ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une série analogue aux fonctions modulaires.* Note de M. **Lerch**, présentée par M. E. Picard.

« La série suivante dépendant du paramètre réel ω,

$$(1) \qquad f(\omega) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cot \nu\omega\pi}{(2\nu\pi)^{2m+1}},$$

est dépourvue de sens, si ω est un nombre rationnel; elle est convergente pour $m \geqq 1$, si ω est racine d'une équation quadratique aux coefficients entiers, et plus généralement, pour toute quantité irrationnelle algébrique donnée ω, dès que m surpasse une certaine limite.

» Si la série $f(\omega)$ est convergente pour une quantité ω, algébrique ou transcendante, elle le sera aussi pour toute quantité ω', équivalente à ω dans le sens de Lagrange, et la quantité $f(\omega')$ s'exprime linéairement par $f(\omega)$ et rationnellement par ω.

» Désignons par $(-1)^m \varphi(\omega)$ le coefficient de x^{2m} dans le développement, suivant les puissances de la variable x, de la fonction

$$\frac{1}{(e^x - 1)(e^{\omega x} - 1)};$$

alors on a la relation

$$(2) \qquad f(\omega) + \omega^{2m} f\left(\frac{1}{\omega}\right) = \varphi(\omega)$$

qui, jointe aux relations évidentes :

$$f(-\omega) = -f(\omega), \qquad f(\omega \pm 1) = f(\omega),$$

fournit l'expression cherchée de $f(\omega')$.

» Soit

$$\omega = \frac{t + u\sqrt{d}}{2}$$

une unité quadratique, c'est-à-dire que les entiers t, u satisfont à l'équation de Fermat $t^2 - du^2 = 4\varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$; alors l'équation (2) donne

$$f(\omega) = \frac{\varphi(\omega)}{1 - \varepsilon\omega^{2m}},$$

et cette formule permet de conclure que le produit $f(\omega)\sqrt{d}$ est un nombre rationnel. Par exemple, faisant $\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, on aura

$$\sqrt{5} \sum_{1}^{\infty} \frac{\cot \nu\omega\pi}{(2\nu\pi)^7} = -\frac{8}{10!}.$$

» Plus généralement, si ω est une irrationnelle quadratique, $f(\omega)$ est une quantité du même genre. On le vérifie d'abord sur les irrationnelles dites *réduites;* pour une telle quantité, l'algorithme des fractions continues

$$\omega = a + \frac{1}{\omega_1}, \qquad \omega_1 = a_1 + \frac{1}{\omega_2}, \qquad \omega_2 = a_2 + \frac{1}{\omega_3}, \qquad \cdots$$

fournit une quantité ω_r égal à ω. La formule suivante, qui est générale,

$$(3) \qquad f(\omega) = \sum_{\nu=1}^{r} \frac{(-1)^{\nu-1}\varphi(\omega_\nu)}{(\omega_1\,\omega_2\,\ldots\,\omega_\nu)^{2m}} + \frac{(-1)^r f(\omega_r)}{(\omega_1\,\omega_2\,\ldots\,\omega_r)^{2m}},$$

devient une équation linéaire pour l'inconnue $f(\omega)$, si l'on y fait $\omega_r = \omega$.

» Si ω n'est pas réduit, un des quotients complets $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ sera comme on sait une irrationnelle réduite, et en le désignant par ω_r, la formule (3) donne $f(\omega)$ sous la forme annoncée.

» Ici s'impose la question concernant la distribution en classes des quantités $f(\omega)$ provenant des différentes valeurs de l'entier m.

» La formule (2) conserve un sens pour ω irrationnel quelconque, si on l'écrit

$$(4) \qquad (2\pi)^{2m+1}\varphi(\omega) = \sum \frac{\cot \nu\omega\pi}{\nu^{2m+1}} + \omega^{2m} \sum \frac{\cot \frac{\mu\pi}{\omega}}{\mu^{2m+1}},$$

le second membre étant considéré non plus comme la somme de deux séries, mais comme un *couple de séries,* notion que j'avais précisée dans un Mémoire de l'Académie de Prague, en 1899. Dans une telle expression, on range en couples les indices ν et μ tels que la quantité $\nu\omega - \mu = \xi$ soit en valeur absolue plus petite qu'une fraction choisie à volonté, puis on complète les valeurs des indices par des valeurs *libres,* de manière à obtenir la totalité des entiers positifs ν et μ.

» Les indices libres engendrent des séries absolument convergentes et il ne s'agit que des indices rangés en couples. Pour $\nu\omega - \mu = \xi$, on a

$$\cot \nu\omega\pi = \cot \xi\pi, \qquad \cot \frac{\mu\pi}{\omega} = -\cot \frac{\xi\pi}{\omega},$$

et les termes du même couple ont pour somme

$$\frac{\cot \xi\pi}{\nu^{2m+1}} - \frac{\cot \frac{\xi\pi}{\omega}}{\omega\left(\nu - \frac{\xi}{\omega}\right)^{2m+1}},$$

quantité qui, pour ξ très petit, est sensiblement égale à

$$\frac{2m+1}{\nu^{2m+2}\,\omega\pi}.$$

» En faisant tendre ω vers une limite rationnelle $\frac{p}{q}$, le passage à la limite s'effectue aisément; on obtient de la sorte certaines réciprocités algébriques dont la plus simple est celle de $m = 1$:

$$\frac{1}{p}\sum_{\rho=1}^{p-1}\cot\frac{\rho q\pi}{p}\cot\frac{\rho\pi}{p}\operatorname{coséc}^2\frac{\rho\pi}{p} + \frac{1}{q}\sum_{\rho=1}^{q-1}\cot\frac{\rho p\pi}{q}\cot\frac{\rho\pi}{q}\operatorname{coséc}^2\frac{\rho\pi}{q} = \frac{(p^2-q^2)^2 - 3p^2q^2 + 3}{45pq}.$$

» On peut se servir de la formule (4) même pour des valeurs rationnelles $\omega = \frac{p}{q}$, en bornant chacune des deux *séries* à un nombre restreint des termes, pourvu que les deux entiers p et q soient d'une certaine grandeur. Ce procédé d'approximation présente même des avantages sur l'emploi de la formule finie

$$\varphi(\omega) = \frac{B_{m+1}(\omega^{2m+2}+1)}{(2m+2)!\,\omega} - \frac{1}{(2m+2)!}\sum_{\nu=1}^{m}\binom{2m+2}{2\nu}B_\nu B_{m+1-\nu}^{2\nu-1}\omega,$$

dès que m surpasse une certaine limite.

» La série (1), que je désigne désormais par $f_{2m+1}(\omega)$, paraît avoir quelque importance dans l'arithmétique approximative. Considérons en effet les polynomes bernoulliens, modifiés par la présence du terme constant lorsque n est impair,

$$\Phi_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{2}x^n + \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}(-1)^{\nu-1}\binom{n}{2\nu-1}\frac{B_\nu}{2\nu}x^{n-2\nu+1};$$

en désignant par u et ω deux quantités réelles, la seconde étant irrationnelle, choisissons l'entier positif r tel que le plus petit reste absolu

$$\delta = r\omega - \left[r\omega + \frac{1}{2}\right]$$

soit très petit, et posons $x_\nu = u + \nu\omega - [u + \nu\omega]$, de sorte que $0 < x_\nu < 1$; alors la somme

$$(5)\qquad S_n = \sum_{\nu=0}^{r-1}\Phi_n(x_\nu)$$

sera elle aussi très petite, au moins si la série

$$\sum_k \frac{1}{k^{n+1}\sin k\omega\pi}$$

est convergente.

» Dans le cas de $u = 0$, l'introduction des séries $f(\omega)$ permet de pousser l'approximation beaucoup plus loin, comme on peut aisément s'en rendre compte. »