).$$

Le membre de gauche fait sens pour tout corps de nombres K , tandis que dans le cas quadratique imaginaire, le membre de droite est, pour l'essentiel, le logarithme de la valeur absolue d'un nombre algébrique (par la théorie CM). Cette observation est le coeur de la conjecture de Stark (1970) qui vise à répondre, de manière détournée, au 12ème problème de Hilbert : construire des nombres algébriques à partir de valeurs de valeurs spéciales de fonctions zêta, en lieu et place de fonction holomorphes évaluées en des points de K requises par Hilbert.

En dehors des cas $K = \mathbb{Q}$, K quadratique imaginaire, et celui d'une variante p -adique sur un corps K totalement réel (conjecture de Brumer-Stark (1980), démontrée par Dasgupta-Kakde (2021)), la conjecture de Stark est complètement ouverte.

Références

- [1] Chenevier, Introduction aux formes modulaires, notes à http://gaetan.chenevier.perso.math.cnrs.fr/coursENS/notes_chenevier.pdf
- [2] Ph. Cassou-Noguès, M. Taylor. Elliptic functions and rings of integers. Progress in Math. 66.
- [3] D. Cox, Primes of the form $x^2 + ny^2$.
- [4] Cohen, Strömberg, *Modular forms. An classical approach*, AMS 2018. Graduate Studies in Math. vol. 179.
- [5] Koblitz, *Introduction to elliptic curves and modular forms*, Springer
- [6] Kohnen, Zagier. Modular forms with rational periods.
- [7] Godement, *Analyse mathématique, vol. 4. ch. 12 : le jardin des délices modulaires*, Springer.
- [8] Iwaniec, *Introduction to automorphic forms*.
- [9] Lang, *Elliptic functions*.
- [10] J.P. Serre, *Cours d'arithmétique*, Presse Universitaire de France.
- [11] J. Silverman, *Advanced topics on the arithmetic of elliptic curves*, Springer.
- [12] G. Shimura, *Elementary Dirichlet series dans modular forms*, Springer (2007).
- [13] Weil, *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*, Springer.

PIERRE CHAROLLOIS, Institut de Mathématiques de Jussieu-PRG, Sorbonne Université. 4, place
Jussieu. 75005, Paris, France. URL: <http://webusers.imj-prg.fr/~pierre.charollois/>
E-mail : `pierre.charollois@imj-prg.fr`