Sommes de Dedekind associées à un corps de nombres totalement réel.

Pierre Charollois

11 mars 2005

Abstract

We extend the construction of Dedekind sums to the case of an arbitrary totally real number field of class number one. Our method is based on the choice of some convenient analogue of the logarithm of Dedekind η function. We deduce its modular transformation from the Kronecker limit formula established by Asai. From this we obtain a generalization of Rademacher's Φ function. We use it to define the corresponding Dedekind sums and derive their main properties. These sums are not rational numbers but real-analytic functions.

1 Introduction

Le problème de la généralisation des sommes de Dedekind à un corps de nombres est un problème ancien (voir [R-G] chapitre 5]). Sczech y a répondu dans [Sc] lorsque le corps de base n'est plus $\mathbb{Q}$ mais un corps quadratique imaginaire. Dans ce contexte, il donne une définition directe des analogues des sommes de Dedekind qui repose sur les fonctions elliptiques. Ito a ensuite montré dans [It] comment faire apparaître les sommes de Dedekind-Sczech dans la formule de transformation modulaire d'une certaine fonction analogue de la partie imaginaire du logarithme de la fonction η de Dedekind.

Dans cet article, nous nous intéressons au cas où le corps de base est un corps de nombres totalement réel F de nombre de classes 1. Une des pistes envisagées par Rademacher ([R-G, p.65]) consiste à chercher une généralisation appropriée de la fonction $\log \eta$. La formule de transformation modulaire de cette fonction peut permettre de définir et d'étudier les sommes de Dedekind généralisées associées à F. Il suggère de s'intéresser à la fonction Ψ étudiée par Hecke dans ([He]). Cette fonction est une primitive holomorphe de la série d'Eisenstein de poids 2 de F.

D'une certaine manière, nous répondons dans cet article au problème posé par Rademacher. Nos résultats confirment son intuition, excepté que nous ne considérons pas la fonction Ψ comme l'analogue adéquat, mais plutôt une fonction réelle-analytique qui apparaît dans la formule limite de Kronecker généralisée établie par Asai [As1].

Avant de détailler les résultats que nous avons obtenus, nous commençons par rappeler les définitions et les propriétés des sommes de Dedekind classiques. Elles peuvent être introduites de la manière suivante à partir de la formule de transformation modulaire du logarithme de la fonction η de Dedekind. La fonction η de Dedekind est définie sur le demi plan de Poincaré $\mathcal{H}$ par

$$\eta(z) = e^{i\pi z/12} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2i\pi nz}).$$

Sa puissance $24^{\text{ème}}$ est la forme modulaire Δ de poids 12 sur le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$. Par conséquent, la fonction $\log \eta$ possède une formule de transformation modulaire explicite, à un multiple entier de $i\pi/12$ près. Plus précisément, on choisit comme logarithme de η la branche holomorphe

$$\log \eta(z) := \frac{i\pi}{12} z - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2i\pi mnz}}{m}.$$

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $SL_2(\mathbb{Z})$. On pose $Az := \dfrac{az+b}{cz+d}$, et l'on note log la branche principale du logarithme. La formule

$$\log \eta(Az) = \log \eta(z) + \begin{cases} \dfrac{i\pi}{12}\, bd & \text{si}\, c = 0, \\[2ex] \dfrac{1}{4} \log\left(-(cz+d)^2\right) + \dfrac{i\pi}{12} \Phi_R(A) & \text{si}\, c \neq 0 \end{cases} \tag{1}$$

permet ainsi de définir la fonction

$$\Phi_R : SL_2(\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$$

dite *fonction de Rademacher*. Dans [De], Dedekind définit la somme $s(d, c)$ comme le rationnel lié à $\Phi_R(A)$ par la relation

$$s(d, c) := \frac{1}{12} \left[-\operatorname{sign}(c) \Phi_R(A) + \frac{a+d}{|c|} \right]. \tag{2}$$

Il déduit alors de la formule de transformation (1) la loi de réciprocité fondamentale des sommes de Dedekind

$$s(d, c) + s(c, d) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{12} \left(\frac{d}{c} + \frac{c}{d} + \frac{1}{cd} \right) \qquad \text{si} \;\; (c, d) = 1, \quad c > 0,\, d > 0. \tag{3}$$

Il utilise ensuite le travail de Riemann pour démontrer l'égalité

$$s(d, c) = \sum_{k=1}^{|c|} \left(\left(\frac{k}{c} \right)\right) \left(\left(\frac{kd}{c} \right)\right), \quad \text{où } ((x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z}, \\ x - [x] - \frac{1}{2} & \text{sinon,} \end{cases} \tag{4}$$

qui permet d'étendre la définition de la somme de Dedekind $s(d, c)$ au cas où c et d ne sont pas premiers entres eux. Enfin Dedekind montre que pour tout nombre premier p on a l'identité

$$s(dp, c) + \sum_{r \bmod p} s(d + cr, cp) = (p+1) s(d, c), \tag{5}$$

qui signifie que les sommes de Dedekind sont des fonctions propres pour certains opérateurs de Hecke.

Nous généralisons les constructions précédentes au cas où c et d sont des entiers d'un corps de nombres F totalement réel de nombre de classes 1. Nous utilisons pour cela le travail de Hara. On note $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers de F, n le degré de F sur $\mathbb{Q}$, et on fixe une fois pour toutes les n plongements $\iota_1, \ldots, \iota_n$ de F dans $\mathbb{R}$. Pour tout entier j, $1 \leqslant j \leqslant n$, Hara associe à ι_j une fonction $\Lambda_j : \mathcal{H}^n \to \mathbb{C}$. Chacune de ces fonctions joue pour F le rôle joué pour $\mathbb{Q}$ par le logarithme de la fonction η de Dedekind. En effet, la partie réelle de Λ_j, qui ne dépend pas de j, apparaît comme l'analogue de la fonction $\mathrm{Re}\,(\log \eta)$ dans la généralisation à F de la première formule limite de Kronecker obtenue par Asai ([As1]).

Nous établissons la formule de transformation modulaire de Λ_j sous l'action du groupe modulaire de Hilbert $SL_2(\mathcal{O}_F)$. Elle fait apparaître une fonction réelle-analytique

$$\Phi_j : SL_2(\mathcal{O}_F) \times \mathcal{H}^{n-1} \to \mathbb{R}$$

que nous considérons comme un analogue de la fonction de Rademacher dans ce contexte.

Etant donnés deux entiers $c \neq 0$ et d de $\mathcal{O}_F$ premiers entre eux, nous définissons au paragraphe 3 la somme de Dedekind généralisée associée comme une fonction $s(d, c; .) : \mathcal{H}^{n-1} \to \mathbb{R}$. Comme c'est déjà le cas avec l'égalité (2), la somme $s_j(d, c; .)$ ne diffère de $\Phi_j\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, .\right)$ que d'un terme élémentaire.

Nous montrons ensuite que les sommes généralisées vérifient une loi de réciprocité. Cette loi, qui fait l'objet du théorème 3.4, met en évidence la somme particulière $s(0, 1; z_2, \ldots, z_n)$. Plus précisément, la loi de réciprocité permet d'exprimer toute somme de Dedekind généralisée comme une somme finie de $s(0, 1; .)$ et de termes élémentaires.

Dans la proposition 3.6, nous utilisons le travail de Hecke [He] sur la fonction Ψ pour écrire la fonction fondamentale $s(0, 1; z_2)$ sous la forme d'une série remarquable. Le terme général de cette série fait intervenir des valeurs spéciales de fonctions L de Hecke sur la droite $\mathrm{Re}\,(s) = 1$.

Dans le dernier paragraphe, nous montrons que les sommes de Dedekind généralisées sont des fonctions propres d'un certain opérateur de Hecke T_p, où p est un premier de $\mathcal{O}_F$. La valeur propre correspondante est $N_{F/\mathbb{Q}}(p) + 1$. Ce résultat généralise l'identité (5) obtenue par Dedekind.

En combinant nos résultats avec ceux de Sczech, Ito et Jorgenson-Lang, il semble possible de traiter le cas d'un corps de nombres quelconque.

On note par ailleurs que Gunnells et Sczech ont introduit récemment une généralisation des sommes de Dedekind à un corps de nombres totalement réel, très différente de celle que nous proposons (comparer avec [G-S]). Les sommes de Dedekind qu'ils définissent sont des nombres rationnels, tandis que celles que nous introduisons ici sont des fonctions réelles-analytiques sur $\mathcal{H}^{n-1}$ à valeurs réelles. Dans les deux cas, ces sommes nouvelles permettent d'étudier des valeurs spéciales de fonctions L de Hecke (voir également [Ch]).

C'est un plaisir de remercier mes directeurs de thèse Philippe Cassou-Noguès et Martin J. Taylor. Leur soutien et leurs encouragements ont permis que ce travail aboutisse.

2 La fonction Λ_j, analogue de $\log\eta$.

Nous commençons par introduire l'analogue pour F de la fonction $\log\eta$, puis nous étudions sa formule de transformation modulaire.

2.1 Définition.

On désigne par d_F le discriminant de F, $\mathfrak{d} = (\delta)$ la différente de $F/\mathbb{Q}$, U_F (resp. U_F^+) le groupe des unités (resp. unités totalement positives) de F et R_F son régulateur. On notera $a_k := \iota_k(a)$ l'image d'un élément a de F par le k-ième plongement, et x_k (resp. y_k) la partie réelle (resp. imaginaire) d'un nombre complexe z_k de $\mathcal{H}$.

Définition 2.1. Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, on définit la fonction Ω_j comme la somme de la série absolument convergente

$$\Omega_j(z) := \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{O}_F, \\ \frac{\alpha_j}{\delta_j} > 0}} \sigma_{-1}(\alpha)\, e^{2i\pi \frac{\alpha_j}{\delta_j} z_j} \prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n, \\ k \neq j}} e^{2i\pi\left(\frac{\alpha_k}{\delta_k} x_k + i\left|\frac{\alpha_k}{\delta_k}\right| y_k\right)}, \tag{6}$$

où la fonction $\sigma_{-1} : \mathcal{O}_F \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$ est définie par

$$\sigma_{-1}(\alpha) = \sum_{(\lambda)|(\alpha)} \left|N_{F/\mathbb{Q}}(\lambda)\right|^{-1},$$

la sommation portant sur les idéaux entiers (λ) qui divisent l'idéal (α).

On pose alors

$$\begin{array}{llll} \Lambda_j : & \mathcal{H}^n & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z = (z_1, \ldots, z_n) & \longmapsto & \Lambda_j(z) := i\pi\kappa_F \left(z_j \displaystyle\prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n, \\ k \neq j}} y_k \right) - \frac{\sqrt{d_F}}{2^{n-1} R_F} \Omega_j(z), \end{array}$$

où l'on a noté κ_F la constante $\frac{d_F \zeta_F(2)}{2^n R_F \pi^{n+1}}$.

Remarque : Dans la définition de Ω_j, on impose la condition $\frac{\alpha_j}{\delta_j} > 0$. On a donc construit $n = [F : \mathbb{Q}]$ fonctions Λ_j en privilégiant successivement chaque plongement ι_j de F. Une conséquence immédiate de ce choix est que $\Lambda_j(z_1, \ldots, z_n)$ *est holomorphe par rapport à z_j, mais ne l'est pas par rapport à z_k pour $k \neq j$.*

En fait, cette fonction apparaît naturellement comme le morceau holomorphe par rapport à z_j de la fonction réelle-analytique $-h(z)/4$, où h est l'application introduite par Asai dans [As1]. Il démontre que $-h/4$ est l'analogue pour F de $\mathrm{Re}\,(\log\eta)$. Ceci nous conduit à considérer que Λ_j est l'analogue pour F de $\log\eta$. Rappelons plus précisément les résultats qu'il obtient. On pose

$$h(z) := -4\,\mathrm{Re}\,\Lambda_j(z), \tag{7}$$

où le membre de droite est indépendant de l'entier j. Nous introduisons également la série d'Eisenstein non-holomorphe associée à F.

Définition 2.2. Soit $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathcal{H}^n$. On définit la *série d'Eisenstein non-holomorphe* $E(z,s)$ comme somme de la série absolument convergente pour $\mathrm{Re}\,(s) > 1$

$$E(z,s) := \sideset{}{'}\sum_{(\mu,\nu)\in\mathcal{O}_F^2/U_F} \prod_{k=1}^{n} \frac{y_k^s}{|\mu_k z_k + \nu_k|^{2s}}. \tag{8}$$

Le groupe U_F opère diagonalement sur $\mathcal{O}_F^2$. On note $\mathcal{O}_F^2/U_F$ l'espace quotient. La notation $\sum'$ indique que la sommation porte sur les éléments non nuls.

Les propriétés fondamentales de la série $E(z,s)$ et la "formule limite" qui la relie à $h(z)$ ont déjà été établies dans [As1, §2-3], théorème 3. Ces résultats sont rassemblés dans le théorème suivant.

Théorème 2.1 (Asai).

(i) Définie par une série absolument convergente pour $\mathrm{Re}\,(s) > 1$, *la fonction* $s \mapsto E(z,s)$ *se prolonge en une fonction holomorphe sur tout le plan complexe sauf en* $s = 1$ *où elle a un pôle simple.*

(ii) Pour toute matrice A *de* Γ, *on a* $E(Az,s) = E(z,s)$.

(iii) Pour tout $z \in \mathcal{H}^n$, $E(z,s)$ *vérifie l'équation fonctionnelle*

$$G_F(2s)E(z,s) = G_F(2-2s)E(z,1-s),$$

où $G_F(s) := d_F^{\frac{s}{2}} \pi^{-\frac{ns}{2}} \Gamma(\frac{s}{2})^n$ *est le facteur Gamma de la fonction zêta de Dedekind du corps* F.

(iv) "Première formule limite de Kronecker généralisée."
Au voisinage de $s = 1$, *on a le développement en série de Laurent*

$$E(z,s) = \frac{(2\pi)^n R_F}{4d_F} \left[\frac{1}{s-1} + \gamma_F - \log\left(\prod_{k=1}^{n} y_k \right) + h(z) \right] + O(s-1),$$

où γ_F *est la constante* $\frac{4\sqrt{d_F}}{2^{\frac{n}{2}} R_F}((s-1)\zeta_F(s))'(1) - n\log 2$.

Nous rappelons également les propriétés de la fonction h données dans [As1], théorèmes 4 et 5.

Théorème 2.2 (Asai).

(i) La fonction $h(z)$ *est une fonction réelle-analytique à valeurs réelles. Elle est pluri-harmonique.*

(ii) Pour toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, *on a la relation modulaire*

$$h(z) = h(Az) + \sum_{k=1}^{n} \log |c_k z_k + d_k|^2.$$

(iii) La fonction $h(z) - 4\pi\kappa_F y_1 \cdots y_n$ *est de carré intégrable sur un domaine fondamental pour l'action de* $SL_2(\mathcal{O}_F)$ *sur* $\mathcal{H}^n$. *Elle tend vers 0 à la pointe infini.*

(iv) On a l'égalité $h(z) = -4\,\mathrm{Re}\,\log\eta(z)$ *dans le cas où* F *est le corps des rationnels.*

(v) Les fonctions $h(z)$ *et* $\zeta_F(s)\zeta_F(s+1)$ *sont associées via la transformée de Mellin.*

Ces propriétés ainsi que la première formule limite de Kronecker généralisée permettent à T. Asai de considérer que $-h/4 = \mathrm{Re}\,(\Lambda_j)$ est l'analogue pour F de la fonction $\mathrm{Re}\,(\log\eta)$.

Remarque : On peut démontrer que les trois propriétés $(i)-(ii)-(iii)$ caractérisent la fonction h (voir [Ch, théorème 3.2.3]). La démonstration est proche de celle du théorème 4 de [It].

2.2 L'analogue de la fonction Φ_R de Rademacher.

Sous l'action du groupe modulaire de Hilbert, la partie réelle de $\Lambda_j(z)$ vérifie une formule donnée par la propriété (ii) du théorème 2.2. Nous allons en déduire que la partie imaginaire de Λ_j vérifie une formule de transformation où apparaît naturellement une fonction Φ_j à valeurs réelles.

On se donne une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de Γ. On remarque que tout d'abord que, si $c = 0$, la formule de transformation de $\Lambda_j(z)$ sous l'action de A est complètement explicite. En effet, l'entier $a = d^{-1}$ est alors une unité de F. La transformation modulaire associée est donc du type $z \mapsto a^2 z + ab$. Ces transformations laissent invariante la fonction $\Omega_j(z)$ définie par (6). On déduit alors de la définition 2.1 que

$$\begin{aligned}\Lambda_j(Az) - \Lambda_j(z) &= i\pi\kappa_F\left((a_j^2 z_j + a_j b_j)\prod_{k\neq j} a_k^2 y_k - z_j\prod_{k\neq j} y_k\right)\\ &= i\pi\kappa_F b_j d_j \prod_{k\neq j} y_k.\end{aligned}$$

Pour obtenir la formule de transformation modulaire pour Λ_j sous l'action d'une matrice $A \in \Gamma$ quelconque, on considère la fonction $\boldsymbol{\eta}_j(z) := e^{\Lambda_j(z)}$ analogue de la fonction η de Dedekind. Par construction, elle est holomorphe par rapport à z_j et elle ne s'annule pas sur $\mathcal{H}^n$. On sait d'après la propriété (ii) du théorème 2.2 que la fonction $|\boldsymbol{\eta}_j| = e^{\mathrm{Re}\,(\Lambda_j)}$ vérifie

$$|\boldsymbol{\eta}_j(Az)|^4 = |\boldsymbol{\eta}_j(z)|^4 |c_j z_j + d_j|^2 \prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant n,\\ k\neq j}} |c_k z_k + d_k|^2. \tag{9}$$

Le lemme suivant résulte immédiatement de cette formule.

Lemme 2.3. *Soient* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *une matrice de* Γ *et* $z = (z_1, \ldots, z_n)$ *un élément de* $\mathcal{H}^n$*. Alors le quotient*

$$\frac{\boldsymbol{\eta}_j^4(Az)}{\boldsymbol{\eta}_j^4(z)(-(c_j z_j + d_j))^2 \prod_{k\neq j} |c_k z_k + d_k|^2}$$

est un nombre complexe de module 1 indépendant de $z_j \in \mathcal{H}$*.*

Démonstration. On déduit de l'égalité (9) qu'il s'agit d'un nombre complexe de module 1. En outre, c'est une fonction holomorphe de la variable $z_j \in \mathcal{H}$. On en conclut qu'elle est constante par le principe du maximum. $\square$

On sait que $\boldsymbol{\eta}_j(z) = e^{\Lambda_j(z)}$. De plus, pour c et d réels, $c \neq 0$, le nombre complexe $-(c\tau + d)^2$ est un élément de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ pour tout $\tau \in \mathcal{H}$. On peut donc considérer la détermination principale du logarithme sur cet ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$. On écrit donc

$$-(c_j z_j + d_j)^2 = e^{\log\left[-(c_j z_j + d_j)^2\right]}.$$

On déduit du lemme 2.3 que

$$e^{4\Lambda_j(Az) - 4\Lambda_j(z) - \log\left[-(c_j z_j + d_j)^2\right] - \sum_{k \neq j} \log|c_k z_k + d_k|^2}$$

est une constante de module 1. Par conséquent, la fonction

$$z_j \longrightarrow \operatorname{Im}\Big[4\Lambda_j(Az) - 4\Lambda_j(z) - \log\left[-(c_j z_j + d_j)^2\right]\Big]$$

est une fonction continue sur $\mathcal{H}$ à valeurs discrètes. Elle est donc constante. Ceci nous conduit à la définition suivante.

Définition 2.3. Soit $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathcal{H}^n$, et $\hat{z}_j \in \mathcal{H}^{n-1}$ le $(n-1)$-uplet $\hat{z}_j := (z_1, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_n)$ associé. Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, on définit la fonction

$$\begin{array}{cccccc} \Phi_j : & \Gamma & \times & \mathcal{H}^{n-1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & , & \hat{z}_j & \longmapsto & \Phi_j(A, \hat{z}_j), \end{array}$$

$$\text{où} \quad \Phi_j(A, \hat{z}_j) := \begin{cases} \kappa_F b_j d_j \displaystyle\prod_{k \neq j} y_k & \text{si } c = 0, \\ \dfrac{1}{\pi} \operatorname{Im}\left[\Lambda_j(Az) - \Lambda_j(z) - \dfrac{1}{4}\log\left[-(c_j z_j + d_j)^2\right]\right] & \text{si } c \neq 0. \end{cases}$$

La fonction $\Phi_j(A, \hat{z}_j)$ est à valeurs réelles. En comparant la partie réelle et la partie imaginaire des deux membres, on conclut que la fonction Λ_j satisfait la formule de transformation modulaire

$$\Lambda_j(Az) = \Lambda_j(z) + \frac{\delta_c}{4}\left[\log\left[-(c_j z_j + d_j)^2\right] + \sum_{k \neq j} \log|c_k z_k + d_k|^2\right] + i\pi\Phi_j(A, \hat{z}_j), \tag{10}$$

où δ_c vaut 0 si $c = 0$ et 1 sinon.

La fonction $\Phi_j(A, \hat{z}_j)$ est une généralisation de la *fonction* $\Phi_R : SL_2(\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ *de Rademacher* ((1) et [Ra2, §71]). Notons que notre normalisation donne dans le cas rationnel $\Phi_1 = \Phi_R/12$.

La fonction Φ_R satisfait l'identité fondamentale suivante due à Rademacher [Ra2, §71] : pour toutes matrices A et B de $SL_2(\mathbb{Z})$, on a

$$\Phi_R(AB) - \Phi_R(A) - \Phi_R(B) = -3\,\operatorname{sign}(cc'c''), \tag{11}$$

où c (resp. c' et c") désigne le coefficient de la première ligne, deuxième colonne de A (resp. B et AB). Avant d'étudier ce que devient cette relation dans notre situation, nous rappelons brièvement quelle est son interprétation en termes cohomologiques.

Pour toute matrice $A = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix}$ de $SL_2(\mathbb{R})$ et tout $z \in \mathcal{H}$, on définit le logarithme du facteur automorphe par $\ell(A,z) := \delta_c \log\left[-(cz+d)^2\right]$. On est conduit à poser

$$\Delta(A,B) := \frac{1}{i\pi}\Big(\ell(A,Bz) + \ell(B,z) - \ell(AB,z)\Big). \tag{12}$$

La fonction Δ ainsi définie ne dépend pas du choix de $z \in \mathcal{H}$. En outre, Δ est un 2-cocycle sur $SL_2(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Ces deux assertions se déduisent immédiatement du lemme qui suit ([Ra2, §71]) :

Lemme 2.4. *Soient* $A = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} * & * \\ c' & d' \end{pmatrix}$ *des matrices de* $SL_2(\mathbb{R})$*. On note* $AB = \begin{pmatrix} * & * \\ c'' & d'' \end{pmatrix}$ *leur produit. On a alors l'égalité*

$$\Delta(A,B) = -\operatorname{sign}(cc'c''), \tag{13}$$

où $\operatorname{sign}(x)$ *vaut* 0 *si* $x=0$, 1 *si* $x>0$ *et* -1 *si* $x<0$.

Démonstration du lemme 2.4. Un calcul direct permet d'obtenir l'identité

$$(cBz+d)(c'z+d') = (c''z+d''). \tag{14}$$

Nous allons exprimer cette égalité en termes de logarithmes. La démonstration du lemme repose sur les propriétés élémentaires de la branche principale du logarithme (voir [Di, § VII.9]) :

i) $\log(zz') = \log(z) + \log(z')$ à condition que $|\operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(z')| < \pi$.

ii) $\log(z^{-1}) = -\log(z)$.

Nous devons distinguer trois cas.

1. On suppose d'abord que deux des trois réels c, c', c'' sont nuls. Dans ce cas, ils sont tous les trois nuls car les matrices triangulaires supérieures forment un groupe. Ainsi $\delta_c = \delta_{c'} = \delta_{c''} = 0$ et les deux membres de (13) sont nuls donc égaux.
2. On traite à présent le cas où $c = 0$ et $c'c'' \neq 0$. L'égalité (14) se réduit alors à $d(c'z+d') = (c''z+d'')$. On déduit donc de *i)* que
$$\log(d^2) + \log\left[-(c'z+d')^2\right] = \log\left[-(c''z+d'')^2\right].$$
On en conclut que l'identité (13) est vérifiée. Le cas où $c'=0$ et le cas où $c''=0$ se traitent de façon analogue en utilisant les propriétés *i)* et *ii)*.
3. On suppose enfin que $cc'c'' \neq 0$.
On note que les deux membres de l'égalité souhaitée ne dépendent que de la classe de A et B dans $PSL_2(\mathbb{R})$. Ainsi, quitte à changer A ou B en leur opposé, on peut supposer que $c>0$ et $c'>0$.
Sous cette hypothèse, les complexes $-i(cBz+d)$ et $-i(c'z+d')$ sont deux éléments du demi-plan $\operatorname{Re}(z) > 0$, donc leur argument est dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Ainsi, on déduit de *i)* et (14) que
$$\ell(A,Bz) + \ell(B,z) = 2\log\left[-(c''z+d'')\right].$$
La définition de Δ permet de conclure que
$$i\pi\Delta(A,B) = -\ell(AB,z) + 2\log\left[i^2(c''z+d'')\right]. \tag{15}$$

Distinguons pour finir les deux sous-cas $c'' < 0$ et $c'' > 0$.

- Sous-cas 3.1 : si $c'' < 0$, alors le complexe $i(c''z + d'')$ est dans le demi-plan $\mathrm{Re}\,(z) > 0$. On a donc d'après la propriété i) :

$$\ell(AB, z) = 2\log(i(c''z + d'')) = 2\left(\log\left[i^2(c''z + d'')\right] - \log(i)\right).$$

Par suite, l'égalité (15) devient

$$i\pi\Delta(A, B) = 2\log(i) = i\pi.$$

- Sous-cas 3.2 : si $c'' > 0$, alors $\mathrm{Re}\,(-i(c''z + d'')) > 0$. On en conclut que $i\pi\Delta(A,B) = 2\log(-i) = -i\pi$ de façon similaire au sous-cas précédent.

On réunit ces deux sous-cas en écrivant $\Delta(A, B) = -\operatorname{sign}(cc'c'')$. □

Remarque 2.1. Le 2-cocycle Δ a une interprétation géométrique (je remercie E. Ghys de m'avoir signalé ce fait). Pour voir ceci, identifions $\mathcal{H}$ avec le disque de Poincaré et fixons arbitrairement un point x sur le cercle à l'infini. Le réel $\pi\Delta(A, B)$ apparaît alors comme l'aire algébrique du triangle idéal de sommets x, Ax, ABx. Par suite, le cocycle Δ est appelé le 2-*cocycle d'aire* de $SL_2(\mathbb{R})$ (voir [K-M, p. 238]).

Pour tout couple (A, B) de matrices de Γ on définit $\Delta_j(A, B) = \Delta(A_j, B_j)$. On obtient donc ainsi n 2-cocycles de Γ à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

L'image naturelle de Δ dans le deuxième groupe de cohomologie rationnelle $H^2(SL_2(\mathbb{Z}), \mathbb{Q})$ est nulle car $H^2(SL_2(\mathbb{Z}), \mathbb{Q}) = 0$. On en déduit que

$$\Delta = df, \qquad \text{où} \;\; f \in C^1(SL_2(\mathbb{Z}), \mathbb{Q}).$$

La relation précédente caractérise la 1-cochaîne f à valeurs rationnelles. En effet, le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ est engendré par les matrices d'ordre fini $S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $U := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Il en résulte que

$$H^1(SL_2(\mathbb{Z}), \mathbb{Q}) = \mathrm{Hom}(SL_2(\mathbb{Z}), \mathbb{Q}) = 0,$$

donc f est unique. L'égalité (11) montre que cette 1-cochaîne f n'est autre que l'application $-\Phi_R/3$.

Nous nous proposons de généraliser l'identité (11) au cas des corps totalement réels de nombre de classes 1. Le théorème suivant conforte les fonctions Φ_j dans leur rôle d'analogue de la fonction de Rademacher dans ce contexte.

Théorème 2.5. *Soient $n = [F : \mathbb{Q}]$ et $j \in \{1, \ldots, n\}$. Pour tout $\hat{z}_j \in \mathcal{H}^{n-1}$ et toutes matrices A et B de Γ, on a la relation*

$$\Phi_j(AB, \hat{z}_j) - \Phi_j(A, \widehat{Bz}_j) - \Phi_j(B, \hat{z}_j) = -\frac{1}{4}\operatorname{sign}(c_j c'_j c''_j),$$

où l'on a noté $\widehat{Bz}_j$ le $(n-1)$-uplet $(B_1 z_1, \ldots, B_{j-1} z_{j-1}, B_{j+1} z_{j+1}, \ldots, B_n z_n)$.

Démonstration du théorème 2.5. L'égalité (10) permet d'écrire successivement

$$\operatorname{Im}\Lambda_j((AB)z) = \operatorname{Im}(\Lambda_j(z)) + \frac{1}{4}\ell(A_jB_j, z_j) + \pi\Phi_j(AB, \hat{z}_j),$$

$$\operatorname{Im}\Lambda_j(A(Bz)) = \operatorname{Im}(\Lambda_j(Bz)) + \frac{1}{4}\ell(A_j, B_jz_j) + \pi\Phi_j(A, \widehat{Bz}_j),$$

$$\operatorname{Im}\Lambda_j(Bz) = \operatorname{Im}(\Lambda_j(z)) + \frac{1}{4}\ell(B_j, z_j) + \pi\Phi_j(B, \hat{z}_j).$$

En combinant ces trois équations, il vient

$$4\pi\Big(\Phi_j(AB, \hat{z}_j) - \Phi_j(A, \widehat{Bz}_j) - \Phi_j(B, \hat{z}_j)\Big) = \pi\mathit{\Delta}(A_j, B_j).$$

Le résultat souhaité se déduit donc du lemme 2.4. □

Etude du cas $n = 2$

Je remercie Henri Darmon de m'avoir signalé l'interprétation suivante des calculs ci-dessus. On suppose $n = 2$ et on fixe $j = 1$. On adopte alors les notations suivantes. On écrit un élément de $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ sous la forme (x, τ). Pour tout $A \in \Gamma$, l'élément noté $(Ax, A\tau)$ de $\mathcal{H}^2$ désigne avec les notations précédentes $(A_1x, A_2\tau)$. Par souci de simplification, on note Λ la fonction Λ_1, $\mathit{\Delta}$ le cocycle $\mathit{\Delta}_1$, et $\ell(A, x)$ le nombre réel $\ell(A_1, x), \ldots$ etc.

Soit (x, τ) un élément de $\mathcal{H}^2$ fixé. Pour tout couple de matrices A, B de Γ, on pose

$$\begin{aligned}\kappa_{x,\tau}(A, B) := {} & \Big[[\Lambda]_{Ax}^{ABx}\Big]_{\tau}^{A\tau} - \frac{i\pi}{4}\mathit{\Delta}(A, B)\\ & = \Lambda(ABx, A\tau) - \Lambda(ABx, \tau) + \Lambda(Ax, \tau) - \Lambda(Ax, A\tau) - \frac{i\pi}{4}\mathit{\Delta}(A, B).\end{aligned}$$

Il n'est pas difficile de voir que $\kappa_{x,\tau}$ définit un 2-cocycle pour Γ à valeurs complexes. Le résultat suivant dit que l'on a en fait beaucoup mieux.

Théorème 2.6. *Pour tout (x, τ) de $\mathcal{H}^2$, le cocycle $\kappa_{x,\tau}$ est un cobord de Γ. Plus précisément, on a l'égalité*

$$\kappa_{x,\tau} = d\,\rho_{x,\tau}, \tag{16}$$

où $\rho_{x,\tau} \in C^1(\Gamma, \mathbb{C})$ est la cochaîne définie

$$\rho_{x,\tau}(A) = \Lambda(Ax, \tau) - \Lambda(x, \tau) - \frac{1}{4}\ell(A, x).$$

Remarque : Puisque $\operatorname{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}) = \{0\}$, on note que $\rho_{x,\,\tau}$ est l'unique solution de l'égalité

$$\kappa_{x,\tau} = df.$$

Démonstration. On a par définition

$$d\,\rho_{x,\tau}(A, B) = \rho_{x,\tau}(A) + \rho_{x,\tau}(B) - \rho_{x,\tau}(AB).$$

En reportant la valeur de $\rho_{x,\,\tau}$, on obtient

$$\begin{aligned}d\,\rho_{x,\tau}(A, B) = \Lambda(Ax, \tau) + \Lambda(Bx, \tau) & - \Lambda(ABx, \tau) - \Lambda(x, \tau)\\ & - \frac{1}{4}\Big(\ell(A, x) + \ell(B, x) - \ell(AB, x)\Big).\end{aligned}$$

La différence $(d\rho_{x,\tau} - \kappa_{x,\tau})(A,B)$ est donc égale à

$$\begin{aligned}(d\,\rho_{x,\tau} - \kappa_{x,\tau})\,(A,B) &= \Lambda(Bx,\tau) - \Lambda(ABx, A\tau) + \Lambda(Ax, A\tau) - \Lambda(x,\tau) \\ &\quad - \frac{1}{4}\Big(\ell(A,x) + \ell(B,x) - \ell(AB,x)\Big) + \frac{i\pi}{4}\Delta(A,B).\end{aligned} \tag{17}$$

La formule de transformation de Λ sous l'action de A permet alors d'exprimer les différences

$$\Lambda(Bx,\tau) - \Lambda(ABx, A\tau) = -\frac{1}{4}\Big(\ell(A,Bx) + \operatorname{Re}\ell(A,\tau)\Big) - i\pi\Phi(A,\tau),$$

et

$$\Lambda(Ax, A\tau) - \Lambda(x,\tau) = \frac{1}{4}\Big(\ell(A,x) + \operatorname{Re}\ell(A,\tau)\Big) + i\pi\Phi(A,\tau).$$

En reportant ces deux formules dans (17), on trouve

$$(d\,\rho_{x,\tau} - \kappa_{x,\tau})\,(A,B) = \frac{1}{4}\Big(\ell(AB,x) - \ell(A,Bx) - \ell(B,x) + i\pi\Delta(A,B)\Big).$$

On conclut grâce à la définition de Δ donnée en (12). □

3 Sommes de Dedekind généralisées.

La formule de transformation de la fonction Λ_j va nous permettre de définir formellement les sommes de Dedekind associées au corps F. Notre construction procède de manière analogue au cas du logarithme de la fonction η et des sommes de Dedekind classiques. Etant donnés deux entiers $c \neq 0$ et d de $\mathcal{O}_F$ premiers entre eux, nous définissons la somme de Dedekind généralisée qui leur est associée comme une fonction $s(d,c;\,.) : \mathcal{H}^{n-1} \to \mathbb{R}$.

Les sommes généralisées vérifient une loi de réciprocité qui fait l'objet du théorème 3.4. La somme $s(0,1;z_2,\ldots,z_n)$ y joue un rôle privilégié. Nous montrons dans la proposition 3.5 que toute somme de Dedekind généralisée s'écrit comme une somme finie de $s(0,1;.)$ et de termes élémentaires.

Enfin, nous donnons dans la proposition 3.6 une formule qui exprime la fonction fondamentale $s(0,1;z_2)$ sous la forme d'une série remarquable. Pour ce faire, nous nous appuyons sur le travail de Hecke [He].

3.1 Définition et premières propriétés.

Nous avons introduit la fonction $\Phi_j(A,\hat{z}_j)$ qui apparaît naturellement dans la formule de transformation modulaire de $\Lambda_j(z)$. Comme dans le cas rationnel, nous la normalisons à l'aide d'un facteur élémentaire pour définir les sommes de Dedekind généralisées.

Définition 3.1. Soit $c \neq 0$ et d des entiers de $\mathcal{O}_F$ premiers entre eux. Pour tout entier $j \in \{1,\ldots,n\}$, la *somme de Dedekind généralisée* s_j *associée à* (c,d) est la fonction $s_j(d,c;.) : \mathcal{H}^{n-1} \to \mathbb{R}$ définie par la formule

$$s_j(d,c;\hat{z}_j) := -\operatorname{sign}(c_j)\Phi_j\left(\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right), \hat{z}_j\right) + \frac{\kappa_F}{|c_j|}\left[a_j f_j(d,c;\hat{z}_j) + d_j f_j(0,1;\hat{z}_j)\right], \tag{18}$$

où a et b étant des entiers de $\mathcal{O}_F$ tels que $ad - bc = 1$ et $\kappa_F = \frac{d_F \zeta_F(2)}{2^n R_F \pi^{n+1}}$. On a noté $f_j(d,c;\hat{z}_j)$ la fonction

$$f_j(d,c;\hat{z}_j) = \prod_{k\neq j} \frac{y_k}{|c_k z_k + d_k|^2}.$$

Notation : Quitte à renuméroter les plongements, on suppose désormais que $j = 1$; on note s la somme s_1 et Λ, Ω, Φ, f les fonctions Λ_1, Ω_1, Φ_1 et f_1.

Pour que $s(d,c;\hat{z}_1)$ soit bien défini, nous devons maintenant vérifier que le membre de droite de l'égalité (18) ne dépend pas du choix des entiers a et b tels que $ad - bc = 1$. Cela résulte du lemme suivant, qui permet d'obtenir une autre expression des sommes de Dedekind généralisées. Cette expression est obtenue en étudiant le comportement de la fonction Ω définie par (6) au voisinage du point $-d_1/c_1$ situé sur le bord de $\mathcal{H}$.

Lemme 3.1. *Soit A une matrice $\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)$ de Γ. On note $s(A;\hat{z}_1)$ le membre de droite de l'égalité (18). Alors on a l'égalité*

$$s(A;\hat{z}_1) = -\frac{\operatorname{sign}(c_1)\sqrt{d_F}}{2^{n-1}\pi R_F} \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \operatorname{Im}\,\Omega\left(-\frac{d_1}{c_1} + it, \hat{z}_1\right). \tag{19}$$

Proposition 3.2. *Soit $c \neq 0$ et d deux entiers de $\mathcal{O}_F$ premiers entre eux, et $\hat{z}_1 = (z_2, \ldots, z_n) \in \mathcal{H}^{n-1}$. Alors la somme $s(d,c;\hat{z}_1)$ est bien définie et l'on a*

$$s(d,c;\hat{z}_1) = -\frac{\operatorname{sign}(c_1)\sqrt{d_F}}{2^{n-1}\pi R_F} \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \operatorname{Im}\,\Omega\left(-\frac{d_1}{c_1} + it, \hat{z}_1\right).$$

Cette égalité permet également de définir $s(d,c;\hat{z}_1)$ même si c et d ne sont pas premiers entre eux. On a alors pour tout entier $\lambda \neq 0$ de $\mathcal{O}_F$:

$$s(\lambda d, \lambda c;\hat{z}_1) = \operatorname{sign}(\lambda_1) s(d,c;\hat{z}_1).$$

Démonstration. La proposition est une conséquence immédiate du lemme 3.1 puisque le membre de droite de (19) ne dépend pas de a et b. Pour démontrer la formule limite (19), nous suivons la méthode de Riemann-Dedekind ([De], [Si, p.176]). Elle suggère d'abord de poser, pour t un nombre réel positif

$$z_1 := -\frac{d_1}{c_1} + i\frac{t}{|c_1|}, \qquad \text{d'où} \qquad A_1 z_1 = \frac{a_1}{c_1} + \frac{i}{t|c_1|},$$

puis de faire tendre t vers 0. En substituant ces valeurs de z_1 et $A_1 z_1$ dans la formule de transformation (10) et en notant que $\log t^2$ est un nombre réel, on obtient l'égalité

$$\operatorname{Im}\left[\Lambda\left(\frac{a_1}{c_1} + \frac{i}{t|c_1|}, \widehat{Az}_1\right)\right] = \operatorname{Im}\left[\Lambda\left(-\frac{d_1}{c_1} + i\frac{t}{|c_1|}, \hat{z}_1\right)\right] + \pi\Phi\left(A, \hat{z}_1\right). \tag{20}$$

On rappelle que par définition $\Lambda(z) = i\pi\kappa_F z_1 f(0,1;\hat{z}_1) - \frac{\sqrt{d_F}}{2^{n-1}R_F}\Omega(z)$, où Ω est donnée par (6). On commence par étudier le comportement du membre de gauche de l'égalité (20) quand t tend vers 0. Le terme général de la série

$$\Omega\left(\frac{a_1}{c_1} + \frac{i}{t|c_1|}, \frac{a_2 z_2 + b_2}{c_2 z_2 + d_2}, \dots, \frac{a_n z_n + b_n}{c_n z_n + d_n}\right)$$

tend vers 0 quand t tend vers 0. La somme tend donc vers 0 par convergence uniforme. Par ailleurs, le nombre réel $f(0,1;\widehat{Az_1})$ est égal à $f(d,c;\hat{z}_1)$. Ainsi le membre de gauche de l'égalité (20) a pour limite

$$\operatorname{Im}\left[i\pi\kappa_F\left(\frac{a_1}{c_1} + \frac{i}{t|c_1|}\right) f(0,1;\widehat{Az_1})\right] = \frac{a_1}{c_1}\pi\kappa_F f(d,c;\hat{z}_1).$$

Quant au membre de droite, il a pour limite

$$-\frac{d_1}{c_1}\pi\kappa_F f(0,1;\hat{z}_1) - \frac{\sqrt{d_F}}{2^{n-1}R_F}\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \operatorname{Im}\left[\Omega\left(-\frac{d_1}{c_1} + it, \hat{z}_1\right)\right] + \pi\Phi\left(A, \hat{z}_1\right).$$

On rassemble ces deux expressions pour écrire finalement :

$$\frac{\kappa_F}{c_1}\left[a_1 f(d,c;\hat{z}_1) + d_1 f(0,1;\hat{z}_1)\right] - \Phi\left(A, \hat{z}_1\right) = -\frac{\sqrt{d_F}}{2^{n-1}\pi R_F}\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \operatorname{Im}\,\Omega\left(-\frac{d_1}{c_1} + it, \hat{z}_1\right).$$

La formule souhaitée (19) s'en déduit en multipliant cette dernière égalité par $\operatorname{sign}(c_1)$. $\square$

Nous donnons quelques identités simples satisfaites par ces sommes généralisées. Elles sont tout à fait analogues à celles que l'on connaît pour les sommes de Dedekind classiques ([Ra2, §68]), si ce n'est la dépendance en $z_2, \dots, z_n$.

Proposition 3.3. *Soient $c \neq 0$ et d des entiers de $\mathcal{O}_F$. On a pour tout $\hat{z}_1 = (z_2, \dots, z_n) \in \mathcal{H}^{n-1}$ les égalités :*

(i)

$$s(d, -c; \hat{z}_1) = s(d, c; -\overline{\hat{z}_1}). \tag{21}$$

(ii)

$$s(-d, c; \hat{z}_1) = -s(d, c; -\overline{\hat{z}_1}). \tag{22}$$

(iii) Soit ϵ une unité de F telle que $\epsilon_1 > 0$. Etant donné $z_k = x_k + iy_k \in \mathcal{H}$, on désigne par $|\epsilon_k| \centerdot z_k \in \mathcal{H}$ le nombre complexe $\epsilon_k x_k + i|\epsilon_k|y_k$. Alors on a

$$s(d, \epsilon c; \hat{z}_1) = s(d, c; |\epsilon_2| \centerdot z_2, \dots, |\epsilon_n| \centerdot z_n). \tag{23}$$

(iv) Pour tout entier q de $\mathcal{O}_F$, on a

$$s(d + qc, c; z_2 - q_2, \dots, z_n - q_n) = s(d, c; z_2, \dots, z_n). \tag{24}$$

(v) Soit a un entier de F vérifiant $ad \equiv 1 \mod c$, et b tel que $ad - bc = 1$. Alors on a

$$s(a, c; z_2, \dots, z_n) = s(d, c; -\frac{d_2\overline{z_2} + b_2}{c_2\overline{z_2} + a_2}, \dots, -\frac{d_n\overline{z_n} + b_n}{c_n\overline{z_n} + a_n}). \tag{25}$$

Démonstration. D'une part, il résulte immédiatement de la proposition 3.2 que $s(-d,-c;\hat{z}_1) = -s(d,c;\hat{z}_1)$. D'autre part, il est facile de voir que $\Omega(-\bar{z}) = \overline{\Omega(z)}$. Les deux premières assertions s'ensuivent à l'aide de la proposition 3.2.

Pour démontrer l'assertion (iii), commençons par remarquer qu'en changeant α en $\epsilon\alpha$ dans (6), on obtient $\Omega(|\epsilon_1|.z_1,\ldots,|\epsilon_n|.z_n) = \Omega(z)$. La proposition 3.2 permet alors de conclure. On procède de même à partir de l'égalité facile $\Omega(z-q) = \Omega(z)$ pour établir l'assertion (iv).

Démontrons pour finir l'assertion (v). Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$. Le théorème 2.5 appliqué au couple de matrices (A, A^{-1}) donne immédiatement

$$0 = \Phi(AA^{-1},\hat{z}_1) = \Phi(A,\widehat{A^{-1}z_1}) + \Phi(A^{-1},\hat{z}_1). \tag{26}$$

D'après la définition 3.1, l'égalité précédente s'écrit aussi

$$s(a,\,-c;\hat{z}_1) = s(d,c;\widehat{A^{-1}z_1}).$$

Le résultat s'en déduit en utilisant (21). $\square$

3.2 Loi de réciprocité.

Nous montrons que les sommes de Dedekind généralisées introduites précédemment vérifient une loi de réciprocité qui étend la formule (3). On note que pour $F = \mathbb{Q}$ on a $s(0,1) = 0$ et $\kappa_{\mathbb{Q}} = 1/12$.

Théorème 3.4 (Loi de réciprocité). *Soit (c,d) un couple d'entiers de $\mathcal{O}_F$ premiers entre eux tels que $c_1 > 0$ et $d_1 > 0$. Notons $\kappa_F := \frac{d_F\zeta_F(2)}{2^nR_F\pi^{n+1}}$. On a pour tout $\hat{z}_1 = (z_2,\ldots,z_n) \in \mathcal{H}^{n-1}$ l'identité*

$$s(d,c;\hat{z}_1) + s(c,d;\overline{\hat{z}_1^{-1}}) = s(0,1;\hat{z}_1) - \frac{1}{4} + \kappa_F\left[\frac{d_1}{c_1} + \frac{c_1}{d_1}\prod_{k=2}^{n}|z_k|^{-2} + \frac{1}{c_1d_1}\prod_{k=2}^{n}|c_kz_k+d_k|^{-2}\right]\prod_{k=2}^{n}y_k.$$

Démonstration. Soient c et d premiers entre eux tels que $c_1 > 0$ et $d_1 > 0$. Soit $(a,b) \in \mathcal{O}_F \times \mathcal{O}_F$ vérifiant $ad - bc = 1$. La loi de réciprocité se déduit du théorème 2.5 avec un choix judicieux de matrices A et B.

Choisissons en effet $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans ce théorème. On obtient une identité qui s'écrit d'après la définition des sommes de Dedekind généralisées sous la forme

$$s(-c,d;\hat{z}_1) - s(d,c;-\hat{z}_1^{-1}) = s(0,1;\hat{z}_1) + \frac{1}{4} - \kappa_F\left[\frac{c_1}{d_1} + \frac{d_1}{c_1}\prod_{k=2}^{n}|z_k|^{-2} + \frac{\prod_{k=2}^{n}|c_k - d_kz_k|^{-2}}{c_1d_1}\right]\prod_{k=2}^{n}y_k.$$

On veut changer $\hat{z}_1$ en $-\hat{z}_1^{-1}$ dans cette égalité. En utilisant à nouveau le théorème 2.5 avec le couple de matrices (B, B^{-1}), on trouve d'abord

$$s(0,1;-\hat{z}_1^{-1}) = -s(0,1;\hat{z}_1).$$

Les deux identités précédentes entraînent que

$$s(d,c;\hat{z}_1) - s(-c,d;-\hat{z}_1^{-1}) = s(0,1;\hat{z}_1) - \frac{1}{4} + \kappa_F \left[\frac{c_1}{d_1} \prod_{k=2}^{n} |z_k|^{-2} + \frac{d_1}{c_1} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{c_1 d_1} \prod_{k=2}^{n} |c_k z_k + d_k|^{-2} \right] \prod_{k=2}^{n} y_k.$$

On conclut à la formule souhaitée grâce à la proposition 3.3 (ii). □

3.3 La somme fondamentale $s(0,1;z_2,\ldots,z_n)$.

La loi de réciprocité montre que la fonction $s(0,1;\hat{z}_1)$ définie sur $\mathcal{H}^{n-1}$ joue un rôle privilégié. On se propose dans ce paragraphe de l'étudier plus en détail. La proposition suivante justifie le nom de *somme de Dedekind généralisée fondamentale* pour cette fonction.

Proposition 3.5. *Soit F un corps de nombres totalement réel de nombre de classes* 1. *La loi de réciprocité et la proposition 3.3 permettent d'exprimer toute somme de Dedekind généralisée $s(d,c;\hat{z}_1)$ comme une somme finie de sommes $s(0,1;.)$ et de termes élémentaires.*

Démonstration. Commençons par supposer que $\mathcal{O}_F$ est un anneau euclidien pour la norme. La preuve consiste en un algorithme qui est calqué sur *l'algorithme d'Euclide.*

La boucle principale de l'algorithme est la suivante.

On effectue la division de d par c. Le résultat s'écrit $d = cq + r$. On a donc $s(d,c;\hat{z}_1) = s(r,c;\hat{z}_1 + \hat{q}_1)$ d'après (24). On se ramène ensuite au cas où c_1 et r_1 sont positifs grâce à (21) et (22). La loi de réciprocité permet alors d'exprimer $s(r,c;.)$ comme une somme de $s(c,r;.)$, de $s(0,1;.)$ et d'un terme explicite. Cette expression est le résultat final de la boucle. Il ne reste plus qu'à recommencer en remplaçant le couple (d,c) par le couple (c,r).

Puisque $\mathcal{O}_F$ est euclidien pour la norme, l'entier $|N_{F/\mathbb{Q}}(r)|$ diminue à chaque division. Par conséquent l'algorithme se termine, et le dernier reste $\tilde{r}$ est nul. Notons de plus que l'identité $c\mathcal{O}_F + d\mathcal{O}_F = \mathcal{O}_F$ est préservée à chaque étape de l'algorithme. Le dernier couple $(\tilde{c},\tilde{r})$ est donc du type $(\tilde{c},\tilde{r}) = (\epsilon, 0)$, où ϵ est une unité de F. Il suffit pour conclure de transformer la somme de Dedekind $s(0,\epsilon;.)$ en $s(0,1;.)$ à l'aide de l'identité (23). La proposition demandée est donc établie dans le cas où $\mathcal{O}_F$ est euclidien pour la norme.

Pour terminer la démonstration, il faut introduire une généralisation de la notion d'anneau euclidien due à Cooke ([Co, définition 2]). Un anneau d'entiers $\mathcal{O}_F$ est dit *euclidien en k-étapes pour la norme* si pour tous $c \neq 0$ et d éléments de $\mathcal{O}_F$, on a besoin de $n \leqslant k$ divisions successives $d = cq_1 + r_1$, $c = r_1 q_2 + r_2$, etc... pour obtenir un reste r_n vérifiant $|N_{F/\mathbb{Q}}(r_n)| < |N_{F/\mathbb{Q}}(c)|$. En particulier, les anneaux euclidiens en une étape sont les anneaux euclidiens.

Ceci étant, on a le résultat suivant ([Co, théorème 1]) : si F est un corps de nombres de nombre de classes 1 dont le groupe des unités est de rang $\geqslant 1$, alors $\mathcal{O}_F$ est euclidien en k-étapes pour la norme pour un certain entier k.

Ce théorème permet de conclure car l'algorithme précédent s'adapte sans peine au cas d'un anneau d'entiers euclidien en k-étapes. En effet, sous cette hypothèse, il suffit d'effectuer au plus k divisions avant que la norme ne diminue. On utilise la boucle donnée précédemment à chacune de ces divisions. L'algorithme se termine donc après avoir effectué au plus $k|N_{F/\mathbb{Q}}(c)|$ divisions. On en déduit que l'on peut écrire $s(d,c;\hat{z}_1)$ en utilisant au plus $k|N_{F/\mathbb{Q}}(c)|$ termes du type $s(0,1;.)$. La proposition 3.5 s'ensuit. $\square$

Remarque : au cours de l'algorithme précédent, la fonction $s(0,1;.)$ est évaluée en des points de $\mathcal{H}^{n-1}$ images de $\hat{z}_1 \in \mathcal{H}^{n-1}$ sous l'action de $SL_2(\mathcal{O}_F)$ et des involutions $z_k \mapsto -\bar{z}_k$, $k \in \{2,\dots,n\}$.

Nous donnons un exemple qui va rendre la proposition 3.5 explicite. On renvoie le lecteur à [Le] pour une bibliographie très complète sur les corps de nombres euclidiens.

Exemple : Le corps $F = \mathbb{Q}(\sqrt{7})$ est euclidien pour la norme. On va exprimer $s(d,c;z_2)$ en fonction de $s(0,1;.)$ pour $c_1 = 3+\sqrt{7}$ et $d_1 = -2-\sqrt{7}$.

La division euclidienne peut s'écrire $d = cq+r$, avec $q=-1$ et $r=1$. D'après (24), il vient $s(d,c;z_2) = s(1,c;z_2-1)$.

Les hypothèses de la loi de réciprocité étant satisfaites, on obtient

$$s(1,c;z_2-1) + s(c,1;(\bar{z}_2-1)^{-1}) = s(0,1;z_2-1) - \frac{1}{4} + \kappa_F T(z_2),$$

où $T(z_2)$ est le terme explicite

$$T(z_2) = \left(\frac{1}{3+\sqrt{7}} + \frac{3+\sqrt{7}}{|z_2-1|^2} + \frac{1}{(3+\sqrt{7})\left|(3-\sqrt{7})z_2 - 2+\sqrt{7}\right|^2} \right) \mathrm{Im}\,(z_2).$$

On note enfin grâce à (24) que $s(c,1;(\bar{z}_2-1)^{-1}) = s(0,1;(\bar{z}_2-1)^{-1} - 3+\sqrt{7})$.

En mettant bout à bout toutes ces égalités, on trouve en définitive

$$s(d,c;z_2) = s(0,1;z_2-1) - s(0,1;(\bar{z}_2-1)^{-1} - 3+\sqrt{7}) - \frac{1}{4} + \kappa_F T(z_2).$$

On se propose maintenant d'étudier plus en détail la fonction $s(0,1;.)$ qui intervient de manière cruciale dans la proposition précédente. Lorsque F est un corps quadratique réel, la somme de Dedekind fondamentale $s(0,1;z_2)$ apparaît déjà en filigrane dans le travail [He, §5] de Hecke. Dans cet article, Hecke étudie la fonction

$$\Psi(z_1,z_2) := \zeta_F(2) z_1 z_2 + \frac{(2i\pi)^2}{\sqrt{d_F}} \sum_{\substack{\alpha\in\mathcal{O}_F,\\ \frac{\alpha}{\delta}\gg 0}} \sigma_{-1}(\alpha)\, e^{2i\pi\left(\frac{\alpha_1}{\delta_1}z_1 + \frac{\alpha_2}{\delta_2}z_2\right)},$$

où la sommation porte sur les entiers α de $\mathcal{O}_F$ tels que $\frac{\alpha}{\delta}$ est totalement positif. Il considère cette fonction holomorphe sur $\mathcal{H}^2$ comme un analogue pour F de $\log\eta$. Il s'agit, à une constante multiplicative près, du morceau holomorphe par rapport à z_1 *et* z_2 de la fonction $h(z_1, z_2)$ de Asai. En particulier, la fonction $\Lambda = \Lambda_1$ peut être interprétée comme la "partie réelle par rapport à z_2" de la fonction Ψ.

A l'aide de la transformation de Mellin, Hecke relie $\Psi(z)$ à une famille de fonctions L de Hecke du corps F. Il déduit alors de l'équation fonctionnelle des fonctions L une formule qui exprime $\Psi(-z^{-1})$ en fonction de $\Psi(z)$ et d'une série.

Précisons ce point. On note χ_m le Grössencharakter de F^* défini par

$$\chi_m(\mu) := \left|\frac{\mu_2}{\mu_1}\right|^{\frac{i\pi m}{\log \epsilon}},$$

où m est un entier, ϵ est le générateur > 1 du groupe U_F^+, et υ_1 le caractère de F^* défini par $\upsilon_1(\mu) := \operatorname{sign}(\mu_1\mu_2)$. La formule de Hecke fait apparaître des valeurs spéciales des fonctions $L(s, \chi_m\upsilon_1)$ de Hecke sur la droite $\operatorname{Re}(s) = 1$. Ce résultat se traduit en termes de somme de Dedekind généralisée $s(0, 1; z_2)$ dans la proposition suivante.

Proposition 3.6. *Soit F un corps quadratique réel de nombre de classes* 1. *On note λ_F la constante $-\frac{d_F}{2\pi^2 R_F^2}$, et l'on écrit un élément z_2 de $\mathcal{H}$ sous la forme $z_2 = i\rho e^{i\frac{\pi}{2}\theta}$ où $\theta \in\,]-1, 1[$ et $\rho > 0$. La fonction somme de Dedekind fondamentale $s(0, 1; z_2)$ est donnée par la série*

(i) si toutes les unités de F sont de norme 1 :

$$s(0, 1; i\rho e^{i\frac{\pi}{2}\theta}) = \lambda_F \sum_{m=0}^{\infty} |L(1 + \frac{im\pi}{R_F}, \chi_m\upsilon_1)|^2 \frac{\sinh\left(\frac{m\pi^2}{R_F}\theta\right)}{\sinh\left(\frac{m\pi^2}{R_F}\right)} \cos\left(2m\pi \frac{\log \rho}{R_F}\right),$$

où le terme correspondant à $m = 0$ vaut $\frac{\theta}{2} L(1, \upsilon_1)^2$.

(ii) si F a une unité de norme -1 :

$$s(0, 1; i\rho e^{i\frac{\pi}{2}\theta}) = \lambda_F \sum_{\substack{m=1,\\ m \text{ impair}}}^{\infty} |L(1 + \frac{im\pi}{2R_F}, \chi_m\upsilon_1)|^2 \frac{\sinh\left(\frac{m\pi^2}{2R_F}\theta\right)}{\sinh\left(\frac{m\pi^2}{2R_F}\right)} \cos\left(m\pi \frac{\log \rho}{R_F}\right).$$

Remarque 3.1.

(i) La fonction $\Psi(z)$ se transforme sous l'effet d'une substitution modulaire quelconque selon une formule donnée dans [DLT-G, Ex. 2]. On peut obtenir grâce à ces résultats une formule pour les sommes de Dedekind généralisées $s(d, c;\, z_2)$ similaire à celle de la proposition 3.6. Elle fait apparaître, comme dans l'expression 4 des sommes de Dedekind classiques, une contribution de chaque classe $r \mod c$.

(ii) Hecke savait que les valeurs spéciales $L(1 + \frac{im\pi}{R_F}, \chi_m\upsilon_1)$ sont non nulles. On trouvera une démonstration dans [We, théorème 11 p.288]. Ces valeurs spéciales interviennent également dans le travail de Arakawa [Ar].

Démonstration de la proposition 3.6. A l'instar de Hecke, nous définissons pour τ_1 et τ_2 deux complexes du demi-plan $\operatorname{Re}(\tau) > 0$ la série absolument convergente

$$G(\tau_1, \tau_2; \upsilon) := \sum_{\mu \in \mathcal{O}_F}{}' \sigma_{-1}(\mu)\upsilon(\mu) e^{-\frac{2\pi}{\sqrt{d_F}}(\tau_1|\mu_1| + \tau_2|\mu_2|)},$$

où υ désigne l'un des deux caractères $\upsilon_0(\mu) = 1$ ou $\upsilon_1(\mu) = \text{sign}(\mu_1\mu_2)$.

D'après l'égalité (6), la fonction G est reliée à Ω par la formule

$$4\Omega(z_1,z_2) = G\left(\frac{z_1}{i},\frac{z_2}{i};\upsilon_0\right) - G\left(\frac{z_1}{i},\frac{z_2}{i};\upsilon_1\right) + G\left(\frac{z_1}{i},i\bar{z}_2;\upsilon_0\right) + G\left(\frac{z_1}{i},i\bar{z}_2;\upsilon_1\right). \tag{27}$$

On doit à Hecke ([He, Satz 7]) la formule de transformation de $G(\tau_1,\tau_2,\upsilon_0)$:

$$G\left(\frac{1}{\tau_1},\frac{1}{\tau_2};\upsilon_0\right) - G(\tau_1,\tau_2;\upsilon_0) = \zeta_F(2)\frac{\sqrt{d_F}}{\pi^2}\left(\tau_1\tau_2 - \frac{1}{\tau_1\tau_2}\right) - \frac{2R_F}{\sqrt{d_F}}\log(\tau_1\tau_2).$$

On trouve également dans [He, Satz 8] (noter qu'il manque un facteur π^{-1} dans le membre de droite de la dernière égalité p. 402) une formule pour la différence

$$G(\frac{1}{\tau_1},\frac{1}{\tau_2};\upsilon_1) - G(\tau_1,\tau_2;\upsilon_1).$$

Cette différence est égale à

$$\frac{\sqrt{d_F}}{\pi R_F}\left[\frac{2L(1,\upsilon_1)^2}{\pi}\log(\tau_1\tau_2) + i\sum_{m\in\mathbb{Z}}{}' a_m\left[\tau_1^{-\frac{2im\pi}{\log\epsilon}} + \tau_2^{-\frac{2im\pi}{\log\epsilon}}\right]\right],$$

où $L(1,\upsilon_1) = 0$ par convention s'il existe une unité de norme -1, et

$$a_m = \begin{cases} \dfrac{|L(1+\frac{im\pi}{\log\epsilon},\chi_m\upsilon_1)|^2}{\sinh\left(\frac{m\pi^2}{\log\epsilon}\right)} & \text{si } \chi_m\upsilon_1(\mu) \text{ ne dépend que de l'idéal } (\mu), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ces deux résultats de Hecke permettent d'obtenir une formule de transformation de Ω sous l'action de l'homographie $z \mapsto -1/z$ en utilisant l'égalité (27). Si on note S la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on obtient d'après la définition de Φ :

$$\begin{aligned}\Phi(S,z_2) &= \frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\Big(\Lambda(Sz) - \Lambda(z) - \frac{1}{4}\log(-z_1^2)\Big) \\ &= \kappa_F\Big(\frac{y_1y_2}{|z_1z_2|^2} - y_1y_2\Big) - \frac{\sqrt{d_F}}{2\pi R_F}\operatorname{Im}\Big(\Omega(-\frac{1}{z}) - \Omega(z)\Big) - \frac{1}{2\pi}\operatorname{Im}\log(\frac{z_1}{i}) \\ &= i\frac{d_F L(1,\upsilon_1)^2}{4\pi^3R_F^2}\log\left[-\frac{\bar{z}_2}{z_2}\right] - \frac{d_F}{8\pi^2R_F^2}\sum_{m\in\mathbb{Z}}{}' a_m\left[(i\bar{z}_2)^{-\frac{2im\pi}{\log\epsilon}} - (\frac{z_2}{i})^{-\frac{2im\pi}{\log\epsilon}}\right].\end{aligned}$$

On pose $\lambda_F = -\frac{d_F}{2\pi^2R_F^2}$. D'après la définition 3.1 et l'égalité précédente, la fonction $s(0,1;z_2)$ apparaît naturellement comme la partie réelle de la fonction holomorphe suivante :

$$z_2 \mapsto -\frac{\lambda_F}{\pi}L(1,\upsilon_1)^2\log(-iz_2) - \frac{\lambda_F}{2}\sum_{m\in\mathbb{Z}}{}' a_m\,[-iz_2]^{\frac{2im\pi}{\log\epsilon}}.$$

En écrivant z_2 sous la forme $z_2 = i\rho e^{i\frac{\pi}{2}\theta}$ avec θ dans l'intervalle $]-1,1[$, elle se réduit à

$$s(0,1;i\rho e^{i\frac{\pi}{2}\theta}) = \lambda_F\frac{\theta}{2}L(1,\upsilon_1)^2 + \frac{\lambda_F}{2}\sum_{m\in\mathbb{Z}}{}' a_m\rho^{-\frac{2im\pi}{\log\epsilon}}\sinh\left(\frac{m\pi^2}{\log\epsilon}\theta\right).$$

Il ne reste plus qu'à constater que $a_{-m} = -a_m$ pour conclure. $\square$

4 Opérateurs de Hecke.

Soit $p \geqslant 2$ un nombre premier. On trouve déjà dans le travail de Dedekind [De, égalité (28)] l'identité

$$s(dp,c) + \sum_{r \bmod p} s(d+cr, cp) = (p+1)s(d,c), \tag{28}$$

où $s(.\,,.)$ désigne la somme de Dedekind classique. Le lien entre cette identité et les opérateurs de Hecke est étudié dans [Kn] et [Ma].

Nous nous proposons dans ce paragraphe de généraliser l'identité (28) dans le cas d'un corps de nombres F totalement réel de degré n de nombre de classes 1. Lorsque le corps de base est quadratique imaginaire, nous renvoyons le lecteur au résultat de Sczech [Sc, §9] (égalité 37).

On désigne par $\mathcal{F}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel formé des fonctions

$$g : \mathcal{O}_F \times (\mathcal{O}_F \setminus \{0\}) \times \mathcal{H}^n \to \mathbb{R}$$

qui vérifient la propriété d'invariance par translation :

$$g(d+cq, c; z-q) = g(d,c;z),$$

où q est un entier quelconque de $\mathcal{O}_F$. On a noté $z-q$ le n-uplet $(z_k - q_k) \in \mathcal{H}^n$. Soit $p \in \mathcal{O}_F$ un entier premier totalement positif. On lui associe *l'opérateur de Hecke* $T_p : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ défini par la règle

$$(g\,|\,T_p)(d,c\,;z) := g(dp,c\,;pz) + \sum_{r \bmod p} g\left(d+cr, cp\,; \frac{z-r}{p}\right),$$

avec des notations évidentes pour pz et $\frac{z-r}{p}$. Un calcul élémentaire montre que les opérateurs T_p sont bien définis et qu'ils commutent deux à deux.

Soit $\mathcal{F}^j$ le sous-espace de $\mathcal{F}$ formé des fonctions qui ne dépendent pas de la variable $z_j \in \mathcal{H}$. La restriction de T_p à $\mathcal{F}^j$ est un endomorphisme de $\mathcal{F}^j$ que l'on note T_p^j.

Dans le cas rationnel, la définition de l'opérateur T_p^1 est essentiellement équivalente à celle donnée dans [Ma, §3], où le lien entre les opérateurs T_p^1 et les opérateurs de Hecke standards est expliqué et exploité. Selon cette terminologie, l'identité de Dedekind montre que la somme de Dedekind classique $s(.\,,.) \in \mathcal{F}^1$ est une fonction propre de T_p^1 de valeur propre associée $p+1$.

Dans le cas général, la somme s_j peut être considérée comme un élément de $\mathcal{F}^j$ d'après la proposition 3.3 (iv). Le résultat suivant établit la généralisation souhaitée de l'identité de Dedekind.

Proposition 4.1. *Soit $s_j \in \mathcal{F}^j$ la somme de Dedekind généralisée associée au $j^{\text{ème}}$ plongement réel de F. Pour tout entier premier p de $\mathcal{O}_F$ totalement positif on a l'égalité*

$$s_j\,|\,T_p^j = \left(N_{F/\mathbb{Q}}(p) + 1\right) s_j.$$

Autrement dit, la fonction s_j est une fonction propre pour T_p^j de valeur propre associée $N_{F/\mathbb{Q}}(p) + 1$.

Cette proposition est une conséquence immédiate de la proposition 3.2 et du lemme suivant.

Lemme 4.2. *Soit $p \in \mathcal{O}_F$ un nombre premier totalement positif, et $z \in \mathcal{H}^n$. Alors*

$$\Omega_j(pz) + \sum_{r \bmod p} \Omega_j\left(\frac{z-r}{p}\right) = \big(N_{F/\mathbb{Q}}(p)+1\big)\,\Omega_j(z).$$

Démonstration du lemme 4.2 : On rappelle la formule (6) qui définit la fonction Ω_j :

$$\Omega_j(z) = \sum_{\substack{\alpha\in\mathcal{O}_F,\\ \frac{\alpha_j}{\delta_j}>0}} \sigma_{-1}(\alpha)\, e^{2i\pi\ \mathrm{Tr}\left(\frac{\alpha}{\delta}x+\left|\frac{\alpha}{\delta}\right|iy\right)},$$

où l'on a noté $\mathrm{Tr}\left(\frac{\alpha}{\delta}x+\left|\frac{\alpha}{\delta}\right|iy\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\alpha_k}{\delta_k}x_k+\left|\frac{\alpha_k}{\delta_k}\right|iy_k\right)$. Comme on a par définition

$$\sigma_{-1}(\alpha) = \sum_{(\nu)|(\alpha)} \left|N_{F/\mathbb{Q}}(\nu)\right|^{-1},$$

il suffit de poser $\mu := \alpha/\nu$ pour écrire $\Omega_j(z)$ sous la forme

$$\Omega_j(z) = {\sum_{\nu\in\mathcal{O}_F/U_F^+}}' \frac{[U_F:U_F^+]^{-1}}{|N_{F/\mathbb{Q}}(\nu)|} \sum_{\substack{\mu\in\mathcal{O}_F,\\ \frac{\mu_j\nu_j}{\delta_j}>0}} e^{2i\pi\ \mathrm{Tr}\left(\frac{\mu\nu}{\delta}x+\left|\frac{\mu\nu}{\delta}\right|iy\right)}.$$

On considère maintenant la somme $\sum_{r \bmod p}\Omega_j\left(\frac{z-r}{p}\right)$. Cette somme est bien définie car $\Omega_j(z)$ est invariante quand on translate z par un entier de $\mathcal{O}_F$. Elle est égale à

$${\sum_{\nu\in\mathcal{O}_F/U_F^+}}' \frac{[U_F:U_F^+]^{-1}}{|N_{F/\mathbb{Q}}(\nu)|} \sum_{\substack{\mu\in\mathcal{O}_F,\\ \frac{\mu_j\nu_j}{\delta_j}>0}} e^{2i\pi\ \mathrm{Tr}\left(\frac{\mu\nu}{p\delta}x+\left|\frac{\mu\nu}{p\delta}\right|iy\right)} \left(\sum_{r \bmod p} e^{-2i\pi\,\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}\left(\frac{\mu\nu r}{p\delta}\right)}\right).$$

On remarque alors que

$$\sum_{r \bmod p} e^{-2i\pi\,\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}\left(\frac{\mu\nu r}{p\delta}\right)} = \begin{cases} N_{F/\mathbb{Q}}(p) & \text{si } p \text{ divise } \mu\nu,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Puisque p est premier, on obtient une décomposition de la forme suivante :

$$\sum_{r \bmod p}\Omega_j\left(\frac{z-r}{p}\right) = \sum_{\substack{\nu,\,\mu\\ p\,|\,\nu}} + \sum_{\substack{\nu,\,\mu\\ p\,|\,\mu}} - \sum_{\substack{\nu,\,\mu\\ p\,|\,\nu\ \text{ et } p\,|\,\mu}}.$$

La première de ces trois sommes est $\Omega_j(z)$, la deuxième est $N_{F/\mathbb{Q}}(p)\Omega_j(z)$, et la troisième $\Omega_j(pz)$. Le lemme est démontré, et la proposition s'ensuit. □

Références

[Ar] Arakawa, T. : *Dirichlet series* $\sum_{n=1}^{\infty}(\cot \pi n\alpha)/n^s$, *Dedekind sums, and Hecke L-functions for real quadratic fields.* Comment. Math. Univ. St. Pauli **37**, no. 2, 209-235 (1988).

[As1] Asai, T. : *On a certain function analogous to* $\log|\eta(z)|$. Nagoya Math. J. **40**, 193-211 (1970).

[As2] Asai, T. : *The reciprocity of Dedekind sums and the factor set for the universal covering group of* $SL(2,\mathbb{R})$. Nagoya Math. J. **37**, 67-80 (1970).

[At] Atiyah, M. F. : *The logarithm of the Dedekind* η*-function.* Math. Ann. **278**, 335-380 (1987).

[Bru] Bruggeman, R. W. : *Dedekind sums for Hecke groups.* Acta Arith. **71**, 11-46 (1995).

[Co] Cooke, G. : *A weakening of the Euclidean property for integral domains and applications to algebraic number theory, Part I.* J. Reine Angew. Math. **282**, 133-156 (1976).

[Ch] Charollois, P. : Sommes de Dedekind et périodes de formes modulaires de Hilbert. Thèse, Université Bordeaux 1 : 2004.

[De] Dedekind, R. : *Erläuterungen zu zwei Fragmenten von Riemann.* Gesammelte Math. Werke, Bd. I, 159-173. Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig : 1930 (=*Fragments sur les cas limites des fonctions modulaires elliptiques. Commentaires de Dedekind.* Mémoire XXVIII, Oeuvres complètes de Riemann. Gauthiers-Villars et fils, Paris : 1898)

[DLT-G] De La Torre, P., Goldstein, L. : *On a function analogous to* $\log\eta(\tau)$. Nagoya Math. J. **59**, 169-198 (1975).

[Di] Dieudonné, J. : Calcul infinitésimal. Hermann, Paris : 1968.

[G-S] Gunnells, P. E., Sczech, R. : *Evaluation of Dedekind sums, Eisenstein cocycles, and special values of L-functions.* Duke Math. J. **118**, 229-260 (2003).

[Ha] Hara, Y. : *On calculation of* $L_K(1,\chi)$ *for some Hecke characters.* J. Math. Kyoto Univ. **33**, 865-898 (1993).

[He] Hecke, E. : *Analytische Funktionen und algebraische Zahlen, II.* **20**, Math. Werke, 2nd ed. Vandenhoeck, Ruprecht, Göttingen : 1970. 381-404.

[It] Ito, H. : *A function on the upper half space which is analogous to the imaginary part of* $\log\eta(z)$. J. Reine Angew. Math. **373**, 148-165 (1987).

[J-L] Jorgenson, J., Lang, S. : *Hilbert-Asai Eisenstein Series, regularized poducts and heat kernel.* Nagoya Math. J. **153**, 155-188 (1999).

[K-M] Kirby, R., Melvin, P. : *Dedekind sums,* μ*-invariant and the signature cocycle.* Math. Ann. **299**, no. 2, 231-267 (1994).

[Kn] Knopp, M. : *Hecke Operators and an Identity for the Dedekind sums.* J. Number Theory **12**, 2-9 (1980).

[Ku] Kubert, D. S. : *The logarithm of the Siegel function.* Compos. Math. **37**, 321-338 (1978).

[Le] Lemmermeyer, F. : *The Euclidean algorithm in algebraic number fields.* Expo. Math. **13**, no. 5, 385-416 (1995).

[Ma] Mazur, B. : *On the arithmetic of special values of L Functions.* Invent. Math. **55**, 207-240 (1979).

[Ra1] Rademacher, H. : *Zur Theorie der Dedekindschen Summen.* Math. Z. **63**, 445-463 (1956).

[Ra2] Rademacher, H. : Topics in Analytic Number Theory. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-York : 1973. Grundlehren **169**.

[R-G] Rademacher, H., Grossswald. E. : Dedekind sums. The Math. Association of America, Washington D. C. : 1972. The Carus Mathematical Monographs **16**.

[Sc] Sczech, R. : *Dedekindsummen mit elliptischen Funktionen.* Invent. Math. **76**, 523-551 (1984).

[Si] Siegel, C. L. : Advanced Analytic Number Theory. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay : 1980.

[We] Weil, A. : Basic Number Theory. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-York : 1967. Grundlehren **144**.

Adresse de l'auteur:

Institut de Mathématiques, 351 Cours de la Libération, 33405 Talence (France)

e-mail : pierre.charollois@math.u-bordeaux1.fr