Arguments des unités de Stark et périodes de séries d'Eisenstein

Pierre Charollois[1]
Henri Darmon[2]

25 octobre 2007

Table des matières

Introduction

Soit K un corps de nombres, et soit

$$S_\infty = \{v_1, \ldots, v_t\}$$

[1] charollois@math.jussieu.fr
Le premier auteur a bénéficié du soutien matériel de l'Institut de Mathématiques de Bordeaux et du CRM-ISM de Montréal au cours de l'élaboration de cet article.
[2] darmon@math.mcgill.ca
Le travail du second auteur a été financé en partie par le CRSNG et la Chaire James McGill.

l'ensemble de ses places archimédiennes. Pour chaque place de S_∞, on choisit un plongement réel ou complexe associé, que l'on désignera par le même symbole, et l'on pose (pour x appartenant à $K^\times$, et $v \in S_\infty$)

$$s_v(x) := \begin{cases} \text{signe}(v(x)) \in \{-1,1\} & \text{si } v \text{ est réelle;} \\ 1 & \text{si } v \text{ est complexe.} \end{cases}$$

Soit I un idéal de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$ de K, et soit $\mathcal{O}_{K,+}^\times(I)$ le sous-groupe du groupe $\mathcal{O}_{K,+}^\times$ des unités totalement positives de $\mathcal{O}_K$ formé des éléments qui sont congrus à 1 modulo I. Pour tout $a \in (\mathcal{O}_K/I)$, on associe au choix de signes $s_{v_2}, \ldots, s_{v_n}$ la fonction L partielle de Hurwitz :

$$L(a,I,s) := (\mathrm{N}I)^s \sum_{\substack{x \in \mathcal{O}_K/\mathcal{O}_{K,+}^\times(I) \\ x \equiv a\ (I)}}{}' s_{v_2}(x) \cdots s_{v_t}(x) |\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(x)|^{-s}, \tag{1}$$

où le symbole $\sum'$ indique que la somme est à prendre sur les éléments *non-nuls*. Ces fonctions L jouissent des propriétés suivantes :

1. La fonction $L(a,I,s)$ ne dépend que de l'image de a dans le quotient $(\mathcal{O}_K/I)/\mathcal{O}_{K,+}^\times$, sur lequel opère le groupe
$$\mathcal{G}_I := (\mathcal{O}_K/I)^\times/\mathcal{O}_{K,+}^\times. \tag{2}$$
Plus généralement, pour toute unité $\epsilon \in \mathcal{O}_K^\times$, on a
$$L(\epsilon a, I, s) = s_{v_2}(\epsilon) \cdots s_{v_t}(\epsilon) L(a,I,s).$$

2. La série qui définit $L(a,I,s)$ converge absolument sur le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 1$, et admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe avec au plus un pôle simple en $s=1$. Si $t \geq 2$, cette fonction est même holomorphe, et s'annule en $s=0$.

Pour simplifier les énoncés qui suivent, on supposera (dans l'introduction seulement) que le corps K a pour nombre de classes 1 au sens restreint. Pour toute place $v \in S_\infty$, il existe alors une unité $\epsilon_v \in \mathcal{O}_K^\times$ telle que

$$s_v(\epsilon_v) = -1, \qquad s_{v'}(\epsilon_v) = 1, \quad \text{pour tout } v' \neq v.$$

De plus, la théorie du corps de classes identifie le groupe $\mathcal{G}_I$ avec le groupe de Galois d'une extension abélienne H de K, appelée le *corps de classes de rayon au sens restreint* associé à I. Soit

$$\mathrm{rec} : \mathcal{G}_I \longrightarrow \mathrm{Gal}(H/K)$$

l'isomorphisme de réciprocité de la théorie du corps de classes, et pour tout $v \in S_\infty$, soit c_v la conjugaison complexe ("élément de Frobenius") associée à la place v, de sorte que

$$c_v = \begin{cases} 1 & \text{si } v \text{ est complexe,} \\ \mathrm{rec}(\epsilon_v) & \text{si } v \text{ est réelle.} \end{cases}$$

On choisit aussi une place $\tilde{v}_1$ de H au-dessus de la place v_1.

La conjecture de Stark [St], [Ta], concerne les dérivées premières de $L(a,I,s)$ en $s=0$.

Conjecture 1 (Stark). *Pour tout $a \in (\mathcal{O}_K/I)$, il existe une unité $u_a \in \mathcal{O}_H^\times$, appelée* unité de Stark *associée au couple (a, I), telle que*

1. *$L'(a, I, 0) = \log |\tilde{v}_1(u_a)|$;*
2. *$c_{v_1}(u_a) = u_a$;*
3. *Si $t \geq 3$, alors $c_{v_2} u_a = \cdots = c_{v_t} u_a = u_a^{-1}$;*
4. *Pour tout $b \in \mathcal{G}_I$, on a $u_{ab} = \mathrm{rec}(b)^{-1} u_a$.*

On notera que les unités conjecturales u_a dépendent du choix de la place $\tilde{v}_1$ au-dessus de v_1, mais seulement à conjugaison près par $\mathrm{Gal}(H/K)$.

Si $S_\infty - \{v_1\}$ possède une place complexe, la Conjecture 1 est trivialement vérifiée. En effet, quand $t = 2$, la quantité $L'(a, I, 0)$ ne dépend que de I et non de a, et s'écrit comme un multiple rationnel du logarithme d'une unité fondamentale de K. Quand $t > 2$, on a de plus $L'(a, I, 0) = 0$, de sorte que la Conjecture 1 est vérifiée avec $u_a = 1$.

Par conséquent, la Conjecture 1 n'a de l'intérêt que lorsque les places $v_2, \ldots, v_t$ sont toutes réelles, ce qui nous amène à distinguer deux cas.

1. Le cas totalement réel. Si la place v_1 est également réelle, le corps K est *totalement réel.* A cause de la propriéte 2 dans la Conjecture 1, l'expression $\tilde{v}_1(u_a)$ appartient alors à $\mathbf{R}$. La Conjecture 1 permet donc d'évaluer ce nombre, du moins au signe près. On obtient ainsi, par évaluation des dérivées en $s = 0$ des séries $L(a, I, s)$, la construction analytique d'unités explicites de H. Les conjectures de Stark, une fois démontrées, fourniraient ainsi un élément de "théorie explicite du corps de classes" pour les corps de nombres totalement réels.

2. Le cas ATR. Si v_1 est une place complexe, on dit, suivant la terminologie de [DL], que K est un corps de nombres ATR ("Almost Totally Real"). Puisque $c_{v_1} = 1$, l'expression $\tilde{v}_1(u_a)$ n'a plus de raison d'être réelle *a priori*, et la Conjecture 1 ne permet d'en évaluer que la *valeur absolue*. L'ambiguïté de signe du cas totalement réel s'avère donc plus sérieuse dans le contexte ATR, puisqu'elle porte sur *l'argument* de $\tilde{v}_1(u_a)$, un élément de $\mathbf{R}/(2\pi\mathbf{Z})$. On est amené à poser la question suivante qui peut servir de motivation pour cet article.

Question 1. *Existe-t-il une formule analytique explicite pour l'expression $\tilde{v}_1(u_a)$ qui apparaît dans la Conjecture 1, lorsque K est ATR ?*

Une réponse affirmative à cette question fournirait une solution du 12-ème problème de Hilbert pour les extensions ATR.

Dans le premier cas intéressant où K est un corps cubique complexe, cette question a été considérée dans [Das] et dans [DTvW] où la conjecture de Stark est étudiée numériquement, et un progrès décisif a été accompli dans [RS].

Le présent article se penche sur la Question 1 lorsque le corps K est une extension quadratique d'un corps totalement réel F, et lorsque le corps de rayon H est remplacé par un certain sous-corps—le corps de classes d'anneau ("ring class field") associé à I et K/F—dont la définition sera rappelée dans la Section 1.

Pour motiver notre approche, examinons ce qui se passe dans le cas le plus simple où $F = \mathbf{Q}$, où K est un corps quadratique imaginaire de nombre de classes 1, et où $I = (m)$ est un idéal rationnel engendré par $m \in \mathbf{Z}$. Au lieu de porter sur les séries partielles de Hurwitz, les conjectures de cet article vont plutôt porter sur les sommes

$$\sum_{r \in (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})} L(ar, I, s) =: L(M, s) = \quad (\mathrm{N}M)^s \sum_{x \in M/\mathcal{O}_{K,+}^\times(I)}{}' |\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(x)|^{-s}, \tag{3}$$

où

$$M = \{x \in \mathcal{O}_K, \text{ tel qu'il existe } r \in \mathbf{Z} \text{ avec } x \equiv ar \pmod{I}\}.$$

Le module M est un réseau dans $K \subset \mathbf{C}$, et, quand a appartient à $\mathcal{G}_I$, il forme même un module projectif sur l'ordre $\mathcal{O}_I := \mathbf{Z} + I\mathcal{O}_K$. La série $L(M, s)$ ne dépend que de la classe d'homothétie de ce réseau ; elle est donc déterminée par l'invariant $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$, où (ω_1, ω_2) est une $\mathbf{Z}$-base de M choisie de telle maniére que τ appartienne au demi-plan de Poincaré $\mathcal{H}$. La *formule limite de Kronecker* fournit les premiers termes du développement de $L(M, s)$ en $s = 0$ en la reliant au logarithme de la fonction η de Dedekind :

$$L(M, s) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(c_I + \log \mathrm{Im}\,(\tau) + 4 \log |\eta(\tau)|\right) s + O(s^2), \tag{4}$$

où c_I est une constante qui ne dépend que de I et pas de M. À des facteurs parasites près, les dérivées premières $L'(M, 0)$ sont donc fournies par l'expression $\log |\eta(\tau)|$. Or, comme τ appartient à $\mathcal{H} \cap K$, les produits d'expressions de la forme $\eta(\tau)$ donnent lieu aux unités elliptiques, que l'on sait être des unités dans des extensions abéliennes du corps K grâce à la théorie de la multiplication complexe. Plus précisément, pour $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{H} \cap K$, les expressions de la forme

$$u(\tau_1, \tau_2) := \eta(\tau_2)/\eta(\tau_1) \tag{5}$$

sont des nombres algébriques, et leurs puissances 24-èmes sont des unités dans des extensions abéliennes de K. C'est ainsi que les propriétés de la fonction η et la théorie de la multiplication complexe permettent non seulement de démontrer la conjecture de Stark dans le cas où K est quadratique imaginaire, mais apportent aussi une réponse à la Question 1 dans ce cas.

Dans la généralisation "traditionnelle" de la théorie de la multiplication complexe proposée par Hilbert et son école puis développée rigoureusement par Shimura et Taniyama, on est amené à remplacer $\mathbf{Q}$ par un corps F totalement réel de degré $n > 1$ (de sorte que $F \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} = \mathbf{R}^n$), et les formes modulaires classiques par des *formes modulaires de Hilbert.* Celles-ci correspondent à des fonctions holomorphes sur $\mathcal{H}^n$, invariantes (à un facteur d'automorphie près) sous l'action naturelle de $\mathbf{SL}_2(\mathcal{O}_F)$. Les corps quadratiques imaginaires sont remplacés par des extensions quadratiques K de F de type CM, munies d'une identification $\Phi : K \otimes_F \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}^n$. La théorie de la multiplication complexe affirme alors que les valeurs de certaines fonctions modulaires de Hilbert (rapports de formes modulaires de même poids, possédant des développements de Fourier rationnels) en des points $\tau \in \Phi(K) \cap \mathcal{H}^n$ engendrent des extensions abéliennes du corps reflex $\tilde{K}$ associé à (K, Φ). Cette théorie possède deux inconvénients du point de vue de la Question 1 :

(a) elle ne permet d'aborder la "théorie du corps de classes explicite" que pour les corps de base de type CM ;

(b) elle ne permet pas d'obtenir facilement des unités dans des extensions abéliennes de $\tilde{K}$, les unités modulaires n'ayant pas de généralisation évidente pour les formes modulaires de Hilbert. En effet, quand $n > 1$, le faisceau structural sur l'espace complexe analytique $\mathcal{X} := \mathbf{SL}_2(\mathcal{O}_F)\backslash\mathcal{H}^n$ ne possède pas de sections globales non-nulles. La relation entre la théorie de Shimura-Taniyama et les conjectures de Stark pour les corps CM (à supposer qu'il y en ait une) reste donc à élucider. (Cf. par exemple [dSG] et [GL]).

Pour aborder la Question 1 lorsque K est une extension quadratique ATR d'un corps F totalement réel de degré $n > 1$, on doit relever le nombre réel $\log|\tilde{v}_1(u_a)|$ en un nombre complexe $\log \tilde{v}_1(u_a) \in \mathbf{C}/2i\pi\mathbf{Z}$. Au vu de la formule limite de Kronecker (4) et de la discussion précédente, on voudrait généraliser l'expression

$$\log \eta(\tau) = \log|\eta(\tau)| + i \arg \eta(\tau) \in \mathbf{C}/2i\pi\mathbf{Z}$$

à un cadre où les formes modulaires classiques sont remplacées par des formes modulaires de Hilbert sur F. C'est ce qui a été entrepris dans la thèse du premier auteur, qui part de l'identité classique $\mathrm{d}\log\eta(z) = -i\pi E_2(z)dz$, où E_2 est la série d'Eisenstein définie par

$$E_2(z) = -\frac{1}{12} + 2\sum_{n\geq 1} \sigma_1(n) e^{2i\pi nz}, \qquad \text{avec } \sigma_1(n) = \sum_{d|n} d.$$

La formule (5) peut donc se réécrire en prenant le logarithme complexe des deux côtés :

$$\log(u(\tau_1, \tau_2)) = -i\pi \int_{\tau_1}^{\tau_2} E_2(z)dz \ \in \mathbf{C}/2i\pi\mathbf{Z}. \tag{6}$$

Or, si les unités modulaires n'admettent pas d'analogue évident en dimension supérieure, les séries d'Eisenstein, elles, se généralisent sans difficulté à ce contexte. La section 1.1 rappelle la définition de la série d'Eisenstein E_2 de poids $(2, \ldots, 2)$ sur $\mathbf{SL}_2(\mathcal{O}_F)$. Celle-ci donne lieu à une n-forme différentielle ω_{E_2} holomorphe sur l'espace analytique $\mathcal{X}$.

La démarche suggérée par [Ch1] consiste essentiellement à remplacer les valeurs de $\log \eta(\tau)$ par des intégrales de ω_{E_2} sur des cycles appropriés de dimension réelle n sur $\mathcal{X}$. Plus précisément, le présent article associe à tout $\tau \in \mathcal{H} \cap v_1(K)$ un cycle fermé Δ_τ de dimension réelle $(n-1)$ sur $\mathcal{X}$. En faisant abstraction pour le moment des phénomènes liés à la présence possible de torsion dans la cohomologie de $\mathcal{X}$, on démontre que ces cycles sont homologues à zéro. Autrement dit, il existe une chaîne différentiable C_τ de dimension n sur $\mathcal{X}$ telle que

$$\partial C_\tau = \Delta_\tau.$$

Cela permet de définir un invariant canonique $J_\tau \in \mathbf{C}/2i\pi\mathbf{Z}$ en intégrant un multiple approprié de ω_{E_2} sur C_τ. La conjecture principale de cet article relie alors les invariants J_τ à l'expression $\log \tilde{v}_1(u_a)$ dont la partie réelle apparaît dans la Conjecture 1. En ce sens, elle apporte un élément de réponse à la Question 1.

La définition de J_τ et les conjectures qui en résultent s'appuient de façon essentielle sur la thèse du premier auteur [Ch1]. Elles sont aussi à rapprocher de deux autres travaux antérieurs :

1. L'article [DL], où les séries d'Eisenstein sur $\mathbf{GL}_2(F)$ du présent article sont remplacées par des formes modulaires de Hilbert *cuspidales* de poids $(2,\ldots,2)$ associées, dans les cas les plus concrets qui ont pu être testés numériquement, à une courbe elliptique E définie sur F. L'invariant J_τ obtenu dans ce contexte semble alors permettre la construction de points algébriques de E définis sur certaines extensions abéliennes de K.
2. L'article [DD] peut être lu comme une variante p-adique des constructions principales du présent article. Dans le contexte de [DD], on a $F = \mathbf{Q}$ et le rôle de la place v_1 est joué par une place non-archimédienne p. L'extension K est alors un corps quadratique *réel* dans lequel le nombre premier p est inerte. Les séries d'Eisenstein de poids 2 sur certains sous-groupes de congruence de $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$, réinterprétées convenablement comme des "formes modulaires de Hilbert" sur $\mathcal{H}_p \times \mathcal{H}$, où $\mathcal{H}_p = \mathbf{P}_1(\mathbf{C}_p) - \mathbf{P}_1(\mathbf{Q}_p)$ est le demi-plan p-adique, donnent alors lieu à des invariants p-adiques $J_\tau \in \mathbf{C}_p$ associés à $\tau \in \mathcal{H}_p \cap K$. Ces invariants correspondent conjecturalement à des p-unités dans des extensions abéliennes de K.

En se plaçant dans un cadre classique où l'on dispose de notions topologiques et analytiques générales (homologie et cohomologie singulière, théorie de Hodge), le présent article mène à une clarification conceptuelle des différentes constructions de "points et unités de Stark-Heegner" proposées jusqu'à présent dans la littérature (dans [DL] et [DD], mais aussi dans le cadre original traité dans [Dar2] ainsi que dans les généralisations formulées dans [Tr] et [Gr]). Le présent article peut donc servir d'introduction aux travaux sur les points de Stark-Heegner cités en référence, bien qu'il ait été rédigé après ceux-ci.

Remerciements ; Le premier auteur tient à remercier chaleureusement Philippe Cassou-Noguès et Martin Taylor qui sont à l'origine de son travail de thèse. Les deux auteurs ont aussi bénéficié de nombreux échanges avec Samit Dasgupta au sujet du présent article.

1 Notions préliminaires

1.1 Séries d'Eisenstein

Soit F un corps totalement réel de degré n et $S_F := \{v_1, \ldots, v_n\}$ son ensemble de places archimédiennes. On désigne par $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers de F, par d_F son discriminant, et par R_F le régulateur de F.

On supposera dans la suite de cet article que F a nombre de classes 1 au sens restreint, de sorte qu'il existe pour tout $1 \leq j \leq n$ une unité $\epsilon^{(j)} \in \mathcal{O}_F^\times$ avec

$$v_j(\epsilon^{(j)}) < 0, \qquad\qquad v_k(\epsilon^{(j)}) > 0 \quad \text{si } k \neq j.$$

Pour tout $a \in F$, on note $a_j := v_j(a)$ son image dans $\mathbf{R}$ par le plongement v_j, et $A_j = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix}$ l'image dans $\mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$ d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathbf{SL}_2(F)$. On identifiera librement a avec le n-uplet $(a_1, \ldots, a_n)$ et A avec $(A_1, \ldots, A_n)$. On obtient ainsi une action par homographies du groupe modulaire de Hilbert $\Gamma := \mathbf{SL}_2(\mathcal{O}_F)$ sur le produit $\mathcal{H}_1 \times \cdots \times \mathcal{H}_n$ de n copies du demi-plan de Poincaré. Le quotient analytique

$$\mathcal{X} := \Gamma \backslash (\mathcal{H}_1 \times \cdots \times \mathcal{H}_n)$$

s'identifie avec les points complexes d'un ouvert de Zariski d'une variété algébrique projective lisse : la *variété modulaire de Hilbert* X_F associée au corps F.

Une *forme modulaire de Hilbert* de poids $(2, \ldots, 2)$ pour Γ est une fonction holomorphe $f(z_1, \ldots, z_n)$ sur $\mathcal{H}_1 \times \cdots \times \mathcal{H}_n$ telle que la forme différentielle

$$\omega_f := f(z_1, \ldots z_n)\, dz_1 \cdots dz_n$$

soit invariante sous l'action de Γ. Autrement dit, pour tout $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, on exige que

$$f\left(\frac{a_1 z_1 + b_1}{c_1 z_1 + d_1}, \ldots, \frac{a_n z_n + b_n}{c_n z_n + d_n}\right) = (c_1 z_1 + d_1)^2 \cdots (c_n z_n + d_n)^2 f(z_1, \ldots, z_n).$$

Lorsque $n > 1$, une telle fonction possède, d'après le principe de Koecher, un développement en série de Fourier à l'infini de la forme

$$f(z_1, \ldots, z_n) = a_f(0) + \sum_{\mu \in \mathcal{O}_F,\ \mu \gg 0} a_f(\mu)\, e^{2i\pi\left(\frac{\mu_1}{\delta_1} z_1 + \cdots + \frac{\mu_n}{\delta_n} z_n\right)},$$

où δ désigne un générateur totalement positif de la différente de $F/\mathbf{Q}$.

La *série d'Eisenstein holomorphe* E_2 de poids 2 se définit sur $\mathcal{H}_1 \times \cdots \times \mathcal{H}_n$ par le développement en série de Fourier suivant :

$$E_2(z_1, \ldots, z_n) = \zeta_F(-1) + 2^n \sum_{\mu \in \mathcal{O}_F,\ \mu \gg 0} \sigma_1(\mu)\, e^{2i\pi\left(\frac{\mu_1}{\delta_1} z_1 + \cdots + \frac{\mu_n}{\delta_n} z_n\right)}, \tag{7}$$

où, pour un entier k donné, on a posé

$$\sigma_k(\mu) = \sum_{(\nu)|(\mu)} |N_{F/\mathbb{Q}}(\nu)|^k,$$

la sommation portant sur les idéaux (principaux) entiers (ν) qui divisent (μ). La fonction $E_2(z_1, \ldots, z_n)$ est une forme modulaire de Hilbert de poids $(2, \ldots, 2)$ pour Γ (voir [VdG], chap. I.6).

On se donne des coordonnées réelles x_j, y_j sur $\mathcal{X}$ en posant $z_j = x_j + iy_j$, et l'on définit à partir de E_2 une forme différentielle invariante ω_{Eis} en posant

$$\omega_{\mathrm{Eis}} = \begin{cases} \frac{(2i\pi)^2}{\sqrt{d_F}} \omega_{E_2} + \frac{R_F}{2}\left(\frac{dz_1 d\bar{z}_1}{y_1^2} - \frac{dz_2 d\bar{z}_2}{y_2^2}\right) & \text{si } n = 2, \\ \frac{(2i\pi)^n}{\sqrt{d_F}} \omega_{E_2} & \text{si } n \geq 3. \end{cases} \tag{8}$$

La n-forme différentielle ω_{Eis} est fermée et, quand $n \geq 3$, elle est holomorphe. On va s'intéresser à sa classe dans la cohomologie $H^n(\mathcal{X}, \mathbf{C})$ formée à partir du complexe de de-Rham des formes différentielles C^∞ sur $\mathcal{X}$. Ce groupe de cohomologie est muni d'une action des opérateurs de Hecke T_λ, où les λ parcourent les idéaux de $\mathcal{O}_F$. La forme différentielle ω_{Eis} est vecteur propre pour ces opérateurs. Plus précisément, on a

$$T_\lambda(\omega_{\mathrm{Eis}}) = \sigma_1(\lambda)\omega_{\mathrm{Eis}}.$$

Pour tout $1 \leq j \leq n$, on dispose également d'une involution T_{v_j} sur l'espace réel-analytique $\mathcal{X}$ associée à la place v_j ("opérateur de Hecke à l'infini"). Celle-ci se définit en posant

$$T_{v_j}(z_1, \dots, z_n) := (\epsilon_1^{(j)} z_1, \dots, \epsilon_j^{(j)} \bar{z}_j, \dots, \epsilon_n^{(j)} z_n).$$

On appelle $T_{v_j}^*$ l'involution sur $H^n(\mathcal{X}, \mathbf{C})$ qui s'en déduit par "pullback" sur les formes différentielles. Les n opérateurs $T_{v_j}^*$ et les opérateurs de Hecke T_λ engendrent une algèbre commutative $\mathbf{T}$ sur $\mathbf{Z}$.

On aura besoin dans la suite de certaines fonctions qui joueront le rôle de "primitives" de E_2. On introduit pour cela la fonction h de Asai [As] définie sur $\mathcal{H}^n$ par

$$h(z) = \frac{4(-\pi)^n \zeta_F(-1)}{R_F\sqrt{d_F}} y_1 \cdots y_n + \frac{4\sqrt{d_F}}{2^n R_F} \sum_{\mu \in \mathcal{O}_F}{}' \sigma_{-1}(\mu)\, e^{2i\pi\left(\frac{\mu_1}{\delta_1}x_1 + \left|\frac{\mu_1}{\delta_1}\right| iy_1 + \ldots + \frac{\mu_n}{\delta_n}x_n + \left|\frac{\mu_n}{\delta_n}\right| iy_n\right)}. \quad (9)$$

Il sera plus commode de travailler avec

$$\tilde{h}(z) := \lambda_F h(z), \qquad \text{où } \lambda_F := 4^{n-1} R_F,$$

de sorte que

$$\tilde{h}(z) = \frac{(-4\pi)^n \zeta_F(-1)}{\sqrt{d_F}} y_1 \cdots y_n + 2^n \sqrt{d_F} \sum_{\mu \in \mathcal{O}_F}{}' \sigma_{-1}(\mu)\, e^{2i\pi\left(\frac{\mu_1}{\delta_1}x_1 + \left|\frac{\mu_1}{\delta_1}\right| iy_1 + \ldots + \frac{\mu_n}{\delta_n}x_n + \left|\frac{\mu_n}{\delta_n}\right| iy_n\right)}. \quad (10)$$

Les fonctions $h(z)$ et $\tilde{h}(z)$ jouissent des propriétés suivantes :

1. Elles sont harmoniques par rapport à chacune des variables z_j, $1 \leq j \leq n$;
2. Elles satisfont les formules de transformation

$$\begin{aligned} h(Az) &= h(z) - \log(|c_1 z_1 + d_1|^2 \cdots |c_n z_n + d_n|^2), && (11)\\ \tilde{h}(Az) &= \tilde{h}(z) - \lambda_F \log(|c_1 z_1 + d_1|^2 \cdots |c_n z_n + d_n|^2). && (12) \end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n \tilde{h}(z_1, \dots, z_n)}{\partial z_1 \cdots \partial z_n} dz_1 \cdots dz_n &= \frac{(2i\pi)^n}{\sqrt{d_F}} \omega_{E_2}, && (13)\\ \frac{\partial^n \tilde{h}(z_1, \dots, z_n)}{\partial z_1 \cdots \partial \bar{z}_j \cdots \partial z_n} dz_1 \cdots d\bar{z}_j \cdots dz_n &= T_{v_j}^* \left(\frac{(2i\pi)^n}{\sqrt{d_F}} \omega_{E_2}\right). && (14) \end{aligned}$$

Toutes ces formules se vérifient par un calcul direct, sauf (11) et (12). Pour ces dernières, voir [As], Théorème 4.

Lemme 1.1. *La forme* $(\mathrm{Id} + T_{v_j}^*)\omega_{\mathrm{Eis}}$ *est exacte.*

Démonstration. Supposons que $j = 1$ pour fixer les idées et alléger les notations. À partir de la fonction $\tilde{h}$, on définit la $(n-1)$ forme différentielle sur $\mathcal{H}^n$:

$$\eta = \frac{\partial^{n-1}\tilde{h}(z_1, \ldots, z_n)}{\partial z_2 \cdots \partial z_n} dz_2 \ldots dz_n. \tag{15}$$

Quand $n > 2$, la formule (12) montre que η est invariante sous Γ, et correspond donc à une $(n-1)$-forme différentielle sur $\mathcal{X}$. Parce que $\tilde{h}$ est harmonique, cette forme est de plus holomorphe par rapport aux variables $z_2, \ldots, z_n$, d'où la formule

$$d\eta = \left(\frac{\partial^n \tilde{h}}{\partial z_1 \cdots \partial z_n} dz_1 \ldots dz_n + \frac{\partial^n \tilde{h}}{\partial \bar{z}_1 \partial z_2 \cdots \partial z_n} d\bar{z}_1 dz_2 \ldots dz_n \right). \tag{16}$$

Le lemme résulte alors de (13) et de (14) avec $j = 1$.

Dans le cas où $n = 2$, la forme η définie par (15) n'est plus Γ-invariante. En effet, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, on a

$$A^*(\eta) = \eta - \lambda_F \frac{c_2}{c_2 z_2 + d_2} dz_2.$$

Il convient alors de modifier la définition de η en (15) en posant cette fois

$$\eta' := \left(\frac{\partial \tilde{h}(z_1, z_2)}{\partial z_2} - \frac{\lambda_F}{2iy_2} \right) dz_2. \tag{17}$$

On déduit de l'identité (12) que η' est invariante sous Γ. La formule (16) s'adapte sans peine à condition d'ajouter la contribution de

$$d\left(\frac{-\lambda_F}{2iy_2} dz_2 \right) = -\lambda_F \frac{dz_2 d\bar{z}_2}{4y_2^2}.$$

On obtient

$$(\mathrm{Id} + T_{v_1}^*)\omega_{\mathrm{Eis}} = d\eta',$$

puisque la forme $dz_1 d\bar{z}_1 / y_1^2$ est quant à elle dans le noyau de $\mathrm{Id} + T_{v_1}^*$. C'est ce calcul qui justifie le terme supplémentaire apparaissant dans la définition (8) de ω_{Eis} lorsque $n = 2$. $\square$

Pour $m \geq 0$, on appelle $C_m^0(\mathcal{X})$ le groupe engendré par les combinaisons linéaires formelles à coefficients dans $\mathbf{Z}$ des cycles différentiables fermés de dimension réelle m sur $\mathcal{X}$. On définit le groupe des périodes de ω_{Eis} par

$$\Lambda_{\mathrm{Eis}} := \left\{ \int_C \omega_{\mathrm{Eis}} \quad \text{pour } C \in C_n^0(\mathcal{X}) \right\} \subset \mathbf{C}.$$

Proposition 1.2. *Le groupe* Λ_{Eis} *est un sous-groupe de* $\mathbf{C}$ *de rang un, commensurable avec* $(2i\pi)^n\mathbf{Z}$.

Démonstration. Cette proposition se démontre en trois parties.

(a) On démontre d'abord que le groupe Λ_{Eis} *est un sous-ensemble discret de* $\mathbf{C}$.

La théorie de Harder [Hard] (cf. le Théorème 6.3, Ch. III, §7 de [Fr] avec $m = n$) fournit la décomposition

$$H^n(\mathcal{X}, \mathbf{C}) = H^n_{\mathrm{univ}}(\mathcal{X}, \mathbf{C}) \oplus H^n_{\mathrm{Eis}}(\mathcal{X}, \mathbf{C}) \oplus H^n_{\mathrm{cusp}}(\mathcal{X}, \mathbf{C}), \tag{18}$$

où $H^n_{\mathrm{univ}}(\mathcal{X}, \mathbf{C})$ provient des formes différentielles $\mathbf{SL}_2(\mathbf{R})^n$-invariantes, $H^n_{\mathrm{Eis}}(\mathcal{X}, \mathbf{C})$ est l'espace vectoriel de dimension 1 engendré par $[\omega_{\mathrm{Eis}}]$, et $H^n_{\mathrm{cusp}}(\mathcal{X}, \mathbf{C})$ provient des formes modulaires cuspidales de poids $(2, \ldots, 2)$ sur $\mathcal{X}$. La décomposition (18) est respectée par l'algèbre de Hecke $\mathbf{T}$, et les éléments $\omega \in H^n_{\mathrm{Eis}}$ sont caractérisés par les propriétés

$$T^*_{v_j}\omega = -\omega, \qquad T_\lambda \omega = (\mathrm{N}\lambda + 1)\omega, \quad \text{pour tout } \lambda \lhd \mathcal{O}_F.$$

Il en résulte que la projection naturelle $H^n(\mathcal{X}, \mathbf{C}) \to H^n_{\mathrm{Eis}}(\mathcal{X}, \mathbf{C})$ issue de (18) est décrite par un idempotent $\pi_{\mathrm{Eis}} \in \mathbf{T} \otimes \mathbf{Q}$. Soit Λ l'image naturelle de $H_n(\mathcal{X}, \mathbf{Z})$ dans le dual $H^n(\mathcal{X}, \mathbf{C})^\vee := \mathrm{Hom}(H^n(\mathcal{X}, \mathbf{C}), \mathbf{C})$ par l'application des périodes. C'est un sous-groupe discret stable pour l'action de $\mathbf{T}$. On a de plus

$$\Lambda_{\mathrm{Eis}} = \langle \omega_{\mathrm{Eis}}, \pi_{\mathrm{Eis}}(\Lambda) \rangle,$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ désigne l'accouplement naturel entre $H^n(\mathcal{X}, \mathbf{C})$ et son dual. Or on a

$$\pi_{\mathrm{Eis}}(\Lambda) \subset \frac{1}{t}\Lambda \cap H^n_{\mathrm{Eis}}(\mathcal{X}, \mathbf{C})^\vee,$$

où t est un entier tel que $t\pi_{\mathrm{Eis}}$ appartient à $\mathbf{T}$. Par conséquent $\pi_{\mathrm{Eis}}(\Lambda)$ est un sous-groupe discret de $H^n_{\mathrm{Eis}}(\mathcal{X}, \mathbf{C})^\vee$, ce qui implique que Λ_{Eis} est lui aussi discret.

(b) *Le groupe* Λ_{Eis} *est contenu dans* $(2i\pi)^n\mathbf{R}$.

En effet, le Lemme 1.1 implique que

$$T^*_{v_1} \cdots T^*_{v_n}([\omega_{\mathrm{Eis}}]) = (-1)^n[\omega_{\mathrm{Eis}}].$$

Par ailleurs, un calcul direct montre que

$$T^*_{v_1} \cdots T^*_{v_n}([\omega_{\mathrm{Eis}}]) = [\bar{\omega}_{\mathrm{Eis}}].$$

On en déduit que $[\bar{\omega}_{\mathrm{Eis}}] = (-1)^n[\omega_{\mathrm{Eis}}]$. Les périodes de ω_{Eis} appartiennent donc bien à $(2i\pi)^n\mathbf{R}$.

(c) *Fin de la démonstration*

Les parties (a) et (b) montrent que Λ_{Eis} est de rang au plus un. Pour montrer qu'il est non-trivial et déterminer sa classe de commensurabilité, il suffit de calculer une période non-nulle de ω_{Eis}. Pour cela, on fixe $Y_1, \ldots, Y_n \in \mathbf{R}^{>0}$ et l'on considère les droites horizontales $L_j \subset \mathcal{H}_j$ formées des z_j dont la partie imaginaire est égale à Y_j. La région

$$R_\infty := L_1 \times \cdots \times L_n$$

est préservée par le sous-groupe des translations $\Gamma_\infty \subset \Gamma$. Soit D_∞ un domaine fondamental compact pour cette action. Son image dans $\mathcal{X}$ est un cycle fermé de dimension n. La forme différentielle ω_{Eis} peut s'intégrer terme à terme sur D_∞ à partir de la formule (7). Seul le terme constant dans la définition de E_2 apporte une contribution non-nulle à l'intégrale, puisque les autres termes sont des multiples de caractères non-triviaux de R_∞/Γ_∞. Comme le volume de R_∞/Γ_∞ est égal à $\sqrt{d_F}$, on en déduit que

$$\int_{D_\infty} \omega_{\mathrm{Eis}} = (2i\pi)^n \zeta_F(-1).$$

Ceci achève la démonstration, puisque $\zeta_F(-1)$ appartient à $\mathbf{Q}^\times$. $\square$

1.2 Extensions quadratiques et séries L associées

Soit K une extension quadratique de F. Pour chaque $1 \leq j \leq n$, la $\mathbf{R}$-algèbre $K \otimes_{F,v_j} \mathbf{R}$ est isomorphe soit à $\mathbf{C}$, soit à $\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}$. On fixe une telle identification, qu'on appelle aussi v_j par abus de notation. Lorsque K est un corps CM, la donnée de $(v_1, \ldots, v_n)$ correspond au choix d'un type CM associé à K. On sait à quel point cette donnée supplémentaire joue un rôle important dans la théorie de la multiplication complexe pour les extensions CM de F.

On munit les $\mathbf{R}$-espaces vectoriels $\mathbf{C}$ et $\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}$ de l'orientation standard dans laquelle une orientation positive est assignée aux bases $(1, i)$ et $((1,0),(0,1))$ de $\mathbf{C}$ et $\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}$ respectivement. Une base de K (vu comme espace vectoriel sur F de dimension 2) est alors dite *positive* si ses images dans $\mathbf{C}$ et $\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}$ par les plongements v_j sont orientées positivement.

Soit I un idéal de l'anneau $\mathcal{O}_F$. On se permettra aussi de noter par le même symbole l'idéal $I\mathcal{O}_K$ de K.

On maintiendra tout au long de cet article l'hypothèse que F a pour nombre de classes 1 au sens étroit. Par contre, il est souhaitable de ne pas avoir à faire d'hypothèse semblable sur le corps K. On généralise la définition (2) du groupe $\mathcal{G}_I$ de l'introduction, en le définissant comme un quotient approprié du groupe $\mathbf{A}_K^\times$ des idèles de K. Pour chaque place non-archimédienne v de K, on appelle $\mathcal{O}_v$ l'anneau des entiers du corps local K_v, et l'on pose

$$\mathcal{G}_I := \mathbf{A}_K^\times / (\prod_v U_v) K^\times,$$

avec

$$U_v = \begin{cases} \mathbf{R}_{>0}^\times & \text{si } v \text{ est réelle;} \\ \mathbf{C}^\times & \text{si } v \text{ est complexe;} \\ \mathcal{O}_v^\times & \text{si } v \nmid I; \\ 1 + I\mathcal{O}_v & \text{si } v | I. \end{cases}$$

Comme dans l'introduction, la loi de réciprocité du corps de classes donne un isomorphisme $\mathrm{rec} : \mathcal{G}_I \longrightarrow \mathrm{Gal}(H/K)$, où H est le corps de classes de rayon de K au sens restreint associé à I.

Le sous-corps F permet d'introduire un sous-groupe $\mathcal{G}_I^+ \subset \mathcal{G}_I$, défini comme l'image naturelle dans $\mathcal{G}_I$ du groupe $\mathbf{A}_F^\times$. Le sous-corps H_I de H fixé par $\mathrm{rec}(\mathcal{G}_I^+)$ s'appelle le *corps* *de classes d'anneau* associé à I et K/F. On a donc l'isomorphisme de réciprocité

$$\mathrm{rec} : G_I \longrightarrow \mathrm{Gal}(H_I/K), \qquad \text{où } G_I := \mathbf{A}_K^\times/(\mathbf{A}_F^\times \prod_v U_v K^\times).$$

Un $\mathcal{O}_F$-ordre de K est un sous-anneau de K qui contient $\mathcal{O}_F$ et qui est localement libre de rang 2 sur $\mathcal{O}_F$ (donc libre, puisque $h(F) = 1$). On désigne par $\mathcal{O}_I := \mathcal{O}_F + I\mathcal{O}_K$ l'ordre de K de conducteur I, et l'on appelle

$$\hat{\mathcal{O}}_I = \prod_{v \nmid \infty} \mathcal{O}_I \otimes \mathcal{O}_{F,v}$$

son adélisation. On a alors

$$G_I = \mathbf{A}_K^\times/(\hat{\mathcal{O}}_I^\times \prod_{v|\infty} U_v K^\times).$$

Ce quotient est en bijection naturelle avec le groupe $\mathrm{Pic}^+(\mathcal{O}_I)$ des modules projectifs de rang 1 sur $\mathcal{O}_I$ dans K, modulo l'équivalence au sens restreint. (Deux modules projectifs M_1 et M_2 sur $\mathcal{O}_I$ sont dits équivalents au sens restreint s'il existe un élément totalement positif $k \in K_+^\times$ tel que $M_2 = kM_1$). On associe en effet à tout $\alpha \in G_I$ un $\mathcal{O}_I$-module $M \subset K$ en posant

$$M^\alpha := \alpha\hat{\mathcal{O}}_I \cap K.$$

L'application $\alpha \mapsto M^\alpha$ fournit une bijection naturelle entre G_I et les classes d'équivalence au sens restreint de $\mathcal{O}_I$-modules projectifs :

$$G_I \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Classes d'équivalence} \\ \text{au sens restreint} \\ \text{de } \mathcal{O}_I\text{-modules projectifs} \end{array} \right\}. \tag{19}$$

Soit $V := \mathcal{O}_{I,1}^\times \subset \mathcal{O}_I^\times$ le groupe des unités de $\mathcal{O}_I$ de norme 1 sur $\mathbf{Q}$. Il laisse stable le module M. On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V \longrightarrow \mathcal{O}_{F,1}^\times,$$

où V_1 désigne le sous-groupe des unités de V de norme relative 1 sur F. On note alors $\tilde{V}$ le sous-groupe de V engendré par V_1 et $\mathcal{O}_F^\times$, et

$$\delta_I := [V : \tilde{V}].$$

Cet indice est un diviseur de 2^n. On définit finalement la fonction $L(M, s)$ associée à un $\mathcal{O}_I$-module projectif M en posant

$$L(M, s) := (\mathrm{N}M)^s \delta_I \sum_{x \in M/V}{}' \ \mathrm{sign}(N_{K/\mathbf{Q}}(x))|\mathrm{N}_{K/\mathbf{Q}}(x)|^{-s}. \tag{20}$$

Remarque 1.3. 1. La définition (20) généralise l'équation (3) de l'introduction, puisque signe$(N_{K/\mathbf{Q}}(x)) = 1$ quand K est quadratique imaginaire.

2. Quand K est une extension ATR de F ayant v_1 pour unique place complexe, la fonction $L(M,s)$ est un multiple rationnel non-nul de la somme de fonctions L partielles de Hurwitz de l'introduction. Plus précisément, si a est un générateur de $\mathcal{O}_K/(\mathcal{O}_F, I)$ en tant que $(\mathcal{O}_F/I)$-module, et que M_a désigne le $\mathcal{O}_I$-module projectif

$$M_a := \{x \in \mathcal{O}_K \quad \text{tel qu'il existe } r \in \mathcal{O}_F \text{ avec } x \equiv ra \pmod{I}\},$$

alors

$$L(M_a, s) = \delta_I \sum_{r \in (\mathcal{O}_F/I\mathcal{O}_F)} L(ra, I, s). \tag{21}$$

Comme dans l'introduction, on vérifie que la fonction $L(M,s)$ ne dépend que de la classe d'équivalence de M au sens restreint, puisque

$$L(\lambda M, s) = \mathrm{sign}(N_{K/\mathbf{Q}}(\lambda)) L(M,s).$$

Dans les Sections 2 et 3 qui suivent, nous allons exprimer les valeurs spéciales $L(M,0)$ quand K est totalement réel, et les dérivées $L'(M,0)$ quand K est ATR, en fonction de périodes appropriées de la forme différentielle ω_{Eis}.

2 Extensions quadratiques totalement réelles et valeurs de fonctions L

On supposera dans cette section que l'extension quadratique K de F est totalement réelle. On veut rappeler un théorème qui apparaît dans la thèse du premier auteur et qui donne une formule explicite pour $L(M,0)$ dans ce cas.

L'hypothèse que F a nombre de classes 1 au sens restreint implique que le module M est libre de rang 2 comme module sur $\mathcal{O}_F$, et qu'il existe une $\mathcal{O}_F$-base *positive* de M. On en choisit une, que l'on appelle (ω_1, ω_2), et l'on pose $\tau := \omega_2/\omega_1$. Cet invariant appartient à $K^\times$, et il ne dépend que de la classe d'équivalence de M au sens restreint, à l'action de $\mathbf{SL}_2(\mathcal{O}_F)$ près.

Le groupe $\Gamma_\tau \subset \Gamma$ formé des matrices qui fixent τ est un groupe de rang n (modulo torsion), que l'application

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto c\tau + d$$

identifie avec le sous-groupe V_1 des unités de V de norme relative 1 sur F. Pour chaque $1 \le j \le n$, on pose

$$(\tau_j, \tau_j') := v_j(\tau) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R},$$

et on appelle Υ_j la géodésique hyperbolique sur $\mathcal{H}_j$ joignant τ_j à τ_j', orientée dans le sens allant de τ_j à τ_j'. Le produit

$$R_\tau = \Upsilon_1 \times \Upsilon_2 \times \cdots \times \Upsilon_n \subset \mathcal{H}^n$$

est un espace contractile homéomorphe à $\mathbf{R}^n$. On le munit de l'orientation naturelle héritée des Υ_j. Le groupe Γ_τ opère sur R_τ par transformations de Möbius, et le quotient $\Gamma_\tau\backslash R_\tau$ est compact, isomorphe à un tore réel de dimension n. Soit Δ_τ un domaine fondamental pour l'action de Γ_τ sur R_τ. On identifie Δ_τ avec son image dans $\mathcal{X}$, qui est un cycle fermé dans ce quotient.

Théorème 2.1. *Pour tout $\mathcal{O}_I$-module projectif M dans K, on a :*

$$(-2)^n \int_{\Delta_\tau} \omega_{\mathrm{Eis}} = (2i\pi)^n L(M,0). \tag{22}$$

Démonstration. C'est une conséquence de ce qui est fait dans la thèse [Ch1] du premier auteur. Le quotient $\tilde{\Gamma}_\tau\backslash R_\tau$ y est noté $\mathcal{C}_{\mathbf{t}}/\mathbf{t}$. Puisque K est une extension totalement réelle de F, on choisit $r = n$ dans le Théorème 5.3.9 de [Ch1] qui donne l'identité

$$L(M,0) = \frac{i^n}{\pi^n} \int_{\Delta_\tau} \frac{\partial^n \tilde{h}(z_1,\ldots,z_n)}{\partial z_1 \cdots \partial z_n} dz_1 \cdots dz_n. \tag{23}$$

En utilisant (13), on conclut immédiatement à la formule souhaitée lorsque $n > 2$. Cette formule reste valable pour $n = 2$ puisque les intégrales des formes $dz_1 d\bar{z}_1/y_1^2$ et $dz_2 d\bar{z}_2/y_2^2$ sur le cycle Δ_τ sont nulles. □

Corollaire 2.2. *Pour tout réseau M dans K, les valeurs spéciales $L(M,0)$ sont rationnelles. Plus précisément, il existe une constante entière e_F, ne dépendant que du corps F et pas de l'extension K ni de M, telle que $e_F L(M,0) \in \mathbf{Z}$.*

Démonstration. Cela résulte de ce que les périodes de ω_{Eis}, d'après la Proposition 1.2, appartiennent à un réseau $\Lambda_{\mathrm{Eis}} \subset (2i\pi)^n \mathbf{Q}$. □

3 Extensions quadratiques ATR et dérivées de fonctions L

On suppose dans cette section que l'extension quadratique K de F est ATR, et que v_1 se prolonge en une place complexe de K. On veut donner dans ce cas une formule explicite pour $L'(M,0)$, lorsque M est un $\mathcal{O}_I$-module projectif dans K.

Comme dans la section précédente, on pose $\tau := \omega_2/\omega_1$, où (ω_1,ω_2) est une $\mathcal{O}_F$-base positive de M. On pose ensuite

$$\begin{cases} \tau_1 := v_1(\tau) & \in \mathcal{H}_1 \\ (\tau_j,\tau_j') := v_j(\tau) & \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}, \quad \text{pour } j = 2,\ldots,n. \end{cases}$$

Le nombre complexe τ_1 appartient alors à $\mathcal{H}_1$. Pour chaque $2 \le j \le n$, on appelle Υ_j la géodésique hyperbolique de $\mathcal{H}_j$ joignant τ_j à τ_j', orientée dans le sens allant de τ_j à τ_j'. Le produit

$$R_\tau = \{\tau_1\} \times \Upsilon_2 \times \cdots \times \Upsilon_n \subset \mathcal{H}^n$$

est un espace contractile homéomorphe à $\mathbf{R}^{n-1}$, que l'on munit de l'orientation naturelle héritée des Υ_j. Le stabilisateur Γ_τ de τ dans Γ est un groupe de rang $(n-1)$ modulo torsion, que l'on peut identifier avec le sous-groupe d'unités relatives V_1 introduit précédemment. Il opère sur R_τ par transformations de Möbius, et le quotient $\Gamma_\tau \backslash R_\tau$ est compact, isomorphe à un tore réel de dimension $(n-1)$. Soit Δ_τ un domaine fondamental pour l'action de Γ_τ sur R_τ. On identifie Δ_τ avec son image dans $\mathcal{X}$, qui est un cycle fermé de dimension $(n-1)$ dans ce quotient.

Lemme 3.1. *La classe de Δ_τ dans $H_{n-1}(\mathcal{X}, \mathbf{Z})$ est de torsion. En particulier, il existe une n-chaîne différentiable C_τ à coefficients dans $\mathbf{Q}$ telle que*

$$\partial C_\tau = \Delta_\tau. \tag{24}$$

Démonstration. Le sous-groupe de torsion de $H_{n-1}(\mathcal{X}, \mathbf{Z})$ s'identifie avec le noyau de l'application naturelle $H_{n-1}(\mathcal{X}, \mathbf{Z}) \longrightarrow H_{n-1}(\mathcal{X}, \mathbf{Q})$. Lorsque n est pair, le Lemme 3.1 résulte de ce que $H_{n-1}(\mathcal{X}, \mathbf{Q}) = 0$. Lorsque $n = 2m+1$ est impair, le groupe $H^{n-1}(\mathcal{X}, \mathbf{C})$ est engendré par les classes des $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ formes différentielles de la forme

$$\eta_S := \prod_{j \in S} \frac{dz_j d\bar{z}_j}{y_j^2}, \qquad S \subset \{1, \ldots, n\}, \quad \#S = m.$$

Or on voit que les restrictions de ces classes sur Δ_τ (et même sur les régions R_τ) sont nulles, puisque la projection de R_τ sur chaque facteur $\mathcal{H}_j$ est de dimension réelle 0 ou 1. On en déduit par la dualité de Poincaré que l'image de Δ_τ dans $H_{n-1}(\mathcal{X}, \mathbf{C})$ est nulle. $\square$

On introduit $\omega_{\mathrm{Eis}}^+ = \frac{1}{2}(\mathrm{Id} + T_{v_1}^*)\omega_{\mathrm{Eis}}$ la projection de la forme différentielle ω_{Eis} sur l'espace propre de $T_{v_1}^*$ associé à la valeur propre $+1$, autrement dit la "partie réelle pour la place v_1" de la forme ω_{Eis}.

Théorème 3.2. *Soit M un $\mathcal{O}_I$-module projectif associé à $\tau \in K$. L'intégrale de ω_{Eis}^+ sur C_τ ne dépend pas du choix de C_τ vérifiant (24), et l'on a*

$$(-2)^{n-1} \int_{C_\tau} \omega_{\mathrm{Eis}}^+ = (2i\pi)^{n-1} L'(M, 0). \tag{25}$$

Démonstration. La première assertion découle du fait que ω_{Eis}^+ est exacte : le Lemme 1.1 montre que $\omega_{\mathrm{Eis}}^+ = d\eta/2$. Le calcul se poursuit en utilisant le théorème de Stokes pour obtenir

$$\int_{C_\tau} \omega_{\mathrm{Eis}}^+ = \int_{\Delta_\tau} \frac{\eta}{2}. \tag{26}$$

Supposons tout d'abord que $n > 2$, de sorte que η est la $(n-1)$-forme holomorphe sur $\mathcal{X}$ donnée par la formule (15). Comme K est une extension ATR, on choisit ici $r = n-1$ dans le Théorème 5.3.9 de [Ch1]. Après avoir harmonisé les notations, on obtient l'identité

$$\int_{\Delta_\tau} \frac{\eta}{2} = \frac{\pi^{n-1}}{i^{n-1}} L'(M, 0) \tag{27}$$

qui permet de conclure.

Traitons à présent le cas où $n = 2$ en faisant cette fois appel au Théorème 5.3.12 de [Ch1]. Plus précisément, la quatrième formule p. 119 s'écrit dans notre contexte sous la forme

$$\int_{\Delta_\tau} \left(\frac{4R_F}{z_2 - \bar{z}_2} - \frac{\partial \tilde{h}}{\partial z_2} \right) dz_2 = (2i\pi) L'(M, 0).$$

Au vu de la définition (17) de la forme η, cette égalité se réduit à

$$\int_{\Delta_\tau} -\eta = (2i\pi) L'(M, 0).$$

La formule de Stokes permet de nouveau de conclure à la formule souhaitée. □

4 Application d'Abel-Jacobi et unités de Stark

Quand on combine le Théorème 3.2 avec la Conjecture 1 de Stark, on obtient la formule conjecturale suivante pour le logarithme du module de l'unité de Stark :

$$(-2)^{n-1} \int_{C_\tau} \omega_{\mathrm{Eis}}^{+} = \delta_I (2i\pi)^{n-1} \log |\tilde{v}_1(u_\tau)|. \tag{28}$$

Pour relever l'invariant réel $\log |\tilde{v}_1(u_\tau)| = \mathrm{Re}\, (\log \tilde{v}_1(u_\tau))$ en un invariant complexe bien défini modulo $2i\pi\mathbf{Z}$, il suffira de remplacer dans la formule (28) la différentielle exacte $\omega_{\mathrm{Eis}}^{+}$ par la forme différentielle ω_{Eis}.

Pour tout $m \geq 0$, on désigne par $C_m(\mathcal{X})$ le groupe engendré par les combinaisons linéaires formelles à coefficients dans $\mathbf{Z}$ des chaînes différentiables de dimension réelle m sur $\mathcal{X}$, et l'on désigne par $C_m^0(\mathcal{X})$ et $C_m^{00}(\mathcal{X})$ les sous-groupes engendrés par les cycles différentiables fermés et homologues à zéro respectivement :

$$\begin{aligned} C_m^0(\mathcal{X}) &:= \{\Delta \in C_m(\mathcal{X}) \text{ tel que } \partial\Delta = 0\}. \\ C_m^{00}(\mathcal{X}) &:= \{\Delta \in C_m(\mathcal{X}) \text{ tel qu'il existe } C \in C_{m+1}(\mathcal{X}) \text{ avec } \partial C = \Delta\}. \end{aligned}$$

On pose aussi

$$\tilde{C}_m^{00}(\mathcal{X}) := \{\Delta \in C_m(\mathcal{X}) \text{ tel qu'il existe } C \in C_{m+1}(\mathcal{X}) \otimes \mathbf{Q} \text{ avec } \partial C = \Delta\}.$$

On sait que $C_{n-1}^0(\mathcal{X})/C_{n-1}^{00}(\mathcal{X}) = H_{n-1}(\mathcal{X}, \mathbf{Z})$ est un groupe de type fini, dont le sous-groupe de torsion s'identifie avec $\tilde{C}_{n-1}^{00}(\mathcal{X})/C_{n-1}^{00}(\mathcal{X})$. Soit n_F l'exposant de ce groupe fini, et soit

$$\Lambda'_{\mathrm{Eis}} := \frac{1}{n_F} \Lambda_{\mathrm{Eis}}.$$

On peut définir à partir de la forme différentielle ω_{Eis} une “application d'Abel-Jacobi”

$$\Phi_{\mathrm{Eis}} : C_{n-1}^{00}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathbf{C}/\Lambda_{\mathrm{Eis}}$$

en posant

$$\Phi_{\mathrm{Eis}}(\Delta) = \int_{\partial C=\Delta} \omega_{\mathrm{Eis}} \pmod{\Lambda_{\mathrm{Eis}}},$$

l'intégrale étant prise sur n'importe quelle n-chaîne différentiable C sur $\mathcal{X}$ tel que $\partial C = \Delta$. Cette application Φ_{Eis} est bien définie modulo le réseau des périodes Λ_{Eis} en vertu de la Proposition 1.2. Au prix de remplacer le réseau Λ_{Eis} par Λ'_{Eis}, on peut étendre Φ_{Eis} au groupe $\tilde{C}^{00}_{n-1}(\mathcal{X})$ tout entier, en posant

$$\Phi_{\mathrm{Eis}}(\Delta) = \frac{1}{n_F} \int_{\partial C=n_F\Delta} \omega_{\mathrm{Eis}} \pmod{\Lambda'_{\mathrm{Eis}}}, \tag{29}$$

l'intégrale étant prise sur n'importe quelle n-chaîne différentiable C sur $\mathcal{X}$ tel que $\partial C = n_F\Delta$. On pose ensuite

$$J_\tau := (-2)^{n-1}\Phi_{\mathrm{Eis}}(\Delta_\tau) \in \mathbf{C}/\Lambda'_{\mathrm{Eis}}.$$

Soit Λ''_{Eis} le réseau de $(2i\pi)^n\mathbf{R}$ engendré par Λ'_{Eis} et $(2i\pi)^n\mathbf{Z}$. On fixe une place $\tilde{v}_1$ de H_I au-dessus de la place v_1 de K. Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer la conjecture principale de cet article.

Conjecture 4.1. *Pour tout $\mathcal{O}_I$-module M associé à $\tau \in K$, il existe une unité $u_\tau \in \mathcal{O}_{H_I}^\times$ telle que*

$$J_\tau = \delta_I(2i\pi)^{n-1}\log(\tilde{v}_1(u_\tau)) \pmod{\Lambda''_{\mathrm{Eis}}}.$$

De plus, pour tout $2 \le j \le n$, l'image de u_τ par n'importe quel plongement complexe au-dessus de v_j est de module 1. Pour tout $\alpha \in G_I$, on a $u_{\tau^\alpha} = \mathrm{rec}(\alpha)^{-1}u_\tau$, où τ^α désigne l'invariant associé au module M^α.

5 Algorithmes

L'invariant J_τ et l'application d'Abel-Jacobi Φ_{Eis} ont l'inconvénient de ne pas être faciles à calculer numériquement a priori. Le but de la présente section est de décrire un algorithme pour le calcul de Φ_{Eis} dans la cas le plus simple où $n = 2$.

La première étape consiste à décrire la classe de cohomologie de ω_{Eis} en terme de cohomologie du groupe Γ.

On rappelle le dictionnaire bien connu entre la cohomologie de deRham de $\mathcal{X}$ et la cohomologie de Γ. Si P, Q, R sont des points de $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}^2$, on appelle $\Delta(P, Q, R)$ n'importe quelle 2-chaîne différentiable dont la frontière est égale au triangle géodésique de sommets P, Q et R. On munit cette région de l'orientation standard, selon les définitions usuelles de l'homologie singulière. On pose aussi, pour $P = (z_1, z_2) \in \mathcal{H}^2$ et $A, B \in \Gamma$,

$$\Delta_P(A, B) := \Delta(P, AP, ABP).$$

On associe à ω_{Eis} (plus précisément : à sa classe de cohomologie) un 2-cocycle

$$\kappa_P \in \mathcal{Z}^2(\Gamma, \mathbf{C})$$

par la règle

$$\kappa_P(A,B) := \int_{\Delta_P(A,B)} \omega_{\mathrm{Eis}}.$$

Un calcul direct montre que κ_P satisfait la relation de 2-cocycle : $d\kappa_P = 0$, et que son image dans $H^2(\Gamma, \mathbf{C})$ ne dépend pas du choix du point base P.

On rappelle le réseau $\Lambda_{\mathrm{Eis}} \subset \mathbf{C}$ des périodes de ω_{Eis} et on note $\bar{\kappa}_P$ l'image de κ_P dans $\mathcal{Z}^2(\Gamma, \mathbf{C}/\Lambda'_{\mathrm{Eis}})$.

Lemme 5.1. *La classe de $\bar{\kappa}_P$ dans $H^2(\Gamma, \mathbf{C}/\Lambda'_{\mathrm{Eis}})$ est nulle.*

Démonstration. Pour tout $A \in \Gamma$, on appelle $S_P(A)$ l'image dans $\mathcal{X}$ du chemin géodésique sur $\mathcal{H}^2$ allant de P à AP. Comme $S_P(A)$ est un 1-cycle fermé sur $\mathcal{X}$ et que $H_1(\mathcal{X}, \mathbf{Q}) = 0$, il existe une 2-chaîne différentiable sur $\mathcal{X}$ à coefficients entiers, que l'on appellera $D_P(A)$, telle que

$$\partial D_P(A) = n_F S_P(A).$$

La région $D_P(A)$ est déterminée par cette équation modulo les 2-cycles fermés, et par conséquent l'élément de $\mathbf{C}/\Lambda'_{\mathrm{Eis}}$ défini par

$$\rho_P(A) := \frac{1}{n_F} \int_{D_P(A)} \omega_{\mathrm{Eis}} \pmod{\Lambda'_{\mathrm{Eis}}} \tag{30}$$

ne dépend pas du choix de $D_P(A)$. On vérifie ensuite par un calcul direct que

$$d\rho_P(A,B) = \kappa_P(A,B) \pmod{\Lambda'_{\mathrm{Eis}}}.$$

□

Le Lemme 5.1 permet de définir une 1-chaîne ρ_P en choisissant une solution de l'équation

$$d\rho_P = \kappa_P \pmod{\Lambda'_{\mathrm{Eis}}}. \tag{31}$$

La proposition suivante permet de calculer l'invariant numérique $\Phi_{\mathrm{Eis}}(\Delta_\tau)$ en terme de cohomologie des groupes—du moins, en admettant que l'on sache résoudre l'équation (31).

Soit K un corps ATR et soit $\tau \in K$ un élément provenant d'une base positive d'un réseau $M \subset K$. Parce que $n = 2$, le groupe Γ_τ est de rang un modulo la torsion. On se donne un générateur γ_τ de Γ_τ modulo torsion, choisi de sorte que pour tout point z_2 de la géodésique Υ_2, le chemin allant de z_2 à $\gamma_\tau z_2$ soit orienté dans le sens positif. On choisit le point base $P \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ de manière à ce que sa première composante soit égale à $\tau_1 = v_1(\tau)$. Avec ces choix, on a alors

Proposition 5.2.

$$\Phi_{\mathrm{Eis}}(\Delta_\tau) = \rho_P(\gamma_\tau).$$

Démonstration. Cela résulte directement de la formule pour ρ_P de l'équation (30). □

La définition du 2-cocycle κ_P exige d'intégrer $\omega_{\rm Eis}$ sur des régions de type $\Delta_P(A,B)$ peu commodes à paramétrer. Dans les calculs numériques, il est donc utile de remplacer ce cocycle par un représentant de la même classe de cohomologie qui ne fait intervenir que des régions "rectangulaires" de la forme $L_1 \times L_2 \subset \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ (avec L_1 et L_2 de dimension 1, bien entendu). Les intégrales de $\omega_{\rm Eis}$ sur de telles régions peuvent en effet s'évaluer au moyen d'intégrales itérées, et peuvent donc se calculer numériquement au moyen du développement de Fourier de $\omega_{\rm Eis}$.

Si u, v appartiennent à $\mathcal{H}$, soit $\Upsilon[u,v] \subset \mathcal{H}$ le segment géodésique joignant le point u au point v. On pose

$$\square_P(A,B) = \Upsilon[z_1, A_1 z_1] \times \Upsilon[A_2 z_2, A_2 B_2 z_2],$$

et on définit un nouveau cocycle $\kappa_P^{\square} \in \mathcal{Z}^2(\Gamma, \mathbf{C})$ par la règle

$$\kappa_P^{\square}(A,B) = \int_{\square_P(A,B)} \omega_{\rm Eis}.$$

On doit modifier légèrement $\kappa_P^{\square}$ pour qu'il représente la même classe de cohomologie que κ_P. En effet, on dispose également d'un 2-cocycle classique sur $\mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$ appelé *cocycle d'aire*, dont on rappelle la définition : étant données deux matrices $M = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} * & * \\ c' & d' \end{pmatrix}$ de $\mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$, et $MN = \begin{pmatrix} * & * \\ c'' & d'' \end{pmatrix}$ leur produit, la formule

$$\mathrm{aire}(M,\, N) := -\mathrm{signe}(c\, c'\, c'') \tag{32}$$

(où $\mathrm{signe}(x) = x/|x|$ si $x \neq 0$, et 0 sinon) définit un 2-cocycle sur $\mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$ à valeurs dans $\mathbf{Z}$. Par composition avec les plongements réels de F, on en déduit deux cocycles sur Γ à valeurs dans $\mathbf{Z}$.

On définit finalement le 2-cocycle $\tilde{\kappa}_P$ sur Γ par la formule

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_P(A,B) :&= \kappa_P^{\square}(A,B) - i\pi R_F\, \mathrm{aire}(A_1,B_1) + i\pi R_F\, \mathrm{aire}(A_2,B_2) \\ &= \int_{\tau_1}^{A_1 z_1} \int_{A_2 z_2}^{A_2 B_2 z_2} \omega_{\rm Eis} \ - i\pi R_F\, \mathrm{aire}(A_1,B_1) + i\pi R_F\, \mathrm{aire}(A_2,B_2).\end{aligned}$$

Proposition 5.3. *Les cocycles κ_P et $\tilde{\kappa}_P$ représentent la même classe de cohomologie dans $H^2(\Gamma, \mathbf{C})$. Plus précisément, on a*

$$\kappa_P(A,B) - \tilde{\kappa}_P(A,B) = d\xi_P(A),$$

où

$$\xi_P(A) = -\int_{\Delta_P(A)} \omega_{\rm Eis}, \qquad \textit{avec} \ \ \Delta_P(A) = \Delta((z_1,z_2),(z_1,A_2 z_2),(A_1 z_1, A_2 z_2)).$$

Démonstration. On dit que deux 2-chaînes Z_1 et Z_2 sont homologues si leurs frontières sont égales, et on écrit alors $Z_1 \sim Z_2$. Un calcul direct montre que

$$-\square_P(A,B) + \Delta_P(A,B) + \Delta_P(A) - \Delta_P(AB) \sim \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3, \tag{33}$$

avec

$$\begin{cases} \Delta_1 = \Delta((A_1B_1z_1, A_2B_2z_2), (z_1, A_2B_2z_2), (A_1z_1, A_2B_2z_2)), \\ \Delta_2 = \Delta((z_1, z_2), (z_1, A_2z_2), (z_1, A_2B_2z_2)), \\ \Delta_3 = \Delta((A_1z_1, A_2z_2), (A_1z_1, A_2B_2z_2), (A_1B_1z_1, A_2B_2z_2)). \end{cases}$$

Par A-invariance, on observe que $\Delta_3 = \Delta_P(B)$ dans $\mathcal{X}$. En outre, l'intégrale de ω_{E_2} sur Δ_1 et Δ_2 est nulle. On en déduit que

$$\int_{\Delta_1+\Delta_2} \omega_{\mathrm{Eis}} = \frac{R_F}{2}\int_{\Delta_1} \frac{dz_1 d\bar{z}_1}{y_1^2} - \frac{R_F}{2}\int_{\Delta_2} \frac{dz_2 d\bar{z}_2}{y_2^2}.$$

Ces dernières intégrales se calculent élémentairement : on observe d'abord qu'elles ne dépendent pas du point base $P = (z_1, z_2)$, et que $dz_j d\bar{z}_j = -2i dx_j dy_j$. Or l'intégrale

$$\int_{\Delta_1} \frac{dx_1 dy_1}{y_1^2}$$

n'est rien d'autre que l'aire, dans le disque de Poincaré, du triangle idéal orienté de sommets ∞, $A_1\infty$ et $A_1B_1\infty$. Comme dans [K-M] formule 1.2, il en résulte que

$$\int_{\Delta_1} \frac{dz_1 d\bar{z}_1}{y_1^2} = -2i\pi \,\mathrm{aire}(A_1, B_1) \quad \text{et} \quad \int_{\Delta_2} \frac{dz_2 d\bar{z}_2}{y_2^2} = -2i\pi \,\mathrm{aire}(A_2, B_2).$$

On conclut alors de (33) que

$$\kappa_P(A, B) = \kappa_P^{\square}(A, B) + d\xi(A, B) - i\pi R_F \,\mathrm{aire}(A_1, B_1) + i\pi R_F \,\mathrm{aire}(A_2, B_2),$$

d'où la proposition. $\square$

Corollaire 5.4. *Soit $\tilde{\rho}_P$ une solution de l'équation*

$$d\tilde{\rho}_P = \tilde{\kappa}_P \pmod{\Lambda'_{\mathrm{Eis}}}. \tag{34}$$

Alors on a $\Phi_{\mathrm{Eis}}(\Delta_\tau) = \tilde{\rho}_P(\gamma_\tau)$.

Démonstration. La Proposition 5.3 montre qu'on peut choisir

$$\tilde{\rho}_P(A) = \rho_P(A) - \xi_P(A) \pmod{\Lambda'_{\mathrm{Eis}}},$$

où la 1-cochaîne ξ_P est définie dans l'énoncé de cette proposition. Comme la région $\Delta_P(\gamma_\tau)$ qui intervient dans la formule pour $\xi_P(\gamma_\tau)$ est contenue dans $\{\tau_1\} \times \Upsilon[z_2, \gamma_\tau z_2]$, on a

$$\xi_P(\gamma_\tau) = 0.$$

Le corollaire en résulte. $\square$

Remarque 5.5. Comme on l'a dit, le cocycle $\tilde{\kappa}_P$ est plus facile à manipuler numériquement que κ_P parce qu'il peut s'évaluer au moyen d'intégrales itérées. Cependant, si dans le présent article le cocycle $\tilde{\kappa}_P$ n'intervient que dans les algorithmes pour calculer J_τ numériquement, signalons tout de même que la proposition 5.3 et le corollaire 5.4 sont d'un intérêt plus que pratique. Dans le contexte partiellement p-adique étudié dans [Dar1] et [DD] où l'on est amené à travailler avec des formes modulaires sur $\mathcal{H}_p \times \mathcal{H}$, on ignore comment donner un sens aux régions de la forme $\Delta_P(A, B)$, ou au cocycle κ_P. Par contre, on sait ce qui doit jouer le rôle des intégrales "itérées" de formes modulaires (cuspidales ou Eisenstein) sur des régions "rectangulaires" de la forme $\Box_P(A, B)$, ce qui permet de définir un avatar p-adique de $\tilde{\kappa}_P$, et par conséquent des versions p-adiques des invariants J_τ du présent article.

Il reste finalement à calculer une solution de l'équation (31) ou (34). Le procédé étant le même, qu'il s'agisse de ρ_P ou de $\tilde{\rho}_P$, on se bornera au cas de ρ_P pour alléger les notations.

L'algorithme que nous proposons pour calculer $\rho_P(\gamma)$, pour γ n'importe quel élément de Γ, se base sur l'observation suivante : lorsque $\gamma = hkh^{-1}k^{-1}$ est un commutateur dans Γ, la formule (31) permet d'exprimer $\rho_P(\gamma)$ directement en fonction de κ_P. En effet, on a d'abord

$$\begin{aligned}\rho_P(\gamma) \quad = \quad & \rho_P(h) + \rho_P(k) + \rho_P(h^{-1}) + \rho_P(k^{-1}) + \kappa_P(h, kh^{-1}k^{-1}) \\ & + \kappa_P(k, h^{-1}k^{-1}) + \kappa_P(h^{-1}, k^{-1}) \pmod{\Lambda'_{\mathrm{Eis}}}.\end{aligned}$$

En outre, on déduit de l'identité facile $\rho_P(\mathrm{Id}) \equiv 0$ que

$$\rho_P(h) + \rho_P(h^{-1}) \equiv -\kappa_P(h, h^{-1}).$$

En reportant, on en conclut que

$$\begin{aligned}\rho_P(\gamma) \quad = \quad & \kappa_P(h, kh^{-1}k^{-1}) + \kappa_P(k, h^{-1}k^{-1}) + \kappa_P(h^{-1}, k^{-1}) \\ & - \kappa_P(h, h^{-1}) - \kappa_P(k, k^{-1}) \pmod{\Lambda'_{\mathrm{Eis}}}.\end{aligned}$$

Cette dernière formule, avec ρ_P et κ_P remplacés par $\tilde{\rho}_P$ et $\tilde{\kappa}_P$ respectivement, donne un accès numérique à $\tilde{\rho}_P(hkh^{-1}k^{-1})$ puisque les nombres complexes $\tilde{\kappa}_P(g, g')$ se calculent grâce au développement en série de Fourier de la série d'Eisenstein.

En outre, l'abélianisé Γ_{ab} de Γ est fini (voir [DL, Prop. 1.3]). Son ordre divise $4N_{F/\mathbb{Q}}(\epsilon^2 - 1)$, où ϵ désigne l'unité fondamentale de F. Pour calculer $\rho_P(\gamma)$ pour une matrice γ de Γ, il ne reste donc plus qu'à décomposer $\gamma^{|\Gamma_{\mathrm{ab}}|}$ en un produit de commutateurs.

Sous l'hypothèse que F est de nombre de classes 1, on peut procèder comme suit. L'anneau des entiers $\mathcal{O}_F$ est euclidien en k-étapes pour la norme selon la terminologie de Cooke [Co, Th. 1]. Par conséquent, le groupe modulaire de Hilbert Γ est engendré par les matrices élémentaires de type suivant : l'involution $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, les matrices de translation $T_\theta = \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et les puissances de la matrice $U = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon^{-1} \end{pmatrix}$. Il suffit donc d'écrire γ comme un produit de matrices élémentaires grâce à l'algorithme d'Euclide dans $\mathcal{O}_F$, puis d'utiliser les relations de commutation de ces matrices :

$$UT_\theta U^{-1}T_\theta^{-1} = T_{\theta(\epsilon^2-1)}, \qquad SUS^{-1}U^{-1} = U^2.$$

Remarque 5.6. Dans notre contexte "Eisenstein", on ne peut pas utiliser tel quel l'algorithme proposé dans [DL, sect. 4]. En effet, les intégrales du type $\int^{\tau}\int_{c_2}^{c_1}\omega_f$ (avec c_1, $c_2 \in \mathbb{P}^1(F)$) n'ont de sens que si f est une forme modulaire de Hilbert cuspidale. Notons cependant que cet algorithme et le nôtre reposent tous deux sur le fait que $\mathcal{O}_F$ est un anneau euclidien.

6 Exemples numériques

Dans cette partie, nous présentons quelques résultats expérimentaux obtenus grâce à l'algorithme précédent. Il est alors possible, pour quelques cas d'extensions ATR K/F, de tester numériquement la Conjecture 4.1 de cet article et d'exhiber le polynôme minimal de l'unité de du corps de classes de Hilbert H_K^+ correspondante.

6.1 Corps de base $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$

On considère d'abord la situation où $F = \mathbf{Q}(\sqrt{5})$ et l'on note $\epsilon = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ son unité fondamentale de norme -1. L'anneau des entiers $\mathcal{O}_F = \mathbf{Z}[\epsilon]$ est euclidien pour la norme. On fixe les places archimédiennes v_1 et v_2 de F de telle sorte que $\epsilon_1 < 0$ et $\epsilon_2 > 0$. On supposera dans cette section que $\Lambda''_{\mathrm{Eis}} = \Lambda'_{\mathrm{Eis}}$ et l'on se donne un entier $m_F > 0$ tel que $\Lambda'_{\mathrm{Eis}} \subset (2i\pi)^2 m_F \mathbf{Z}$. Les exemples ci-dessous laissent penser que $m_{\mathbf{Q}(\sqrt{5})} = 15$ convient.

Nous étudions maintenant les invariants associés à différentes extensions quadratiques ATR K de F dans lesquelles la place v_1 devient complexe.

(a) Un exemple à groupe des classes C_4.

On considère $K = F(\sqrt{21\epsilon - 11})$. C'est une extension ATR de F, dont le groupe des classes au sens restreint est cyclique d'ordre 4.

Aux quatre classes distinctes $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_4$ de $\mathcal{O}_K$ au sens restreint, on associe les éléments $\tau_1, \ldots, \tau_4$ de K fixés par les matrices suivantes de Γ :

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 4\epsilon+2 & -2\epsilon-5 \\ -2\epsilon-1 & 2\epsilon+1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 13\epsilon+9 & 4\epsilon+1 \\ -32\epsilon-18 & -7\epsilon-6 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_3 = \begin{pmatrix} -47\epsilon-17 & 9\epsilon-6 \\ -520\epsilon-308 & 53\epsilon+20 \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 165\epsilon+79 & 5\epsilon-2 \\ -8512\epsilon-5160 & -159\epsilon-76 \end{pmatrix}.$$

On calcule dans $\mathbf{C}/m_F\mathbf{Z}$ les invariants $\rho_k(\gamma_k) := \tilde{\rho}_{\tau_k}(\gamma_k)/(2i\pi)^2$ associés. On trouve avec une précision de 50 décimales au moins

$$\begin{aligned} \rho_1(\gamma_1) &\approx -0.3666666666\ldots - 0.27784944302\ldots i; \\ \rho_2(\gamma_2) &\approx 0.32623940638\ldots; \\ \rho_3(\gamma_3) &\approx 1.83333333333\ldots + 0.27784944302\ldots i; \\ \rho_4(\gamma_4) &\approx 17.8404272602\ldots. \end{aligned}$$

On doit tester l'algébricité du nombre complexe (bien défini)

$$u_k(m_F) = \exp(2i\pi m_F \rho_k(\gamma_k))$$

sans connaître la constante m_F. Cependant, dans la pratique, il semble qu'il existe toujours une racine m_F-ième de $u_k(m_F)$ qui appartienne au corps de définition de $u_k(m_F)$.

Notons $u_k(1) = \exp(2i\pi\rho_k(\gamma_k))$ l'exponentielle du représentant arbitraire donné ci-dessus. Quitte à modifier $u_k(1)$ par une racine de l'unité, on peut espérer tester avec succès son algébricité. Plus précisément, la commande Pari `algdep`$(u_1(1)e^{-\frac{4}{15}i\pi}, 16)$ suggère la relation algébrique suivante pour $u_1 := u_1(1)e^{-\frac{4}{15}i\pi}$:

$$Q_1(x) := x^8 + 4x^7 - 10x^6 + x^5 + 9x^4 + x^3 - 10x^2 + 4x + 1. \tag{35}$$

On en déduit que le nombre complexe u_1 coïncide sur 50 décimales avec la racine $-5.73036\ldots$ du polynôme Q_1. Il en va de même avec les trois autres invariants :
$u_2 := u_2(1)e^{\frac{23}{15}i\pi}$ coïncide avec la racine $0.834403847893\ldots + 0.5511535345\ldots i$.
$u_3 := u_3(1)e^{\frac{20}{15}i\pi}$ coïncide avec la racine $-0.17450889906\ldots = 1/u_1$.
$u_4 := u_4(1)e^{\frac{2}{15}i\pi}$ coïncide avec la racine $0.834403847893\ldots - 0.5511535345\ldots i$.

On vérifie a posteriori que Q_1 est effectivement le polynôme minimal d'une unité du corps de classes de Hilbert (au sens restreint) de K.

(b) Un exemple à groupe des classes C_6.

On considère maintenant $K = F(\sqrt{26\epsilon - 37})$, dont le nombre de classes au sens restreint est 6. On trouve avec parfois 200 décimales de précision dans $\mathbf{C}/m_F\mathbf{Z}$:

$$\begin{array}{rcl}
\rho_1(\gamma_1) & \approx & 4.499999999999999\ldots - 0.728584512\ldots i;\\
\rho_2(\gamma_2) & \approx & -1.078476376302846\ldots - 0.195385083050863\ldots i;\\
\rho_3(\gamma_3) & \approx & -2.178476376302846\ldots + 0.195385083050863\ldots i;\\
\rho_4(\gamma_4) & \approx & -18.61666666666666\ldots + 0.728584510266413\ldots i;\\
\rho_5(\gamma_5) & \approx & -0.988190290363819\ldots + 0.195385083050863\ldots i;\\
\rho_6(\gamma_6) & \approx & -2.421523623697153\ldots - 0.195385083050863\ldots i.
\end{array}$$

La commande `algdep`$(u_2(1)e^{\frac{16}{15}i\pi}, 12)$ de PARI suggère la relation algébrique :

$$\begin{array}{rcl}
Q_2(x) & = & x^{12} + 106x^{11} + 873x^{10} - 2636x^9 + 3040x^8 - 626x^7 - 1108x^6 - 626x^5\\
& & +3040x^4 + 2636x^3 + 873x^2 + 106x + 1.
\end{array}$$

Ce polynôme est effectivement le polynôme minimal d'une unité de H_K^+. En outre, les nombres complexes

$$\begin{array}{rlcl}
u_1 : & = u_1(1) & = & -97.30316237461782\ldots;\\
u_2 : & = u_2(1)e^{\frac{16}{15}i\pi} & \approx & -3.276785825745970\ldots + 0.955188763599790\ldots i;\\
u_3 : & = u_3(1)e^{\frac{19}{15}i\pi} & \approx & -0.281276149057161\ldots + 0.081992486337387\ldots i;\\
u_4 : & = u_4(1)e^{\frac{5}{15}i\pi} & \approx & -0.010277158271074\ldots;\\
u_5 : & = u_5(1)e^{\frac{16}{15}i\pi} & \approx & -0.281276149057161\ldots - 0.081992486337387\ldots i;\\
u_6 : & = u_6(1)e^{\frac{16}{15}i\pi} & \approx & -3.276785825745970\ldots - 0.955188763599790\ldots i.
\end{array}$$

coïncident chacun avec une racine de Q_2 sur plusieurs dizaines de décimales.

(c) Un exemple à groupe des classes $C_2 \times C_4$.

Le groupe des classes (au sens restreint) de $K = F(\sqrt{21\epsilon - 29})$ est d'ordre 8, isomorphe à $C_2 \times C_4$. L'algorithme décrit précédemment permet de calculer

$$\begin{array}{rcl}
\rho_1(\gamma_1) & \approx & -1.866666666666\ldots - 0.787374943777\ldots i; \\
\rho_2(\gamma_2) & \approx & 0.297896510457\ldots + 0.068709821260\ldots i; \\
\rho_3(\gamma_3) & \approx & -0.300000000000\ldots + 0.161542382812\ldots i; \\
\rho_4(\gamma_4) & \approx & -1.097896510457\ldots + 0.068709821260\ldots i; \\
\rho_5(\gamma_5) & \approx & -0.133333333333\ldots + 0.787374943777\ldots i; \\
\rho_6(\gamma_6) & \approx & -0.031229843791\ldots - 0.068709821260\ldots i; \\
\rho_7(\gamma_7) & \approx & -0.900000000000\ldots - 0.161542382812\ldots i; \\
\rho_8(\gamma_8) & \approx & -1.38121\ldots - 0.391304\ldots i.
\end{array}$$

L'invariant le plus précis est $\rho_5(\gamma_5)$ dont on connaît 200 décimales. La commande PARI `algdep(`$u_5(1)e^{-\frac{19}{15}i\pi}, 16, 200)$ nous fournit comme candidat le polynôme réciproque

$$\begin{array}{rcl}
Q_3(x) & = & x^{16} + 139x^{15} - 255x^{14} - 538x^{13} + 2018x^{12} - 2237x^{11} + 1898x^{10} - 3034x^9 \\
& & +4137x^8 - 3034x^7 + 1898x^6 - 2237x^5 + 2018x^4 - 538x^3 - 255x^2 + 139x + 1.
\end{array}$$

On constate d'abord que Q_3 est en effet le polynôme minimal d'une unité de H_K^+. Par ailleurs, les autres invariants coïncident eux aussi avec des racines de ce polynôme, au moins pour leurs n premières décimales ($10 \leq n \leq 200$ selon les cas) :

$$\begin{array}{rcl}
u_1 := u_1(1)e^{\frac{16}{15}i\pi} & \approx & -140.7834195600\ldots; \\
u_2 := u_2(1)e^{\frac{19}{15}i\pi} & \approx & 0.589707772431\ldots - 0.271949567981\ldots i; \\
u_3 := u_3(1)e^{\frac{24}{15}i\pi} & \approx & -0.362402166665\ldots; \\
u_4 := u_4(1)e^{\frac{5}{15}i\pi} & \approx & 0.589707772431\ldots + 0.271949567981\ldots i; \\
u_5 := u_5(1)e^{\frac{19}{15}i\pi} & \approx & -0.007103109180\ldots; \\
u_6 := u_6(1)e^{\frac{3}{15}i\pi} & \approx & 1.398366700490\ldots + 0.644870625513\ldots i; \\
u_7 := u_7(1)e^{\frac{12}{15}i\pi} & \approx & -2.759365401151\ldots.
\end{array}$$

La précision obtenue sur les décimales de $\rho_8(\gamma_8)$ est insuffisante pour identifier u_8 avec une des racines de Q_3. Pour des raisons de symétrie, il doit correspondre à la racine

$$1.398366700490\ldots - 0.644870625513\ldots i.$$

6.2 Corps de base $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$

L'anneau des entiers de $F' = \mathbf{Q}(\sqrt{2})$ est euclidien pour la norme. On note $\epsilon = 1 + \sqrt{2}$ son unité fondamentale de norme -1, et on ordonne les plongements de telle sorte que $\epsilon_1 < 0$ et $\epsilon_2 > 0$. La constante $m_{F'}$ optimale est vraisemblablement $m_{F'} = 6$ dans ce cas.

(a) Un exemple à groupe des classes C_4.

L'extension ATR $K = F'(\sqrt{12\epsilon - 11})$ possède un groupe des classes au sens restreint cyclique d'ordre 4. Nous associons à chaque classe un invariant dans $\mathbf{C}/m_{F'}\mathbf{Z}$:

$$\begin{aligned}
\rho_1(\gamma_1) &\approx -1.333333333333333\ldots - 0.301378336840440\ldots i;\\
\rho_2(\gamma_2) &\approx -0.274078669810665\ldots;\\
\rho_3(\gamma_3) &\approx 0.166666666666666\ldots + 0.301378336840440\ldots i;\\
\rho_4(\gamma_4) &\approx -3.225921330189334\ldots.
\end{aligned}$$

Tous sont obtenus avec une précision supérieure à 40 décimales. On en déduit au moyen de la commande Pari `algdep` le candidat

$$Q_4(x) = x^8 + 6x^7 - 5x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 6x + 1.$$

On vérifie a posteriori que ce polynôme définit bien une unité du corps de classes de Hilbert au sens restreint de K. Par ailleurs, 4 des 8 racines de Q_4 coïncident sur leurs 40 premières décimales au moins avec les nombres complexes

$$\begin{aligned}
u_1 := u_1(1)e^{\frac{10}{6}i\pi} &\approx -6.643347233735518\ldots;\\
u_2 := u_2(1)e^{\frac{10}{6}i\pi} &\approx -0.931490243381137\ldots - 0.363766307518644\ldots i;\\
u_3 := u_3(1)e^{\frac{4}{6}i\pi} &\approx -0.150526528994587\ldots;\\
u_4 := u_4(1)e^{\frac{8}{6}i\pi} &\approx -0.931490243381137\ldots + 0.363766307518644\ldots i.
\end{aligned}$$

(b) Un exemple à groupe des classes C_8.

On considère enfin l'extension quadratique ATR $K = F'(\sqrt{25\epsilon - 31})$, dont le groupe des classes au sens restreint est cyclique d'ordre 8. À chaque classe correspond une matrice $\gamma_k \in \mathbf{SL}_2(\mathcal{O}_{F'})$ et un invariant de $\mathbf{C}/m_{F'}\mathbf{Z}$:

$$\begin{aligned}
\rho_1(\gamma_1) &\approx -3.666666666666\ldots - 2.047636549497\ldots i;\\
\rho_2(\gamma_2) &\approx 1.855997078695\ldots - 0.315172999961\ldots i;\\
\rho_3(\gamma_3) &\approx -122.347\ldots + 0.625\ldots i;\\
\rho_4(\gamma_4) &\approx -87.06066958797\ldots + 0.315172999961\ldots i;\\
\rho_5(\gamma_5) &\approx -18.16666666666\ldots + 2.047636549497\ldots i;\\
\rho_6(\gamma_6) &\approx 20.060669587971\ldots + 0.315172999961\ldots i;\\
\rho_7(\gamma_7) &\approx -13.884816073095\ldots;\\
\rho_8(\gamma_8) &\approx 47.894002921304\ldots - 0.3151729999612\ldots i.
\end{aligned}$$

L'invariant le plus précis est $\rho_5(\gamma_5)$, qu'on a pu calculer avec plus de 200 décimales significatives. La commande Pari `algdep(`$u_5(1)e^{-\frac{8}{16}i\pi}, 16$`)` suggère le polynôme réciproque

$$\begin{aligned}
Q_5(x) := {} & x^{16} + 386792x^{15} - 5613916x^{14} + 21963312x^{13} - 13291318x^{12} + 32052888x^{11}\\
&+15011472x^{10} + 16774296x^9 + 36336275x^8 + 16774296x^7 + 15011472x^6\\
&+32052888x^5 - 13291318x^4 + 21963312x^3 - 5613916x^2 + 386792x + 1.
\end{aligned}$$

Il est aisé de vérifier que Q_5 définit effectivement une unité de H_K^+. À une racine de l'unité près, les exponentielles des nombres complexes précédents coïncident sur leurs premières décimales (entre 10 et 200 selon les cas) avec les racines suivantes de Q_5 :

$$\begin{array}{lcl}
u_1 := u_1(1)e^{\frac{2}{6}i\pi} & \approx & -386806.513645927\ldots; \\
u_2 := u_2(1)e^{\frac{2}{6}i\pi} & \approx & 7.17151519909699\ldots + 1.02818667270890\ldots i; \\
u_4 := u_4(1)e^{\frac{1}{6}i\pi} & \approx & 0.136632045175690\ldots + 0.0195890608908274\ldots i; \\
u_5 := u_5(1)e^{\frac{8}{6}i\pi} & \approx & -0.00000258527187\ldots; \\
u_6 := u_6(1)e^{\frac{11}{6}i\pi} & \approx & 0.136632045175690\ldots - 0.0195890608908274\ldots i; \\
u_7 := u_7(1)e^{\frac{7}{6}i\pi} & \approx & -0.317863811003618\ldots - 0.948136381357796\ldots i; \\
u_8 := u_8(1)e^{\frac{1}{6}i\pi} & \approx & 7.17151519909699\ldots - 1.02818667270890\ldots i.
\end{array}$$

La précision obtenue sur les décimales de $\rho_3(\gamma_3)$ est insuffisante pour identifier u_3. Pour des raisons de symétrie, il doit correspondre à la racine

$$-0.317863811003618\ldots + 0.948136381357796\ldots i.$$

Références

[As] T. Asai. *On a certain function analogous to* $\log|\eta(z)|$. Nagoya Math. J. **40** (1970), 193-211.

[Co] G. Cooke. *A weakening of the Euclidean property for integral domains and applications to algebraic number theory, Part I.* J. Reine Angew. Math. **282** (1976), 133-156.

[Ch1] P. Charollois. Sommes de Dedekind et périodes de formes modulaires de Hilbert. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, 2004.

[Ch2] P. Charollois. *Sommes de Dedekind associées à un corps de nombres totalement réel.* J. Reine Angew. Math. **610** (2007), 125-147.

[Dar1] H. Darmon. *Integration on* $\mathcal{H}_p \times \mathcal{H}$ *and arithmetic applications.* Ann. of Math. (2) **154** (2001), no. 3, 589–639.

[Dar2] H. Darmon. Rational points on modular elliptic curves. CBMS Regional Conference Series in Mathematics **101**, AMS-NSF : 2004.

[Das] S. Dasgupta. *Stark's conjectures.* Harvard senior thesis (1999).

[DD] H. Darmon et S. Dasgupta. *Elliptic units for real quadratic fields.* Annals of mathematics **163** (2006), 301-345.

[DL] H. Darmon et A. Logan. *Periods of Hilbert modular forms and rational points on elliptic curves.* International Mathematics Research Notices **40** (2003), 2153-2180.

[dSG] E. de Shalit et E.Z. Goren. *On special values of theta functions of genus two.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **47** (1997), no. 3, 775–799.

[DTvW] D.S. Dummit, B.A. Tangedal et P.B. van Wamelen. *Stark's conjecture over complex cubic number fields.* Math. Comp. **73** (2004), no. 247, 1525–1546.

[Fr] E. Freitag, Hilbert Modular Forms. Springer Verlag : 1990.

[Gr] M. Greenberg, *Stark-Heegner points and the cohomology of quaternionic Shimura varieties.* Soumis.

[GL] E.Z. Goren et K.E. Lauter. *Class invariants for quartic CM fields.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **57** (2007), no. 2, 457–480.

[Ha] Y. Hara. *On calculation of* $L_K(1,\chi)$ *for some Hecke characters.* J. Math. Kyoto Univ. **33** (1993), 865-898.

[Hard] G. Harder. *On the cohomology of* $SL(2,O)$. Lie groups and their representations (Proc. Summer School on Group Representations of the Bolyai János Math. Soc., Budapest, 1971), pp. 139–150. Halsted, New York, 1975.

[He] E. Hecke *Analytische Funktionen und algebraische Zahlen, II.* **20**, Math. Werke, 2nd ed. Vandenhoeck, Ruprecht, Göttingen : 1970. 381-404.

[K-M] R. Kirby et P. Melvin, P. *Dedekind sums,* μ*-invariant and the signature cocycle.* Math. Ann. **299** (1994), no. 2 , 231-267.

[RS] T. Ren. et R. Sczech. *A refinement of Stark's conjecture over complex cubic number fields.* Manuscrit.

[Si] C.L. Siegel. Advanced Analytic Number Theory. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay : 1980.

[St] H.M. Stark. *Values of L-functions at* $s = 1$. I, II, III et IV, Advances in Math. **7** (1971), 301-343 ; **17** (1975), 60-92 ; **22** (1976), 64-84 ; **35** (1980), 197-235.

[Ta] J.T. Tate. Les conjectures de Stark sur les fonctions L d'Artin en $s = 0$. Birkhaüser, Boston : 1984. Progress in Math. **47**.

[Tr] M. Trifkovic. *Stark-Heegner points on elliptic curves defined over imaginary quadratic fields.* Duke Math. J. **135** (2006), no. 3, 415–453.

[VdG] G. Van der Geer, Hilbert modular surfaces. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-York : 1988. Ergebnisse der Math. 3. Folge, vol. **16**.