

Sur une analogie réelle de la multiplication complexe.

Depuis une dizaine d'années j'ai porté l'attention sur ~~une~~ certaines fonctions qui éprouvent des simples modifications et les ramènent à deux formes réelles inconcevables. Analyse mathématique.

Sur une série analogue aux fonctions modulaires.

La série suivante, où ω est une quantité réelle qui dépend du paramètre réel ω ,

$$(1) \quad f(\omega) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\cot v \omega \pi}{(2v\pi)^{2m+1}},$$

est dépourvue de sens, si ω est un nombre rationnel, elle est convergente si ω est racine d'une équation quadratique $a\omega^2 + b\omega + c = 0$ aux coefficients rationnels entiers, et plus généralement, pour toute quantité algébrique donnée, dès que m surpasse une certaine limite. Si la série est convergente pour une quantité ω , algébrique ou transcendante, elle le sera pour toute quantité ω' , équivalente à ω dans le sens de Lagrange, et la quantité $f(\omega')$ s'exprime ~~non~~ ^{aussi} par $f(\omega)$ et par des fonctions rationnelles de ω .

Désignons par $(-1)^m \varphi(\omega)$ le coefficient de x^{2m} dans le développement suivant les puissances croissantes de la variable x , de la fonction

$$\frac{1}{(e^x - 1)(e^{\omega x} - 1)};$$

alors on a la relation

$$(2) \quad f(\omega) + \omega^{2m} f\left(\frac{1}{\omega}\right) = \varphi(\omega)$$

qui, jointe aux relations évidentes $f(-\omega) = -f(\omega)$, $f(\omega \pm 1) = f(\omega)$,

permet d'exprimer $f(\omega')$ d'obtenir l'expression annoncée de $f(\omega')$ en fonction finie de ω et $f(\omega)$ d'évaluer $f(\omega')$.

Soit $\omega = \frac{t+u\sqrt{D}}{2}$ une unité quadratique, c'est à dire que les entiers t, u satisfont à l'équation de Fermat $t^2 - Du^2 = 4\varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$; alors on tire de la relation (2)

$$f(\omega) = \frac{f(\omega)}{1 - \varepsilon \omega^{2m}}, \quad \omega = \frac{t+u\sqrt{D}}{2}$$

et on en conclut aisément que la quantité $f(\omega)\sqrt{D}$ est un nombre rationnel. Par exemple, prenant $m=3$, $\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, on aura

$$\sqrt{5} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\cot r\omega\pi}{(2r\pi)^7} = -\frac{8}{10!}$$

Plus généralement, si ω est une irrationnelle quadratique, $f(\omega)$ s'exprime sous forme sera toujours une quantité du même genre. On le vérifie d'abord pour des irrationnelles réduites; c'est à dire développables en fractions continues ~~simples~~ ^{par} en opérant le développement pour une telle irrationnelle l'algorithme du développement en fraction continue $\omega = a + \frac{1}{\omega_1}$, $\omega_1 = a_1 + \frac{1}{\omega_2}$, $\omega_2 = a_2 + \frac{1}{\omega_3}$;

on arrive ainsi à établir une quantité ω_r égale à ω ; et en même temps, l'équation (2) permet de conclure la relation générale

$$(3) \quad f(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{(-1)^{r-1}}{(\omega_1 \omega_2 \dots \omega_r)^{2m}} f(\omega_r) + (-1)^n \frac{f(\omega_n)}{(\omega_1 \omega_2 \dots \omega_n)^{2m}},$$

qui pour $f(\omega) = \omega$ et $\omega_r = \omega$ permet d'exprimer donne immédiatement

tiatement $f(\omega)$ sous forme annoncée. Si ω n'est pas réduite, elle sera équivalente au des quotients complets ω_k sera une irrationnelle réduite et la formule (3) donne ^{alors} immédiatement la valeur de $f(\omega)$.

Ici se pose s'impose la question concernant la distribution en classes des quantités $f(\omega)$ provenant des différentes valeurs de m .

La formule (2) ~~pourrait~~ conserver un sens pour irrationnel quelconque ^{si} ~~pourrait~~ si on l'écrit

$$(4) \quad (2\pi)^{2m+1} f(\omega) = \sum \frac{\cot v\omega\pi}{v^{2m+1}} + \omega^{2m} \sum \frac{\cot \frac{\mu\pi}{\omega}}{\mu^{2m+1}}$$

le second membre étant considéré non comme la somme de deux séries, mais comme un couple de séries, notion que j'avais précisée dans un mémoire de l'Académie de Prague, en 1899.

Dans une telle expression, on prend $v=1, 2, 3, \dots$ et on adjoint à toute valeur de v quel entier μ tel que la quantité $v\omega - \mu = \xi$ soit ~~plus petit que possible~~ ^{le plus petit} ~~soit plus petit que possible~~; on reçoit de la sorte une infinité de couples ~~qui~~ ^{qui} déterminent les indices v qui ~~seulement~~ ^{seulement} ~~la partie fractionnaire~~ ^{la partie fractionnaire} ~~naissent de~~ ^{naissent de} ~~la partie fractionnaire~~ ^{la partie fractionnaire} ~~le plus petit~~ ^{le plus petit} ~~reste absolu de~~ ^{reste absolu de} ~~v\omega~~ ^{v\omega}, et on range en couples les indices v et μ tels que $v\omega - \mu = \xi$ soit plus petit en valeur absolue qu'une certaine constante choisie à volonté; puis on complète les indices μ et v par des valeurs libres pour obtenir pour l'une et l'autre série tous les entiers positifs. Les indices libres engendrent des séries convergentes et, il me

S'agit que des indices rangés en couples. Pour $v\omega - \mu = \xi$ on a
 $\cot v\omega\pi = \cot \xi\pi$, $\cot \frac{\mu\pi}{\omega} = -\cot \frac{\xi\pi}{\omega}$, et les termes
 correspondants ont pour somme

$$\frac{\cot v\omega\pi}{v^{2m+1}} + \omega^{2m} \cot \frac{\mu\pi}{\omega} \frac{\cot \xi\pi}{v^{2m+1}} - \frac{\frac{1}{\omega} \cot \frac{\xi\pi}{\omega}}{\left(v - \frac{\xi}{\omega}\right)^{2m+1}}$$

quantité qui pour ξ très petit est sensiblement égale à

$$\frac{2m+1}{v^{2m+2} \pi \omega}$$

En faisant tendre ω vers une limite rationnelle $\frac{p}{q}$, le passage
 à la limite s'effectue aisément; on obtient de la sorte des
 résultats algébriques dont je me contente de signaler le plus
 simple, celui de $m=1$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p} \sum_{p=1}^{p-1} \cot \frac{pq\pi}{p} \cot \frac{p\pi}{p} \operatorname{cosec}^2 \frac{p\pi}{p} + \frac{1}{q} \sum_{p=1}^{q-1} \cot \frac{p\pi}{q} \cot \frac{p\pi}{q} \operatorname{cosec}^2 \frac{p\pi}{q} \\ &= \frac{(p^2 - q^2)^2 - 3p^2q^2 + 3}{45pq} \end{aligned}$$

On peut se servir de la formule (4) même pour des valeurs
 rationnelles $\omega = \frac{p}{q}$, en bornant chacune des deux séries
 à un nombre restreint des termes, pourvu que les deux
 entiers p et q surpassent une certaine limite. Ce procédé
 soit d'une certaine grandeur.

présente même des avantages sur l'emploi de la formule finale

$$f(\omega) = \frac{B_{m+1}(\omega^{2m+2} + 1)}{(2m+2)! \omega} - \frac{1}{(2m+2)!} \sum_{v=1}^m \binom{2m+2}{2v} B_v B_{m+1-v} \omega^{2v-1},$$

dès que m surpasse une certaine limite.

La fonction (1), que je désigne pour plus de clarté par $f_{2m+1}(\omega)$, paraît avoir quelque importance dans l'arithmétique approximative. Considérons en effet les polynômes bernoulliens ~~les~~ modifiés

$$\Phi_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{2} x^n + \sum_v (-1)^{v-1} \binom{n}{2v-1} \frac{B_v}{2v} x^{n-2v+1} \\ (v=1, 2, 3, \dots)$$

où la présence du terme constant soit admise; soit u une quantité réelle aussi que ω , et désignons par x_v le plus petit reste positif $u + v\omega - [u + v\omega]$; en admettant que la quantité

$\delta = u\omega - [u\omega + \frac{1}{2}]$ soit très petite, la somme

$$S_n = \sum_{v=0}^{n-1} \Phi_n(x_v)$$

sera

$$\sum_k \frac{1}{k^{n+1} \sin k\omega\pi}$$

est convergente.

dans le cas de $\omega = 0$,

Malgré l'introduction des séries $f(\omega)$ permet pousser l'approximation plus loin. On a en effet le développement

$$(-1)^m S_{2m} = \sum_{r=0,1,2,\dots} (-1)^r \binom{2m}{2r} \frac{B_{m-r}}{4^{r+2}} \delta^{2r+1} - (2m)! \sum_{r=0,1,2,\dots} (-1)^r \frac{f_{2m-2r-1}(\omega)}{(2r+2)!} \delta^{2r+1}$$

$$(-1)^{m-1} S_{2m-1} = (2m-1)! \sum_{\lambda=1,3,5,\dots} (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} f_{2m-\lambda}(\omega) \delta^\lambda + \frac{1}{4m} \sum_{r=1,2,3,\dots} (-1)^r \binom{2m}{2r} B_{m-r} \delta^{2r}$$

qu'il faut borner aux termes où figurent les séries $f(\omega)$ convergentes. Ainsi dans le cas de $\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803$ on a $5\omega - 8 = 0,09015 = \delta$; faisant donc $n=5$, $2m=6$, la première formule bornée aux termes

$$S_6 = -\frac{\delta}{84} + \frac{\delta^2 \sqrt{5}}{168} + \frac{\delta^3}{12}$$

donne

$$S_6 = -0,00110,$$

ce qui s'accorde avec le calcul direct.

(Comptes Rendus, C. 138; 18 avril 1904, p. 952-4)