Sorbonne Université | Faculté des Sciences
M2 Math. Fond. Formes Modulaires | 2022–2023
Mardi 3 janvier 2023, 9h

Examen (durée 3h).

Il n'est pas nécessaire de tout faire pour avoir la note maximale. Les réponses doivent être justifiées. Les documents ou les calculatrices ne sont pas autorisés. You can write in English.

Rappels : Le q-développement des séries d'Eisenstein de niveau $\Gamma(1) = SL_2(\mathbb{Z})$ est de la forme :

$$E_k(\tau) := \frac{1}{2\zeta(k)} G_k(\tau) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

où, $k \geq 2$, $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$ et les B_k sont les nombres de Bernoulli explicités par le tableau suivant : (on indique aussi que $65520 = 2^4.3^2.5.7.13$ et $16320 = 2^6.3.5.17$.)

k	2	4	6	8	10	12	14	16
$-\frac{2k}{B_k}$	-24	240	-504	480	-264	65520/691	-24	16320/3617

On rappelle également la définition, pour k pair, des opérateurs $|_k$, $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Q})$ sur les fonctions $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ donnés par $(f |_k \gamma)(\tau) = \det \gamma^{\frac{k}{2}} (c\tau + d)^{-k} f(\frac{a\tau+b}{c\tau+d})$.

Exercice 1. Soit $\Delta = \frac{1}{1728}(E_4^3 - E_6^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n = q - 24q^2 + \dots$, et D l'opérateur $D = \frac{1}{2i\pi}\frac{d}{d\tau} = q\frac{d}{dq}$.

i. Montrer que la fonction $H = 4E_4 D(E_6) - 6E_6 D(E_4)$ est une forme modulaire de poids 12 pour $SL_2(\mathbb{Z})$, que vous identifierez.

ii. En déduire la forme $\tau(n) = \frac{n}{12}(5\sigma_3(n) + 7\sigma_5(n)) + 70 \sum_{1 \leq m < n} (2n - 5m)\sigma_3(m)\sigma_5(n-m)$.

iii. En conclure que les congruences suivantes sont valables :

(1) $$\tau(n) \equiv n\sigma_5(n) \equiv n\sigma_1(n) \mod 5,$$

(2) $$\tau(n) \equiv n\sigma_3(n) \mod 7.$$

Exercice 2. Soit $p \geq 3$ un nombre premier et $\zeta = e^{2i\pi/p}$. On note, comme dans le polycopié de cours, l'ensemble de $p+1$ matrices à coefficients entiers

$$S_p = \{\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, ad = p, a, d > 0, 0 \leq b < d\},$$

et

$$\Phi_p(X, \tau) = \prod_{\alpha \in S_p} (X - j \circ \alpha) = \sum s_m(\tau) X^m.$$

a) Rappeler brièvement pourquoi $s_m(\tau) = P_m(j(\tau))$ est un polynôme à coefficients entiers en le j-invariant $j = E_4^3/\Delta$.

On note désormais $F_p(X, Y) = \sum P_m(Y) X^m \in \mathbb{Z}[X, Y]$, et l'on va établir une congruence satisfaite par le polynôme F_p.

b) On dira que deux fonctions modulaires $f = \sum a_n q^n$ et $g = \sum b_n q^n$ pour $SL_2(\mathbb{Z})$ à coefficients entiers sont congrues modulo p si $a_n = b_n \mod p$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Montrer que $j(p\tau) \equiv j(\tau)^p \mod p$.

c) Plus généralement, si les coefficients de Fourier de f et g sont dans un sous-anneau $A \subset \mathbb{C}$ et I est un idéal de A, on dira que $f = g \mod I$ lorsque $a_n - b_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Déduire de b) que $j(p\tau) = j(\tau)^p \mod (1-\zeta)\mathbb{Z}[\zeta]$.

d) Montrer que pour toute matrice $\sigma_b = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & p \end{pmatrix}, 0 \leq b < p$,

$$j(\sigma_b \tau) = j(\sigma_0 \tau) \mod (1-\zeta)\mathbb{Z}[\zeta].$$

e) En déduire que $F_p(X, Y) = (X^p - Y)(X - Y^p) \mod (1-\zeta)\mathbb{Z}[\zeta][X, Y]$, puis modulo $p\mathbb{Z}[X, Y]$.

Exercice 3. Soit Δ la fonction de Ramanujan. On note $G(\tau) = \Delta(\tau)\Delta(3\tau) = \sum_{n \geq 1} b_n q^n$.

i. Montrer que G est une forme modulaire parabolique de poids 24 pour $\Gamma_0(3)$.

ii. Pourquoi la série de Dirichlet $L(G, s) = \sum_{n \geq 1} b_n n^{-s}$ est-elle absolument convergente pour $\mathrm{Re}(s)$ assez grand ?

iii. Soit W_3 la matrice $W_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $G \mid_{24} W_3 = \lambda_3 G$, pour une constante $\lambda_3 \in \mathbb{C}$ à déterminer.

iv. En déduire que la série de Dirichlet L(G, s) se prolonge en une fonction entière sur $\mathbb{C}$. Quelle équation fonctionnelle vérifie-t'elle ?

Exercice 4. Pour $k \geq 0$, on note comme dans le cours $V_k = \{P \in \mathbb{C}[X], \deg P \leq k-2\}$ et W_k l'ensemble des polynômes de V_k qui vérifient de plus les conditions

$$P\mid_{2-k}(\mathrm{Id}+S) = P\mid_{2-k}(\mathrm{Id}+U+U^2) = 0,$$

où l'on a noté $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et identifié $P(X)$ avec la fonction polynomiale $P : \tau \in \mathcal{H} \mapsto P(\tau) \in \mathbb{C}$.

i. Un calcul sur machine montre que le $\mathbb{C}$-espace vectoriel W_{16} est de dimension 3, et qu'il a pour base

$$\begin{aligned} P_1 &= X^{14} - 1, \\ P_2 &= 2X^{12} - 7X^{10} + 11X^8 - 11X^6 + 7X^4 - 2X^2, \\ P_3 &= 36X^{13} - 245X^{11} + 539X^9 - 660X^7 + 539X^5 - 245X^3 + 36X. \end{aligned}$$

Quelles conclusions pouvez-vous en tirer ?

ii. Donner la dimension et une base de W_{14}.