Über elliptische Funktionen, welche von zwei Paaren reeller Funktionen abhängen. Kronecker's letzte Vorlesung.

F. v. Dalwigk

(W.S. 1891/92)

Zusammenfassung

Vorlesungsmitschrift von Kroneckers letzter Vorlesung (9.11.1891 - 14.12.1891).
Ergänzungen und Anhänge von F.v.Dalwigk.
Inhaltsverzeichnis am Schluß des Bandes.

Historische Einführung (9.11.91)

[i]

Mitte des vorigen Jahrhunderts beschäftigten sich Fagnano und Euler zuerst mit den elliptischen Integralen. Euler fand 1764 das Additionstheorem und veröffentlichte diese Untersuchungen 1766 in den Petersburger Commentaren. Ennepper's Werk von 1876 (1. Auflage!) bietet näheres. Legendre's Untersuchungen über elliptische Integrale beginnen bald nach 1780, „er klebt noch ganz an den geometrischen Betrachtungen". Nach einer langen Pause in seinen Veröffentlichungen, wobei die Revolution wohl auch hemmend wirkte, gab Legendre 1825-28 sein großes Werk heraus, mehr eine Sammlung von einzelnen Abhandlungen, als eine einheitliche Arbeit. Und der eigentliche Kern der [ii]
Sache wurde von ihn nicht gefunden, trotzdem er (1825) eine Stelle von Euler anführt, wo dieser die Inversion der Integrale anstrebt und die große Tragweite hiervon voraussieht. Jakobi und Abel führten die inversen Funktionen ein und schufen so eine ganz neue Grundlage für die Theorie. Ihre Entdeckungen wurden von Legendre freudig begrüßt. Die ersten Bände von Crelle's Jounal enthalten die meisten Abhandlungen von Abel und Jakobi aus diesem Gebiet, vollständig gesammelt sind die Arbeiten in Abel's Werken und in Bd. I, II von Jakobi's Werken. Jakobi's Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum erschienen 1829, sie sind kein eigentliches Lehrnuch, sondern fast eine Formelsammliung zu nennen. Von Abel existiert auch ein geschlossener Abriß der Theorie. — [iii]

Über die weit zurückreichenden Gaußischen Untersuchungen ist erst spät näheres bekannt geworden, er selbst gab nur brieflich einige geheimnisvolle Andeutungen, hatte aber doch bei weitem nicht alles von Abel veröffentlichte schon vorher gefunden.

Bei Jakobi bilden die Transformationen, bei Abel die Multiplikation den Ausgangspunkt, Auch sonst unterscheidet sich der Entwicklungsgang bei beiden wesentlich: Abel geht rasch ins möglichst allgemeine, wo sich doch noch höchst wertvolle Resultate finden lassen; das Abel'sche Theorem ist geradezu <u>ein</u> Ende (nicht das Ende). Jakobi bleibt spezieller in seinen Forschungen, gestaltet sie aber auch weit aus. — Erst nach Abel untersuchte er die Abel'schen Integrale und besonders das [iv]
Umkehrproblem. Er und sein Schüler Richelot waren lange Zeit die einzigen, die in diesen Gebieten arbeiteten.

In seiner Königsberger Lehrthätigkeit las Jakobi zuerst im W.S. 29/30 publico „über die Anfangsgründe der elliptischen Transcendenten“. Von I.Th.Sanio existiert ein Kollegheft hierüber, ebenso ein späteres über ein achtstündiges Publicum vom S.S. 31 [1] (was aus Rosenhain's Bibliothek in Besitz der Berliner Akademie gekommen ist). Diese beiden Vorlesungen schließen sich noch ganz an den Entwicklungsgang der Fundamenta an. Dann kehrt die Vorlesung im W.S. 35/36 in wesentlich anderer Form zehnstündig privatim wieder und nach den Akten der Universität ließ Jakobi [v]
die Seminarübungen fortfallen, um seine Zuhörer nicht zu sehr zu belasten. Von dieser Vorlesung existiert ein Rosenhain'sches Heft in mehreren Abschriften, z.B. in Besitz der Berliner Akademie und Kroneckers. Rosenhain wollte das Heft in umgearbeiteter Form veröffentlichen, beendete aber die Vorarbeiten nicht. Auch Kronecker hatte eine Veröffentlichung (in der ursprünglichen Form, die viel interessantes bieten muß) vor. Erst im Winter 39/40 las Jakobi wieder über elliptische Funktionen, und von dieser Verlesung rührt Borchardt's Heft her, welches in der Einleitung viel ausführlicher ist als das Rosenhain'sche vom W.S. 35/36, diesem sonst aber bedeutend nachsteht. Aus Borchardt's Heft ist der Abschnitt über Thetafunktionen veröffentlicht (Jacobi's Werke I, 497- [vi]
538). — Nach seiner Krankheit und dem Aufenthalt in Italien kam Jakobi nach Berlin, wo er als Akademiemitglied las. Kronecker hörte S.S. 45 bei ihm eine Vorlesung über elliptische Funktionen, die aber vorwiegend von den elliptischen Integralen handelte. Auch im W.S. 48/49 las Jakobi nochmals mit Unterbrechungen über elliptische Funktionen. Im Februar 51 starb er. [2] Die wichtige Jakobi'sche Vorlesung vom W.S. 35/36 hat zum Ausgangspunkt die Theorie der Thetafunktionen. Kurz vorher hatte Jakobi in Band XV von Crelle's Journal (S.199-204) in einer Abhandlung „Formulae novae in theoria transcendentium ellipticarum fundamentales“ vom 21. Sept. 35 (Werke I, S.335-341) eine Formel (12) erhalten, die sich so schreiben läßt: [vii]

$$\frac{\theta(0)\theta(u+a)\theta(u+b)\theta(a+b)}{\theta(a)\theta(b)\theta(u)\theta(u+a+b)} = 1 + K^2 s(a)s(b)s(u)s(u+a+b)$$

(wo $s(v) = \sin \operatorname{am} v$ ist) und die bei Wegschaffung des Nenners leicht zu

$$\theta(0)\theta(u+a)\theta(u+b)\theta(a+b) = \theta(a)\theta(b)\theta(u)\theta(u+a+b) + H(a)H(b)H(u)H(u+a+b)$$

führt. Führt man hier die Reihenentwicklungen der Thetafunktionen ein, so erhält man vierfache Summen, aus denen eine direkt Controlle der Formeln möglich sein muß. Und wenn man diese spezielle Formel so verificieren will, hat man dieselbe Methode nötig, die auch zu einer weit allgemeineren Formel mit Produkten von je vier Thetafunktionen führt. Und so wird Jakobi seine berühmte Thetaformel gefunden haben, sehr bald nach dem 21. September 1835, denn die von Rosenhain gehörte Vorlesung von W.S.35/36 beginnt mit einer Theorie der Thetafunktionen und [viii]
enthält diese „Thetaformel“, Jakobi muß diese Formel schon gekannt haben, als er sich entschloß, die Thetafunktionen an die Spitze der ganzen Vorlesung zu stellen. Ueber diese Behandlungsweise der Theorie der elliptischen Funktionen hat Jakobi selbst nichts veröffentlicht. Von Rosenhains Heft existieren manche Abschriften, Borchardt's Heft vom W.S. 39/40 ist teils veröffentlicht (s. oben). [3] Im Band 27 von Crelle's Journal hat Eisenstein im Februar 44 (im 22. Lebensjahr) eine skizzenhafte Arbeit über Doppelprodukte veröffentlicht, die „wegen der naiven Behandlung der Doppelprodukte mit unsicherer Convergenz“ gar nicht streng war. Eisenstein („ein in der Mathema- [ix]

[1] oder vielleicht W.S. 32/33.

[2] Zusammenstellung aller Vorlesungen Jakobis im 108^{ten} Band von Crelle's Journal, s. zweitnächste Seite.

[3] Siehe Kronecker „Über die Entstehung der Jakobischen Thetaformeln“, Crelle's Journal 108 (1891), auch Akademie-Berichte v. 9.7.91.

tik einseitig genialer Mensch, der sonst fast kindliches Wesen hatte“) war durch zahlentheoretische Untersuchungen hierzu geführt worden. Schon Jakobi hatte in der Vorlesung vom W.S.39/40, die Borchardt hörte, auf solche Doppelprodukte hingewiesen, die zwar leichte Folgerungen zuließen, aber wegen nicht unbedingter Convergenz schwer zu behandeln seien. Und er griff nun in Band 20 von Crelles's Journal (Oktober 45) Eisenstein sehr scharf, zu scharf an - wobei der Gegensatz Jakobi's zu Gauß, der sich Eisensteins sehr annahm, z.B. Vorreden zu Eisenstein'schen Arbeiten schrieb, wohl mitsprach. Eisenstein's Arbeit enthielt doch einen guten Kern, und indem Eisenstein die Schwierigkeiten, welche die bedingte Convergenz seiner Doppelreihen mit sich brachte, über- [x]
wand, gab er 1847 im Band 35 von Crelle's Journal eine ganz neue sehr gute Theorie. An diese Abhandlung soll sich die Vorlesung zunächst im wesentlichen anschließen.

Eisenstein knüpfte an das Euler'sche Sinusprodukt $\sin \pi x = \lim_{n=\infty} \pi x \prod_{-n,+n}^{k} (1 - \frac{x}{k})$ [4] an und suchte ein analoges Doppelprodukt. Über das Sinusprodukt sei hier noch eine Schellbach'sche Programmarbeit erwähnt, in welcher aus der auf Mitte nächster Seite stehenden besonderen Form alle Eigenschaften der Sinusfunktion hergeleitet werden (Friedrich-Wilhelms-Gymnasium, Herbst 1845, bei Eisenstein [Crelle Bd. 35 S.191ff] erwähnt.)

[4] dabei ist k=0 auszuschließen.

Vorlesung (16.11.91)

[S.1]

Durch Verallgemeinerung des bekannten Produktes der sin-Funktion kommt man zum Produkt $\lim_{n=\infty}\prod_{k=-n}^{k=+n}(1-\frac{x}{\alpha k+\beta})$ und schließlich zu

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\prod_{n=-N}^{n=+N}\prod_{m=-M}^{m=+M}(1-\frac{x}{\alpha m+\beta n+\gamma}).$$

So wie man vom Sinusprodukt zu der gleichmäßig gebildeten Formel

$$\frac{\sin\, x\pi}{\sin\, y\pi}=\lim_{n=\infty}\prod_{-n}^{+n}\frac{x+k}{y+k}$$

übergehen kann [5], so soll auch hier der Ausdruck [6]

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\prod_{n=-N}^{n=+N}\prod_{m=-M}^{m=+M}\frac{u+mv+nw}{u'+mv+nw}$$

betrachtet werden. Das Verhältnis von v und w darf nicht reell sein. Man kann dann immer und vollkommen eindeutig u und u' als $\sigma v+\tau w$ und $\sigma' v+\tau' w$ mit reellen Coefficienten darstellen, [S.2]
die neue Form des Doppelproduktes ist

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\prod_{n=-N}^{n=+N}\prod_{m=-M}^{m=+M}\frac{(\sigma+m)v+(\tau+n)w}{(\sigma'+m)v+(\tau'+n)w}\ .$$

Werden σ' und τ' fixiert, so hängt das Doppelprodukt von dem reellen Größenpaar σ, τ und von dem komplexen Verhältnis $\frac{v}{w}=\alpha+\beta i$, d.h. einem weiteren reellen Größenpaar ab.

Eisenstein hat solche Doppelprodukte zuerst betrachtet [7]. Während $\lim_{n=\infty}\prod_{k=-n}^{k=+n}\frac{x+k}{y+k}$ ein Sinusquotient ist, ist das Eisenstein'sche Doppelprodukt ein Quotient von zwei Thetafunktionen, wie zunächst gezeigt werden soll. [S.3]

Die fundamentale Thetafunktion wird hierbei in der Form benutzt

$$\vartheta(\zeta,w)=\sum \mathrm{e}^{\frac{1}{4}(v^2w+4v\zeta-2v)\pi i}$$

oder

$$\vartheta(\zeta,w)=\sum(-1)^{\frac{v-1}{2}}q^{\frac{1}{4}v^2}\sin\, v\zeta\pi,$$

wo v sich auf alle positiven und negativen ungeraden Zahlen bezieht [8] und

$$q=\mathrm{e}^{+w\pi i}$$

gesetzt ist. Es besteht die Produkt-Entwicklung

$$\vartheta(\zeta,w)=2q^{\frac{1}{4}}\cdot\sin\zeta\pi\cdot\prod_{1,\infty}^{n}(1-q^{2n})(1-q^{2n}\mathrm{e}^{+2\zeta\pi i})(1-q^{2n}\mathrm{e}^{-2\zeta\pi i})$$

[5] y = 1/2 liefert unter Benutzung der Wallis'schen Zahl den gewöhnlichen Ausdruck.

[6] Die Konvergenz folgt aus der Darstellung durch Thetafunktionen, S.9, 10.

[7] Bei Abel tritt (Crelle's Journal II, 161 u. 173) eine Doppelsumme resp. ein Doppelprodukt auf, die beide mit Eisenstein'schen Entwicklungen viele Ähnlichkeit haben. Hierüber ist S.145-150 zu vergleichen. „Wenig bemerkt!“ steht bei dem Hinweis in Kroneckers Manuskript.

[8] Der Faktor 2 müßte hinzutreten, wenn man diese Summe nur auf v=+1,+3,+5 ... beziehen wollte.

oder

$$\vartheta(\zeta, w) = -iq^{\frac{1}{4}} \cdot (z - z^{-1}) \cdot \prod_{1,\infty}^{n} (1 - q^{2n})(1 - q^{2n}z^2)(1 - q^{2n}z^{-2})$$

für

$$z = \mathrm{e}^{+\zeta\pi i}.$$

Die Gleichheit der Reihe und der Produktentwicklung zeigt man auf folgende Art. Das Produkt wird zunächst mit $\overline{\vartheta}(\zeta, w)$ bezeichnet, dann findet man leicht allgemein für ganzzahliges r und s [S.4]

$$\vartheta(\zeta + rw + s, w) = \mathrm{e}^{-\pi i(r^2 w + 2r\zeta + r + s)} \vartheta(\zeta, w)$$

und

$$\overline{\vartheta}(\zeta + rw + s, w) = \mathrm{e}^{-\pi i(r^2 w + 2r\zeta + r + s)} \overline{\vartheta}(\zeta, w)\ .$$

[Man kann auch zunächst nur die Spezialfälle $r = 0, s = 1$; $r = 1, s = 0$ herleiten u. daraus die allgemeine Formel zusammensetzen.] Der Quotient $\frac{\vartheta(\zeta,w)}{\overline{\vartheta}(\zeta,w)}$ ist darum doppelt periodisch mit den Perioden 1 und w; daß er aber von ζ unabhängig ist, zeigt man so: Man beschränkt ζ auf Werte der Form $\alpha + \beta w$, wo α reell ist und das ebenfalls reelle β zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ liegt, mit Einschluß einer dieser Grenzen. In diesem Streifen der ζ-Ebene nimmt $\frac{\vartheta(\zeta,w)}{\overline{\vartheta}(\zeta,w)}$ alle Werte an, die dieser Quotient überhaupt haben kann. Durch $z = \mathrm{e}^{+\zeta\pi i}$ wird dieser Streifen auf einen Ring in der z-Ebene abgebildet, der den Nullpunkt umgibt und zu dem die beiden Radien $|q|^{1/2}$ und [S.5]

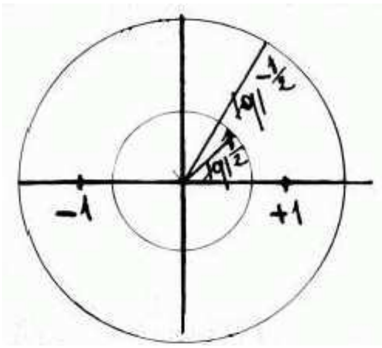

Abb. 1: zu S.5

$|q|^{-1/2}$ gehören. Für $z = +1$ und für $z = -1$ wird der Nenner des Quotienten in erster Näherung 0, aber auch der Zähler verschwindet dort und (wie Bildung der Derivierten zeigt) auch in erster Ordnung. So ist der Quotient als Funktion von z im ganzen Ring endlich, und damit auch endlich in der ganzen ζ-Ebene, d.h. für ζ constant.

Daß der Quotient auch von w nicht abhängt, sieht man am einfachsten so ein: Die Reihe erfüllt die Bedingung

$$\vartheta(\frac{1}{2}, w) = 2\mathrm{e}^{\frac{w\pi i}{4}} \cdot \vartheta(\frac{1}{2} - w, 4w)$$

und vom Produkt gilt entsprechendes.

Beweis:

$$\vartheta(\frac{1}{2}, w) = \sum_{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots}^{v} \mathrm{e}^{\frac{1}{4}v^2 w\pi i} = \sum_{-\infty,\infty}^{n} \mathrm{e}^{(n^2+n+\frac{1}{4})w\pi i},$$

$$\vartheta(\frac{1}{2} - w, 4w) = \sum_{\pm 1, \pm 3, \ldots}^{v} \mathrm{e}^{\frac{\pi i}{4}(v^2 \cdot 4w - 4vw)} = \sum_{\pm 1, \pm 3, \ldots}^{v} \mathrm{e}^{+\pi i w(v^2 - v)}\ .$$

$$e^{\frac{w\pi i}{4}} \cdot \vartheta(\frac{1}{2} - w, 4w) = \sum_{\pm1,\pm3,\ldots}^{v} e^{w\pi i(v-\frac{1}{2})^2} = \sum_{-\infty,\infty}^{n} e^{w\pi i(2n+\frac{1}{2})^2} = \sum_{-\infty,\infty}^{n} e^{(4n^2+2n+\frac{1}{4})w\pi i} .$$ [S.6]

Der Ausdruck

$$\vartheta(\frac{1}{2}, w) = \sum_{-\infty,\infty}^{n} e^{(n^2+n+\frac{1}{4})w\pi i}$$

wird nun so zerlegt:

$$\begin{aligned}
\vartheta(\frac{1}{2}, w) &= \sum_{-\infty,\infty}^{m} e^{(4m^2+2m+\frac{1}{4})w\pi i} + \sum_{-\infty,\infty}^{m} e^{((2m-1)^2+(2m-1)+\frac{1}{4})w\pi i} \\
&= \sum_{-\infty,\infty}^{m} e^{(4m^2+2m+\frac{1}{4})w\pi i} + \sum_{-\infty,\infty}^{m} e^{(4m^2-2m+\frac{1}{4})w\pi i} \\
&= 2 \cdot \sum_{-\infty,\infty} e^{(4m^2+2m+\frac{1}{4})w\pi i} \\
&= 2 \cdot e^{\frac{w\pi i}{4}} \vartheta(\frac{1}{2} - w, 4w) .
\end{aligned}$$

Beim Produkt $\overline{\vartheta}(\zeta, w)$ hat man

$$\overline{\vartheta}(\frac{1}{2}, w) = -iq^{\frac{1}{4}} \cdot (i - i^{-1}) \cdot \prod_{1,\infty}^{n} (1 - q^{2n})(1 + q^{2n})^2$$

und

$$\overline{\vartheta}(\frac{1}{2} - w, 4w) = -iq \cdot (iq^{-1} - i^{-1}q^{+1}) \cdot \prod_{1,\infty}^{n} (1 - q^{8n})(1 + q^{8n-2})(1 + q^{8n+2}) ,$$

d.h.

$$\frac{\overline{\vartheta}(\frac{1}{2}, w)}{\overline{\vartheta}(\frac{1}{2} - w, 4w)} = \frac{+2q^{\frac{1}{4}}}{1 + q^2} \prod_{1,\infty}^{n} \frac{(1 - q^{2n})(1 + q^{2n})^2}{(1 - q^{8n})(1 + q^{8n-2})(1 + q^{8n+2})} .$$

Indem man $1 - q^{8n}$ durch $(1 + q^{4n})(1 - q^{2n})(1 + q^{2n})$ ersetzt, entsteht rechts $\frac{+2q^{\frac{1}{4}}}{1+q^2} \prod_{1,\infty}^{n} \frac{1+q^{2n}}{(1+q^{4n})(1+q^{8n-2})(1+q^{8n+2})}$ und $(1 + q^2) \prod_{1,\infty}^{n} (1 + q^{4n})(1 + q^{8n-2})(1 + q^{8n+2})$ ist $\prod_{1,\infty} (1 + q^{2m})$, woraus wieder $\overline{\vartheta}(\frac{1}{2}, w) = 2q^{\frac{1}{4}} \overline{\vartheta}(\frac{1}{2} - w, 4w)$ folgt. [S.7]

Der Quotient $\frac{\vartheta(\zeta,w)}{\overline{\vartheta}(\zeta,w)}$, der jedenfalls von ζ unabhängig ist, hat nun die Eigenschaft

$$\frac{\vartheta(\frac{1}{2}, w)}{\overline{\vartheta}(\frac{1}{2}, w)} = \frac{\vartheta(\frac{1}{2} - w, 4w)}{\overline{\vartheta}(\frac{1}{2} - w, 4w)}$$

oder $\Phi(w) = \Phi(4w) = \Phi(16w) = \ldots \Phi(4^v w)$. Behandelt man den Quotienten als Funktion von $q = e^{w\pi i}, \Psi(q)$, so hat man $\Psi(q) = \Psi(q^4) = \Psi(q^{16}) = \ldots \Psi(q^{4^v})$ und aus $v = \infty$ läßt sich der Wert leicht als $+1$ bestimmen. So hat man

$$\vartheta(\zeta, w) = \overline{\vartheta}(\zeta, w)$$

und die Gleichheit der auf S.3 stehenden beiden Entwicklungsformen von $\vartheta(\zeta, w)$ ist bewiesen.

Nun soll das auf S.2 stehende Eisenstein'sche Doppelprodukt als Thetaquotient dargestellt werden [9]. Man betrachtet $\frac{\vartheta(\xi,w)}{\vartheta(\eta,w)}$, und setzt zur Abkürzung: [S.8]

[9]womit dann auch die Konvergenz des Doppelprodukts bewiesen ist.

$$\mathrm{e}^{\xi\pi i} = x \qquad\qquad \mathrm{e}^{\eta\pi i} = y,$$

dann hat man

$$\begin{aligned}
\frac{\vartheta(\xi,w)}{\vartheta(\eta,w)} &= \lim_{N=\infty} \frac{x-x^{-1}}{y-y^{-1}} \prod_{1,N}^{n} \frac{(1-q^{2n}x^2)(1-q^{2n}x^{-2})}{(1-q^{2n}y^2)(1-q^{2n}y^{-2})} \\
&= \lim_{N=\infty} \frac{x-x^{-1}}{y-y^{-1}} \prod_{1,N}^{n} \frac{(q^n x - q^{-n}x^{-1})(q^{-n}x - q^{+n}x^{-1})}{(q^n y - q^{-n}y^{-1})(q^{-n}y - q^{+n}y^{-1})} \\
&= \lim_{N=\infty} \frac{x-x^{-1}}{y-y^{-1}} \prod_{\substack{+1,+N \\ -1,-N}}^{n} \frac{q^n x - q^{-n}x^{-1}}{q^n y - q^{-n}y^{-1}} \\
&= \lim_{N=\infty} \prod_{n=-N}^{n=+N} \frac{q^n x - q^{-n}x^{-1}}{q^n y - q^{-n}y^{-1}} \\
&= \lim_{N=\infty} \prod_{-N,+N}^{n} \frac{\mathrm{e}^{(\xi+nw)\pi i} - \mathrm{e}^{-(\xi+nw)\pi i}}{\mathrm{e}^{(\eta+nw)\pi i} - \mathrm{e}^{-(\eta+nw)\pi i}} \\
&= \lim_{N=\infty} \prod_{-N,+N}^{n} \frac{\sin\,(\xi+nw)\pi}{\sin\,(\eta+nw)\pi}\,.
\end{aligned}$$

Dafür erhält man sofort das Doppelprodukt

$$\frac{\vartheta(\xi,w)}{\vartheta(\eta,w)} = \lim_{N=\infty} \big(\lim_{M=\infty} \prod_{-N,+N}^{n} \prod_{-M,+M}^{m} \frac{(\xi+nw)+m}{(\eta+nw)+m} \big)\,.$$

Nun soll die Bezeichnung so geändert werden, daß man für ξ und η $\frac{u}{v}$ resp. $\frac{u'}{v}$ und für w .. $\frac{w}{v}$ schreibt, dann entsteht

$$\frac{\vartheta(\frac{u}{v},\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u'}{v},\frac{w}{v})} = \lim_{N=\infty} \big(\lim_{M=\infty} \prod_{-N,+N}^{n} \prod_{-M,+M}^{m} \frac{u+mv+nw}{u'+mv+nw} \big)$$

oder auch [S.9]

$$\frac{\vartheta(\sigma+\tau\frac{w}{v},\frac{w}{v})}{\vartheta(\sigma'+\tau'\frac{w}{v},\frac{w}{v})} = \lim_{N=\infty} \big(\lim_{M=\infty} \prod_{-N,+N}^{n} \prod_{-M,+M}^{m} \frac{(\sigma+m)v+(\tau+n)w}{(\sigma'+m)v+(\tau'+n)w} \big)\,.$$

Dabei ist aber stillschweigend vorausgesetzt, daß $\frac{w}{v}$ einen wesentlich positiven imaginären Teil hat. Dies ist nämlich für die Thetafunktionen nötig, damit $|q|<1$ ausfällt; für das Doppelprodukt würde complexes $\frac{w}{v}$ genügen. Es sei nun $\frac{w}{v}$ nicht reell und der Faktor $\varepsilon = \pm 1$ so bestimmt, daß $\varepsilon \cdot \frac{w}{v}$ einen positiven imaginären Teil hat. Dann hat man

$$\frac{\vartheta(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u'}{v},\varepsilon\frac{w}{v})} = \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \prod_{-N,+N}^{n} \prod_{-M,+M}^{m} \frac{u+mv+n\varepsilon w}{u'+mv+n\varepsilon w}\,.$$

Wenn nun ε gleich +1 ist, ist das dasselbe Produkt, wie es unten a.v.S. steht; für $\varepsilon = -1$ aber kann man n durch -n ersetzen, und so hat man allgemein

$$\frac{\vartheta(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u'}{v},\varepsilon\frac{w}{v})} = \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \prod_{-N,+N}^{n} \prod_{-M,+M}^{m} \frac{u+mv+nw}{u'+mv+nw}$$

oder auch [S.10]

$$\frac{\vartheta(\sigma+\tau\frac{w}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\sigma'+\tau'\frac{w}{v},\varepsilon\frac{w}{v})} = \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\prod_{-N,+N}^{n}\prod_{-M,+M}^{m}\frac{(\sigma+m)v+(\tau+n)w}{(\sigma'+m)v+(\tau'+n)w}\ ,$$

und so ist das rechts stehende Produkt für nicht reelles $\frac{w}{v}$ als Quotient zweier Thetafunktionen ausgedrückt. Nach

$$\lim_{u'=0}\frac{\frac{u'}{v}}{\vartheta(\frac{u'}{v},\varepsilon\frac{w}{v})} = \frac{1}{\vartheta'(0,\varepsilon\frac{w}{v})}$$

erhält man auch leicht

$$\frac{\vartheta(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta'(0,\varepsilon\frac{w}{v})} = \frac{u}{v}\cdot\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\prod\prod{}'\frac{u+mv+nw}{mv+nw} = \frac{u}{v}\cdot\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\prod\prod{}'(1+\frac{u}{mv+nw})\ ,$$

wo das Doppelprodukt sich auf alle Wertepaare m,n bezieht, wo $|m|\leq M, |n|\leq N$ ist, mit alleiniger Ausnahme des Wertepaares $m=0, n=0$, was der Accent andeuten soll. So ist auch dieses besonders einfache Doppelprodukt durch Thetafunktionen dargestellt. (Rechts kann man auch vor dem Bruch ein – Zeichen setzen, indem man für m,n $-m$ und $-n$ schreibt: [S.11]

$$u\cdot\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\prod_{\substack{-M\leq m\leq +M\\ -N\leq n\leq +N}}{}'(1-\frac{u}{mv+nw}) = \frac{\vartheta(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta'(0,\varepsilon\frac{w}{v})}\ .$$

Dabei ist nur $m=0, n=0$ auszuschließen.)

Vorlesung (23.11.91)

Das Eisenstein'sche Doppelprodukt ist nur bedingt convergent, sein Wert ändert sich, wenn man die Reihenfolge der Grenzübergänge ändert, oder wenn man für m und n andere Größen m' und n' linear einfügt, das transformierte Produkt zunächst für $|m'| \leq M', |n'| \leq N'$ nimmt und dann erst M', dann N' unendlich werden läßt. Diese Wertänderung ist näher zu prüfen. Die Transformation muß derart sein, daß ganzzahlige Coefficienten auftreten, wenn m' und n' duch m und n ausgedrückt sind, und auch, wenn m, n durch m', n' dargestellt werden. Man setzt [S.12]
also

$$\begin{aligned} m' &= \alpha m + \beta n - \gamma \\ n' &= \alpha' m + \beta' n - \gamma' \end{aligned}$$

wo die ganzzahligen Coefficienten den Bedingungen

$$\alpha \cdot \beta' - \alpha' \cdot \beta = +1$$

genügen. Das Doppelprodukt soll jetzt in etwas abgeänderter Bezeichnung verwendet werden, nämlich in der Form

$$\frac{\vartheta(\sigma_0 + \tau_0 \frac{w}{v}, \varepsilon \frac{w}{v})}{\vartheta(\sigma + \tau \frac{w}{v}, \varepsilon \frac{w}{v})} = \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \prod_{-N,+N}^{n} \prod_{-M,+M}^{m} \frac{(\sigma_0 + m)v + (\tau_0 + n)w}{(\sigma + m)v + (\tau + n)w} .$$

Für $\sigma_0 v + \tau_0 w$ und $\sigma v + \tau w$ werden oft wieder u_0 und u gesetzt. Aus

$$\begin{aligned} m' &= \alpha m + \beta n - \gamma \\ n' &= \alpha' m + \beta' n - \gamma' \end{aligned} \qquad (\alpha\beta' - \alpha'\beta = +1) .$$

folgt nun

$$\begin{aligned} m &= \beta' m' - \beta n' + \beta' \gamma - \beta \gamma' \\ n &= -\alpha' m' + \alpha n' - \alpha' \gamma + \alpha \gamma' \end{aligned}$$

und $(\sigma + m)v + (\tau + n)w$ geht dadurch über in [S.13]

$$(\sigma + \beta' m' - \beta n' + \beta' \gamma - \beta \gamma')v + (\tau - \alpha' m' + \alpha n' - \alpha' \gamma + \alpha \gamma')w$$
$$= (\sigma + \beta' \gamma - \beta \gamma')v + (\tau - \alpha' \gamma + \alpha \gamma')w + m'(\beta' v' - \alpha' w) + n'(-\beta v + \alpha w) .$$

Man setzt

$$\begin{aligned} v' &= \beta' v - \alpha' w \\ w' &= -\beta' v + \alpha w \end{aligned}$$

und sucht σ' und τ' so einzuführen, daß der ganze letzte Ausdruck zu $(\sigma' + m')v' + (\tau' + n')w'$ wird. Dazu ist $\sigma v + \tau w + \gamma v' + \gamma' w'$ gleich $\sigma' v' + v' w'$ zu setzen.

$$\begin{aligned} \sigma' &= \alpha \sigma + \beta \tau + \gamma \\ \tau' &= \alpha' \sigma + \beta' \tau + \gamma' \end{aligned}$$

erfüllen die Bedingung, denn

$$(\sigma' - \gamma')v' + (\tau' - \gamma')w' = (\alpha\sigma + \beta\tau)(\beta' v - \alpha' w) + (\alpha' \sigma + \beta' \tau)(-\beta v + \alpha w)$$

ist wirklich $\sigma v + \tau w$.

v und w lassen sich auch leicht durch v' und w' ausdrücken, ebenso kann man für $\sigma' v' + \tau' w'$ das Zeichen u' einführen und bezüglich der mit dem Index 0 versehenen Größen entsprechend [S.14] verfahren; man gelangt so zu dem Formelsystem

$$\begin{aligned} m' &= \alpha\, m + \beta\, n - \gamma \\ n' &= \alpha' m + \beta' n - \gamma' \end{aligned}$$

$$(\alpha \cdot \beta' - \alpha' \cdot \beta = +1)$$

$$\begin{aligned} m &= \beta' m' - \beta n' + \beta' \gamma - \beta \gamma' \\ n &= -\alpha' m' + \alpha n' - \alpha' \gamma + \alpha \gamma' \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} v' = \beta' v - \alpha' w & v = \alpha v' + \alpha' w' \\ w' = -\beta v + \alpha w & w = \beta v' + \beta' w' \\ \sigma' = \alpha \sigma + \beta \tau + \gamma & \sigma_0' = \alpha \sigma_0 + \beta \tau_0 + \gamma \\ \tau' = \alpha' \sigma + \beta' \tau + \gamma' & \tau_0' = \alpha' \sigma_0 + \beta' \tau_0 + \gamma' \\ u = \sigma v + \tau w & u_0 = \sigma_0 v + \tau_0 w \\ u' = \sigma' v' + \tau' w' & u_0' = \sigma_0' v' + \tau_0' w' \\ u' = u + \gamma v' + \gamma' w' & u_0' = u_0 + \gamma v' + \gamma' w' \end{array}$$

$$\begin{aligned} m' v' + n' w' &= mv + nw - \gamma v' - \gamma' w' \\ u' + m' v' + n' w' &= u + mv + nw \\ u_0' + m' v' + n' w' &= u_0 + mv + nw \end{aligned}$$

Die beiden Systeme $\sigma_0, \tau_0, \sigma, \tau, v, w$ und $\sigma_0', \tau_0', \sigma', \tau', v', w'$ mögen äquivalent heißen. [S.15]

Durch die Transformation geht

$$\frac{(\sigma_0 + m)v + (\tau_0 + n)w}{(\sigma + m)v + (\tau + n)w}$$

über in

$$\frac{(\sigma_0' + m')v' + (\tau_0' + n')w'}{(\sigma' + m')v' + (\tau' + n')w'} \; .$$

Bildet man nun vom ersten Ausdruck das Produkt für alle Wertepaare m, n, wobei $|m| \leq M, |n| \leq N$ ist und vom zweiten das entsprechende Produkt mit der Bedingung $|m'| \leq M', |n'| \leq N'$, so haben die beiden Produkte gar nicht alle Glieder gemein, und es ist daher sehr wohl möglich, daß beim Grenzübergang (erst $M = \infty$, dann $N = \infty$ resp. erst $M' = \infty$, dann $N' = \infty$) nicht derselbe Wert herauskommt. Die Art dieser Wertänderung des Doppelprodukts „bei anderer Ausführung der Multiplikation auf Grund der Transformation" ließe sich auch aus der Transformation der Thetafunktionen finden. Hier aber soll das Produkt oder vielmehr sein Logarithmus direkt behandelt werden, im Anschluß an den Grundgedanken von Eisensteins Untersuchung. [S.16]

$$\lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{-N,+N}^{n} \sum_{-M,+M}^{m} \lg \frac{u_0 + mv + nw}{u + mv + nw} = \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{-N,+N}^{n} \sum_{-M,+M}^{m} \lg\big(1 - \frac{u - u_0}{u + mv + nw}\big)$$

wird betrachtet. Soweit $|u+mv+nw|$ größer ist als $|u-u_0|$, läßt sich der Logarithmus in eine Reihe entwickeln. Zunächst ist zu zeigen, daß nur für eine beschränkte Zahl von Gliedern diese Bedingung nicht erfüllt ist. [10]

Für $v=v_1+v_2\cdot i, w=w_1+w_2\cdot i$ hat man $|u+mv+nw|^2 = |(\sigma+m)v+(\tau+n)w|^2 = ((\sigma+m)v_1+(\tau+n)w_1)^2+((\sigma+m)v_2+(\tau+n)w_2)^2 = (mv_1+nw_1+\alpha)^2+(mv_2+nw_2+\beta)^2$, falls man die Abkürzung einführt [S.17]

$$\sigma v_1+\tau w_1=\alpha \qquad\qquad \sigma v_2+\tau w_2=\beta\ .$$

$|u-u_0| = ((\sigma-\sigma_0)v_1+(\tau-\tau_0)w_1)^2+((\sigma-\sigma_0)v_2+(\tau-\tau_0)w_2)^2$ ist eine von m,n unabhängige positive Größe und soll mit ρ^2 bezeichnet werden.

Nur für $(mv_1+nw_1+\alpha)^2+(mv_2+nw_2+\beta)^2 \leq \rho^2$ ist $\lg\big(1-\frac{u-u_0}{u+mv+nw}\big)$ nicht in eine Reihe entwickelbar. Man setzt nun

$$\begin{aligned} mv_1+nw_1+\alpha &= \xi \\ mv_2+nw_2+\beta &= \eta \end{aligned}$$

und findet umgekehrt

$$\begin{aligned} m\cdot(v_1w_2-w_1v_2) &= \ \ w_2\xi-w_1\eta-w_2\alpha+w_1\beta \\ n\cdot(v_1w_2-w_1v_2) &= -v_2\xi+v_1\eta+v_2\alpha-v_1\beta \end{aligned}$$

(die Klammergröße links ist nicht 0, da w/v complex ist). Schreibt man dafür

$$\begin{aligned} m &= a_1\xi+b_1\eta+c_1 \\ n &= a_2\xi+b_2\eta+c_2\ , \end{aligned}$$

so kann man abzählen, wieviele ganzzahlige Wertepaare m,n zu einem durch $\xi_1\leq\xi<\xi_2$ und [S.18]
$\eta_1\leq\eta<\eta_2$ gegebenen Bereich in der ξ,η-Ebenen gehören. Die Ungleichungen [11] [12]

$$\begin{array}{lcl} a_1\geq 0,\ b_1\geq 0 & \cdots & a_1\xi_1+b_1\eta_1+c_1\leq m<a_1\xi_2+b_1\eta_2+c_1 \\ a_1\geq 0,\ b_1<0 & \cdots & a_1\xi_1+b_1\eta_2+c_1<m\underset{(-)}{<}a_1\xi_2+b_1\eta_1+c_1 \\ a_1<0,\ b_1\geq 0 & \cdots & a_1\xi_2+b_1\eta_1+c_1<m\underset{(-)}{<}a_1\xi_1+b_1\eta_2+c_1 \\ a_1<0,\ b_1<0 & \cdots & a_1\xi_2+b_1\eta_2+c_1<m\underset{(-)}{<}a_1\xi_1+b_1\eta_1+c_1 \end{array}$$

geben für m die Intervalle

$$\begin{aligned} a_1(\xi_2-\xi_1)+b_1(\eta_2-\eta_1) \\ a_1(\xi_2-\xi_1)-b_1(\eta_2-\eta_1) \\ -a_1(\xi_2-\xi_1)+b_1(\eta_2-\eta_1) \\ -a_1(\xi_2-\xi_1)-b_1(\eta_2-\eta_1) \end{aligned}$$

was sich ganz allgemein als

$$|a_1|(\xi_2-\xi_1)+|b_1|(\eta_2-\eta_1)$$

[10] einfachster Beweis: Alle $u+mv+nw$ sind Knotenpunkte eines Gitters, ein endlicher Kreis um den Nullpunkt enthält nur eine endliche Zahl dieser Punkte.

[11] Zugleich können a_1 u. b_1 nicht Null sein, da w nicht 0 ist; darum ist die Ungleichung für m richtig.

[12] Die eingeklammerten Gleichheitszeichen gelten nur für $a_1=0$ oder $b_1=0$.

schreiben läßt. Die Anzahl der ganzzahligen Werte $m = a_1\xi + b_1\eta + c_1$ im Bereich

$$\xi_1 \leq \xi < \xi_2\,, \qquad \eta_1 \leq \eta < \eta_2$$

ist höchstens gleich der Größe des für m gefundenen Intervalles [13], d.h. höchstens gleich $|a_1|(\xi_2 - \xi_1) + |b_1|(\eta_2 - \eta_1)$. Analog findet man die Anzahl der ganzzahligen Werte von n höchstens gleich $|a_2|(\xi_2 - \xi_1) + |b_2|(\eta_2 - \eta_1)$. Die Anzahl der Wertepaare m, n, für welche $\xi^2 + \eta^2 = (v_1 m + w_1 n + \alpha)^2 + (v_2 m + w_2 n + \beta)^2$ kleiner als die a. S.17 eingeführte Größe ρ^2 ist, ist nun kleiner als das Produkt der beiden Größen $|a_1|(\xi_2 - \xi_1) + |b_1|(\eta_2 - \eta_1)$ u. $|a_2|(\xi_2 - \xi_1) + |b_2|(\eta_2 - \eta_1)$ für $\xi_2 = +\rho, \xi_1 = -\rho,\ \eta_2 = +\rho, \eta_1 = -\rho$, d.h. kleiner, als $(2\rho)^2(|a_1| + |b_1|)(|a_2| + |b_2|)$. Und das ist ein bestimmter endlicher Wert. [S.19]

Hiermit ist die Anzahl der Wertepaare m,n, für welche $\lg\bigl(1 - \frac{u-u_0}{u+mv+nw}\bigr)$ nicht in eine Reihe entwickelbar ist, als endlich nachgewiesen. Geometrisch läßt sich die Sache sehr anschaulich machen: [S.20] Es war $\xi = v_1 m + w_1 n + \alpha, \eta = v_2 m + w_2 n + \beta$, man betrachtet die Geraden $0 = v_1 x + w_1 y + \alpha$ und $0 = v_2 x + w_2 y + \beta$. ξ und η sind die mit $\sqrt{v_1^2 + w_1^2}$ resp. $\sqrt{v_2^2 + w_2^2}$ multiplizierten Abstände des Punktes m, n von diesen zwei Geraden und es ist sofort klar, daß nur für eine endliche Zahl von Punkten mit ganzzahligen Coordinaten m, n der Ausdruck $\xi^2 + \eta^2$ unter ρ^2 liegen kann.

Die Zahlenpaare m, n sollen nun so in zwei Gruppen geteilt werden, daß in der ersten Gruppe alle diejenigen Paare vorkommen, für welche $|u + mv + nw| \leq |u - u_0|$ ist oder für welche $\lg\bigl(1 - \frac{u-u_0}{u+mv+nw}\bigr)$ nicht entwickelbar ist in eine unendliche Reihe; doch darf diese erste Gruppe auch noch andere Elemente in endlicher Anzahl enthalten. Es soll hier — in Rücksicht auf eine spätere [S.21] Convergenzbetrachtung — dieser erste Bereich soweit ausgedehnt werden, daß für alle nicht dazu gehörigen Wertepaare m, n die Größen $\xi = v_1 m + w_1 n + \alpha$ und $\eta = v_2 m + w_2 n + \beta$ den absoluten Werten nach über $\rho + s$ liegen, wo s eine positive Größe ist, über die später noch verfügt werden kann und wo ρ wie a. S.19 gleich $|u - u_0|$ ist.

Die Wertepaare m, n der ersten Gruppe sollen jetzt mit m_0, n_0, die der zweiten mit m_1, n_1 bezeichnet werden. Dann hat man

$$\begin{aligned}
&\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-N,+N}^{n}\sum_{-M,+M}^{m}\lg\bigl(1 - \frac{u-u_0}{u+mv+nw}\bigr)\\
&= \sum_{m_0,n_0}\lg\bigl(1 - \frac{u-u_0}{u+m_0v+n_0w}\bigr) - \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{\substack{|n_1|\leq N\\|m_1|\leq M}}\sum_{1,\infty}^{\ell}\frac{1}{\ell}\bigl(\frac{u-u_0}{u+m_1v+n_1w}\bigr)^{\ell}\\
&= \sum_{m_0,n_0}\lg\bigl(1 - \frac{u-u_0}{u+m_0v+n_0w}\bigr) + \sum_{m_0,n_0}\frac{u-u_0}{u+m_0v+n_0w} + \frac{1}{2}\sum_{m_0,n_0}\frac{(u-u_0)^2}{(u+m_0v+n_0w)^2}\\
&\quad - \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{\substack{|n|\leq N\\|m|\leq M}}\frac{u-u_0}{u+mv+nw} - \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{\substack{|n|\leq N\\|m|\leq M}}\frac{1}{2}\frac{(u-u_0)^2}{(u+mv+nw)^2}\\
&\quad - \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{\substack{|n_1|\leq N\\|m_1|\leq M}}\sum_{3,\infty}^{\ell}\frac{1}{\ell}\frac{(u-u_0)^{\ell}}{(u+m_1v+n_1w)^{\ell}}\,,
\end{aligned}$$

falls die rechts auftretende Summen überhaupt convergieren. Von der letzten Summe läßt sich [S.22]

[13] in den Ungleichungen oben a.v.S. ist eine Intervallgrenze stets ausgeschloßen.

unbedingte Convergenz nachweisen, auf folgende Art:

$$\left|\frac{u-u_0}{u+m_1v+n_1w}\right|^\ell = \frac{\rho^\ell}{|(\sigma+m_1)v+(\tau+n_1)w|^\ell} = \frac{\rho^\ell}{(\xi^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}\ell}}\ ,$$

für

$$\xi = m_1v_1+n_1w_1+\alpha \qquad\qquad \eta = m_1v_2+n_1w_2+\beta$$

(S.17). $|\xi|$ und $|\eta|$ sind nach Voraussetzung über m_1 u. n_1 stets größer als $\rho+s$. Man faßt nun zunächst alle die Wertesysteme m_1, n_1 zusammen, wofür $\rho+hs < |\xi| < \rho+(h+1)s$ und [S.23]
$\rho+ks < |\eta| < \rho+(k+1)s$ ist. Die Zahl dieser Wertepaare hängt von der Intervallgröße, nicht von h u. k ab, wenigstens läßt dich eine Zahl C angeben, welche mindestens so groß ist als die Anzahl der Wertepaare für irgend eine Wahl der positiven ganzen Zahlen h u. k. Für jedes dieser Wertepaare m_1, n_1 hat man

$$(\xi^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}\ell} \geq \left\{(\rho+hs)^2+(\rho+ks)^2\right\}^{\frac{1}{2}\ell}$$

oder es ist

$$\sum \frac{1}{(\xi^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}\ell}} \ \leq\ C\cdot\frac{1}{\{(\rho+hs)^2+(\rho+ks)^2\}^{\frac{1}{2}\ell}}\ ,$$

falls links die Summe auf alle zu dem gewählten h, k gehörigen Paare m_1, n_1 bezogen ist. Darum läßt sich schreiben

$$\sum_{m_1,n_1} \frac{1}{(\xi^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}\ell}} \ \leq\ C\cdot \sum_{\substack{h=1,2\dots\\ k=1,2\dots}} \frac{1}{\{(\rho+hs)^2+(\rho+ks)^2\}^{\frac{1}{2}\ell}}$$

und man darf links und rechts die Summe ins Unendliche erstrecken [14], sobald gezeigt ist, daß die [S.24]
rechts stehenden Summe dafür convergiert. Das gelingt durch Vergleichung mit einem Doppelintegral: für $\rho+(h-1)s < x < \rho+hs$ und $\rho+(k-1)s < x < \rho+ks$ hat man

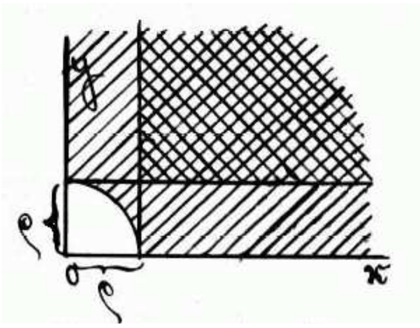

Abb. 2: zu S.24

$$\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}l}} \ >\ \frac{1}{\{(\rho+hs)^2+(\rho+ks)^2\}^{\frac{1}{2}l}}$$

und es folgt aus dem Begriff des Doppelintegrals

$$\int_{\rho+(k-1)s}^{\rho+ks}\int_{\rho+(h-1)s}^{\rho+hs} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}\ell}} \ >\ s^2\cdot\frac{1}{\{(\rho+hs)^2+(\rho+ks)^2\}^{\frac{1}{2}\ell}}$$

[14] daß man in $\sum\limits_{m_1,n_1}\sum\limits_{3,\infty}^{\ell}\frac{1}{\ell}\frac{(u-u_0)^\ell}{(u+m_1v+n_1w)^\ell}$ nach ℓ zuletzt summieren darf, wird am Schluß von Anhang I (a.S.169) gezeigt.

oder

$$\sum_{\substack{h=1,2\dots\\k=1,2\dots}} \frac{1}{\{(\rho+hs)^2+(\rho+ks)^2\}^{\frac{1}{2}\ell}} \;<\; \frac{1}{s^2}\cdot\int_\rho^{\cdots}\!\!\int_\rho^{\cdots} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}\ell}}$$

wo man beiderseits bis ins Unendliche gehn darf, wenn die rechte Seite sich als convergent erweist. Nun ist aber, für $\ell \geq 3$, $\int\!\!\int \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}\ell}}$ für den Integrationsbereich $x>0, y>0, x^2+y^2>\rho^2$ convergent, denn man kann dafür schreiben [S.25]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\!\!\int_\rho^\infty \frac{r dr\, d\phi}{r^\ell} \;=\; \frac{\pi}{2}\cdot\int_\rho^\infty r^{1-\ell}\,dr \;=\; \frac{\pi}{2}\cdot(0-\frac{\rho^{2-\ell}}{2-\ell}) \;=\; \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\ell-2}\cdot\frac{1}{\rho^{\ell-2}}\,.$$

Daraus folgt die Convergenz der a.v.S. stehenden Doppelsumme, bis ins Unendliche genommen, denn das dort stehende Doppelintegral ist kleiner als das eben bestimmte. Man hat

$$\sum_{\substack{h=1,2\dots\\k=1,2\dots}} \frac{1}{\{(\rho+hs)^2+(\rho+ks)^2\}^{\frac{1}{2}\ell}} \;<\; \frac{1}{s^2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\ell-2}\cdot\frac{1}{\rho^{\ell-2}}$$

oder

$$\sum_{m_1,n_1} \frac{1}{|u+m_1v+n_1w|^\ell} \;=\; \sum_{m_1,n_1}\frac{1}{(\xi^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}\ell}} \;<\; C\cdot\frac{1}{s^2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\ell-2}\cdot\frac{1}{\rho^{\ell-2}}\;,$$

wo die Summation bis ins Unendliche zu erstrecken ist. [15] . Wegen $|u-u_0|=\rho$ folgt dann

$$\sum_{m_1,n_1}\frac{|u-u_0|^\ell}{|u+m_1v+n_1w|^\ell} \;<\; \frac{\pi}{2}\cdot\frac{C}{s^2}\cdot\rho^2\cdot\frac{1}{\ell-2}\;,$$

wofür $C'\cdot\frac{1}{\ell-2}$ geschrieben werde. Dann hat man [S.26]

$$\sum_{m_1,n_1}\sum_{3,L}^{\ell}\frac{1}{\ell}\frac{|u-u_0|^\ell}{|u+m_1v+n_1w|^\ell} \;<\; C'\cdot\sum_{3,L}^{\ell}\frac{1}{\ell(\ell-2)}\;,$$

und $\sum_{3,L}^{\ell}\frac{1}{\ell(\ell-2)}$ ist kleiner als $\sum_{3,L}^{\ell}\frac{1}{(\ell-2)^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(L-2)^2}$ und das bleibt für $L=\infty$ noch endlich. Daraus folgt, daß

$$\sum_{m_1,n_1}\sum_{3,L}^{\ell}\frac{1}{\ell}\,\Big|\frac{u-u_0}{u+m_1v+n_1w}\Big|^\ell$$

auch convergiert [16] , oder daß

$$\sum_{m_1,n_1}\sum_{3,L}^{\ell}\frac{1}{\ell}\,\Big(\frac{u-u_0}{u+m_1v+n_1w}\Big)^\ell$$

unbedingt convergiert, unabhängig von der Art, wie die Summation für m_1 und n_1 ausgeführt wird.

[15] oder zunächst nur auf beliebig großes endliches Bereich sich bezieht, erst nach der Summation über $\ell=3\dots\infty$ dehnt man dieses Gebiet unbegrenzt aus.

[16] daß man nach ℓ zuletzt summieren darf, wird am Schluß von Anhang I (auf S.169) gezeigt.

Die Formel von S.21

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-N,+N}^{n}\sum_{-M,+M}^{m}\lg\bigl(1-\frac{u-u_0}{u+mv+nw}\bigr)$$
$$+\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{\substack{|n|\le N\\|m|\le M}}\frac{u-u_0}{u+mv+nw}+\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\frac{1}{2}\sum_{\substack{|n|\le N\\|m|\le M}}\frac{(u-u_0)^2}{(u+mv+nw)^2}$$
$$=\sum_{m_0,n_0}\lg\bigl(1-\frac{u-u_0}{u+m_0v+n_0w}\bigr)+\sum_{m_0,n_0}\frac{u-u_0}{u+m_0v+n_0w}+\frac{1}{2}\sum_{m_0,n_0}\frac{(u-u_0)^2}{(u+m_0v+n_0w)^2}$$
$$-\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{\substack{|n_1|\le N\\|m_1|\le M}}\sum_{3,\infty}^{\ell}\frac{1}{\ell}\frac{(u-u_0)^\ell}{(u+m_1v+n_1w)^\ell}$$

zeigt, daß der Ausdruck [S.27]

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-N,+N}^{n}\sum_{-M,+M}^{m}\lg\bigl(1-\frac{u-u_0}{u+mv+nw}\bigr)$$
$$+\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{\substack{|n|\le N\\|m|\le M}}\frac{u-u_0}{u+mv+nw}+\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\frac{1}{2}\sum_{\substack{|n|\le N\\|m|\le M}}\frac{(u-u_0)^2}{(u+mv+nw)^2}\ ,$$

von der endlichen Summe

$$\sum_{m_0,n_0}\bigl\{\lg\bigl(1-\frac{u-u_0}{u+m_0v+n_0w}\bigr)+\frac{u-u_0}{u+m_0v+n_0w}+\frac{1}{2}\frac{(u-u_0)^2}{(u+m_0v+n_0w)^2}\bigr\}$$

abgesehen, der unbedingt convergenten Reihe

$$\sum_{m,n}\sum_{3,\infty}^{\ell}\frac{1}{\ell}\frac{(u-u_0)^\ell}{(u+m_1v+n_1w)^\ell}$$

gleich ist, d.h. daß die Funktion

$$\sum_{-N,+N}^{n}\sum_{-M,+M}^{m}\bigl\{\lg\bigl(1-\frac{u-u_0}{u+mv+nw}\bigr)+\frac{u-u_0}{u+mv+nw}+\frac{1}{2}\frac{(u-u_0)^2}{(u+mv+nw)^2}\bigr\}$$

sich einer festen Grenze nähert bei jeder Art des Grenzübergangs von der endlichen zur zweifach unendlichen Summe.

$$\sum_{-\infty,+\infty}^{n}\sum_{-\infty,+\infty}^{m}\bigl\{\lg\bigl(1-\frac{u-u_0}{u+mv+nw}\bigr)+\frac{u-u_0}{u+mv+nw}+\frac{1}{2}\frac{(u-u_0)^2}{(u+mv+nw)^2}\bigr\}$$

ist absolut und unbedingt convergent. Diese völlig bestimmte Funktion soll nun mit

$$\lg\,\mathcal{E}n(u_0,u,v,w)$$

bezeichnet werden. Man kann dann die Eisenstein'sche Funktion $\mathcal{E}n(u_0,u,v,w)$ selbst so darstellen: [S.28]

$$\mathcal{E}n(u_0,u,v,w)=\bigl(\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\prod_{-N,+N}^{n}\prod_{-M,+M}^{m}\frac{u_0+mv+nw}{u+mv+nw}\bigr)\cdot\mathrm{e}^{(u-u_0)\cdot f_1(u,v,w)+\frac{(u-u_0)^2}{2}\cdot f_2(u,v,w)}\ ,$$

wobei gesetzt ist [17]

$$f_1(u,v,w) = \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{-N,+N}^{n} \sum_{-M,+M}^{m} \frac{1}{u+mv+nw}$$

$$f_2(u,v,w) = \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{-N,+N}^{n} \sum_{-M,+M}^{m} \frac{1}{(u+mv+nw)^2} \ .$$

[17] Die Convergenz dieser Summen wird im Anhang II, S.172-176 gezeigt.

Vorlesung (30.11.91)

Daher gilt auch die Gleichung

$$\mathcal{E}n(u_0,u,v,w) = \frac{\vartheta(\frac{u_0}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}\cdot \mathrm{e}^{(u-u_0)\cdot f_1(u,v,w)+\frac{(u-u_0)^2}{2}\cdot f_2(u,v,w)}\ .$$

Diese Funktion hat nun die wichtige Eigenschaft, daß sie sich nicht ändert, wenn das System ihrer Argumente u_0,u,v,w durch das äquivalente System u_0',u',v',w' ersetzt wird, dessen Zusammenhang mit dem ursprünglichen System auf S.11-15 behandelt wurde. Denn $\mathcal{E}n(u_0,u,v,w)$ ist die [S.29]
auf alle ganzzahligen Wertepaare m,n erstreckte unbedingt convergente Doppelsumme mit dem allgemeinene Glied

$$\lg\frac{u_0+mv+nw}{u+mv+nw}+\frac{u-u_0}{u+mv+nw}+\frac{1}{2}\frac{(u-u_0)^2}{(u+mv+nw)^2}$$

und auf Grund der S.14, 15 zusammengestellten Transformationsformeln geht dieses Glied über in

$$\lg\frac{u_0'+m'v'+n'w'}{u'+m'v'+n'w'}+\frac{u'-u_0'}{u'+m'v'+n'w'}+\frac{1}{2}\frac{(u'-u_0')^2}{(u'+m'v'+n'w')^2}$$

Demnach sind $\lg\mathcal{E}n(u_0,u,v,w)$ und $\lg\mathcal{E}n(u_0',u',v',w')$ durch gliedweise übereinstimmende unbedingt convergente Doppelreihen, in denen die Glieder nur verschieden angeordnet sind, dargestellt, also einander gleich.

$\mathcal{E}n(u_0,u,v,w)$ ist eine Invariante der auf S.14,15 behandelten Äquivalenz, und so heißt $\mathcal{E}n(u_0,u,v,w)$ die Eisenstein'sche Invariante.

Wenn eine Funktion - wie für $\mathcal{E}n(u_0,u,v,w)$ - bei einer Transformation der Argumente unverändert bleibt, soll sie atrop heißen, isotrop heißen zwei Funktionen, die sich in ganz der- [S.30]
selben Weise ändern. Demnach ist

$$\mathcal{E}n(u_0,u,v,w) = \frac{\vartheta(\frac{u_0}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}\cdot \mathrm{e}^{(u-u_0)\cdot f_1(u,v,w)+\frac{(u-u_0)^2}{2}\cdot f_2(u,v,w)}$$

atrop für die Äquivalenz $(u_0,u,v,w)\sim(u_0',u',v',w')$ während

$$\frac{\vartheta(\frac{u_0}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}\quad\text{und}\quad \mathrm{e}^{(u-u_0)\cdot f_1(u,v,w)+\frac{(u-u_0)^2}{2}\cdot f_2(u,v,w)}$$

dafür isotrop sind.

Ein zweiter Beweis für die Atropie von $\lg\mathcal{E}n(u_0,u,v,w)$ bezüglich der Aquivalenz läßt sich so geben.

Man teilt von der Gesamtheit aller ganzzahligen Wertepaare m,n alle diejenigen ab, wofür $|u+mv+nw|\le|u-u_0|$ ist, und bezeichnet diese mit mit m_0,n_0, alle übrigen Paare m,n aber mit m_1,n_1. [Auf S.21,22 war die Einteilung eine etwas andere]. Für

$$\begin{aligned}\lg\mathcal{E}n(u_0,u,v,w) &= \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-N,+N}^{n}\sum_{-M,+M}^{m}\lg\bigl(1-\frac{u-u_0}{u+mv+nw}\bigr)\\ &\quad+(u-u_0)\cdot f_1(u,v,w)+\frac{(u-u_0)^2}{2}\cdot f_2(u,v,w)\end{aligned}$$

erhält man dann leicht [S.31]

$$\lg \mathcal{E}n(u_0,u,v,w) \;=\; \sum_{m_0,n_0} \Big\{ \lg\big(1-\frac{u-u_0}{u+m_0v+n_0w}\big)+\frac{u-u_0}{u+m_0v+n_0w}+\frac{1}{2}\frac{(u-u_0)^2}{(u+m_0v+n_0w)^2}\Big\}$$
$$-\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{\substack{|n_1|\le N\\ |m_1|\le M}}\sum_{3,\infty}^{\ell}\frac{1}{\ell}\frac{(u-u_0)^\ell}{(u+m_1v+n_1w)^\ell}\ ,$$

indem man für die Wertepaare m_1, n_1 den Logarithmus in eine Reihe entwickelt und alles geeignet zusammenfaßt (vgl. auf S.22 oben u. 26 unten). Analog hat man

$$\lg \mathcal{E}n(u_0',u',v',w') \;=\; \sum_{m_0',n_0'} \Big\{ \lg\big(1-\frac{u'-u_0'}{u'+m_0'v'+n_0'w'}\big)+\frac{u'-u_0'}{u'+m_0'v'+n_0'w'}+\frac{1}{2}\frac{(u'-u_0')^2}{(u'+m_0'v'+n_0'w')^2}\Big\}$$
$$-\lim_{N'=\infty}\lim_{M'=\infty}\sum_{\substack{|n_1'|\le N'\\ |m_1'|\le M'}}\sum_{3,\infty}^{\ell}\frac{1}{\ell}\frac{(u'-u_0')^\ell}{(u'+m_1'v'+n_1'w')^\ell}\ ,$$

wo m_0', n_0' wieder genau alle die Wertepaare sein sollen, für welche $\lg\big(1-\frac{u'-u_0'}{u'+m_0'v'+n_0'w'}\big)$ nicht in die Reihe entwickelbar ist. Nun geht aber auf Grund der Transformation von S.14

$$\lg\big(1-\frac{u-u_0}{u+m_0v+n_0w}\big)+\frac{u-u_0}{u+m_0v+n_0w}+\frac{1}{2}\frac{(u-u_0)^2}{(u+m_0v+n_0w)^2}$$

in [S.32]

$$\lg\big(1-\frac{u'-u_0'}{u'+m_0'v'+n_0'w'}\big)+\frac{u'-u_0'}{u'+m_0'v'+n_0'w'}+\frac{1}{2}\frac{(u'-u_0')^2}{(u'+m_0'v'+n_0'w')^2}$$

über, und aus jedem m_0, n_0, wofür $|\frac{u-u_0}{u+m_0v+n_0w}| \ge 1$ ist, geht ein m_0', n_0' hervor, wofür $|\frac{u'-u_0'}{u'+m_0'v'+n_0'w'}| \ge 1$ ist. So enthalten die beiden endlichen Summen in den Ausdrücken von $\lg \mathcal{E}n(u_0,u,v,w)$ und $\lg \mathcal{E}n(u_0',u',v',w')$ a.v.S. genau dieselben Glieder, sie sind identisch und es folgt

$$\lg \mathcal{E}n(u_0,u,v,w) - \lg \mathcal{E}n(u_0',u',v',w')$$
$$= \lim_{N'=\infty}\lim_{M'=\infty}\sum_{\substack{|n_1'|\le N'\\ |m_1'|\le M'}}\sum_{3,\infty}^{\ell}\frac{1}{\ell}\frac{(u'-u_0')^\ell}{(u'+m_1'v'+n_1'w')^\ell} - \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{\substack{|n_1|\le N\\ |m_1|\le M}}\sum_{3,\infty}^{\ell}\frac{1}{\ell}\frac{(u-u_0)^\ell}{(u+m_1v+n_1w)^\ell}$$

Betrachtet man die hier auftretenden Summen vor dem Grenzübergang, so sieht man, daß sie viele Glieder gemein haben. Allgemein war (S.14)

$$m' = \alpha\, m + \beta\, n - \gamma\ , \qquad n' = \alpha' m + \beta' n - \gamma'\ ;$$

folgt also aus $|m_1| \le M,\ |n_1| \le N$ auch

$$|\alpha m_1 + \beta n_1 - \gamma| \le M' \quad \text{und} \quad |\alpha' m_1 + \beta' n_1 - \gamma'| \le N',$$

so tritt das zugehörige Glied in beiden Reihen auf und hebt sich fort. Hat man aber [S.33]

$$|m_1| \le M \quad \text{und} \quad |n_1| \le N,$$

und dabei entweder

$$|\alpha m_1 + \beta n_1 - \gamma| > M' \quad \text{oder} \quad |\alpha' m_1 + \beta' n_1 - \gamma'| > N',$$

so kommt in

$$\sum_{\substack{|n_1|\le N\\|m_1|\le M}}\sum_{3,\infty}^{\ell}\frac{1}{\ell}\frac{(u-u_0)^\ell}{(u+m_1v+n_1w)^\ell}$$

ein Glied vor, welches in der anderen Summe nicht auftritt; und wenn zwar

$$|\alpha m_1+\beta n_1-\gamma|\le M' \quad \text{und} \quad |\alpha' m_1+\beta' n_1-\gamma'|\le N',$$

aber entweder $|m_1|>M$ oder $|n_1|>N$ (oder beides zugleich) stattfindet, so fehlt in der Summe mit den nicht accentuierten Ausdrücken ein in der anderen vorhandenes Glied.

Die Gesamtheit dieser in den endlichen Reihen sich nicht direkt forthebenden Glieder wird aber im Grenzübergang zu 0, wie sich so zeigen läßt: Die Summe der absoluten Werte aller der Bestandteile von [S.34]

$$\sum_{\substack{|n_1'|\le N'\\|m_1'|\le M'}}\sum_{3,\infty}^{\ell}\frac{1}{\ell}\frac{(u'-u_0')^\ell}{(u'+m_1'v'+n_1'w')^\ell}, \quad \text{welche in} \quad \sum_{\substack{|n_1|\le N\\|m_1|\le M}}\sum_{3,\infty}^{\ell}\frac{1}{\ell}\frac{(u-u_0)^\ell}{(u+m_1v+n_1w)^\ell}$$

nicht auftreten, ist jedenfalls kleiner als

$$\sum_{n,m}\sum_{3,\infty}^{\ell}\frac{1}{\ell}\frac{(u-u_0)^\ell}{(u+mv+nw)^\ell},$$

wo m und n entweder der Bedingung $|m|>M$ oder der Bedingung $|n|>N$ genügen. Kann man von dieser Summe zeigen, daß sie unter eine beliebig kleinen Grenze herabsinkt, wenn nur M und N hinreichend groß sind, so wird von der entsprechenden Summe mit accentuierten Buchstaben gleiches gelten, und die Gesamtheit der a.v.S. besprochenen Reihenglieder wird, selbst wenn man sie alle durch ihre absoluten Werte ersetzt, zu 0. Damit wäre der Satz wiederum bewiesen, aber im Grunde doch auf keine wesentlich neue Art; es kommt die Betrachtung doch wesentlich wieder auf den Nachweis unbedingter Convergenz von [S.35]

$$\sum_{n,m}\sum_{3,\infty}^{\ell}\frac{1}{\ell}\frac{(u-u_0)^\ell}{(u+mv+nw)^\ell},$$

für beliebige Art der Summation über alle ganzzahligen Wertepaare m, n heraus, nur daß man hier mit dem Reihenrest operiert. Näheres hierüber, also auch eine Ergänzung zu S.16-26, bietet der Anhang (S.159-172).

Weil $\lg \mathcal{E}n(u_0,u,v,w)$ eine Invariante der zur Transformation von S.14 gehörigen Äquivalenz ist, so sind, wie schon S.30 hervorgehoben wurde, die beiden Funktionen

$$\lg\frac{\vartheta(\frac{u_0}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})} \quad \text{und} \quad -(u-u_0)f_1(u,v,w)-\frac{(u-u_0)^2}{2}f_2(u,v,w)$$

isotrop für diese Äquivalenz, d.h. sie ändern sich bei Vornahme dieser Transformation genau gleich.

Die Art der Änderung von $f_1(u,v,w)$ und $f_2(u,v,w)$ soll nun gesucht werden, zuerst für spezielle Fälle. [S.36]

$$f_r(u,v,w)=\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-N,+N}^{n}\sum_{-M,+M}^{m}\frac{1}{(u+mv+nw)^r} \qquad (r=1,2)$$

Für $r > 2$ findet absolute Convergenz u. damit Isotropie für die allgemeine Äquivalenz statt.
Zuerst sucht man $f_r(u+v,v,w) - f_r(u,v,w)$ und findet dafür

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-N,+N}^{n}\sum_{-M,+M}^{m}\frac{1}{(u+(m+1)v+nw)^r} - \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-N,+N}^{n}\sum_{-M,+M}^{m}\frac{1}{(u+mv+nw)^r}$$
$$= \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\Big\{\sum_{-N,+N}^{n}\sum_{-M+1,M+1}^{m}\frac{1}{(u+mv+nw)^r} - \sum_{-N,+N}^{n}\sum_{-M,+M}^{m}\frac{1}{(u+mv+nw)^r}\Big\}$$
$$= \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\Big\{\sum_{-N,+N}^{n}\frac{1}{(u+(M+1)v+nw)^r} - \sum_{-N,+N}^{n}\frac{1}{(u+Mv+nw)^r}\Big\}\ .$$

Die in Klammern stehende endliche Summe wird gewiß zu 0, wenn man den ersten Grenzübergang ausführt und M unendlich werden läßt; läßt man dann N mehr u. mehr wachsen, so bleibt der Ausdruck natürlich 0, und man hat [S.37]

$$f_r(u+v,v,w) - f_r(u,v,w) = 0 \qquad\qquad (r=1,2)\ .$$

Ferner bildet man analog

$$f_r(u+w,v,w) - f_r(u,v,w) = \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\Big\{\sum_{-M,M}^{m}\frac{1}{(u+mv+(N+1)w)^r} - \sum_{-M,M}^{m}\frac{1}{(u+mv-Nw)^r}\Big\}\ .$$

Hier sind die Fälle r=1 und r=2 getrennt zu behandeln. Bekanntlich hat man

$$\lim_{M=\infty}\sum_{-M,M}^{m}\frac{1}{x+mv} = \frac{1}{v}\cdot\lim_{M=\infty}\sum_{-M,M}^{m}\frac{1}{\frac{x}{v}+m} = \frac{\pi}{v}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{v} = \frac{\pi i}{v}\cdot\frac{e^{\frac{+\pi x i}{v}} + e^{\frac{-\pi x i}{v}}}{e^{\frac{+\pi x i}{v}} - e^{\frac{-\pi x i}{v}}}$$

und findet so

$$f_r(u+v,v,w) - f_r(u,v,w)$$
$$= \lim_{N=\infty}\Big\{\frac{\pi i}{v}\cdot\frac{e^{\frac{\pi i}{v}(u+(N+1)w)} + e^{-\frac{\pi i}{v}(u+(N+1)w)}}{e^{\frac{\pi i}{v}(u+(N+1)w)} - e^{-\frac{\pi i}{v}(u+(N+1)w)}} - \frac{\pi i}{v}\cdot\frac{e^{\frac{\pi i}{v}(u-Nw)} + e^{-\frac{\pi i}{v}(u-Nw)}}{e^{\frac{\pi i}{v}(u-Nw)} - e^{-\frac{\pi i}{v}(u-Nw)}}\Big\}\ .$$

Ist nun wieder ε gleich $+1$ oder -1 und zwar so gewählt, daß $\varepsilon\cdot\frac{w}{v}$ einen positiven imaginären Teil hat (S.9), so kann man hierfür schreiben

$$\lim_{N=\infty}\frac{\pi i}{v}\cdot\Big\{\varepsilon\cdot\frac{e^{\frac{\varepsilon\pi i}{v}(u+(N+1)w)} + e^{-\frac{\varepsilon\pi i}{v}(u+(N+1)w)}}{e^{\frac{\varepsilon\pi i}{v}(u+(N+1)w)} - e^{-\frac{\varepsilon\pi i}{v}(u+(N+1)w)}} - \varepsilon\cdot\frac{e^{\frac{\varepsilon\pi i}{v}(u-Nw)} + e^{-\frac{\varepsilon\pi i}{v}(u-Nw)}}{e^{\frac{\varepsilon\pi i}{v}(u-Nw)} - e^{-\frac{\varepsilon\pi i}{v}(u-Nw)}}\Big\}$$
$$= \lim_{N=\infty}\frac{\pi i\varepsilon}{v}\cdot\Big\{\frac{e^{+\frac{2\varepsilon\pi i}{v}(u+(N+1)w)}+1}{e^{+\frac{2\varepsilon\pi i}{v}(u+(N+1)w)}-1} - \frac{1+e^{-\frac{2\varepsilon\pi i}{v}(u-Nw)}}{1-e^{-\frac{2\varepsilon\pi i}{v}(u-Nw)}}\Big\}\ .$$

Die einzelnen Exponentialfunktionen werden nun mit unbegrenzt wachsendem positiven N zu 0, [S.38]
weil $\frac{\varepsilon\pi i\cdot w}{v}$ immer negativen reellen Teil hat; die ganze Klammergröße wird -2, und daher ist

$$f_1(u+w,v,w) - f_1(u,v,w) = -\frac{2\varepsilon\pi i}{v}\ .$$

Weiter hat man

$$\lim_{M=\infty}\sum_{-M,M}^{m}\frac{1}{(x+mv)^2} = \frac{1}{v^2}\cdot\lim_{M=\infty}\sum_{-M,M}^{m}\frac{1}{(\frac{x}{v}+m)^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\pi^2}{\sin^2\frac{\pi x}{v}} = -\frac{4\pi^2}{v^2}\cdot\frac{1}{(e^{+\frac{\pi x i}{v}} - e^{-\frac{\pi x i}{v}})^2}\ ,$$

d.h.

$$
\begin{aligned}
&f_2(u+w,v,w)-f_2(u,v,w)\\
&=\lim_{N=\infty}\Big\{-\frac{4\pi^2}{v^2}\cdot\frac{1}{(\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{v}(u+(N+1)w)}-\mathrm{e}^{-\frac{\pi i}{v}(u+(N+1)w)})^2}+\frac{4\pi^2}{v^2}\cdot\frac{1}{(\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{v}(u-Nw)}-\mathrm{e}^{-\frac{\pi i}{v}(u-Nw)})^2}\Big\}
\end{aligned}
$$

und in jedem Nenner wird beim Grenzübergang ein Bestandteil unendlich, so daß der ganze Grenzwert null ist.

$$f_2(u+w,v,w)-f_2(u,v,w)=0.$$

Das Resultat der Untersuchung der letzten drei Seiten ist folgendes: [S.39]

$$f_r(u+v,v,w)-f_r(u,v,w)=0 \qquad (r=1,2)$$

$$f_r(u+w,v,w)-f_r(u,v,w)=\begin{cases}-\frac{2\varepsilon\pi i}{v} & \text{für } r=1\\ 0 & \text{für } r=2\end{cases}$$

oder

$$
\begin{aligned}
f_1(u+gv+hw,v,w)-f_1(u,v,w)&=-\frac{2h\varepsilon\pi i}{v}\\
f_2(u+gv+hw,v,w)-f_2(u,v,w)&=0\,.
\end{aligned}
$$

Ein Kunstgriff führt zur Bestimmung von $f_r(u',v',w')-f_r(u+v,v,w)$ für die Transformation von S.14. Man kann Ausdrücke für $f_r(u,v',w')-f_r(u,v,w)$ folgendermaßen finden.

$$f_1(u,v',w')-f_1(u,v,w)=\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\Big\{\sum_{-N,+N}^{n}\sum_{-M,+M}^{m}\frac{1}{u+mv'+nw'}-\sum_{-N,+N}^{n}\sum_{-M,+M}^{m}\frac{1}{u+mv+nw}\Big\}$$

Die zu $m=0,n=0$ gehörigen beiden Glieder heben sich fort, sonst aber läßt sich auf $\frac{1}{u+mv'+nw'}$ und $\frac{1}{u+mv+nw}$ die Taylor'sche Entwicklung anwenden und man findet

$$\frac{1}{u+mv+nw}=\frac{1}{mv+nw}-\frac{u}{(mv+nw)^2}+\frac{u^2}{(mv+nw)^2}\mp\dots\,,$$

und daraus [S.40]

$$
\begin{aligned}
&\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-N,+N}^{n}\sum_{-M,+M}^{m}\frac{1}{u+mv+nw}\\
&=\frac{1}{u}-u\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum\sum\frac{1}{(mv+nw)^2}-u^3\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum\sum\frac{1}{(mv+nw)^4}-\dots\,,
\end{aligned}
$$

wobei die einzelnen Summen auf rechter Seite sich wieder auf $-N\le n\le +N, -M\le m\le +M$, aber mit Ausschluß des einen Gliedes $m=0,n=0$ beziehen.

Nun ist die Doppelsumme mit dem allgemeinen Glied $\frac{1}{(mv+nw)^k}$ für $k>2$ unbedingt convergent, man braucht also vom Glied mit n^3 an keinen Limes mehr zu schreiben:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-N,+N}^{n}\sum_{-M,+M}^{m}\frac{1}{u+mv+nw}\\
&=\frac{1}{u}-u\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-N,+N}^{n}\sum_{-M,+M}^{m}\frac{1}{(mv+nw)^2}-u^3\sum_{m,n}\frac{1}{(mv+nw)^4}-\dots\,.
\end{aligned}
$$

Ebenso hat man [S.41]

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-N,+N}^{n}\sum_{-M,+M}^{m}\frac{1}{u+mv'+nw'}$$
$$=\frac{1}{u}-u\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-N,+N}^{n}\sum_{-M,+M}^{m}\frac{1}{(mv'+nw')^2}-u^3\sum_{m,n}\frac{1}{(mv'+nw')^4}-\dots,$$

wo rechts in den Summen $m=0,n=0$ auszuschließen ist. Nun folgt

$$f_1(u,v',w')-f_1(u,v,w)$$
$$=+u\{\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-N,+N}^{n}\sum_{-M,+M}^{m}\frac{1}{(mv+nw)^2}-\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-N,+N}^{n}\sum_{-M,+M}^{m}\frac{1}{(mv'+nw')^2}\}$$
$$+u^3\{\sum_{m,n}\frac{1}{(mv+nw)^4}-\sum_{m,n}\frac{1}{(mv'+nw')^4}\}$$
$$+\ \dots\ .$$

Es war aber (S.14)

$$v'=\beta'v-\alpha'w \qquad w'=-\beta'v+\alpha w\,.$$

Setzt man daher $mv'+nw'=m'v+n'w$, so ist hierzu nötig:

$$m'=m\beta'-n\beta \qquad n'=-m\alpha'+n\alpha$$

und die zu dieser Transformation der m,n gehörige Determinante ist $+1$. Für $k=4,6,8,\dots$ kann man also die unbedingt convergente, auf alle ganzzahligen Wertepaare m,n außer $0,0$ bezogene Summe $\sum_{m,n}\frac{1}{(mv'+nw')^k}$ durch $\sum_{m',n'}\frac{1}{(mv+nw)^k}$ ersetzen, oder bei neuer Änderung der Bezeich- [S.42]
nung durch $\sum_{m,n}\frac{1}{(mv+nw)^k}$. Damit ist gezeigt, daß die Coefficienten von $u^3,u^5\dots$ sämtlich 0 sind, d.h. die Beziehung besteht

$$f_1(u,v',w')-f_1(u,v,w)$$
$$=-u\{\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-N,+N}^{n}\sum_{-M,+M}^{m}\frac{1}{(mv'+nw')^2}-\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-N,+N}^{n}\sum_{-M,+M}^{m}\frac{1}{(mv+nw)^2}\}\,.$$

[Hierbei ist aber ein sehr wesentlicher Punkt zu beachten [18]: Die benutzte Taylor'sche Entwicklung gilt nur für $|u|<|mv+nw|$ resp. für $|u|<|mv'+nw'|$, also für beliebiges m,n außer $0,0$ nur innerhalb eines gewissen Kreises um den Nullpunkt der u-Ebene, d.h. für absolut genommen kleines u. Nun sieht man aber sofort, daß $f_1(u,v',w')-f_1(u,v,w)$ keine Unendlichkeitspunkte im Endlichen besitzt, demnach für jedes endliche u eindeutig in die convergente Reihe [S.43]

$$A_1u+A_2u^3+A_3u^5+\dots+A_hu^{2h-1}+\dots$$

entwickelbar ist. (Der Ausdruck ist eine ungerade Funktion). Für hinreichend kleines u ergab sich $A_h=0$ für $h\geq 2$, und das gilt allgemein. Die Formel a.v.S. ist für beliebiges u richtig.

Ein anderes Verfahren wäre die Benutzung der Taylor'schen Reihe mit dem Restglied. Nach

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3\pm\dots+(-1)^{k-1}x^{k-1}+(-1)^k\cdot\frac{x^k}{1+x}$$

[18] eigener Zusatz (vier Seiten)

findet man

$$\frac{1}{u+mv+nw} = \frac{1}{mv+nw} \cdot \frac{1}{1+\frac{u}{mv+nw}}$$
$$= \frac{1}{mv+nw} - \frac{u}{(mv+nw)^2} \pm \ldots + (-1)^{k-1}\frac{u^{k-1}}{(mv+nw)^k} + (-1)^k \cdot \frac{u^k}{(mv+nw)^k(u+mv+nw)}$$

oder (für gerades k)

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty} \sum_{-N,+N}^{n} \sum_{-M,+M}^{m} \frac{1}{u+mv+nw} =$$
$$= \frac{1}{u} - u \cdot \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty} \sum_{-N,+N}^{n} \sum_{-M,+M}^{m} \frac{1}{(mv+nw)^2} - u^3 \cdot \sum_{m,n} \frac{1}{(mv+nw)^4}$$
$$- \ \ldots \ - u^{2h-1} \cdot \sum_{m,n} \frac{1}{(mv+nw)^{2h}} + u^{2h} \cdot \sum_{m,n} \frac{1}{(mv+nw)^{2h}(u+mv+nw)} \ .$$

Dabei ist rechts $m=0, n=0$ überall auszuschließen, und die Summen, wo keine Limes geschrieben ist, sind unbedingt convergente Doppelsummen. Die weitere Betrachtung ist genau dieselbe wie früher; alle Coefficienten der einzelnen Potenzen von u in der Entwicklung für $f_1(u,v',w') - f_1(u,v,w)$ heben sich fort, außer beim Glied mit u^1. [S.44]

Eine dritte strenge Beweisart endlich wäre die, daß man alle m, n einteilt in m_0, n_0, wo $|u| \geq |m_0 v + n_0 w|$, und und in Paare m_1, n_1, wofür $|u| < |m_1 v + n_1 w|$, und daß man $\frac{1}{u+m_1v+n_1w}$ in die unendliche Reihe

$$\frac{1}{m_1v+n_1w} - \frac{u}{(m_1v+n_1w)^2} + \frac{u^2}{(m_1v+n_1w)^3} \mp \ldots$$

entwickelt. Man findet dann leicht

$$f_1(u,v,w) = \sum_{m_0,n_0} \frac{1}{u+m_0v+n_0w} - u \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty} \sum_{\substack{|n_1|\leq N \\ |m_1|\leq M}} \frac{1}{(m_1v+n_1w)^2} - u^3 \sum_{m_1,n_1} \frac{1}{(m_1v+n_1w)^4} - \cdots \ ,$$

wobei die letzte angeschriebene Summe und alle folgenden unbedingt convergieren. Ebenso kann man schreiben [S.45]

$$f_1(u,v',w') = \sum_{m_0',n_0'} \frac{1}{u+m_0'v'+n_0'w'} - u \lim_{N'=\infty}\lim_{M'=\infty} \sum_{\substack{|n_1'|\leq N' \\ |m_1'|\leq M'}} \frac{1}{(m_1'v'+n_1'w')^2} - u^3 \sum_{m_1',n_1'} \frac{1}{(m_1'v'+n_1'w')^4} - \cdots$$

wo m_0', n_0' durch $|u| \geq |m_0'v' + n_0'w'|$, m_1', n_1' durch $|u| < |m_1'v' + n_1'w'|$ charakterisiert sind. Setzt man nun $m = \beta'm' - \beta n', n = -\alpha'm' + \alpha n'$, so folgt $m'v' + n'w' = mv + nw$ und man sieht, daß der Gesamtheit der m_0, n_0 die Gesamtheit der m_0', n_0', und daß jedem m_1, n_1 ein m_1', n_1' entspricht. So heben sich in $f_1(u,v',w') - f_1(u,v,w)$ die endlichen Summen fort und auch wegen der unbedingten Convergenz die Faktoren von $u^3, u^5, \ldots$; es bleibt nur übrig

$$+ u \cdot \left\{ \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty} \sum_{\substack{|n_1|\leq N \\ |m_1|\leq M}} \frac{1}{(m_1v+n_1w)^2} - \lim_{N'=\infty}\lim_{M'=\infty} \sum_{\substack{|n_1'|\leq N' \\ |m_1'|\leq M'}} \frac{1}{(m_1'v'+n_1'w')^2} \right\} ,$$

und weil $\sum_{m_0,n_0} \frac{1}{m_0v+n_0w} = \sum_{m_0',n_0'} \frac{1}{m_0'v'+n_0'w'}$ ist, so kann man auch schreiben: [S.46]

$f_1(u,v',w') - f_1(u,v,w)$

$$= + u \left\{ \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{-N,+N}^{n} \sum_{-M,+M}^{m} \frac{1}{(mv+nw)^2} - \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{-N,+N}^{n'} \sum_{-M,+M}^{m'} \frac{1}{(m'v'+n'w')^2} \right\}$$

und nachträglich läßt sich für m', n' wieder m, n schreiben.]

Analog zu der Formel

$f_1(u,v',w') - f_1(u,v,w)$

$$= - u \left\{ \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{-N,+N}^{n} \sum_{-M,+M}^{m} \frac{1}{(mv'+nw')^2} - \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{-N,+N}^{n} \sum_{-M,+M}^{m} \frac{1}{(mv+nw)^2} \right\},$$

wo in beiden Summen $m = 0, n = 0$ auszuschließen ist, kann man einen Ausdruck für

$$f_2(u,v',w') - f_2(u,v,w)$$

erhalten. Nach

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 \pm \ldots + (-1)^{k-1} k x^{k-1} + (-1)^k \cdot \frac{(k+1)x^k + kx^{k+1}}{(1+x)^2}$$

erhält man für $\frac{1}{(u+mv+nw)^2}$, sobald m, n nicht $0, 0$ ist, eine Reihe mit dem Anfangsglied $\frac{+1}{(mv+nw)^2}$ und man gelangt dann auf demselben Weg wie früher zu dem Resultat: [S.47]

$f_2(u,v',w') - f_2(u,v,w)$

$$= \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{-N,+N}^{n} \sum_{-M,+M}^{m} \frac{1}{(mv'+nw')^2} - \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{-N,+N}^{n} \sum_{-M,+M}^{m} \frac{1}{(mv+nw)^2},$$

wo wieder $m = 0, n = 0$ auszuschließen ist.

Auf S.39 ergab sich

$$f_r(u+gv+hw, u, v) - f_r(u,v,w) = \begin{cases} -\frac{2h\varepsilon\pi i}{v} & \text{für } r = 1 \\ 0 & \text{für } r = 2\,. \end{cases}$$

Hieraus und aus den beiden Formeln für $f_1(u,v',w') - f_1(u,v,w)$ und $f_2(u,v',w') - f_2(u,v,w)$ kann man die allgemeine Transformationsformel für $f_1(u,v,w)$ und $f_2(u,v,w)$ durch folgenden Kunstgriff finden.

Es war (S.14)

$$v' = \beta' v - \alpha' w \qquad w' = -\beta v + \alpha w$$

und

$$\alpha\beta' - \beta\alpha' = 1.$$

Für

$$g' = \alpha g + \beta h \qquad h' = \alpha' g + \beta' h$$

hat man die Gleichungen

$$gv + hw = g'v' + h'w'$$

und man findet nun [S.48]

$$\begin{aligned} f_1(u+g'v'+h'w',v',w')-f_1(u,v',w') &= -\frac{2h'\varepsilon'\pi i}{v'} \\ f_1(u+gv+hw,v,w)-f_1(u,v,w) &= -\frac{2h\varepsilon\pi i}{v} \ . \end{aligned}$$

Dabei ist ε derjenige der beiden Werte $+1$ u. -1, welcher mit dem imaginären Bestandteil von $\frac{w}{v}$ dem Zeichen nach übereinstimmt, und ε' hat entsprechende Bedeutung bezüglich $\frac{w'}{v'}$. Nun hat $\frac{w}{v} = \frac{w_1+iw_2}{v_1+iv_2}$ den Ausdruck $\frac{v_1w_2-v_2w_1}{v_1^2+v_2^2}$ zum Faktor von i; ε hat demnach dasselbe Zeichen wie $v_1w_2-v_2w_1$ und ε' dasselbe Zeichen wie $v_1'w_2-v_2'w$, man findet aber leicht

$$v_1'w_2'-v_2'w_1' = (\alpha\beta'-\alpha'\beta)(v_1w_2-v_2w_1)$$

und so ist gefunden

$$\varepsilon = \varepsilon'$$

und es folgt, wenn man zur Abkürzung

$$gv+hw = g'v'+h'w' = t$$

setzt, aus den Formeln oben auf dieser Seite durch Subtraktion: [S.49]

$$\begin{aligned} &\{f_1(u+t,v',w')-f_1(u+t,v,w)\} - \{f_1(u,v',w')-f_1(u,v,w)\} \\ &= -\frac{2h'\varepsilon\pi i}{v'} + \frac{2h\varepsilon\pi i}{v} = -\frac{2\varepsilon\pi i}{vv'}(h'v-hv') = -\frac{2\varepsilon\pi i}{vv'}\alpha'(gv+hw) \\ &= -\frac{2\varepsilon\pi i\alpha' t}{vv'} \ . \end{aligned}$$

Setzt man nun für den Augenblick

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-N,+N}^{n}\sum_{-M,+M}^{m}\frac{1}{(mv'+nw')^2} - \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-N,+N}^{n}\sum_{-M,+M}^{m}\frac{1}{(mv+nw)^2} \quad = \quad S \ ,$$

so hat man nach S.46

$$f_1(u,v',w')-f_1(u,v,w) = -u\cdot S$$

oder

$$\{f_1(u+t,v',w')-f_1(u+t,v,w)\} - \{f_1(u,v',w')-f_1(u,v,w)\} = -(u+t)\cdot S + u\cdot S = -t\cdot S \ ,$$

d.h.

$$-\frac{2\varepsilon\pi i\alpha' t}{vv'} = -t\cdot S$$

oder

$$S = +\frac{2\varepsilon\pi i\alpha' t}{vv'} \ .$$

Indem man nun für $f_1(u',v',w')-f_1(u,v,w)$ die Summe

$$\{f_1(u',v',w')-f_1(u,v',w')\} + \{f_1(u,v',w')-f_1(u,v,w)\}$$

setzt, deren erster Summand nach $u' = u+\gamma v'+\gamma' w'$ den Wert $-\frac{2\gamma'\varepsilon\pi i}{v'}$ hat, während der zweite $-u\cdot S$ oder $-\frac{2\varepsilon\pi i\alpha' u}{vv'}$ ist, so findet man [S.50]

$$f_1(u',v',w') - f_1(u,v,w) = -\frac{2\gamma'\varepsilon\pi i}{v'} - \frac{2\varepsilon\pi i\alpha' u}{vv'} .$$

Ähnlich hat man

$$\{f_2(u',v',w') - f_2(u,v',w')\} + \{f_2(u,v',w') - f_2(u,v,w)\} = 0 + S$$

oder

$$f_2(u',v',w') - f_2(u,v,w) = +\frac{2\varepsilon\pi i\alpha'}{vv'} .$$

Nach S.30 u. 35 sind die beiden Funktionen

$$\lg\frac{\vartheta(\frac{u_0}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})} \quad \text{und} \quad -(u-u_0)f_1(u,v,w) - \frac{(u-u_0)^2}{2}f_2(u,v,w)$$

isotrop für die Äquivalenz $(u_0,u,v,w) \sim (u_0',u,v,w)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\lg\frac{\vartheta(\frac{u_0'}{v'},\varepsilon\frac{w'}{v'})}{\vartheta(\frac{u'}{v'},\varepsilon\frac{w'}{v'})} - \lg\frac{\vartheta(\frac{u_0}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})} &= -(u'-u_0')f_1(u',v',w') - \frac{(u'-u_0')^2}{2}f_2(u',v',w') \\ &\quad + (u-u_0)f_1(u,v,w) + \frac{(u-u_0)^2}{2}f_2(u,v,w) .\end{aligned}$$

Nach S.14 sind $u'-u_0'$ und $u-u_0$ gleich, und man findet [S.51]

$$\begin{aligned}\lg\frac{\vartheta(\frac{u_0'}{v'},\varepsilon\frac{w'}{v'})}{\vartheta(\frac{u'}{v'},\varepsilon\frac{w'}{v'})} - \lg\frac{\vartheta(\frac{u_0}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})} &= (u-u_0)\{\frac{2\gamma'\varepsilon\pi i}{v'} + \frac{2\varepsilon\pi i\alpha' u}{vv'}\} + \frac{(u-u_0)^2}{2}\{-\frac{2\varepsilon\pi i\alpha' u}{vv'}\} \\ &= 2\varepsilon\pi i\{(u-u_0)\frac{\gamma'}{v'} + (u^2-uu_0)\frac{\alpha'}{vv'} - \frac{(u-u_0)^2}{2}\frac{\alpha'}{vv'}\} \\ &= 2\varepsilon\pi i\{(u-u_0)\frac{\gamma'}{v'} + \frac{u^2-u_0^2}{2}\frac{\alpha'}{vv'}\}\end{aligned}$$

d.h.

$$\frac{\vartheta(\frac{u_0'}{v'},\varepsilon\frac{w'}{v'})}{\vartheta(\frac{u'}{v'},\varepsilon\frac{w'}{v'})} \cdot \frac{\vartheta(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u_0}{v},\varepsilon\frac{w}{v})} = \mathrm{e}^{(u-u_0)\frac{2\varepsilon\pi i\gamma'}{v'} + (u^2-u_0^2)\frac{\varepsilon\pi i\alpha'}{vv'}} .$$

Ein Spezialfall dieser Formel ist noch erwähnenswert. Die Transformation von S.14 gibt für $\gamma = \gamma' = 0$ die spezielle Äquivalenz

$$(u_0,u,v,w) \sim (u_0,u,v',w'),$$

(wo $v' = \beta' v - \alpha' w,\ w' = -\beta v + \alpha w$). Aus

$$\frac{\vartheta(\frac{u_0}{v'},\varepsilon\frac{w'}{v'})}{\vartheta(\frac{u}{v'},\varepsilon\frac{w'}{v'})} = \frac{\vartheta(\frac{u_0}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})} \cdot \mathrm{e}^{(u^2-u_0^2)\frac{\varepsilon\pi i\alpha'}{vv'}}$$

folgt durch Multiplikation beider Seiten mit $u = v'\cdot\frac{u}{v'} = v\cdot\frac{u}{v}$ und durch $\lim_{u=0}$

$$v'\cdot\frac{\vartheta(\frac{u_0}{v'},\varepsilon\frac{w'}{v'})}{\vartheta'(0,\varepsilon\frac{w'}{v'})} = v\cdot\frac{\vartheta(\frac{u_0}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta'(0,\varepsilon\frac{w}{v})} \cdot \mathrm{e}^{-u_0^2\frac{\varepsilon\pi i\alpha'}{vv'}} .$$

Unter Benutzung der Formel $S = \frac{2\varepsilon\pi i\alpha' t}{vv'}$ (S.49) kann man dann schreiben [19] [S.52]

[19] Die folgende Entwicklung (fast eine Seite) ist ein eigener Zusatz.

$$v' \cdot \frac{\vartheta(\frac{u_0}{v'}, \varepsilon\frac{w'}{v'})}{\vartheta'(0, \varepsilon\frac{w'}{v'})} = v \cdot \frac{\vartheta(\frac{u_0}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta'(0, \varepsilon\frac{w}{v})} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{u_0^2}{2}\left(\lim \sum \frac{1}{(mv'+nw')^2} - \lim \sum \frac{1}{(mv+nw)^2}\right)} ,$$

wo die Summe sich auf alle Paare m, n außer $0, 0$ bezieht, bei denen m und n absolut genommen höchstens gleich M oder N sind und wo beim Grenzübergang erst M, dann N unendlich wird. So ist

$$v \cdot \frac{\vartheta(\frac{u_0}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta'(0, \varepsilon\frac{w}{v})} \cdot \mathrm{e}^{+\frac{u_0^2}{2} \lim\limits_{N=\infty} \lim\limits_{M=\infty} \sum\limits_{-N,+N}^{n} \sum\limits_{-M,+M}^{m} \frac{1}{(mv+nw)^2}}$$

eine Invariante der speziellen Äquivalenz $(u_0, u, v, w) \sim (u_0, u, v', w')$, welche bei $\gamma = \gamma' = 0$ entsteht. Sie soll so bezeichnet werden: [20]

$$\overline{\mathcal{E}n}(u_0, v, w) = v \cdot \frac{\vartheta(\frac{u_0}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta'(0, \varepsilon\frac{w}{v})} \cdot \mathrm{e}^{+\frac{u_0^2}{2} \lim\limits_{N=\infty} \lim\limits_{M=\infty} \sum\limits_{-N,+N}^{n} \sum\limits_{-M,+M}^{m} \frac{1}{(mv+nw)^2}} .$$

($m = 0, n = 0$ ist in der Summe auszuschließen).

[20] $\overline{\mathcal{E}n}(u_0, v, w)$ ist das Weierstraß'sche $\sigma(u)$ für $u = u_0, 2\omega = v, 2\omega' = w$. Vgl. S.76 und Anhang III, S.176ff.

Vorlesung (07.12.91)

Für die spezielle Äquivalenz, bei der γ und γ' null sind, $(u_0, u, v, w) \sim (u_0, u, v', w')$, zeigen die Formeln von S.46,47: [S.52]

$$\begin{aligned} f_1(u,v',w') - f_1(u,v,w) &= -u \cdot \{ \lim \sum \frac{1}{(mv'+nw')^2} - \lim \sum \frac{1}{(mv+nw)^2} \} \\ f_2(u,v',w') - f_2(u,v,w) &= + \quad \{ \lim \sum \frac{1}{(mv'+nw')^2} - \lim \sum \frac{1}{(mv+nw)^2} \} \end{aligned}$$

die Isotropie von [S.53]

$$f_1(u,v,w) \quad \text{mit} \quad -u \cdot \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{-N,+N}^{n} \sum_{-M,+M}^{m} \frac{1}{(mv'+nw')^2}$$

und von [21]

$$f_2(u,v,w) \quad \text{mit} \quad + \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{-N,+N}^{n} \sum_{-M,+M}^{m} \frac{1}{(mv'+nw')^2} \,.$$

Nach S.30, 35 ist demnach

$$\frac{\vartheta(\frac{u_0}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})} \quad \text{isotrop mit} \quad \mathrm{e}^{-\left\{(u-u_0)(-u)+\frac{(u-u_0)^2}{2}\right\} \lim \sum \frac{1}{(mv+nw)^2}}$$

oder mit

$$\mathrm{e}^{-\frac{u_0^2-u^2}{2} \lim \sum \frac{1}{(mv+nw)^2}},$$

d.h.

$$\frac{\vartheta(\frac{u_0}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{u_0^2-u^2}{2} \lim \sum \frac{1}{(mv+nw)^2}}$$

ist eine Invariante der speziellen Äquivalenz $(u_0, u, v, w) \sim (u_0, u, v', w')$, bei der $\gamma = \gamma' = 0$ ist. Multipliziert man mit u, so bleibt der invariante Charakter bestehen und durch $\lim_{u=0}$ kommt man wieder zur speziellen Eisenstein'schen Invariante

$$\overline{\mathcal{E}n}(u_0, v, w) = v \cdot \frac{\vartheta(\frac{u_0}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta'(0, \varepsilon\frac{w}{v})} \cdot \mathrm{e}^{+\frac{u_0^2}{2} \lim \sum \frac{1}{(mv+nw)^2}} \,.$$

$\frac{\overline{\mathcal{E}n}(u_0,v,w)}{\overline{\mathcal{E}n}(u,v,w)}$ ist wieder die auf Mitte voriger Seite stehende Invariante. [S.54]

Die frühere Invariante der allgemeinen Äquivalenz $(u_0, u, v, w) \sim (u', u', v', w')$,

$$\mathcal{E}n(u_0, u, v, w) = \frac{\vartheta(\frac{u_0}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})} \cdot \mathrm{e}^{(u-u_0)\cdot f_1(u,v,w) + \frac{(u-u_0)^2}{2} \cdot f_2(u,v,w)} \,,$$

läßt sich jetzt so darstellen

$$\mathcal{E}n(u_0, u, v, w) = \frac{\overline{\mathcal{E}n}(u_0, v, w)}{\overline{\mathcal{E}n}(u, v, w)} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{u_0^2-u^2}{2} \lim \sum \frac{1}{(mv+nw)^2} + (u-u_0) f_1 + \frac{(u-u_0)^2}{2} f_2} \,.$$

[21] Nach $f_2(u', v', w') = f_2(u + \gamma v' + \gamma' w', v', w') = f_2(u, v', w')$ [vgl. S.39 od. 47] gilt diese zweite Isotropie sogar ganz allgemein.

Der Exponent läßt sich in eine Reihe entwickeln unter Benutzung von S.40 u. 46, man findet

$$\begin{aligned}
&\frac{u^2-u_0^2}{2}\cdot\lim\sum\frac{1}{(mv+nw)^2}\\
&+(u-u_0)\cdot\{\frac{1}{u}-u\lim\sum\frac{1}{(mv+nw)^2}-u^3\sum\frac{1}{(mv+nw)^4}\ \dots\}\\
&+\frac{(u-u_0)^2}{2}\cdot\{\frac{1}{u^2}+\lim\sum\frac{1}{(mv+nw)^2}+3u^2\sum\frac{1}{(mv+nw)^4}+5u^4\sum\frac{1}{(\dots)^6}\ \dots\}
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
&\frac{3}{2}-2\frac{u_0}{u}+\frac{1}{2}\frac{u_0^2}{u^2}\\
&+\ 0\cdot\sum\frac{1}{(mv+nw)^2}\\
&+\ (\frac{u^4}{2}-2u_0u^3+\frac{3}{2}u_0^2u^2)\sum\frac{1}{(mv+nw)^4}\\
&+\ (\frac{3}{2}u^6-4u_0u^5+\frac{5}{2}u_0^2u^4)\sum\frac{1}{(mv+nw)^6}+\cdots\\
&=\ \frac{3}{2}-2\frac{u_0}{u}+\frac{1}{2}\frac{u_0^2}{u^2}+\sum_{\nu=3,5,7\cdots}\Big\{\Big(\frac{\nu-2}{2}u^2-(\nu-1)u_0u+\frac{\nu}{2}u_0^2\Big)u^{\nu-1}\sum_{m,n}\frac{1}{(mv+nw)^{\nu+1}}\Big\}\ .
\end{aligned}$$

[S.55]

Dabei ist aber immer zu beachten, daß sich $f_1(u,v,w)$ und $f_2(u,v,w)$ nur für kleines u in die hier benutzten unendlichen Reihen entwickeln läßt, wenn man nicht eine endliche Gliederzahl zunächst absondern will (S.42–46).

Aus der Formel von S.11

$$\frac{\vartheta(\frac{u_0}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta'(0,\varepsilon\frac{w}{v})}=\frac{u_0}{v}\cdot\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\prod_{-N,N}^{n}\prod_{-M,M}^{m}(1-\frac{u_0}{mv+nw})\ ,$$

wo bei der Produktbildung $m=0,n=0$ auszuschließen ist, kann man auch direkt auf genau demselben Wege, wie auf S.16–30 oder 30–35 der invariante Charakter von $\mathcal{E}n(u_0,u,v,w)$ bewiesen wurde, den Nachweis liefern, daß $\overline{\mathcal{E}n}(u_0,v,w)$ eine Invariante der speziellen Äquivalenz $(u_0,u,v,w)\sim(u_0,u,v',w')$, $(\gamma=\gamma'=0)$ ist. Später wird $\lg\mathcal{E}n(u_0,u,v,w)$ nach Potenzen von [S.56] u entwickelt werden [22] , es wird sich dabei zeigen, daß das von u unabhängige Glied bis auf eine additive numerische Constante mit $\lg\overline{\mathcal{E}n}(u0,v,w)$ übereinstimmt. Diesem Beweis müssen erst noch einige andere Entwicklungen vorangehen.

Auf S.28 wurde gesetzt

$$f_r(u,v,w)=\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-N,+N}^{n}\sum_{-M,+M}^{m}\frac{1}{(u+mv+nw)^r}\ ,$$

wobei r auf die Werte 1 und 2 beschränkt blieb, später wird bisweilen auch $r>2$ vorkommmen, wo dann eine besondere Art des Grenzübergangs nicht angegeben zu werden braucht, weil unbedingte Convergenz vorhanden ist.

Die sämmtlichen Funktionen $f_r(u,v,w)$ lassen sich durch die Thetafunktionen darstellen auf Grund der Formel auf S.10 [S.57]

[22] S.63–67

$$v \cdot \frac{\vartheta(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta'(0, \varepsilon\frac{w}{v})} = u \cdot \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \prod_{-N,N}^{n} \prod_{-M,M}^{m} (1 + \frac{u}{mv+nw}) \,,$$

in welcher rechts $m = 0, n = 0$ auszuschließen ist. Es folgt

$$\lg \frac{v}{\vartheta'(0, \varepsilon\frac{w}{v})} + \lg \vartheta(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v}) = \lg u + \lim \sum (1 + \frac{u}{mv+nw})$$

oder durch Differentiation nach u:

$$\frac{1}{v} \cdot \frac{\vartheta'(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta'(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})} = \lim \sum \frac{1}{u+mv+nw} = f_1(u,v,w) \;.$$

Differentiiert man nochmals, so findet man

$$\frac{1}{v^2} \cdot \Big\{ \frac{\vartheta''(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})} - \Big(\frac{\vartheta'(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})} \Big)^2 \Big\} = -f_2(u,v,w)$$

und allgemein hat man

$$\frac{d^r \lg \vartheta(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}{du^r} = (-1)^{r-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (r-1) \cdot f_r(u,v,w).$$

Nach S.53 (oben) folgt dann die Isotropie von

$$\frac{1}{v} \cdot \frac{\vartheta'(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})} \quad \text{mit} \quad -u \cdot \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{-N,N}^{n} \sum_{-M,M}^{m} \frac{1}{(mv+nw)^2}$$

und die von

$$\frac{1}{v^2} \cdot \Big\{ \frac{\vartheta''(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})} - \Big(\frac{\vartheta'(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})} \Big)^2 \Big\} \quad \text{mit} \quad -\lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{-N,N}^{n} \sum_{-M,M}^{m} \frac{1}{(mv+nw)^2} \,,$$

die erste nur für die Äquivalenz

$$(u_0, u, v, w) \sim (u_0, u, v', w'),$$

die zweite sogar für die allgemeine Äquivalenz [S.58]

$$(u, v, w) \sim (u, v', w')$$

gültig.

Zieht man von $f_2(u,v,w)$ das Glied $\frac{1}{u^2}$ ab und läßt dann u zu null werden, so kommt man zu $\lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{-N,N}^{n} \sum_{-M,M}^{m} \frac{1}{(mv+nw)^2}$ Aus dem Ausdruck von $f_2(u,v,w)$ auf Mitte voriger Seite,

$$f_2(u,v,w) = \frac{1}{v^2} \cdot \Big\{ \Big(\frac{\vartheta'(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})} \Big)^2 - \frac{\vartheta''(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})} \Big\},$$

ist demnach eine neue Darstellung von $\lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{-N,N}^{n} \sum_{-M,M}^{m} \frac{1}{(mv+nw)^2}$ zu erhalten. Es ist

$$\frac{\vartheta'(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})} = \frac{\vartheta'(0, \varepsilon\frac{w}{v}) + \frac{1}{2}\frac{u^2}{v^2}\vartheta'''(0, \varepsilon\frac{w}{v}) + \ldots}{\frac{u}{v}\vartheta'(0, \varepsilon\frac{w}{v}) + \frac{1}{6}\frac{u^3}{v^3}\vartheta'''(0, \varepsilon\frac{w}{v}) + \ldots} = \frac{v}{u} \cdot \frac{1 + \frac{u^2}{2v^2} \cdot p + \cdots}{1 + \frac{u^2}{6v^2} \cdot p + \cdots} \,,$$

wo p für $\frac{\vartheta'''(0, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta'(0, \varepsilon\frac{w}{v})}$ gesetzt ist. Wegen $\frac{1}{1+\frac{u^2}{6v^2} \cdot p + \cdots} = 1 - \frac{u^2}{6v^2} \cdot p + \cdots$ folgt [S.59]

$$\frac{\vartheta'(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})} = \frac{v}{u}\cdot(1+\frac{u^2}{2v^2}\cdot p+\cdots)(1-\frac{u^2}{6v^2}\cdot p+\cdots) = \frac{v}{u}\cdot(1+\frac{u^2}{3v^2}\cdot p+\cdots)\,.$$

Weiter hat man

$$\frac{\vartheta''(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})} \;=\; \frac{\frac{u}{v}\vartheta'''(0,\varepsilon\frac{w}{v})+\cdots}{\frac{u}{v}\vartheta'(0,\varepsilon\frac{w}{v})+\cdots} \;=\; \frac{\vartheta'''(0,\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta'(0,\varepsilon\frac{w}{v})}+A\cdot u^2+B\cdot u^4+\cdots\,,$$

und es folgt

$$\begin{aligned}\frac{1}{v^2}\cdot\Big\{\Big(\frac{\vartheta'(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}\Big)^2-\frac{\vartheta''(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}\Big\} &= \frac{1}{v^2}\cdot\Big\{\frac{v^2}{u^2}\Big(1+\frac{u^2}{3v^2}p+\cdots\Big)^2-\Big(p+Au^2+\cdots\Big)\Big\}\\ &= \frac{1}{v^2}\cdot\Big\{\frac{v^2}{u^2}\Big(1+\frac{2}{3}\frac{u^2}{v^2}p+\cdots\Big)-\Big(p+Au^2+\cdots\Big)\Big\}\\ &= \frac{1}{u^2}+\Big(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{v^2}-\frac{1}{v^2}\Big)p+Au^2+Bu^4+\cdots\,,\end{aligned}$$

oder

$$f_2(u,v,w)-\frac{1}{u^2} = -\frac{1}{3v^2}\cdot\frac{\vartheta'''(0,\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta'(0,\varepsilon\frac{w}{v})}+A\cdot u^2+B\cdot u^4+\cdots\,,$$

d.h

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-N,N}^{n}\sum_{-M,M}^{m}\frac{1}{(mv+nw)^2} = -\frac{1}{3v^2}\cdot\frac{\vartheta'''(0,\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta'(0,\varepsilon\frac{w}{v})}\,.$$

Dabei ist $m=0, n=0$ bei der Summation links auszuschließen. [23]

Die rechte Seite werde nun als Quotient zweier Reihen dargestellt, unter Benutzung von [S.60]

$$\vartheta(\zeta,\varepsilon\frac{w}{v})) \;=\; \sum_{\pm1,\pm3,\pm5\cdots}^{v} \mathrm{e}^{\frac{\pi i}{4}(v^2\cdot\varepsilon\frac{w}{v})+4v\zeta-2v)}$$

(S.3) oder

$$\vartheta(\zeta,\varepsilon\frac{w}{v})) \;=\; \sum_{\pm1,\pm3,\pm5\cdots}^{v} -i\cdot(-1)^{\frac{v-1}{2}}\cdot q^{\frac{v^2}{4}}\mathrm{e}^{\nu\pi i\zeta} \qquad (q=\mathrm{e}^{\pi i\varepsilon\frac{w}{v}})\,.$$

Man hat

$$\begin{aligned}\vartheta'(\zeta,\varepsilon\frac{w}{v}) &= \sum_{\pm1,\pm3,\pm5\cdots}^{v} -i\cdot\nu\pi i(-1)^{\frac{v-1}{2}}\cdot q^{\frac{v^2}{4}}\mathrm{e}^{\nu\pi i\zeta} &&= \sum_{\pm1,\pm3,\pm5\cdots}^{v} \nu\pi(-1)^{\frac{v-1}{2}}\cdot q^{\frac{v^2}{4}}\mathrm{e}^{\nu\pi i\zeta}\,,\\ \vartheta''(\zeta,\varepsilon\frac{w}{v}) &= \sum_{\pm1,\pm3,\pm5\cdots}^{v} -i\cdot(\nu\pi i)^3(-1)^{\frac{v-1}{2}}\cdot q^{\frac{v^2}{4}}\mathrm{e}^{\nu\pi i\zeta} &&= \sum_{\pm1,\pm3,\pm5\cdots}^{v} -\nu^3\pi^3(-1)^{\frac{v-1}{2}}\cdot q^{\frac{v^2}{4}}\mathrm{e}^{\nu\pi i\zeta}\,,\end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned}&\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-N,N}^{n}\sum_{-M,M}^{m}\frac{1}{(mv+nw)^2} = -\frac{1}{3v^2}\cdot\frac{\vartheta'''(0,\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta'(0,\varepsilon\frac{w}{v})}\\ &= +\frac{1}{3v^2}\cdot\pi^2\cdot\frac{\sum(-1)^{\frac{v-1}{2}}\cdot\nu^3\cdot q^{\frac{1}{4}v^2}}{\sum(-1)^{\frac{v-1}{2}}\cdot\nu\cdot q^{\frac{1}{4}v^2}} = +\frac{\pi^2}{3v^2}\cdot\frac{\sum(-1)^{\frac{v-1}{2}}\cdot\nu^3\cdot q^{\frac{1}{4}(v^2-1)}}{\sum(-1)^{\frac{v-1}{2}}\cdot\nu\cdot q^{\frac{1}{4}(v^2-1)}}\,.\end{aligned}$$

[23] Daraus nach S.53:

$$\overline{\mathcal{E}n}(u_0,v,w) = v\cdot\frac{\vartheta(\frac{u_0}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta'(0,\varepsilon\frac{w}{v})}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{6v^2}\cdot\frac{\vartheta'''(0,\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta'(0,\varepsilon\frac{w}{v})}}$$

Setzt man $v = 2n + 1$, so geht n von $-\infty$ bis $+\infty$, $v^2 - 1$ wird $4(n^2 + n)$ und der ganze Ausdruck wird gleich

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-N,N}^{n}\sum_{-M,M}^{m}\frac{1}{(mv+nw)^2} = \frac{\pi^2}{3v^2}\cdot\frac{\sum\limits_{-\infty,+\infty}^{n}(-1)^n\cdot(2n+1)^3\cdot \mathrm{e}^{(n^2+n)\pi i\varepsilon\frac{w}{v}}}{\sum\limits_{-\infty,+\infty}^{n}(-1)^n\cdot(2n+1)\cdot \mathrm{e}^{(n^2+n)\pi i\varepsilon\frac{w}{v}}}\,.$$

Spezielle Fälle dieser Gleichung sind besonders merkwürdig, hier wurde nur einer hervorgehoben, [S.61] nämlich der, wo man

$$v = +1 \qquad\qquad w = +i$$

gesetzt hat.

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-N,N}^{n}\sum_{-M,M}^{m}\frac{1}{(m+ni)^2} = \frac{1}{2}\Big(\lim\sum\frac{1}{(m+ni)^2} + \lim\sum\frac{1}{(m-ni)^2}\Big)$$
$$= \lim\sum\frac{m^2-n^2}{(m^2+n^2)^2} = \lim\sum\frac{m^2}{(m^2+n^2)^2} - \lim\sum\frac{n^2}{(m^2+n^2)^2}\,.$$

Hierfür läßt sich bei geringer Änderung der Bezeichnung schreiben:

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-N,N}^{n}\sum_{-M,M}^{m}\frac{1}{(m+ni)^2}$$
$$= \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-N,N}^{n}\sum_{-M,M}^{m}\frac{m^2}{(m^2+n^2)^2} - \lim_{M=\infty}\lim_{N=\infty}\sum_{-N,N}^{n}\sum_{-M,M}^{m}\frac{m^2}{(m^2+n^2)^2}\,.$$

Ein Wert als Quotient zweier unendlichen Reihen ergibt sich hierfür aus der Formel auf Mitte voriger Seite; doch soll erst noch ein anderer Ausdruck hergeleitet werden aus der Formel v. S.49.

$$S = \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-N,+N}^{n}\sum_{-M,+M}^{m}\frac{1}{(mv'+nw')^2} - \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-N,+N}^{n}\sum_{-M,+M}^{m}\frac{1}{(mv+nw)^2} = \frac{2\varepsilon\pi i\alpha'}{vv'}\,.$$

Für $v = 1, w = i$ und $\alpha = \beta' = 0, \alpha' = +1, \beta = -1$ ist $v' = -i, w = +1$ und $\varepsilon = +1$, man hat [S.62]

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-N,+N}^{n}\sum_{-M,+M}^{m}\frac{1}{(-mi+n)^2} - \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-N,+N}^{n}\sum_{-M,+M}^{m}\frac{1}{(m+ni)^2} = \frac{2\pi i}{-i} = -2\pi$$

oder

$$\lim\sum\frac{1}{(mi+n)^2} - \lim\sum\frac{-1}{(m+ni)^2} = +2\pi\,,$$

d.h.

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-N,+N}^{n}\sum_{-M,+M}^{m}\frac{1}{(mi+n)^2} = +\pi\,.$$

Hiermit ist beiläufig erhalten

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-N,N}^{n}\sum_{-M,M}^{m}\frac{m^2}{(m^2+n^2)^2} - \lim_{M=\infty}\lim_{N=\infty}\sum_{-N,N}^{n}\sum_{-M,M}^{m}\frac{m^2}{(m^2+n^2)^2} = +\pi\,.$$

Jetzt läßt sich nach der letzten Gleichung v. S.62 ein Quotient zweier Reihen aufstellen, der den Wert $\lim\sum\frac{1}{(m+ni)^2} = +\pi$ hat. $\mathrm{e}^{\pi i\varepsilon\frac{w}{v}}$ ist $e^{-\pi}$ und man findet

$$+\pi = \frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{\sum\limits_{-\infty,+\infty}^{n} (-1)^n \cdot (2n+1)^3 \cdot \mathrm{e}^{-\pi(n^2+n)}}{\sum\limits_{-\infty,+\infty}^{n} (-1)^n \cdot (2n+1) \cdot \mathrm{e}^{-\pi(n^2+n)}}$$

$$\frac{3}{\pi} = \frac{\sum\limits_{0,\infty}^{n} (-1)^n \cdot (2n+1)^3 \cdot \mathrm{e}^{-\pi(n^2+n)} + \sum\limits_{1,\infty}^{n'} (-1)^{n'} \cdot (-2n'+1)^3 \cdot \mathrm{e}^{-\pi(n'^2-n')}}{\sum\limits_{0,\infty}^{n} (-1)^n \cdot (2n+1) \cdot \mathrm{e}^{-\pi(n^2+n)} + \sum\limits_{1,\infty}^{n'} (-1)^{n'} \cdot (-2n'+1) \cdot \mathrm{e}^{-\pi(n'^2-n')}} \,.$$

Setzt man jetzt für n' .. n+1, so geht der Ausdruck über in [S.63]

$$\frac{3}{\pi} = \frac{\sum\limits_{0,\infty}^{n} (-1)^n \cdot (2n+1)^3 \cdot \mathrm{e}^{-\pi(n^2+n)} + \sum\limits_{1,\infty}^{n} (-1)^{n+1} \cdot (-2n-1)^3 \cdot \mathrm{e}^{-\pi(n^2+n)}}{\sum\limits_{0,\infty}^{n} (-1)^n \cdot (2n+1) \cdot \mathrm{e}^{-\pi(n^2+n)} + \sum\limits_{1,\infty}^{n} (-1)^{n+1} \cdot (-2n-1) \cdot \mathrm{e}^{-\pi(n^2+n)}} \,,$$

und im Zähler und Nenner sind jedesmal die beiden Summanden gleich, es folgt:

$$\frac{\pi}{3} = \frac{\sum\limits_{0,\infty}^{n} (-1)^n \cdot (2n+1) \cdot \mathrm{e}^{-\pi(n^2+n)}}{\sum\limits_{0,\infty}^{n} (-1)^n \cdot (2n+1)^3 \cdot \mathrm{e}^{-\pi(n^2+n)}} = \frac{1 - 3\mathrm{e}^{-2\pi} + 5\mathrm{e}^{-6\pi} - 7\mathrm{e}^{-12\pi} \pm \cdots}{1 - 3^3\mathrm{e}^{-2\pi} + 5^3\mathrm{e}^{-6\pi} - 7^3\mathrm{e}^{-12\pi} \pm \cdots} \,.$$

Da $e = 2,71828\ldots > \frac{10}{4}$, ist $e^{-1} < 0,4$ und $e^{-\pi} < (0,4)^3$ oder $0,064$ und die positiven Potenzen hiervon werden rasch sehr klein, die beiden Reihen convergieren sehr gut. So ist z.B. $\frac{\pi}{3}$ näherungsweise gleich $\frac{1-3e^{-2\pi}}{1-3^3e^{-2\pi}}$ oder die Gleichung $\frac{1-3x}{1-3^3x} = \frac{\pi}{3}$ hat näherungsweise die Wurzel $x = e^{-2\pi}$.

Früher war gefunden (S.28)

$$\mathcal{E}n(u_0,u,v,w) = \frac{\vartheta(\frac{u_0}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})} \cdot \mathrm{e}^{(u-u_0)\cdot f_1(u,v,w) + \frac{(u-u_0)^2}{2}\cdot f_2(u,v,w)} \,,$$

und $f_1(u,v,w)$ u. $f_2(u,v,w)$ haben nach S.57 in Thetafunktionen dargestellt den Ausdruck: [S.64]

$$\begin{aligned} f_1(u,v,w) &= +\frac{1}{v} \cdot \frac{\vartheta'(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})} \\ f_2(u,v,w) &= -\frac{1}{v^2} \cdot \Big\{ \frac{\vartheta''(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})} - \Big(\frac{\vartheta'(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})} \Big)^2 \Big\} \,. \end{aligned}$$

So entsteht

$$\lg \mathcal{E}n(u_0,u,v,w) = \lg \frac{\vartheta(\frac{u_0}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})} + \frac{u-u_0}{v} \cdot \frac{\vartheta'(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})} + \frac{(u-u_0)^2}{2} \cdot \frac{-1}{v^2} \cdot \Big\{ \frac{\vartheta''(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})} - \Big(\frac{\vartheta'(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})} \Big)^2 \Big\} \,.$$

Indem man hierfür schreibt:

$$\lg \mathcal{E}n(u_0,u,v,w) = \lg \frac{\vartheta(\frac{u_0}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})} - \frac{u_0-u}{v} \cdot \frac{\vartheta'(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})} - \frac{(u_0-u)^2}{2v^2} \cdot \Big\{ \frac{\vartheta''(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})} - \Big(\frac{\vartheta'(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})} \Big)^2 \Big\}$$

und die Taylor'sche Entwicklung bezüglich der Variablen u_0

$$\lg \vartheta(\frac{u_0}{v},\varepsilon\frac{w}{v}) = \lg \vartheta(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v}) + \frac{u-u_0}{v} \cdot \frac{\vartheta'(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})} + \frac{(u-u_0)^2}{2v^2} \cdot \Big\{ \frac{\vartheta''(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})} - \Big(\frac{\vartheta'(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})} \Big)^2 \Big\} + \ldots$$

beachtet, sieht man, daß $\lg \mathcal{E}n(u_0, u, v, w)$ aus der Entwicklung von $\lg \frac{\vartheta(\frac{u_0}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}$ nach Potenzen [S.65]
von $u_0 - u$ (wo u_0 als die Variable gilt) einfach dadurch hervorgeht, daß man die beiden ersten Glieder, d.h. die Glieder mit $u - u_0$ und $(u - u_0)^2$ - ein constantes Glied fehlt - wegläßt. [Vgl. S.21, 22 und 27]

Jetzt soll aber $\lg \mathcal{E}n(u_0, u, v, w)$ nach u entwickelt werden und das von u freie Glied dieser Entwicklung ist gesucht. Nach S.58, 59 hat man

$$\frac{\vartheta'(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})} = \frac{v}{u} \cdot (1 + \frac{u^2}{3v^2} \cdot \frac{\vartheta'''(0, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta'(0, \varepsilon\frac{w}{v})} + \cdots)$$

und

$$-\frac{1}{v^2} \cdot \Big\{ \frac{\vartheta''(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})} - \Big(\frac{\vartheta'(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}\Big)^2 \Big\} = \frac{1}{u^2} - \frac{1}{3v^2} \cdot \frac{\vartheta'''(0, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta'(0, \varepsilon\frac{w}{v})} + \cdots .$$

Demnach enthält

$$\frac{u - u_0}{v} \cdot \frac{\vartheta'(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})} + \frac{(u - u_0)^2}{2} \cdot \frac{-1}{v^2} \Big\{ \frac{\vartheta''(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})} - \Big(\frac{\vartheta'(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}\Big)^2 \Big\}$$

als von u freies Glied den Ausdruck

$$+1 + \frac{1}{2} + \frac{u_0^2}{2} \cdot \frac{-1}{3v^2} \cdot \frac{\vartheta'''(0, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta'(0, \varepsilon\frac{w}{v})} = +\frac{3}{2} - \frac{u_0^2}{6v^2} \cdot \frac{\vartheta'''(0, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta'(0, \varepsilon\frac{w}{v})} .$$

Aus [S.66]

$$\begin{aligned} \vartheta(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v}) &= \frac{u}{v} \cdot \vartheta'(0, \varepsilon\frac{w}{v}) + \frac{1}{6} \cdot \frac{u^3}{v^3} \cdot \vartheta'''(0, \varepsilon\frac{w}{v}) + \cdots \\ &= \frac{u}{v} \cdot \vartheta'(0, \varepsilon\frac{w}{v}) \big\{ 1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{u2}{v^2} \cdot \frac{\vartheta'''(0, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta'(0, \varepsilon\frac{w}{v})} + \cdots \big\} \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\lg \vartheta(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v}) = \lg(u) - \lg(v) + \lg \vartheta'(0, \varepsilon\frac{w}{v}) + \frac{1}{6} \cdot \frac{u^2}{v^2} \cdot \frac{\vartheta'''(0, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta'(0, \varepsilon\frac{w}{v})} + \cdots ,$$

und so folgt, daß in der Entwicklung von $\lg \mathcal{E}n(u_0, u, v, w)$ nach u der Bestandteil

$$\lg \frac{\vartheta(\frac{u_0}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta'(0, \varepsilon\frac{w}{v})} + \lg v - \lg u + \Big(\frac{3}{2} - \frac{u_0^2}{6v^2} \cdot \frac{\vartheta'''(0, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta'(0, \varepsilon\frac{w}{v})} \Big)$$

auftritt; daneben kommt eine Reihe nach positiven Potenzen von u vor, aber auch noch ein Glied mit $\frac{1}{u}$ und eins mit $\frac{1}{u^2}$. Der erhaltene Ausdruck läßt sich schreiben

$$-\lg u + \lg\Big(v \cdot \frac{\vartheta(\frac{u_0}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta'(0, \varepsilon\frac{w}{v})} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{u_0^2}{6v^2} \cdot \frac{\vartheta'''(0, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta'(0, \varepsilon\frac{w}{v})}} \Big) + \frac{3}{2}$$

und

$$\frac{u_0^2}{2} \cdot \frac{-1}{3v^2} \cdot \frac{\vartheta'''(0, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta'(0, \varepsilon\frac{w}{v})}$$

ist nach S.59 gleich

$$\frac{u_0^2}{2} \cdot \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{-N,+N}^{n} \sum_{-M,+M}^{m} \frac{1}{(mv + nw)^2} ,$$

und nach S.53 läßt sich für den Ausdruck schreiben [24] [S.67]

$$-\lg u + \lg \overline{\mathcal{E}n}(u_0, v, w) + \frac{3}{2}\ ,$$

d.h. es besteht die Entwicklung

$$\lg \mathcal{E}n(u_0, u, v, w) = -\lg u + \Big\{ \lg \overline{\mathcal{E}n}(u_0, v, w) + \frac{3}{2} \Big\} + \frac{A}{u^2} + \frac{B}{u} + A_1 \cdot u + A_2 \cdot u^2 + \cdots\ .$$

Der von u freie Bestandteil in der Entwicklung von $\lg \mathcal{E}n(u_0, u, v, w)$ nach u ist bis auf eine numerische Constante gleich $\lg \overline{\mathcal{E}n}(u_0, v, w)$, wie S.59 angedeutet wurde.

Auf S. 64 fand sich

$$\lg \mathcal{E}n(u_0, u, v, w) = \lg \frac{\vartheta(\frac{u_0}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})} - \frac{u_0 - u}{v} \cdot \frac{\vartheta'(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})} - \frac{(u_0-u)^2}{2v^2} \cdot \frac{d}{d\frac{u}{v}}\Big(\frac{\vartheta'(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}\Big)$$

oder

$$\lg \mathcal{E}n(u_0, u, v, w) = \lg \frac{\vartheta(\frac{u_0}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})} - \frac{u_0 - u}{v} \cdot \chi(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v}) - \frac{(u_0-u)^2}{2v^2} \cdot \chi'(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})\ ,$$

falls man (wie Jacobi dies in den Vorlesungen that) das Zeichen [S.68]

$$\chi(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v}) = \frac{\vartheta'(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}$$

einführt [25] . Ferner hat man

$$\lg \vartheta(\frac{u_0}{v}, \varepsilon\frac{w}{v}) = \lg \vartheta(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v}) + \frac{u_0-u}{v} \cdot \chi(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v}) + \frac{(u_0-u)^2}{2v^2} \cdot \chi'(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v}) + \frac{1}{6} \cdot \Big(\frac{(u_0-u)}{v}\Big)^3 \cdot \chi''(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v}) + \cdots$$

oder

$$\lg \mathcal{E}n(u_0, u, v, w) = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot \Big(\frac{(u_0-u)}{v}\Big)^3 \cdot \chi''(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v}) + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \cdot \Big(\frac{(u_0-u)}{v}\Big)^4 \cdot \chi'''(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v}) + \cdots\ .$$

Die Funktion

$$\chi(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v}) = \frac{d \lg \vartheta(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}{d(\frac{u}{v})}$$

und ihre Derivierten sollen jetzt auf ihr Verhalten bei der Transformation von S.14 untersucht werden. Nach S.57 hat man

$$f_1(u, v, w) = \frac{1}{v} \cdot \frac{\vartheta'(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})} = \frac{1}{v} \cdot \chi(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})\ ,$$

d.h. [S.69]

$$\begin{aligned}
f_1(u, v, w) &= \frac{1}{v} \cdot \chi(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v}) \\
-f_2(u, v, w) &= \frac{1}{v^2} \cdot \chi'(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v}) \\
+2 \cdot f_3(u, v, w) &= \frac{1}{v^3} \cdot \chi''(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v}) \\
&\cdots\ \cdots \\
(-1)^k \cdot \prod(k) \cdot f_{k+1}(u, v, w) &= \frac{1}{v^{k+1}} \cdot \chi^{(k)}(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})\ .
\end{aligned}$$

[24] siehe auch Anmerkung a.S.59.

[25] Beim Ausarbeiten eines Teils der Jakobi'schen Vorlesung von W.S. 39/40 hat Borchardt χ in umgeändert. (sic!)

Dabei hat man

$$f_r(u,v,w) = \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{-N,+N}^{n} \sum_{-M,+M}^{m} \frac{1}{(u+mv+nw)^r}\ ,$$

aber nur für $r = 1$ und $r = 2$ ist der angegebene Grenzübergang notwendig, für $r \geq 3$ führt wegen unbedingter Convergenz jede Art von Grenzübergang zu demselben Resultat.

Daß nun $\frac{1}{v} \cdot \chi(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})$ und $\frac{1}{v^2} \cdot \chi'(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})$ noch keine Invarianten der allgemeinen Äquivalenz von S.14,15 sind, auch nicht etwa Invarianten der speziellen Äquivalenz, welche aus der Transformation für $\gamma = \gamma' = 0$ hervorgeht, ist klar, denn die Formeln oben auf S.50 zeigen, daß $f_1(u,v,w)$ [S.70] und $f_2(u,v,w)$ keine Invarianten sind. Dagegen ist für $r \geq 3$ die Funktion $f_r(u,v,w)$ stets eine Invariante der allgemeinen Äquivalenz, denn $u + mv + nw$ geht duch die Transformation in $u' + m'v' + n'w'$ über und die Doppelsumme $\sum_{-\infty,+\infty}^{n} \sum_{-\infty,+\infty}^{m} \frac{1}{(u+mv+nw)^r}$ ist für $r \geq 3$ unbedingt convergent.

Demnach sind $\frac{1}{v^3}\chi''(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})$, $\frac{1}{v^4}\chi'''(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})$ $\ldots$ $\frac{1}{v^{k+1}}\chi^{(k)}(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})$ sämtlich Invarianten der allgemeinen Äquivalenz von S.14,15, und in der Entwicklung der vorletzten Seite

$$\lg \mathcal{E}n(u_0,u,v,w) = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot (u_0-u)^3 \cdot \frac{\chi''(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}{v^3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \cdot (u_0-u)^4 \cdot \frac{\chi'''(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}{v^4} + \cdots\ ,$$

sind die Coefficienten sämtlicher Potenzen von $u_0 - u$ Invarianten; $u_0 - u$ ist ebenfalls eine Invariante der allgemeinen Äquivalenz, und so zeigt die Entwicklung aufs neue den atropen Charakter von $\lg \mathcal{E}n(u_0,u,v,w)$ für die Äquivalenz [S.71]

$$(u_0,u,v,w) \sim (u_0',u',v',w').$$

$f_2(u,v,w)$ ist keine Invariante dieser Äquivalenz, aber man kann durch Zufügung einer von u unabhängigen Größe leicht eine Invariante daraus erhalten. Nach $f_2(u+gv+hw,v,w) = f_2(u,v,w)$ (S.38,39) hat man auch $f_2(u',v',w') = f_2(u,v',w') = 0$ und für die erste Formel von S.47 läßt sich deshalb schreiben:

$$\begin{aligned}
&f_2(u,v',w') - f_2(u,v,w)\\
&= \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{-N,+N}^{n} \sum_{-M,+M}^{m} \frac{1}{(mv'+nw')^2} - \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{-N,+N}^{n} \sum_{-M,+M}^{m} \frac{1}{(mv+nw)^2}\\
&= \frac{1}{u^2} + \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{-N,+N}^{n} \sum_{-M,+M}^{m} \Big\{\frac{1}{(u+mv+nw)^2} - \frac{1}{(mv+nw)^2}\Big\}
\end{aligned}$$

(wo bei der Summation $m = 0, n = 0$ auszuschließen ist), eine Invariante der allgemeinen Äquivalenz, die auch schon von Eisenstein betrachtet wurde. Dies soll mit [S.72]

$$en(u,v,w)$$

bezeichnet werden. Daß $en(u,v,w)$ eine Invariante der allgemeinen Transformation ist, ist auch i.w. schon S.53 gezeigt, wo die Isotropie von $f_2(u,v,w)$ mit $\lim_{n=\infty} \lim_{m=\infty} \sum_{-N,+N}^{n} \sum_{-M,+M}^{m} \frac{1}{(mv+nw)^2}$ besprochen ist. — Nach einer Formel von S.59 kann man auch schreiben:

$$en(u,v,w) = f_2(u,v,w) + \frac{1}{3v^2} \cdot \frac{\vartheta'''(0,\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta'(0,\varepsilon\frac{w}{v})}\ .$$

Zu beachten ist, daß die Doppelsumme mir dem allgemeinen Glied $\frac{1}{(u+mv+nw)^2} - \frac{1}{(mv+nw)^2}$ (wobei $m = 0, n = 0$ auszuschließen ist) unbedingt convergent ist, wie S.61,62 im Heft über die [S.73]

Weierstraß'schen Funktionen $\sigma(u)$ und $\wp(u)$ gezeigt ist. Man kann daher einfach schreiben

$$en(u,v,w) = \frac{1}{u^2} + \sum_{m,n} \{\frac{1}{(u+mv+nw)^2} - \frac{1}{(mv+nw)^2}\}$$

(wo $m=0, n=0$ auszuschließen ist).

Die Transformation von S.14 giebt für $\alpha = \beta' = +1, \alpha' = \beta = 0:$ $v' = v, w' = w, u' = u + \gamma v' + \gamma' w' = u + \gamma v + \gamma' w$. Aus der Atropie folgt also

$$en(u + \gamma v + \gamma' w, v, w) = en(u,v,w)\,.$$

$en(u,v,w)$ besitzt für die Variable u die beiden wesentlich verschiedenen Perioden v und w . [26] Es ist eine doppelperidische Funktion zweiter Ordnung, bei der die beiden Unendlichkeitspunkte innerhalb eine Periodenparallelogramms zusammenfallen. (Mit den bekannten elliptischen Funk- [S.74]
tionen $sn(u), cn(u), dn(u)$ hat $en(u)$ viele Ähnlichkeit.)

Weierstraß hat die Eisenstein'sche Invariante $en(u,v,w)$ als in gewissem Sinn einfachste doppelperiodische Funktion eingeführt und mit

$$\wp(u)$$

bezeichnet.

Auf S.68 wurde eingeführt

$$\chi(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v}) = \frac{\vartheta'(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}\,,$$

es ergaben sich dann $\frac{1}{v^3}\chi''(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})$, $\frac{1}{v^4}\chi'''(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})$ ... als Invarianten der allgemeinen Äquivalenz, mit $\frac{1}{v^2}\chi'(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})$ $(= f_2(u,v,w))$ hing die Invariante

$$en(u,v,w) = -\frac{1}{v^2}\chi'(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v}) + \frac{1}{3v^2} \cdot \frac{\vartheta'''(0, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta'(0, \varepsilon\frac{w}{v})}\,.$$

zusammen. Auch aus $\chi(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})$ kann man die Bildung einer Invariante versuchen. Für die spezielle [S.75]
Äquivalenz, welche bei $\gamma = \gamma' = 0$ aus der Transformation von S.14 hervorgebt, findet man wirklich sofort eine Invariante, nämlich

$$\frac{1}{v} \cdot \chi(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v}) + u \cdot \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{-N,+N}^{n} \sum_{-M,+M}^{m} \frac{1}{(mv+nw)^2}$$

aus der ersten Isotropie von S.53. Allgemein für die Äquivalenz $(u',v',w') \sim (u,v,w)$ läßt sich so nicht einfach eine Invariante finden, weil nach Mitte vorletzter Seite eine solche immer für u die beiden Perioden v und w hat und $\frac{1}{v} \cdot \chi(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v}) = f_1(u,v,w)$ nur einen Unendlichkeitspunkt im Parallelogramm mit den Seiten v, w hat, während eine doppelperiodische Funktion mindestens von zweiter Ordung ist. — Übrigens besitzt $\chi(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})$ die eine Periode v für u und ändert sich bei Vermehrung des u um w nur so. daß der Bestandteil $-2\varepsilon\pi i$ hinzutritt (nach S.39 ist [S.76]
$v \cdot \big(f_1(u+gv+hw,v,w) - f_1(u,v,w)\big) = -2h\varepsilon\pi i$).

— Auf S.52 u. 53 ist für die spezielle Äquivalenz $(u,v,w) \sim (u,v',w')$ $[v' = \beta' v - \alpha' w, w' = -\beta v + \alpha w, \alpha\beta' - \alpha'\beta = +1]$ die Invariante gefunden:

$$\overline{\mathcal{E}n}(u,v,w) = v \cdot \frac{\vartheta(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta'(0, \varepsilon\frac{w}{v})} \cdot \mathrm{e}^{+\frac{u^2}{2}\lim\sum\frac{1}{(mv+nw)^2}}$$

[26] Die Darstellung dieser Seite zeigt dies auch am einfachsten durch Zurückgehn auf $\frac{d}{du}en(u,v,w)$, vgl. S.63,64 im Heft über $\sigma(u)$ und $\wp(u)$.

oder (S.59)

$$\overline{\mathcal{E}n}(u,v,w) = v \cdot \frac{\vartheta(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta'(0,\varepsilon\frac{w}{v})} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{6v^2}\cdot\frac{\vartheta'''(0,\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta'(0,\varepsilon\frac{w}{v})}} \ .$$

Das gibt nach S.68,69

$$\frac{d}{du}\lg\overline{\mathcal{E}n}(u,v,w) = \frac{1}{v}\cdot\chi(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v}) - \frac{u}{3v^2}\cdot\frac{\vartheta'''(0,\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta'(0,\varepsilon\frac{w}{v})}$$

und

$$\frac{d^2}{du^2}\lg\overline{\mathcal{E}n}(u,v,w) = +\frac{1}{v^2}\cdot\chi(\frac{u}{v},\varepsilon\frac{w}{v}) - \frac{1}{3v^2}\cdot\frac{\vartheta'''(0,\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta'(0,\varepsilon\frac{w}{v})} \ ,$$

d.h.

$$-\frac{d^2}{du^2}\lg\overline{\mathcal{E}n}(u,v,w) = en(u,v,w)$$

(S.74 unten) oder gleich dem Weierstraß'schen $\wp(u)$. Da $\overline{\mathcal{E}n}(u,v,w)$ ungerade Funktion von u ist, wie $\sigma(u)$ auch, so folgt leicht $\overline{\mathcal{E}n}(u,v,w) = C\cdot\sigma(u)$. Einiges nähere bietet Anhang III S.176ff [C ist $+1$].

Vorlesung (14.12.91)

[S.77]

Zwischen den von S.68 an betrachteten Invarianten

$$en(u,v,w) = \frac{1}{u^2} + \sum_{m,n} \{ \frac{1}{(u+mv+nw)^2} - \frac{1}{(mv+nw)^2} \}$$

$$f_r(u,v,w) = \frac{(-1)^{r-1}}{\prod(r-1)} \cdot \frac{1}{v^r} \cdot \chi^{(r-1)}(\frac{u}{v}, \varepsilon\frac{w}{v}) = \sum_{m,n} \frac{1}{(u+mv+nw)^r}\,, \qquad r \geq 3$$

(wo in den Nummern stets die Art der Summation gleichgültig ist wegen der unbedingten Convergenz, und wo in der ersten Summe $m=0, n=0$ auszuschließen ist, in der zweiten aber nicht) bestehen algebraische Relationen, und im Zusammenhange damit bestehen auch [wie schon Jakobi betonte] algebraische Relationen zwischen $\vartheta''(\zeta,w), \vartheta'''(\zeta,w) \ldots$ und $\vartheta(\zeta,w), \vartheta'(\zeta,w)$, welche die Darstellung von $\vartheta''(\zeta,w)$ und dann noch höheren Derivierten durch $\vartheta(\zeta,w)$ und $\vartheta'(\zeta,w)$ ermöglichen.

Die Betrachtungen über den algebraischen Zusammenhang der genannten Invarianten ließen sich jetzt auf verschiedene Arten durchführen. So hat Eisenstein die Lösung dieser Fragen auf rein algebraischem Wege durch allerdings lange, aber schöne und elegante Umformungen gegeben, nachdem er die Form der Relationen wohl aus der sonstigen Theorie der elliptischen Funktionnen hatte schließen können. [S.78]

Eine andere und zwar recht einfache Art der Ableitung dieser Formeln ist möglich auf Grund der Cauchy'schen Integralsätze. [S.Anhang V, S.221ff.] Hier aber soll ein dritter Weg eingeschlagen werden; es sollen nämlich allgemeinere Reihen [27] betrachtet werden, von denen die Eisenstein'schen Grenzfälle sind. [28] Dabei treten wieder vielfach Paare reeller Variablen an Stelle von complexen Variablen auf, so wie auch früher schon $\sigma v + \tau w$ für u gesetzt wurde, wo σ, τ beide reell waren. [S.79]

Für die Jakobi'sche Funktion $\sin \mathrm{am}\, u$ oder $\sin \mathrm{am}\,(u,k)$ soll $\sin \mathrm{am}(2\sigma \cdot \mathrm{K} + 2\tau \cdot \mathrm{K}'i, k)$ geschrieben werden, wo σ und τ reell sind, und es soll ein Entwicklung dieser Funktion in eine Fourier'sche Reihe nach Sinus und Cosinus von Vielfachen von $\sigma\pi$ und $\tau\pi$ gesucht werden. Ergibt sich eine übersichtliche Entwicklungsform, so ist damit die Reduktion der complexen Variable u auf Paare reeller Argumente in diesem Fall als vorteilhaft gezeigt, und dies ist in der That der Fall. [29] Als Ausgangspunkt der Untersuchung diente Kronecker die bekannte Jakobi'sche Formel [S.80]

$$\frac{2k\mathrm{K}}{\pi} \cdot \sin \mathrm{am} \frac{2\mathrm{K}x}{\pi} = 4 \cdot \sum_{\nu=1,3,5\ldots} \frac{q^{\frac{1}{2}\nu}}{1-q^\nu} \cdot \sin \nu x\,,$$

wobei $q = \mathrm{e}^{-\frac{\pi \mathrm{K}'}{\mathrm{K}}}$ ist. Die Formel ist aus der Produktentwicklung von sin am u zu erhalten, und diese Produktentwicklung fand Jakobi aus der Transformation, sie ist auch leicht aus den Produktentwicklungen der Thetafunktionen zu erhalten (Jakobi, Fundamenta nova, art. 39, Formel 19, Weber's Vorlesungen über elliptische Funktionen vom W.S. 87/88 Band II, S ... und Webers Werk S.135 unten). Die Entwicklung gilt, solange der imaginäre Teil von $\frac{x}{\pi}$ (vom Zeichen abgesehen) kleiner ist als der von $\frac{i \cdot \mathrm{K}'}{2 \cdot \mathrm{K}}$; d.h. für [S.81]

$$x = \pi \cdot \big(\sigma + \tau \cdot \frac{\mathrm{K}'i}{\mathrm{K}}\big),$$

[27] und zwar die Reihen $\lim\limits_{N=\infty} \lim\limits_{M=\infty} \sum\limits_{-M,M}^{m} \sum\limits_{-N,N}^{n} \frac{\mathrm{e}^{2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{(u+mv+nw)^r}$

[28] Wie Kronecker auf diese allgemeineren Reihen geführt wurde, zeigt die nun folgende Betrachtung.

[29] Die Untersuchungen Kronecker's über diesen Punkt sind zu Kummer's 80sten Geburtstag der Berliner Akademie vorgelegt. (29.1.90)

wo σ und τ reell sind, ist $-\frac{1}{2} < \tau < \frac{1}{2}$ nötig.

Setzt man $q = \mathrm{e}^{-\frac{\pi \mathrm{K}'}{\mathrm{K}}} = \mathrm{e}^{+\pi i \omega}$ und demnach $x = \pi(\sigma + \tau \cdot \omega)$ in

$$\frac{k \cdot \mathrm{K}}{\pi} \cdot \sin \mathrm{am} \frac{2\mathrm{K}x}{\pi} = \sum_{\nu=1,3,5\ldots} \frac{\sin \nu x}{q^{-\frac{1}{2}\nu} - q^{+\frac{1}{2}\nu}}$$

ein, so entsteht

$$\begin{aligned}
\frac{k \cdot \mathrm{K}}{\pi} \cdot \sin \mathrm{am} \frac{2\mathrm{K}x}{\pi} &= 2 \cdot \sum_{\nu=1,3,5\ldots}^{\nu} \frac{\frac{1}{2i}\left(\mathrm{e}^{\nu(\sigma+\tau\omega)\pi i} - \mathrm{e}^{-\nu(\sigma+\tau\omega)\pi i}\right)}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\nu\omega\pi i} - \mathrm{e}^{+\frac{1}{2}\nu\omega\pi i}} \\
&= -i \cdot \sum_{\nu=1,3,5\ldots} \left\{ \frac{\mathrm{e}^{\nu(\sigma+\tau\omega)\pi i}}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\nu\omega\pi i} - \mathrm{e}^{+\frac{1}{2}\nu\omega\pi i}} - \frac{-\mathrm{e}^{-\nu(\sigma+\tau\omega)\pi i}}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\nu\omega\pi i} - \mathrm{e}^{+\frac{1}{2}\nu\omega\pi i}} \right\} \\
&= +i \cdot \sum_{\nu=1,3,5\ldots} \left\{ \frac{\mathrm{e}^{+\nu(\sigma+\tau\omega)\pi i}}{\mathrm{e}^{+\frac{1}{2}\nu\omega\pi i} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\nu\omega\pi i}} + \frac{-\mathrm{e}^{-\nu(\sigma+\tau\omega)\pi i}}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\nu\omega\pi i} - \mathrm{e}^{+\frac{1}{2}\nu\omega\pi i}} \right\} \\
&= +i \cdot \lim_{N=\infty} \sum_{\nu=1,3,5\ldots(2N+1)} \frac{\mathrm{e}^{+\nu(\sigma+\tau\omega)\pi i}}{\mathrm{e}^{+\frac{1}{2}\nu\omega\pi i} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\nu\omega\pi i}} \\
&= +i \cdot \lim_{N=\infty} \sum_{\nu=1,3,5\ldots(2N+1)} \frac{\mathrm{e}^{+\nu\left(\sigma+(\tau+\frac{1}{2})\omega\right)\pi i}}{\mathrm{e}^{+\nu\omega\pi i} - 1} .
\end{aligned}$$

Nun kann man die Formel [S.82]

$$2\pi i \cdot \frac{\mathrm{e}^{+\xi\eta\pi i}}{\mathrm{e}^{+2\eta\pi i} - 1} = \lim_{M=\infty} \sum_{-M,M}^{m} \frac{\mathrm{e}^{+m\xi\pi i}}{\eta - m}$$

benutzen, die schon bei Euler, dann wohl selbstständig bei Cauchy und Lipschitz auftritt, und die für $0 < \xi < 2$ gilt [30]. Für $-1/2 < \tau < +1/2$ liegt $2\tau + 1 = \xi$ wirklich in diesem Gebiet; für η ist $\frac{\nu\omega}{2}$ zu setzen, so findet man

$$+i \cdot \frac{\mathrm{e}^{(\tau+\frac{1}{2})\nu\omega\pi i}}{\mathrm{e}^{\nu\omega\pi i} - 1} = \frac{1}{2\pi} \cdot \lim_{M=\infty} \sum_{-M,M}^{m} \frac{\mathrm{e}^{(2m\tau+m)\pi i}}{\frac{\nu\omega}{2} - m} ,$$

d.h.

$$\begin{aligned}
\frac{k \cdot \mathrm{K}}{\pi} \cdot \sin \mathrm{am}(2\sigma \cdot \mathrm{K} + 2\tau \cdot \mathrm{K}'i) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{\substack{m=0,\pm1,\pm2,\pm3\ldots\pm M \\ \nu=\pm1,\pm3,\pm5\ldots\pm(2N+1)}} (-1)^m \cdot \frac{\mathrm{e}^{(\nu\sigma+2m\tau)\pi i}}{\frac{\nu\omega}{2} - m} \\
&= \frac{\mathrm{K}}{\pi} \cdot \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{\substack{m=0,\pm1,\pm2,\pm3\ldots\pm M \\ \nu=\pm1,\pm3,\pm5\ldots\pm(2N+1)}} (-1)^m \cdot \frac{\mathrm{e}^{(\nu\sigma+2m\tau)\pi i}}{\nu \cdot \mathrm{K}'i - 2m \cdot \mathrm{K}}
\end{aligned}$$

oder

$$k \cdot \sin \mathrm{am}(2\sigma \cdot \mathrm{K} + 2\tau \cdot \mathrm{K}'i) = \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{\substack{m=0,\pm1,\pm2,\pm3\ldots\pm M \\ \nu=\pm1,\pm3,\pm5\ldots\pm(2N+1)}} (-1)^m \cdot \frac{\mathrm{e}^{(\nu\sigma+2m\tau)\pi i}}{\nu \cdot \mathrm{K}'i - 2m \cdot \mathrm{K}} .$$

Man kann auch m durch $-m$ ersetzen und findet so [S.83]

[30] η darf aber nicht reell sein. - S.181-221 z. vgl.

$$k\cdot\sin\mathrm{am}(2\sigma\cdot\mathrm{K}+2\tau\cdot\mathrm{K}'i)=\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{\substack{m=0,\pm1,\pm2,\pm3\ldots\pm M\\ \nu=\pm1,\pm3,\pm5\ldots\pm(2N+1)}}(-1)^m\cdot\frac{\mathrm{e}^{(\nu\sigma-2m\tau)\pi i}}{2m\cdot\mathrm{K}+\nu\cdot\mathrm{K}'i}$$

(siehe auch Fußnote [31]). Für die letzte Gleichung voriger Seite kann man auch schreiben:

$$k\cdot\sin\mathrm{am}(2\sigma\mathrm{K}+2\tau\mathrm{K}'i)=\lim\left\{\sum_{m,\nu}(-1)^m\cdot\frac{\cos(\nu\sigma+2m\tau)\pi}{\nu\cdot\mathrm{K}'i-2m\cdot\mathrm{K}}+i\sum_{m,\nu}(-1)^m\cdot\frac{\sin(\nu\sigma+2m\tau)\pi}{\nu\cdot\mathrm{K}'i-2m\cdot\mathrm{K}}\right\}$$

und die erste Summe verschwindet, wie ein Zusammenfassen der Glieder für $m=m_0, v=v_0$ u. für $m=-m_0, v=-v_0$ zeigt. Es folgt leicht

$$k\cdot\sin\mathrm{am}(2\sigma\mathrm{K}+2\tau\mathrm{K}'i)=\lim\sum_{m,\nu}(-1)^m\cdot\frac{\sin(\nu\sigma+2m\tau)\pi}{\nu\cdot\mathrm{K}'+2m\cdot\mathrm{K}\cdot i},$$

wo $m=0,\pm1,\pm2,\pm3\ldots\pm M,\ \nu=\pm1,\pm3,\pm5\ldots\pm(2N+1)$ ist und erst M, dann N unendlich wird.

Die Einfachheit dieser Darstellung zeigt, wie vorteilhaft die Zerlegung des Argumentes von $\sin\mathrm{am}$ in eine reelles Vielfaches von K und ein solches von $\mathrm{K}'i$ in diesem Fall ist. [S.84]

Nach $\sin(\frac{\nu}{2}\pi+2m\tau\pi)=(-1)^{\frac{\nu=1}{2}}\cos 2m\tau\pi$ hat man

$$k\cdot\sin\mathrm{am}(\mathrm{K}+2\tau\mathrm{K}'i)=\lim\sum_{m,\nu}(-1)^{m+\frac{\nu-1}{2}}\cdot\frac{\cos 2m\tau\pi}{\nu\cdot\mathrm{K}'+2m\cdot\mathrm{K}\cdot i},$$

oder für $\tau=0$ (nach $\sin\mathrm{am}\,\mathrm{K}=+1$)

$$k=\lim\sum_{m,\nu}(-1)^{m+\frac{\nu-1}{2}}\cdot\frac{1}{\nu\cdot\mathrm{K}'+2m\cdot\mathrm{K}\cdot i},$$

oder für $\tau=1/2$ (wegen $\sin\mathrm{am}(\mathrm{K}+\mathrm{K}'i)=\frac{1}{k}$) [32]

$$+1=\lim_{\tau=\frac{1}{2}}\lim\sum_{m,\nu}(-1)^{m+\frac{\nu-1}{2}}\cdot\frac{\cos 2m\tau\pi}{\nu\cdot\mathrm{K}'+2m\cdot\mathrm{K}\cdot i},$$

d.h. nach $\cos 2m(\tau'+\frac{1}{2})\pi=(-1)^m\cdot\cos 2m\tau'\pi$

$$+1=\lim_{\tau'=0}\lim\sum_{m,\nu}(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\cdot\frac{\cos 2m\tau'\pi}{\nu\cdot\mathrm{K}'+2m\cdot\mathrm{K}\cdot i}.$$

Immer ersteckt sich die Summation auf $m=0,\pm1,\pm2,\pm3\ldots\pm M,\ \nu=\pm1,\pm3,\pm5\ldots\pm(2N+1)$ und erst muß M, dann N unendlich werden.

[S.85]

Die allgemeine Doppelreihe

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-M,+M}^{m}\sum_{-N,+N}^{n}\frac{\mathrm{e}^{2(n\sigma_0-m\tau_0)\pi i}}{u+mv+nw},$$

[31] Die bei der Herleitung nötige Beschränkung $-1/2<\tau<1/2$ kann nun wegen der Periodizität für τ wegfallen, nur geht aus dem Beweis nicht hervor, ob die Gleichung richtig bleibt, wenn $\tau=k+\frac{1}{2}$, wo k eine ganze Zahl ist. Darauf beruht folgendes:

[32] direkt darf man wohl nicht $\tau=1/2$ einsetzen.

die für $v = 2\mathrm{K}, w = 2\mathrm{K}'i$ und $u = i\mathrm{K}'$ eine der zuletzt betrachteten ziemlich ähnliche Reihe wird [33], soll nun näher untersucht werden. Sie steht in einfacher Beziehung zu einem Quotienten aus vier Thetafunktionen

$$\frac{\vartheta_1'(0)\cdot\vartheta_1(\xi+\eta)}{\vartheta_0(\xi)\cdot\vartheta_0(\eta)}$$

der für $\eta = 0$ im wesentlichen die Funktion $\sin am$ liefert (und so ließ sich ein Zusammenhang vermuten). Den angegebenen Thetaquotienten hat Kronecker schon vor längerer Zeit behandelt. Er tritt auf, wenn man zahlreiche Formeln in Jakobis berühmter Arbeit über die Rotation eines Körpers auf eine übersichtliche Form zu bringen sucht, und bei solcher Beschäftigung kam [S.86]
Kronecker zu der Gleichung

$$\frac{\vartheta_1'(0)\cdot\vartheta_1(\xi+\eta)}{\vartheta_0(\xi)\cdot\vartheta_0(\eta)} = 4\pi\cdot\sum_{\substack{\mu=1,3,5\ldots\\ \nu=1,3,5\ldots}} q^{\frac{1}{2}\mu\cdot\nu}\cdot\sin(\mu\xi+\nu\eta)\pi$$

(Monatsberichte der Berliner Akademie vom Dezember 1881). Sie gilt für reelles ξ und η, und auch noch bei complexen Werten, solange die Ungleichungen

$$|q|^{\frac{1}{2}} < |\mathrm{e}^{\xi\pi i}| < |q|^{-\frac{1}{2}} \qquad\qquad |q|^{\frac{1}{2}} < |\mathrm{e}^{\eta\pi i}| < |q|^{-\frac{1}{2}}$$

erfüllt sind, $|q|$ ist immer < 1 vorausgesetzt.

Eine Beziehung der a.v.S. eingeführten Doppelreihe zu einem Quotienten aus Thetafunktionen, wie die angeschriebene es ist, läßt sich nun so finden: Man formt die Doppelreihe

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-M,+M}^{m}\sum_{-N,+N}^{n}\frac{\mathrm{e}^{2(n\sigma_0-m\tau_0)\pi i}}{u+mv+nw} = \frac{1}{v}\cdot\lim_{N=\infty}\sum_{-N,+N}^{n}\mathrm{e}^{+2n\sigma_0\pi i}\cdot\lim_{M=\infty}\sum_{-M,+M}^{m}\frac{\mathrm{e}^{-2m\tau_0\pi i}}{\frac{u+nw}{v}+m}$$

mittels der a.S.82 angeführten Formel [S.87]

$$\lim_{M=\infty}\sum_{-M,M}^{m}\frac{\mathrm{e}^{-mx\pi i}}{y+m} = +2\pi i\cdot\frac{\mathrm{e}^{+xy\pi i}}{\mathrm{e}^{+2y\pi i}-1}$$

um, indem man $x = +2\tau_0$ und $y = \frac{u+\pi w}{v}$ setzt [34]:

$$\begin{aligned}\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-M,+M}^{m}\sum_{-N,+N}^{n}\frac{\mathrm{e}^{2(n\sigma_0-m\tau_0)\pi i}}{u+mv+nw} &= +\frac{2\pi i}{v}\cdot\lim_{N=\infty}\sum_{-N,+N}^{n}\mathrm{e}^{2n\sigma_0\pi i}\cdot\frac{\mathrm{e}^{2\tau_0(\frac{u}{v}+n\frac{w}{v})\pi i}}{\mathrm{e}^{\frac{2(u+nw)}{v}\pi i}-1}\\ &= -\frac{2\pi i}{v}\cdot\mathrm{e}^{+2\tau_0\frac{u}{v}\pi i}\cdot\lim_{N=\infty}\sum_{-N,+N}^{n}\frac{\mathrm{e}^{2n\sigma_0\pi i+2\tau_0 n\frac{w}{v}\pi i}}{1-\mathrm{e}^{2(\frac{u}{v}+n\frac{w}{v})\pi i}}\\ &= -\frac{2\pi i}{v}\cdot\mathrm{e}^{+2\tau_0\frac{u}{v}\pi i}\cdot\lim_{N=\infty}\sum_{-N,+N}^{n}\frac{\mathrm{e}^{+2n\frac{u_0}{v}\pi i}}{1-\mathrm{e}^{2(\frac{u}{v}+n\frac{w}{v})\pi i}}\,,\end{aligned}$$

wenn $\sigma_0 v + \tau_0 w$ wieder gleich u_0 gesetzt wird.

Früher war ε gleich $+1$ oder -1 so eingeführt, daß $\varepsilon\frac{w}{v}$ immer positiven imaginären Teil hatte oder daß $|\mathrm{e}^{\varepsilon\frac{w}{v}\pi i}|$ unter 1 lag. Man darf jetzt statt n auch $n\cdot\varepsilon$ schreiben, ohne die Summationsgrenzen ändern zu müssen, es folgt dann die Gleichung [S.88]

[33] Der Grenzübergang zur früheren Reihe erfolgt S.105ff.
[34] $0 < \tau_0 < +1$ ist notwendig, vgl. S.82 u. 92,93.

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-M,+M}^{m}\sum_{-N,+N}^{n}\frac{e^{2(n\sigma_0-m\tau_0)\pi i}}{u+mv+nw}=-\frac{2\pi i}{v}\cdot e^{+2\tau_0\frac{u}{v}\pi i}\cdot\lim_{N=\infty}\sum_{-N,+N}^{n}\frac{e^{+2n\frac{\varepsilon u_0}{v}\pi i}}{1-e^{2(\frac{u}{v}+n\frac{\varepsilon w}{v})\pi i}}$$
$$=-\frac{2\pi i}{v}\cdot e^{+2\tau_0\frac{u}{v}\pi i}\cdot\lim_{N=\infty}\sum_{\substack{h=+1:n=0,1,2\ldots N\\ h=-1:n=1,2\ldots N}}\frac{e^{+2hn\frac{\varepsilon u_0}{v}\pi i}}{1-e^{2(\frac{u}{v}+hn\frac{\varepsilon w}{v})\pi i}}$$

(siehe auch Fußnote [35]). Um den Nenner sowohl für $h=+1$ als auch für $h=-1$ in eine Reihe zu entwickeln, muß man noch über $\frac{u}{v}$ die Annahme machen, daß der imaginäre Teil positiv ist und daß er kleiner ist als der ebenfalls positive imaginäre Teil von $\varepsilon\frac{w}{v}$. Dann hat $(\frac{u}{v}+hn\frac{\varepsilon w}{v})\pi i$ bei $h=+1$ immer negativen imaginären Teil, wie auch $n(=0,1,2,,N)$ beschaffen ist, während diese Größe bei $h=-1$ $(n=1,2..N)$ stets positiven reellen Teil hat. Nach

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{0,\infty}^{m}z^m \quad \text{bei} \quad |z|<1$$

und

$$\frac{1}{1-z}=\frac{-1}{z(1-\frac{1}{z})}=-\frac{1}{z}\cdot(1+z^{-1}+z^{-2}+\ldots)=-\sum_{1,\infty}^{m}z^{-m} \quad \text{bei} \quad |z|>1$$

läßt sich ganz allgemein für $h=+1$ und $h=-1$ schreiben: [S.89]

$$\frac{1}{1-e^{2(\frac{u}{v}+hn\frac{\varepsilon w}{v})\pi i}}=h\cdot\sum_{m}e^{2hm(\frac{u}{v}+hn\frac{\varepsilon w}{v})\pi i}$$

wo die Summation für $h=+1$ sich auf $m=0,1,2...\infty$, für $h=-1$ aber auf $m=1,2...\infty$ ersteckt. Es folgt

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-M,+M}^{m}\sum_{-N,+N}^{n}\frac{e^{2(n\sigma_0-m\tau_0)\pi i}}{u+mv+nw}=-\frac{2\pi i}{v}\cdot e^{+2\tau_0\frac{u}{v}\pi i}\cdot\lim_{N=\infty}\sum_{m,n}h\cdot e^{2hn\frac{\varepsilon u_0}{v}\pi i+2hm(\frac{u}{v}+hn\frac{\varepsilon w}{v})\pi i}$$
$$=-\frac{2\pi i}{v}\cdot e^{+2\tau_0\frac{u}{v}\pi i}\cdot\lim_{N=\infty}\sum_{m,n}h\cdot e^{2mn\frac{\varepsilon w}{v}\pi i+2h(m\frac{u}{v}+n\frac{\varepsilon u_0}{v})\pi i},$$

wo die Summation sich bei $h=+1$ auf $m=0,1,2\ldots\infty$ u. $n=0,1,2\ldots N$, und bei $h=-1$ auf $m=1,2\ldots\infty$ und $n=0,1,2\ldots N$ bezieht.

Eine Entwicklung ähnlicher Form erhält man nun aus

$$\frac{\vartheta_1'(0)\cdot\vartheta_1(\xi+\eta)}{\vartheta_0(\xi)\cdot\vartheta_0(\eta)}=+4\pi\cdot\sum_{\substack{\mu=1,3,5\ldots\\ \nu=1,3,5\ldots}}q^{\frac{1}{2}\mu\cdot\nu}\cdot\sin(\mu\xi+\nu\eta)\pi=+\frac{4\pi}{2i}\cdot\sum_{\substack{h=+1,-1\\ \mu=1,3,5\ldots\\ \nu=1,3,5\ldots}}h\cdot e^{\frac{1}{2}\mu\nu\omega\pi i+h(\mu\xi+\nu\eta)\pi i}.$$

Setzt man $\mu=2m+h$, $\nu=2n+h$, so geht bei $h=+1$ m sowohl wie n von 0 bis ∞, während bei $h=-1$ m u. n nur von 1 bis ∞ gehen. [S.90]

$$\frac{\vartheta_1'(0)\cdot\vartheta_1(\xi+\eta)}{\vartheta_0(\xi)\cdot\vartheta_0(\eta)}=-2\pi i\cdot\sum_{\substack{h=+1:m,n=0,1,2\ldots\infty\\ h=-1:m,n=1,2,3\ldots\infty}}h\cdot e^{\frac{1}{2}(2m+h)(2n+h)\omega\pi i+h\big((2m+h)\xi+(2n+h)\eta\big)\pi i}.$$

[35] Mittels $0<\tau_0<+1$ kann man die absolute Convergenz zeigen, sogar die von

$$\sum_{-\infty,+\infty}^{n}\frac{e^{+2n\frac{\varepsilon u_0}{v}\pi i}}{1-e^{+2(\frac{u}{v}+n\frac{\varepsilon w}{v})\pi i}}.$$

Der Exponent ist (wegen $h^2 = +1$)

$$\begin{aligned} &2mn\omega\pi i + h(m+n)\omega\pi i + \frac{1}{2}\omega\pi i + h(2m\xi + 2n\eta)\pi i + (\xi+\eta)\pi i \\ &= 2mn\omega\pi i + (\xi + \eta + \frac{\omega}{2})\pi i + hm(2\xi+\omega)\pi i + hn(2\eta+\omega)\pi i \; . \end{aligned}$$

Durch

$$\xi + \frac{\omega}{2} = \xi', \quad \eta + \frac{\omega}{2} = \eta'$$

erhält man

$$\frac{\vartheta_1'(0)\cdot\vartheta_1(\xi'+\eta'-\omega)}{\vartheta_0(\xi'-\frac{\omega}{2})\cdot\vartheta_0(\eta'-\frac{\omega}{2})} = -2\pi i\cdot \mathrm{e}^{+(\xi'+\eta'-\frac{\omega}{2})\pi i} \sum_{\substack{h=+1: m,n=0,1,2\dots\infty \\ h=-1: m,n=1,2,3\dots\infty}} h\cdot \mathrm{e}^{+2mn\omega\pi i + 2h(m\xi'+n\eta')\pi i} \; .$$

Der Ausdruck links ist wesentlich zu vereinfachen durch

$$\vartheta_1(\zeta + \frac{\omega}{2}) = i\cdot \mathrm{e}^{-\frac{\pi i\omega}{4} - \pi i\zeta}\cdot\vartheta_0(\zeta)$$

oder

$$\vartheta_1(\zeta + \frac{\omega}{2}) = i\cdot \mathrm{e}^{+\frac{\pi i\omega}{4} - \pi i(\zeta+\frac{\omega}{2})}\cdot\vartheta_0(\zeta)$$

und durch [S.91]

$$\vartheta_1(\zeta+\omega) = -\mathrm{e}^{-\pi i(2\zeta+\omega)}\vartheta_1(\zeta) = -\mathrm{e}^{-\pi i(2(\zeta+\omega)-\omega)}\vartheta_1(\zeta)\, .$$

Es folgt nämlich

$$\begin{aligned} \vartheta_1(\xi') &= i\cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi i\omega}{4} - \pi i\xi'}\cdot\vartheta_0(\xi'-\tfrac{\omega}{2}) \\ \vartheta_1(\eta') &= i\cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi i\omega}{4} - \pi i\eta'}\cdot\vartheta_0(\eta'-\tfrac{\omega}{2}) \\ \vartheta_1(\xi'+\eta') &= -\mathrm{e}^{-\pi i(2\xi'+2\eta'-\omega)}\cdot\vartheta_1(\xi'+\eta'-\omega) \end{aligned}$$

oder

$$\frac{\vartheta_1(\xi'+\eta')}{\vartheta_1(\xi')\cdot\vartheta_1(\eta')} = \frac{-\mathrm{e}^{-\pi i(2\xi'+2\eta'-\omega)}}{i^2\cdot \mathrm{e}^{+\frac{\pi i\omega}{2} - \pi i(\xi'+\eta')}}\cdot\frac{\vartheta_1(\xi'+\eta'-\omega)}{\vartheta_0(\xi'-\frac{\omega}{2})\cdot\vartheta_0(\eta'-\frac{\omega}{2})} \; ,$$

d.h.

$$\frac{\vartheta_1(\xi'+\eta'-\omega)}{\vartheta_0(\xi'-\frac{\omega}{2})\cdot\vartheta_0(\eta'-\frac{\omega}{2})} = \mathrm{e}^{+\pi i(\xi'+\eta') - \frac{\pi i\omega}{2}}\cdot\frac{\vartheta_1(\xi'+\eta')}{\vartheta_1(\xi')\cdot\vartheta_1(\eta')} \; .$$

So hat man

$$-2\pi i\cdot\sum_{\substack{h=+1: m,n=0,1,2\dots\infty \\ h=-1: m,n=1,2,3\dots\infty}} h\cdot \mathrm{e}^{+2mn\omega\pi i + 2h(m\xi'+n\eta')\pi i} = \frac{\vartheta_1'(0)\cdot\vartheta_1(\xi'+\eta')}{\vartheta_1(\xi')\cdot\vartheta_1(\eta')} \; .$$

Auf S.89 aber stand die Gleichung

$$\begin{aligned} &\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-M,+M}^{m}\sum_{-N,+N}^{n}\frac{\mathrm{e}^{2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{u+mv+nw} \\ &= -\tfrac{2\pi i}{v}\cdot \mathrm{e}^{+2\tau_0\frac{u}{v}\pi i}\cdot\lim_{N=\infty}\sum_{\substack{h=+1:\ \left\{ \substack{m=0,1,2\cdots\infty \\ n=0,1,2\cdots N} \right. \\ h=-1:\ \left\{ \substack{m=1,2,3\cdots\infty \\ n=1,2,3\cdots N} \right.}} h\cdot \mathrm{e}^{2mn\frac{\varepsilon w}{v}\pi i + 2h(m\frac{u}{v} + n\frac{\varepsilon u_0}{v})\pi i} \; . \end{aligned}$$

Für $\omega = \frac{\varepsilon w}{v}, \xi = \frac{u}{v}, \eta' = \frac{\varepsilon u_0}{v}$ stimmt der Ausdruck von $\frac{\vartheta_1'(0)\cdot\vartheta_1(\xi'+\eta')}{\vartheta_1(\xi')\cdot\vartheta_1(\eta')}$ hiermit bis auf einen Faktor überein, und man findet, wenn für $\vartheta_1(\zeta)$ kurz $\vartheta(\zeta)$ geschrieben wird (wie dies bisher in der Vorlesung auch immer geschah) [S.92]

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-M,+M}^{m}\sum_{-N,+N}^{n}\frac{\mathrm{e}^{2(n\sigma_0-m\tau_0)\pi i}}{u+mv+nw} = \frac{1}{v}\cdot \mathrm{e}^{+2\tau_0\frac{u}{v}\pi i}\cdot\frac{\vartheta'(0,\frac{\varepsilon w}{v})\cdot\vartheta(\frac{u}{v}+\frac{\varepsilon u_0}{v},\frac{\varepsilon w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v},\frac{\varepsilon w}{v})\cdot\vartheta(\frac{\varepsilon u_0}{v},\frac{\varepsilon w}{v})}\,.$$

Bei der Herleitung dieser wichtigen Beziehung waren jedoch einige beschränkenden Voraussetzungen nötig, auf die noch näher eingegangen werden muß, und die für die Gültigkeit der Gleichung zum größten Teil nicht erforderlich sind.

Die schon auf S.82 stehende, für $0 < \xi < 2$ geltende Eulersche Formel [36], welche auf S.87 benutzt wurde, erfordert dort $0 < \tau_0 < 1$. Weiter war a.S.88 die Annahme nötig, daß $\frac{u}{v}$ einen mit i multiplizierten Bestandteil habe, der größer als 0 und kleiner als der entsprechende Bestandteil von $\frac{\varepsilon w}{v}$ ist. Setzt man daher $u = \sigma v + \tau w$ oder $\frac{u}{v} = \sigma v + \tau\frac{w}{v} = \sigma + \tau\varepsilon\cdot\frac{\varepsilon w}{v}$, so muß sein: $0 < \tau\varepsilon < 1$. [S.93]

Die auf S.86 oben angeführte Formel für den Quotienten aus Thetafunktionen erforderte $|\mathrm{e}^{\frac{\pi i\varepsilon w}{2v}}| < |\mathrm{e}^{\xi\pi i}| < |\mathrm{e}^{-\frac{\pi i\varepsilon w}{v}}|$ und entsprechendes für η. Bei der a.S.89 beginnenden Umformung wurde

$$\xi + \frac{\omega}{2} = \xi' = \frac{u}{v} \quad\text{und}\quad \eta + \frac{\omega}{2} = \eta' = \frac{\varepsilon u_0}{v}$$

gesetzt, wo $\omega = \frac{\varepsilon w}{v}$ ist. Bedeutet also $R(z)$ den reellen Teil von z, so soll sein

$$R(\frac{\pi i}{2}\cdot\frac{\varepsilon w}{v}) < R((\frac{u}{v}-\frac{\varepsilon w}{2v})\pi i) < R(-\frac{\pi i}{2}\cdot\frac{\varepsilon w}{v})$$

und

$$R(\frac{\pi i}{2}\cdot\frac{\varepsilon w}{v}) < R((\frac{\varepsilon u_0}{v}-\frac{\varepsilon w}{2v})\pi i) < R(-\frac{\pi i}{2}\cdot\frac{\varepsilon w}{v})$$

oder

$$R(\frac{\varepsilon w}{v}\pi i) < R(\frac{u}{v}\pi i) < 0 \quad\text{und}\quad R(\frac{\varepsilon w}{v}\pi i) < R(\frac{\varepsilon u_0}{v}\pi i) < 0\,.$$

Ist wieder $u = \sigma v + \tau w$ u. $u_0 = \sigma_0 v + \tau_0 w$, so hat man [S.94]

$$R(\frac{u}{v}\pi i) = R(\sigma\pi i + \tau\varepsilon\frac{\varepsilon w}{v}\pi i) = \tau\varepsilon R(\frac{\varepsilon w}{v}\pi i)$$

und

$$R(\frac{\varepsilon u_0}{v}\pi i) = R(\varepsilon\sigma_0\pi i + \tau_0\frac{\varepsilon w}{v}\pi i) = \tau_0 R(\frac{\varepsilon w}{v}\pi i)\,.$$

Da $R(\frac{\varepsilon w}{v}\pi i)$ negativ ist, folgt aus den Ungleichungen

$$0 < \tau\cdot\varepsilon < 1 \quad\text{und}\quad 0 < \tau_0 < 1\,.$$

Die Umformung von $\lim\limits_{N=\infty}\lim\limits_{M=\infty}\sum\limits_{-M,+M}^{m}\sum\limits_{-N,+N}^{n}\frac{\mathrm{e}^{2(n\sigma_0-m\tau_0)\pi i}}{u+mv+nw}$ auf S.86-89 und die des Quotienten aus Thetafunktionen auf S.89—92 erfordern demnach gemeinsam die Beziehungen

$$0 < \tau\cdot\varepsilon < 1 \quad\text{und}\quad 0 < \tau_0 < 1\,,$$

[36] η durfte nicht reell sein, d.h. $y = \frac{u+nw}{v} = \sigma + (\tau+n)\frac{w}{v}$ nicht reell oder τ nicht ganzzahlig.

und dafür gilt zunächst nur die Beziehungen

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-M,+M}^{m}\sum_{-N,+N}^{n}\frac{\mathrm{e}^{2(n\sigma_0-m\tau_0)\pi i}}{u+mv+nw}$$
$$=+\tfrac{1}{v}\cdot\mathrm{e}^{+2\tau_0(\sigma+\tau\frac{w}{v})\pi i}\cdot\frac{\vartheta'(0,\frac{\varepsilon w}{v})\cdot\vartheta((\sigma+\varepsilon\sigma_0)+(\tau+\varepsilon\tau_0)\frac{w}{v},\frac{\varepsilon w}{v})}{\vartheta(\sigma+\tau\frac{w}{v},\frac{\varepsilon w}{v})\cdot\vartheta(\varepsilon\sigma_0+\varepsilon\tau_0\frac{w}{v},\frac{\varepsilon w}{v})}$$
$$=+\tfrac{1}{v}\cdot\mathrm{e}^{+2\tau_0\frac{u}{v}\pi i}\cdot\frac{\vartheta'(0,\frac{\varepsilon w}{v})\cdot\vartheta(\frac{u}{v}+\frac{\varepsilon u_0}{v},\frac{\varepsilon w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v},\frac{\varepsilon w}{v})\cdot\vartheta(\frac{\varepsilon u_0}{v},\frac{\varepsilon w}{v})}\,.$$

Ihre allgemeine Gültigkeit [37] wird daraus folgen, daß die Gleichung bei Ersetzen von τ_0 durch τ_0+1 oder von τ durch $\tau+1$ richtig bleibt, und das ist in der That der Fall. [S.95]

Beim Ersetzen von τ_0 durch τ_0+1 ändert sich nämlich links gar nichts und nach $\vartheta(\zeta+\omega,\omega)=-\mathrm{e}^{-\pi i(2\zeta+\omega)}\cdot\vartheta(\zeta,\omega)$ geht der Quotient

$$\frac{\vartheta(\frac{u}{v}+\frac{\varepsilon u_0}{v},\frac{\varepsilon w}{v})}{\vartheta(\frac{\varepsilon u_0}{v},\frac{\varepsilon w}{v})}\quad\text{in}\quad\frac{\vartheta(\frac{u}{v}+\frac{\varepsilon u_0}{v}+\frac{\varepsilon w}{v},\frac{\varepsilon w}{v})}{\vartheta(\frac{\varepsilon u_0}{v}+\frac{\varepsilon w}{v},\frac{\varepsilon w}{v})}\quad\text{oder}\quad\mathrm{e}^{-2\pi i\{(\frac{u}{v}+\frac{\varepsilon u_0}{v})-\frac{\varepsilon u_0}{v}\}}\cdot\frac{\vartheta(\frac{u}{v}+\frac{\varepsilon u_0}{v},\frac{\varepsilon w}{v})}{\vartheta(\frac{\varepsilon u_0}{v},\frac{\varepsilon w}{v})}$$

über, d.h. er nimmt den Faktor $\mathrm{e}^{-2\pi i\frac{u}{v}}$ an; dieser ist aber der reziproke Wert des Faktors, um welchen $\mathrm{e}^{+2\tau_0\frac{u}{v}\pi i}$ sich bei Erhöhung von τ_0 um $+1$ ändert.

Ersetzt man nun zweitens τ durch $\tau+1$, so geht $\frac{u}{v}$ in $\frac{u+v}{v}$ über, $\mathrm{e}^{2\tau_0\frac{u}{v}\pi i}$ nimmt den Faktor $\mathrm{e}^{2\tau_0\frac{w}{v}\pi i}$ an und

$$\frac{\vartheta(\frac{u}{v}+\frac{\varepsilon u_0}{v},\frac{\varepsilon w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v},\frac{\varepsilon w}{v})}\quad\text{geht über in}\quad\frac{\vartheta(\frac{u}{v}+\frac{\varepsilon u_0}{v}+\varepsilon\cdot\frac{\varepsilon w}{v},\frac{\varepsilon w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v}+\varepsilon\cdot\frac{\varepsilon w}{v},\frac{\varepsilon w}{v})}\,,$$

d.h. es nimmt nach $\vartheta(\zeta+\varepsilon\omega,\omega)=-\mathrm{e}^{-\pi i\omega-2\pi i\varepsilon\zeta}\cdot\vartheta(\zeta,\omega)$ den Faktor [S.96]

$$\mathrm{e}^{-2\pi i\varepsilon\{(\frac{u}{v}+\varepsilon\frac{u_0}{v})-\frac{u}{v}\}}=\mathrm{e}^{-2\pi i\varepsilon^2\frac{u_0}{v}}=\mathrm{e}^{-2\pi i\frac{u_0}{v}}=\mathrm{e}^{-2\pi i(\sigma_0+\tau_0\frac{w}{v})}$$

an. Darum ändert sich die ganze rechte Seite um den Faktor $\mathrm{e}^{-2\sigma_0\pi i}$. Aus der Doppelsumme auf der linken Seite aber entsteht bei Vermehrung von τ um $+1$ oder Ersetzen von u durch $u+v$ folgendes:

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-M,+M}^{m}\sum_{-N,+N}^{n}\frac{\mathrm{e}^{2(n\sigma_0-m\tau_0)\pi i}}{u+mv+nw}$$
$$=\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-M,+M}^{m}\sum_{-N+1,N+1}^{n}\frac{\mathrm{e}^{2(n\sigma_0-m\tau_0)\pi i-2\sigma_0\pi i}}{u+mv+nw}$$
$$=\mathrm{e}^{-2\sigma_0\pi i}\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-M,+M}^{m}\sum_{-N,N}^{n}\frac{\mathrm{e}^{2(n\sigma_0-m\tau_0)\pi i}}{u+mv+nw}$$
$$=\mathrm{e}^{-2\sigma_0\pi i}\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-M,+M}^{m}\left(\frac{\mathrm{e}^{2((N+1)\sigma_0-m\tau_0)\pi i}}{u+mv+(N+1)w}-\frac{\mathrm{e}^{2(-N\sigma_0-m\tau_0)\pi i}}{u+mv-Nw}\right).$$

Läßt sich vom Ausdruck in der letzten Zeile nachweisen, daß er null ist, so ändern sich die linke und die rechte Seite in der Formel von S.92 gleichartig bei Vermehrung von τ um 1 oder bei Änderung von u um $+v$. Und da auch Änderung von τ_0 in τ_0+1 die Richtigkeit der Formel nicht beeinträchtigte, so wird dann gezeigt sein, daß die wichtige Gleichung von S.92 resp. 94 ganz [S.97]

[37] Ganzzahliges τ oder τ_0 ist doch noch auszuschließen.

allgemein gilt [38]. Zum Beweis [39] wendet man die Summenformel von S.82 in der Form

$$\lim_{M=\infty} \sum_{-M,M}^{m} \frac{\mathrm{e}^{-m\xi\pi i}}{\eta + m} = \frac{2\pi i \cdot \mathrm{e}^{+\xi\eta\pi i}}{\mathrm{e}^{2\eta\pi i} - 1}$$

an, wo ξ zwischen 0 u. 2 liegen muß. Für $\xi = 2\tau_0$ und $\eta = \frac{u+(N+1)w}{v}$ resp. $\eta = \frac{u-Nw}{v}$ findet man

$$\begin{aligned}
&\lim_{N=\infty}\Big\{\lim_{M=\infty} \sum_{-M,M}^{m} \frac{\mathrm{e}^{2((N+1)\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{(\frac{u+(N+1)w}{v} + m)v} - \lim_{M=\infty} \sum_{-M,M}^{m} \frac{\mathrm{e}^{2(-N\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{(\frac{u-Nw}{v} + m)v}\Big\} \\
&= \frac{1}{v}\lim_{N=\infty}\Big\{\frac{\mathrm{e}^{2(N+1)\sigma_0\pi i + 2\tau_0(\frac{u}{v}+(N+1)\frac{w}{v})\pi i}}{\mathrm{e}^{2(\frac{u}{v}+(N+1)\frac{w}{v})\pi i} - 1} - \frac{\mathrm{e}^{2N\sigma_0\pi i + 2\tau_0(\frac{u}{v}-N\frac{w}{v})\pi i}}{\mathrm{e}^{2(\frac{u}{v}-N\frac{w}{v})\pi i} - 1}\Big\} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{+2\tau_0\frac{u}{u}\pi i}}{v}\lim_{N=\infty}\Big\{\frac{\mathrm{e}^{2(N+1)(\sigma_0+\tau_0\varepsilon\frac{\varepsilon w}{v})\pi i}}{\mathrm{e}^{2(\frac{u}{v}+\varepsilon(N+1)\frac{\varepsilon w}{v})\pi i} - 1} - \frac{\mathrm{e}^{-2N(\sigma_0+\tau_0\varepsilon\frac{\varepsilon w}{v})\pi i}}{\mathrm{e}^{2(\frac{u}{v}-N\frac{w}{v})\pi i} - 1}\Big\}.
\end{aligned}$$

ε ist wieder so bestimmt, daß $\mathrm{e}^{\frac{\varepsilon w}{v}\pi i}$ negativen reellen Teil hat. τ_0 mußte für diese Umformung (wegen $0 < \xi < 2$) zwischen 0 u. $+1$ liegen. Nun hat man [S.98]

$$\frac{\mathrm{e}^{2(N+1)(\sigma_0+\tau_0\varepsilon\frac{\varepsilon w}{v})\pi i}}{\mathrm{e}^{2(\frac{u}{v}+\varepsilon(N+1)\frac{\varepsilon w}{v})\pi i} - 1} = \frac{\mathrm{e}^{2(N+1)\sigma_0\pi i + 2\varepsilon(N+1)(\tau_0-1)\frac{\varepsilon w}{v}\pi i}}{\mathrm{e}^{2\frac{u}{v}\pi i} - \mathrm{e}^{-\varepsilon(N+1)\frac{\varepsilon w}{v}\pi i}}$$

und bei unbegrenzt wachsendem positiven N wird für $\varepsilon = +1$ der erste, für $\varepsilon = -1$ aber der zweite Ausdruck zu 0. Andererseits hat man

$$\frac{\mathrm{e}^{-2N(\sigma_0+\tau_0\varepsilon\frac{\varepsilon w}{v})\pi i}}{\mathrm{e}^{2(\frac{u}{v}-\varepsilon N\frac{\varepsilon w}{v})\pi i} - 1} = \frac{\mathrm{e}^{-2N\sigma_0\pi i + 2\varepsilon N(1-\tau_0)\frac{\varepsilon w}{v}\pi i}}{\mathrm{e}^{2\frac{u}{v}\pi i} - \mathrm{e}^{+\varepsilon N\frac{\varepsilon w}{v}\pi i}}$$

und für $N = +\infty$ wird bei $\varepsilon = +1$ der zweite, bei $\varepsilon = -1$ der erste Ausdruck zu 0.

Der auf S.96 zuletzt stehende Ausdruck ist demnach (für $0 < \tau_0 < 1$) immer 0, d.h. es ist

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty} \sum_{-M,M}^{m} \sum_{-N,N}^{n} \frac{\mathrm{e}^{2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{u + mv + (n+1)w} = \mathrm{e}^{-2\sigma_0\pi i} \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty} \sum_{-M,M}^{m} \sum_{-N,N}^{n} \frac{\mathrm{e}^{2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{u + mv + nw}.$$

Hiermit ist nach S.95—97 bewiesen, daß die für $0 < \tau\cdot\varepsilon < 1,\ 0 < \tau_0 < 1$ hergeleitete Gleichung [S.99]

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty} \sum_{-M,M}^{m} \sum_{-N,N}^{n} \frac{\mathrm{e}^{+2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{u + mv + nw} = \frac{\mathrm{e}^{+2\tau_0\frac{u}{v}\pi i}}{v} \cdot \frac{\vartheta'(0, \frac{\varepsilon w}{v}) \cdot \vartheta(\frac{u}{v} + \frac{\varepsilon u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}) \cdot \vartheta(\frac{\varepsilon u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v})}$$

(wo $u = \sigma v + \tau w,\ u_0 = \sigma_0 v + \tau_0 w$) auch richtig bleibt, wenn man τ durch $\tau + 1$ ersetzt. Da sie andererseits auch bei Änderung von τ_0 um $+1$ gültig bleibt [40], so gilt sie ganz allgemein, solange τ und τ_0 nicht ganzzahlig sind.

Die durch die linke oder rechte Seite der letzten Gleichung definierte Funktion von u, v, w und σ_0, τ_0 ist (wie die rechte Seite zeigt) eine Funktion der complexen Veränderlichen u im Riemann'schen Sinn, nicht aber eine solche Funktion von u_0, denn wenn auch aus gegebenem u_0 (und v, w) die reellen Größen σ_0 und τ_0 eindeutig folgen, die Funktion also durch u_0, u, v, w [S.100] bestimmt ist, so ist sie doch wegen des Bestandteils $\mathrm{e}^{2\tau_0\frac{u}{v}\pi i}$ keine Funktion im Riemann'schen Sinne. Dennoch soll für den Ausdruck das Funktionszeichen

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w) = \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty} \sum_{-M,M}^{m} \sum_{-N,N}^{n} \frac{\mathrm{e}^{+2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{u + mv + nw} = \frac{\mathrm{e}^{2\tau_0\frac{u}{v}\pi i}}{v} \cdot \frac{\vartheta'(0, \frac{\varepsilon w}{v}) \cdot \vartheta(\frac{u}{v} + \frac{\varepsilon u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}) \cdot \vartheta(\frac{\varepsilon u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v})}$$

[38] Solange wenigstens τ und τ_0 nicht ganzzahlig sind.

[39] Nach Kroneckers Abhandlung S.88.

[40] S.95.

eingeführt werden.

Einige Eigenschaften dieser Funktion sind sofort zu übersehen:

Ändert man u_0 um einen Ausdruck $sv+tw$, wo s u. t ganze Zahlen sind, so ändert sich die Doppelsumme gar nicht, man hat

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon(u_0+sv+tw),u,v,\varepsilon w)=\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0,u,v,\varepsilon w)\,,$$

was auch aus dem Ausdruck in den Thetafunktionen zu sehen ist. [S.101]

Die Änderung von $\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0,u,v,\varepsilon w)$ beim Ersetzen von u durch $u+sv+tw$ soll zunächst mittel der Formeln über Thetafunktionen bestimmt werden. Nach S.4 hat man

$$\vartheta(\zeta+r\omega+s,\omega)=\mathrm{e}^{-\pi i(r^2\omega+2r\zeta+r+s)}\vartheta(\zeta,\omega)$$

oder

$$\frac{\vartheta(\xi+r\omega+s,\omega)}{\vartheta(\eta+r\omega+s,\omega)}=\mathrm{e}^{-2\pi ir(\xi-\eta)}\cdot\frac{\vartheta(\xi,\omega)}{\vartheta(\eta,\omega)}\,,$$

d.h.

$$\frac{\vartheta(\frac{\varepsilon u_0+u}{v}+s+t\varepsilon\cdot\frac{\varepsilon w}{v},\frac{\varepsilon w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v}+s+t\varepsilon\cdot\frac{\varepsilon w}{v},\frac{\varepsilon w}{v})}=\mathrm{e}^{-2\pi i\cdot t\varepsilon\cdot\frac{\varepsilon u_0}{v}}\cdot\frac{\vartheta(\frac{\varepsilon u_0+u}{v},\frac{\varepsilon w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v},\frac{\varepsilon w}{v})}\,.$$

Der ganze Quotient aus den Thetafunktionen nimmt also den Faktor $\mathrm{e}^{\frac{-2\pi i\cdot t\cdot u_0}{v}}$ an. Dagegen nimmt $\mathrm{e}^{+2\tau_0\frac{u}{v}\pi i}$ den Faktor $\mathrm{e}^{2\tau_0(s+t\frac{w}{v})\pi i}$ an. Die Funktion $\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0,u,v,\varepsilon w)$ ändert sich deshalb um den Faktor

$$\mathrm{e}^{-\frac{2\cdot tu_0}{v}\pi i+2\tau_0(s+t\frac{w}{v})\pi i}=\mathrm{e}^{2\tau_0s\pi i-2t(\sigma_0+\tau_0\frac{w}{v})\pi i+2\tau_0t\frac{w}{v}\pi i}$$

oder um

$$\mathrm{e}^{+2(s\tau_0-t\sigma_0)\pi i}\,.$$

Aus der Doppelsumme kommt man übrigens ganz zu demselben Resultat. Denn die genaue Untersuchung von S.96—98 zeigt, daß [S.102]

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0,u+w,v,\varepsilon w)=\mathrm{e}^{-2\sigma_0\pi i}\cdot\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0,u,v,\varepsilon w)$$

ist und andererseits hat man

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0,u+v,v,\varepsilon w)&=\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-M,M}^{m}\sum_{-N,N}^{n}\frac{\mathrm{e}^{+2(n\sigma_0-m\tau_0)\pi i}}{u+(m+1)v+nw}\\&=\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-M+1,M+1}^{m}\sum_{-N,N}^{n}\frac{\mathrm{e}^{+2\tau_0\pi i}\cdot\mathrm{e}^{+2(n\sigma_0-m\tau_0)\pi i}}{u+mv+nw}\\&=\mathrm{e}^{+2\tau_0\pi i}\cdot\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0,u,v,\varepsilon w)\\&\quad+\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-N,N}^{n}\frac{\mathrm{e}^{2\tau_0\pi i}\cdot\mathrm{e}^{2(n\sigma_0-(M+1)\tau_0)\pi i}}{u+(M+1)v+nw}\\&\quad-\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-N,N}^{n}\frac{\mathrm{e}^{2\tau_0\pi i}\cdot\mathrm{e}^{2(n\sigma_0+M\tau_0)\pi i}}{u-Mv+nw}\,.\end{aligned}$$

Indem man aber in diesen noch endlichen Summen erst M unendlich macht, werden die einzelnen Glieder u. damit die Summen selbst zu Null und bleiben das auch bei unbegrenzt wachendem N. So hat man

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0,u+v,v,\varepsilon w)=\mathrm{e}^{+2\tau_0\pi i}\cdot\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0,u,v,\varepsilon w)\,,$$

und durch Vereinigung dieser Gleichungen mit der ersten Gleichung voriger Seite kommt man auch wieder zu dem unten auf S.101 gefundenen Wert von $\frac{\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0,u+sv+tw,v,\varepsilon w)}{\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0,u,v,\varepsilon w)}$. [S.103]
Damit sind die Gleichungen

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon(u_0+sv+tw),u,v,\varepsilon w) &= +\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0,u,v,\varepsilon w)\\ \overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0,u+sv+tw,v,\varepsilon w) &= \mathrm{e}^{-2(t\sigma_0-s\tau_0)\pi i}\cdot\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0,u,v,\varepsilon w)\end{aligned}$$

gefunden.

Die Änderung der Funktion $\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0,u,v,\varepsilon w)$ bei linearer Transformation durch die Gleichungen von S.14

$$\begin{aligned}v' &= \beta' v-\alpha' w & v &= \alpha v'+\alpha' w'\\ w' &= -\beta v+\alpha w & w &= \beta v'+\beta' w'\\ \sigma' &= \alpha\sigma+\beta\tau+\gamma & \sigma_0' &= \alpha\sigma_0+\beta\tau_0+\gamma\\ \tau' &= \alpha'\sigma+\beta'\tau+\gamma' & \tau_0' &= \alpha'\sigma_0+\beta'\tau_0+\gamma'\\ u' &= u+\gamma v'+\gamma' w' & u_0' &= u_0+\gamma v'+\gamma' w'\end{aligned}$$

$$(\alpha\cdot\beta'-\alpha'\cdot\beta=+1)$$

läßt sich aus den Formeln über die Transformation der Thetafunktionen herleiten, man erhält ein sehr einfaches Resultat, nämlich daß die Funktion sich nur um einen Exponentialfaktor mit dem absoluten Wert $+1$ ändert, und daß dieser ganze Faktor zu $+1$ wird, sobald γ und γ' Null sind. [S.104]

[Nach Kroneckers Abhandlung ist das Resultat folgendes:

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0',u',v',\varepsilon w') = \mathrm{e}^{2(\gamma\tau_0'-\gamma'\sigma_0')\pi i}\cdot\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0,u,v,\varepsilon w)$$

und speziell

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0,u,v',\varepsilon w') = \overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0,u,v,\varepsilon w) \quad]$$

Auch aus Convergenz-Untersuchungen der Doppelreihe kann man zu diesen Formeln kommen, indem man an Stelle der Transformation der Variablen eine Transformation der Summationsindices durchführt, nach den ebenfalls auf S.14 stehenden Formeln. So kann man die Theorie der Funktionen $\overline{\mathcal{A}tr}$ direkt durch Behandlung der Doppelreihen [S.105]

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-M,M}^{m}\sum_{-N,N}^{n}\frac{\mathrm{e}^{+2(n\sigma_0-m\tau_0)\pi i}}{u+mv+nw}$$

entwickeln. [Dies geschieht im Abschnitt XXI von Kroneckers Abhandlung „zur Theorie der elliptischen Funktionen“ in den Sitzungsberichten der Akademie (März 1890)]. Siehe auch S.111ff, bes. S.129–140, u. S.253–259.

Den Übergang [41] von der Reihe

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-M,M}^{m}\sum_{-N,N}^{n}\frac{\mathrm{e}^{+2(n\sigma_0-m\tau_0)\pi i}}{u+mv+nw}$$

zu der a.S.79–84 behandelten Reihe von $\sin\mathrm{am}$ kann man streng so machen, daß man zunächst dafür den Ausdruck

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-M,M}^{m}\sum_{-(N+1),N}^{n}\frac{\mathrm{e}^{2(n\sigma_0-m\tau_0)\pi i}}{u+mv+nw}-\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-M,M}^{m}\frac{\mathrm{e}^{2(-(N+1)\sigma_0-m\tau_0)\pi i}}{u+mv-(N+1)w}$$

[41] Diese Betrachtung (fast 3 Seiten) ein eigener Zusatz.

setzt, wo das zweite Glied Null ist nach S.96–98 (dort steht $-N$ statt des hier auftretenden $-(N+1)$). Aus diesem Wert [S.106]

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w) = \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-M,M}^{m}\sum_{-(N+1),N}^{n}\frac{e^{+2(n\sigma_0-m\tau_0)\pi i}}{u+mv+nw}$$

entsteht für $u=\mathrm{K}'i, v=2\mathrm{K}, w=2\mathrm{K}'i$ — wobei ε gleich $+1$ wird — der Ausdruck

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{A}tr}(u_0, \mathrm{K}'i, 2\mathrm{K}, 2\mathrm{K}'i) &= \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-M,M}^{m}\sum_{-(N+1),N}^{n}\frac{e^{(2n\sigma_0-2m\tau_0)\pi i}}{2m\mathrm{K}+(2n+1)\mathrm{K}'i}\\ &= e^{-\sigma_0\pi i}\cdot\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-M,M}^{m}\sum_{-(N+1),N}^{n}\frac{e^{((2n+1)\sigma_0-2m\tau_0)\pi i}}{2m\mathrm{K}+(2n+1)\mathrm{K}'i}\\ &= e^{-\sigma_0\pi i}\cdot\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-M,M}^{m}\sum_{\nu=\pm1,\pm3\ldots\pm(2N+1)}(-1)^m\cdot\frac{e^{(\nu\sigma_0-2m(\tau_0-\frac{1}{2}))\pi i}}{2m\mathrm{K}+\nu\mathrm{K}'i}\,.\end{aligned}$$

Die Reihe ist jetzt genau diesselbe wie die auf S.80–84 erhaltene, sie stellt die Funktion

$$\mathrm{K}\cdot\sin\mathrm{am}\Big(2\sigma_0\mathrm{K}+2(\tau_0-\frac{1}{2})\mathrm{K}'i\Big)$$

dar. Das muß sich auch zeigen lassen, wenn man den Wert von $\overline{\mathcal{A}tr}(u_0, \mathrm{K}'i, 2\mathrm{K}, 2\mathrm{K}'i)$ in Thetafunktionen umformt. Es ist für $\sigma_0=\xi, \tau_0-\frac{1}{2}=\eta$ [S.107]

$$\begin{aligned}&\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{\substack{m=0,\pm1,\pm2\ldots\pm M\\ \nu=\pm1,\pm3\ldots\pm(2N+1)}}(-1)^m\cdot\frac{e^{(\nu\xi-2m\eta)\pi i}}{2m\mathrm{K}+\nu\mathrm{K}'i}\\ &= e^{+\xi\pi i}\cdot\overline{\mathcal{A}tr}(2\xi\mathrm{K}+(2\eta+1)\mathrm{K}'i, \mathrm{K}'i, 2\mathrm{K}, 2\mathrm{K}'i)\\ &= e^{+\xi\pi i}\cdot\frac{e^{(2\eta+1)\frac{\mathrm{K}'i}{2\mathrm{K}}\pi i}}{2\mathrm{K}}\cdot\frac{\vartheta'(0,\frac{\mathrm{K}'i}{\mathrm{K}})\cdot\vartheta(\xi+(\eta+\frac{1}{2})\frac{\mathrm{K}'i}{\mathrm{K}}+\frac{\mathrm{K}'i}{2\mathrm{K}},\frac{\mathrm{K}'i}{\mathrm{K}})}{\vartheta(\xi+(\eta+\frac{1}{2})\frac{\mathrm{K}'i}{\mathrm{K}},\frac{\mathrm{K}'i}{\mathrm{K}})\cdot\vartheta(\frac{\mathrm{K}'i}{2\mathrm{K}},\frac{\mathrm{K}'i}{\mathrm{K}})}\end{aligned}$$

und nach $\vartheta(\zeta+\omega,\omega)=-e^{-\pi i(2\zeta+\omega)}\cdot\vartheta(\zeta,\omega)$ und $\vartheta(\zeta+\frac{1}{2}\omega,\omega)=+i\cdot e^{-\frac{\pi i\omega}{4}-\pi i\zeta}\cdot\vartheta(\zeta,\omega)$ kann man dafür schreiben

$$\begin{aligned}&e^{+\xi\pi i}\cdot\frac{e^{-(\eta+\frac{1}{2})\frac{\pi\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}}}{2\mathrm{K}}\cdot\frac{\vartheta'(0,\frac{\mathrm{K}'i}{\mathrm{K}})\cdot\vartheta(\xi+\eta\frac{\mathrm{K}'i}{\mathrm{K}},\frac{\mathrm{K}'i}{\mathrm{K}})}{\vartheta_0(\xi+\eta\frac{\mathrm{K}'i}{\mathrm{K}},\frac{\mathrm{K}'i}{\mathrm{K}})\cdot\vartheta_0(0,\frac{\mathrm{K}'i}{\mathrm{K}})}\cdot e^{-\frac{\pi i}{2}\cdot\frac{\mathrm{K}'i}{\mathrm{K}}-\pi i(\xi+\eta\frac{\mathrm{K}'i}{\mathrm{K}})}\\ &=\frac{1}{2\mathrm{K}}\cdot\frac{\vartheta'(0,\frac{\mathrm{K}'i}{\mathrm{K}})\cdot\vartheta(\xi+\eta\frac{\mathrm{K}'i}{\mathrm{K}},\frac{\mathrm{K}'i}{\mathrm{K}})}{\vartheta_0(0,\frac{\mathrm{K}'i}{\mathrm{K}})\cdot\vartheta_0(\xi+\eta\frac{\mathrm{K}'i}{\mathrm{K}},\frac{\mathrm{K}'i}{\mathrm{K}})}\,.\end{aligned}$$

Führt man hier die Jakobi'schen Funktionen Θ und H durch

$$\begin{aligned}\vartheta_0\Big(\frac{2\xi\mathrm{K}+2\eta\mathrm{K}'i}{2\mathrm{K}},\frac{\mathrm{K}'i}{\mathrm{K}}\Big)&=\Theta(2\xi\mathrm{K}+2\eta\mathrm{K}'i)\\ \vartheta\Big(\frac{2\xi\mathrm{K}+2\eta\mathrm{K}'i}{2\mathrm{K}},\frac{\mathrm{K}'i}{\mathrm{K}}\Big)&=\mathrm{H}(2\xi\mathrm{K}+2\eta\mathrm{K}'i)\end{aligned}$$

ein, so folgt

$$\begin{aligned}&\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{\substack{m=0,\pm1,\pm2\ldots\pm M\\ \nu=\pm1,\pm3\ldots\pm(2N+1)}}(-1)^m\cdot\frac{e^{(\nu\xi-2m\eta)\pi i}}{2m\mathrm{K}+\nu\mathrm{K}'i}\\ &=\frac{\mathrm{H}'(0)}{\Theta(0)}\cdot\frac{\mathrm{H}(2\xi\mathrm{K}+2\eta\mathrm{K}'i)}{\Theta(2\xi\mathrm{K}+2\eta\mathrm{K}'i)}\\ &=\frac{\mathrm{H}'(0)}{\Theta(0)}\cdot\sqrt{k}\cdot\sin\mathrm{am}(2\xi\mathrm{K}+2\eta\mathrm{K}'i)\,.\end{aligned}$$

Dividiert man aber beide Seiten von $\sqrt{k} \cdot \sin \mathrm{am} u = \frac{\mathrm{H}(u)}{\Theta(u)}$ mit u und geht zu $u = 0$ über, so folgt $\frac{\mathrm{H}'(0)}{\Theta(0)} = \sqrt{k}$ und damit [S.108]

$$\lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{\substack{m=0,\pm1,\pm2\ldots\pm M \\ \nu=\pm1,\pm3\ldots\pm(2N+1)}} (-1)^m \cdot \frac{\mathrm{e}^{(\nu\xi-2m\eta)\pi i}}{2m\mathrm{K}+\nu\mathrm{K}'i} = +k \cdot \sin \mathrm{am}(2\xi\mathrm{K}+2\eta\mathrm{K}'i) \ .$$

Am Schluß der Vorlesung vom 14.12.91 (deren Ausarbeitung hier auf S.77 beginnt) wies Kronecker noch darauf hin, daß man durch einen Grenzübergang von der Reihe

$$\lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{-M,M}^{m} \sum_{-N,N}^{n} \frac{\mathrm{e}^{2(n\sigma_0-m\tau_0)\pi i}}{u+mv+nw}$$

zu der Eisenstein'schen Reihe

$$\lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{-M,M}^{m} \sum_{-N,N}^{n} \frac{1}{u+mv+nw}$$

gelangt und daß man von einer verallgemeinerten Reihe auch zu $f_r(u,v,w)$ kommt. Über die Frage nach der Convergenz der Reihe

$$\sum_{m,n} \frac{\mathrm{e}^{2(n\sigma_0-m\tau_0)\pi i}}{u+mv+nw}$$

erwähnte er noch, daß man den Cauchy'schen Integralsatz aus der Funktionentheorie verwerten [S.109] könne, der auch sonst bei Untersuchungen aus diesem Gebiet vielfach vorteilhaft sei. Am 21.12.91 dachte er dies näher auszuführen, er konnte nicht mehr lesen und starb am 30. Dezember 91. In seinem Manuskript, das über die Vorlesung vom 14.12.91 fast nichts enthält, weil sich diesselbe im wesentlichen an seine Abhandlung in den Sitzungberichten der Akademie (Frühjahr 1890) anschließt, fangen die Notizen zu dem noch nicht vorgetragenen sofort mit der Verwendung des (zweiten) Cauchy'schen Integralsatzes auf die Funktion $\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$ an.

[S.110: Leerseite] [S.110]

[S.111]

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w) \ = \ \frac{1}{v} \cdot \mathrm{e}^{+2\tau_0 \frac{u}{v}\pi i} \cdot \frac{\vartheta'(0, \frac{\varepsilon w}{v}) \cdot \vartheta(\frac{u}{v} + \frac{\varepsilon u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}) \cdot \vartheta(\frac{\varepsilon u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v})}$$

erfüllt die Gleichung

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u+sv+tw, v, \varepsilon w) = \mathrm{e}^{2(s\tau_0-t\sigma_0)\pi i} \cdot \overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$$

wie aus S.101 aus Formeln über Thetafunktionen bewiesen wurde. Weiter findet man direkt

$$\lim_{u=0} u \cdot \overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w) = +1$$

und daraus nach

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w) = \mathrm{e}^{2(s\tau_0-t\sigma_0)\pi i} \cdot \overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u-sv-tw, v, \varepsilon w)$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{u=sv+tw} (u-sv-tw)\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w) \\
&= \mathrm{e}^{2(s\tau_0-t\sigma_0)\pi i} \cdot \lim_{u-sv-tw=0} (u-sv-tw)\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u-sv-tw, v, \varepsilon w) \\
&= \mathrm{e}^{2(s\tau_0-t\sigma_0)\pi i}.
\end{aligned}$$

$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$ ist als Funktion von u betrachtet nur unendlich in den Punkten

$$u = sv + tw\,,$$

wo s und t ganzzahlig sind, und in der Umgebung von $u = sv + tw$ besteht die Entwicklung [S.112]

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w) = \frac{\mathrm{e}^{2(s\tau_0 - t\sigma_0)\pi i}}{u - sv - tw} + f.c.\,,$$

wo f.c. eine stetige Funktion (functio continua) andeutet. Das legt die Vermutung nahe, daß $\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$ und die Summe mit dem allgemeinen Glied $\frac{\mathrm{e}^{2(s\tau_0 - t\sigma_0)\pi i}}{u-sv-tw}$ oder auch

$$\sum_{m,n} \frac{\mathrm{e}^{2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{u + mv + nw}$$

in einfachem Zusammenhang stehen. Aber man weiß — wenn man von allen früheren Untersuchungen absieht — noch nicht, wann die Summe convergiert, und auch nicht, ob sie sich von der durch die Thetafunktionen definierten Funktion $\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$ noch um eine ganze transzendente Funktion unterscheidet. [S.113]

Aus den Cauchy'schen Integralsätzen der Funktionentheorie kommt man aber zur Darstellung von $\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$ als Partialbruchreihe

$$\lim \sum_{m,n} \frac{\mathrm{e}^{2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{u + mv + nw}$$

und zum Convergenznachweis dieser Reihe für bestimmte Arten der Summation.

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int \frac{\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, z, v, \varepsilon w)}{z - u}\, dz$$

für eine große geschlossene Curve in der z-Ebene ist gleich der Summe aller Residuen für die Unendlichkeitspunkte im Inneren des umschlossenen Bereiches. Unendlichkeitspunkte sind erstens $z = u$, wozu das Residuum $\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$ gehört — u sei nicht von der Form $sv + tw$, wo s u. t ganzzahlig sind, d.h. in $u = \sigma v + \tau w$ sei wenistens eine der Größen σ, τ keine ganze Zahl — und dann Punkte $z = sv + tw$, wo $\frac{\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, z, v, \varepsilon w)}{z-u}$ das Residuum $\frac{\mathrm{e}^{2(s\tau_0 - t\sigma_0)\pi i}}{sv+tw-u}$ hat. So folgt [S.114]

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int \frac{\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, z, v, \varepsilon w)}{z - u}\, dz = \overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w) + \sum_{s,t} \frac{\mathrm{e}^{2(s\tau_0 - t\sigma_0)\pi i}}{sv + tw - u}$$

oder

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int \frac{\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, z, v, \varepsilon w)}{z - u}\, dz + \sum_{s,t} \frac{\mathrm{e}^{2(s\tau_0 - t\sigma_0)\pi i}}{u - sv - tw}$$

wo in der Summe alle Punkte $sv + tw$ innerhalb des Integrationsweges auftreten. Kann man nun eine geschlossene Curve finden, bei deren gleichmäßiger Ausdehnung ins Unendliche das Integral verschwindet, so hat man für $\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$ eine Darstellung als unendliche Summe, deren Convergenz für die durch die geschlossene Curve und ihre Ausdehnungsart gegebene Summationsweise klar ist. [42] Kronecker deutet nun in seinem Manuskript die Integration über den Umfang eines Parallelogramms [43] mit den Ecken $z_0 - Mv - Nw, z_0 + Mv - Nw, z_0 + Mv + Nw$ und $z_0 - Mv + Nw$ [S.115]

[42] S.181-193 u. 208-221 bieten Anwendungen dieses Prinzips auf $\frac{\mathrm{e}^{\xi u \pi i}}{\mathrm{e}^{2u\pi i}-1} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \lim_{N=\infty} \sum_{-N,N}^{n} \frac{\mathrm{e}^{n\xi\pi i}}{u-n}$ ($0 < \xi < 2$); „Funktionentheorie I" S.205–269 bietet weitere eigene Anwendungen

[43] S. auch Anm. a.S.125.

an, wo z_0 so bestimmt ist, daß auf den Seiten des Parallelogramms keine Unendlichkeitspunkte von $\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, z, v, \varepsilon w)$ liegen. Einem positiven Umlauf um das Parallelogramm entspricht die angegebene Reihenfolge der Punkte für $\varepsilon = +1$ oder für positiven imaginären Teil von $\frac{w}{v}$. Bei der Integration soll jetzt in dieser Reihenfolge vorgegangen werden:

$$\begin{aligned}
&\int_{z_0-Mv-Nw}^{z_0+Mv+Nw} \frac{\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, z, v, \varepsilon w)}{z-u}\,dz \\
&= \int_{-M}^{+M} \frac{\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, z_0+xv-Nw, v, \varepsilon w)}{z_0+xv-Nw-u}\,v\,dx \\
&= \sum_{-M,M-1}^{m} \int_0^{+1} \frac{\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, z_0+mv+yv-Nw, v, \varepsilon w)}{z_0+mv+yw-Nw-u}\,v\,dy \\
&= \int_0^{+1} \overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, z_0+yv, v, \varepsilon w)\cdot\Big\{\sum_{-M,M-1}^{m} \frac{\mathrm{e}^{+2(m\tau_0+N\sigma_0)\pi i}}{z_0+mv+yw-Nw-u}\Big\}v\,dy\,.
\end{aligned}$$

Ebenso folgt [S.116]

$$\begin{aligned}
&\int_{z_0+Mv-Nw}^{z_0+Mv+Nw} \frac{\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, z, v, \varepsilon w)}{z-u}\,dz \\
&= \int_{-N}^{+N} \frac{\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, z_0+Mv+xw, v, \varepsilon w)}{z_0+Mv+xw-u}\,w\,dx \\
&= \sum_{-N,N-1}^{n} \int_0^{+1} \frac{\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, z_0+Mv+nw+yw, v, \varepsilon w)}{z_0+Mv+nw+yw-u}\,w\,dy \\
&= \int_0^{+1} \overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, z_0+yw, v, \varepsilon w)\cdot\Big\{\sum_{-N,N-1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{+2(M\tau_0-n\sigma_0)\pi i}}{z_0+Mv+nw+yw-u}\Big\}w\,dy\,.
\end{aligned}$$

Aus diesen zwei Gleichungen findet man sofort

$$\begin{aligned}
&\int_{z_0-Mv-Nw}^{z_0+Mv+Nw} \frac{\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, z, v, \varepsilon w)}{z-u}\,dz \\
&= \int_0^{+1} \overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, z_0+yv, v, \varepsilon w)\cdot\Big\{\sum_{-M,M-1}^{m} \frac{\mathrm{e}^{+2(m\tau_0-N\sigma_0)\pi i}}{z_0+mv+yv+Nw-u}\Big\}v\,dy
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\int_{z_0+Mv-Nw}^{z_0+Mv+Nw} \frac{\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, z, v, \varepsilon w)}{z-u}\,dz \\
&= \int_0^{+1} \overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, z_0+yw, v, \varepsilon w)\cdot\Big\{\sum_{-N,N-1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{+2(-M\tau_0-n\sigma_0)\pi i}}{z_0-Mv+nw+yw-u}\Big\}w\,dy\,.
\end{aligned}$$

Die Summe der ersten beiden Integrale vermindert um die Summe der letzten beiden gibt das Randintegral im positiven oder negativen Sinn je nach $\varepsilon = +1$ oder $\varepsilon = -1$. Nun kann man die schon S.82, 87 u. 97 benutzte Summenformel [44] [S.117]

$$\lim_{K=\infty} \sum_{-K,+K}^{k} \frac{\mathrm{e}^{-k\xi\pi i}}{\eta+k} = 2\pi i\cdot\frac{\mathrm{e}^{\xi\eta\pi i}}{\mathrm{e}^{2\eta\pi i}-1}$$

[44] Siehe auch Anhang S.181-221

welche für $0 < \xi < 2$ gilt, anwenden. M u. N sollen beide unendlich werden, und zwar werde zuerst der Fall betrachtet, wo M bei noch endlichem N unendlich wird und darauf N selbst unbegrenzt wächst. Hierfür sind die Grenzwerte von

$$\sum_{-N,N-1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{2(M\tau_0 - n\sigma_0)\pi i}}{z_0 + Mv + nw + yw - u} \quad \text{und} \quad \sum_{-N,N-1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{2(-M\tau_0 - n\sigma_0)\pi i}}{z_0 - Mv + nw + yw - u}$$

gleich 0, weil für $M = \infty$ u. endliches N Null entsteht, was auch für beliebig wachsendes N sich nicht ändern kann. Die beiden Summen [S.118]

$$\sum_{-M,M-1}^{m} \frac{\mathrm{e}^{2(m\tau_0 + N\sigma_0)\pi i}}{z_0 + mv + yv - Nw - u} \quad \text{und} \quad \sum_{-M,M-1}^{m} \frac{\mathrm{e}^{2(m\tau_0 - N\sigma_0)\pi i}}{z_0 + mv + yv + Nw - u}$$

lassen sich aber bei endlichem N und unbegrenzt wachsendem M durch die Grenzwerte der von $-M$ bis $+M$ gefundenen Summen ersetzen, d.h. nach umstehender Formel durch

$$\frac{2\pi i}{v} \cdot \frac{\mathrm{e}^{+2N\sigma_0\pi i - 2\tau_0 \frac{z_0 + yv - Nw - u}{v}\pi i}}{\mathrm{e}^{2\frac{z_0 + yv - Nw - u}{v}\pi i} - 1} \quad \text{und} \quad \frac{2\pi i}{v} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-2N\sigma_0\pi i - 2\tau_0 \frac{z_0 + yv + Nw - u}{v}\pi i}}{\mathrm{e}^{2\frac{z_0 + yv + Nw - u}{v}\pi i} - 1} .$$

Für die Anwendbarkeit dieser Umformung ist erforderlich

$$0 > \tau_0 > -1.$$

Und man sieht leicht, daß dann diese Ausdrücke für $N = +\infty$ zu Null werden. Nur für den ersten braucht man das zu zeigen, er läßt sich auf zwei Arten schreiben:

$$\frac{1}{v} \cdot \frac{\mathrm{e}^{2N\sigma_0\pi i - 2\tau_0 \frac{z_0 + yv - Nw - u}{v}\pi i}}{\mathrm{e}^{2\frac{z_0 + yv - Nw - u}{v}\pi i} - 1} = \frac{1}{v} \cdot \frac{\mathrm{e}^{2N\sigma_0\pi i}}{\mathrm{e}^{2(1+\tau_0)\frac{\cdots - Nw \cdots}{v}\pi i} - \mathrm{e}^{2\tau_0 \frac{\cdots - Nw \cdots}{v}\pi i}} ,$$

und der erste Ausdruck verschwindet für $N = +\infty$ bei positiv reellem Teil von $\frac{w}{v}\pi i$, der zweite aber für $N = +\infty$ bei negativem reellem Teil von $\frac{w}{v}\pi i$. [S.119]

Es soll nun gleich noch der Fall betrachtet werden, daß man erst N unendlich werden läßt und danach auch M. Die Summen

$$\sum_{-M,M-1}^{m} \frac{\mathrm{e}^{2(m\tau_0 + N\sigma_0)\pi i}}{z_0 + mv + yv - Nw - u} \quad \text{und} \quad \sum_{-M,M-1}^{m} \frac{\mathrm{e}^{2(m\tau_0 - N\sigma_0)\pi i}}{z_0 + mv + yv + Nw - u}$$

werden dann direkt als Null erkannt, während die beiden anderen

$$\sum_{-N,N-1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{2(M\tau_0 - n\sigma_0)\pi i}}{z_0 + Mv + nw + yw - u} \quad \text{und} \quad \sum_{-N,N-1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{2(-M\tau_0 - n\sigma_0)\pi i}}{z_0 - Mv + nw + yw - u}$$

erst mit der Summenformel unter der Annahme

$$0 < \sigma_0 < +1$$

umgeformt werden müssen, sich dann aber auch im Grenzfall als Null ergeben.

Das Integral von

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, z, v, \varepsilon w)}{z - u}$$

für den Umfang eines Parallelogramms mit den Ecken $z_0 - Mv - Nw, z_0 + Mv - Nw, z_0 + Mv + Nw$ und $z_0 - Mv + Nw$ ist in vier Integrale mit reeller Integrationsvariablen und endlichem, von M, N [S.120] unabhängigen Integrationsintervall zerlegt worden. Unter dem Integralzeichen tritt jedesmal die Funktion $\overline{\mathcal{A}tr}$ multipliziert mir einem Summenausdruck auf. Diese Summen veschwinden, wenn M und N nacheinander (in irgendeiner Reihenfolge) unendlich werden. Da $\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, z_0 + yv, v, \varepsilon w)$ und $\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, z_0 + yw, v, \varepsilon w)$ für $0 \leq y \leq +1$ nie unendlich sind — weil nach S.115 z_0 so gewählt ist, daß kein Unendlichkeitspunkt $z = sv + tw$ (mit ganzzahligem s u. t) der Funktion $\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, z, v, \varepsilon w)$ auf dem Umfang des großen Parallelogramms und damit auch keiner auf dem Umfang des Parallelogramms mit den Ecken $z_0, z_0 + v, z_0 + v + w, z_0 + w$ liegt — so werden die vier Integrale im Grenzfall sicher zu Null. Demnach verschwindet das Integral [S.121]

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int \frac{\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, z, v, \varepsilon w)}{z - u} \, dz$$

über den Umfang des Parallelogramms mit dem Mittelpunkt z_0, dessen Seiten nach Größe und Richtung durch die complexen Werte $2Mv$ u. $2Nw$ gegeben sind, bei solcher unbegrenzter Vergrößerung des Parallelogramms, wo der Mittelpunkt fest bleibt und die Seitenpaare irgendwie nach einander ins Unendliche rücken [45]. Bis auf die a.v.S. nochmals angegebene Beschränkung war der Mittelpunkt z_0 willkürlich. Für die Residuenbetrachtung von S.113, 114 war von $u = \sigma v + \tau w$ angenommen, daß σ u. τ nicht beide ganzzahlig waren. Die letzte Formel von S.114 giebt nun:

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w) = \lim \sum_{s,t} \frac{\mathrm{e}^{-2(t\sigma_0 - s\tau_0)\pi i}}{u - sv - tw} \ ,$$

wo s u. t alle Paare ganzer Zahlen sind, für die die Punkte $sv+tw$ im Inneren des Parallelogramms [S.122]
liegen. Wählt man zunächst z_0 innerhalb des Parallelogramms mit den Ecken $0, v, v + w, w$, so gehören zum großen Parallogramm (dessen Eckpunkte $z_0 - Mv - Nw, z_0 + Mv - Nw, z_0 + Mv + Nw$ und $z_0 - Mv + Nw$ sind) die durch

$$-M < s \leq M \quad \text{und} \quad -N < t \leq N$$

bestimmte Zahlenpaare s, t. D.h. für das spezielle z_0 bezieht sich die Summation in der Formel u. a.v.S. auf $s = -M + 1, \ldots + M$ u. $t = -N + 1, \ldots + N,$ und dann sollen M u. N nach einander unendlich werden, wobei die Reihenfolge der Grenzübergänge gleichgültig ist. Setzt man $-m$ für s und $-n$ für t, so kommt man zu

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w) = \lim \sum_{-M, M-1}^{m} \sum_{-N, N-1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{+2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{u + mv + mw} \ .$$

Man hätte nun offenbar von S.115 an auch das Parallelogramm mit den Ecken $z_0 - (M+1)v - (N+1)w, z_0 + Mv - (N+1)w, z_0 + Mv + Nw$ und $z_0 - (M+1)v + Nw$ betrachten können; für die Punkte $sv + tw$ innerhalb dieses Gebiets ergäbe sich, wenn z_0 wie a.v.S. im Parallelogramm mit den Eckem $0, v, v + w, w$ gewählt wird, die Beziehung [S.123]

$$-M \leq s \leq +M \quad \text{und} \quad -N \leq t \leq +N \, .$$

Die Formeln v. S.115,116 würden sich fast gar nicht ändern, die Summen, welche dann a. S.117-119 näher untersucht wurden, würden sich für m auf $-(M{+}1) \ldots {+}M{-}1$ für n auf $-(N{+}1) \ldots {+}N{-}1$

[45] Weder σ_0 noch τ_0 dürfen ganzzahlig sein. Diese Ausnahmefälle werden S.227ff näher behandelt.

beziehen [46], was für die Betrachtung ganz unwesentlich ist. Das Resulatat wäre (für $s = -m, t = -n$):

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w) = \lim \sum_{-M,+M}^{m} \sum_{-N,+N}^{n} \frac{e^{+2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{u + mv + mw}$$

wo erst M u. dann N oder auch erst N und dann M unendlich zu nehmen ist. [S.124]

[Für ein z_0 im Inneren des Parallelogramms mit den Ecken $-v-w, -w, 0, -v$ umfaßt das große Parallelogramms mit den Ecken $z_0 - Mv - Nw, z_0 + (M+1)v - Nw, z_0 + (M+1)v + (N+1)w$ und $z_0 - Mv + (N+1)w$ die Punkte $sv + tw$ für

$$-M \le s \le +M \quad \text{und} \quad -N \le t \le +N$$

und a.S.115–119 sind die Summen für m von $-M$ bis $+M$, für n von $-N$ bis $+N$ zu nehmen. Bei dieser Grundlage der Betrachtung kommt man demnach am einfachsten zum Resultat

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w) = \lim \sum_{-M,+M}^{m} \sum_{-N,+N}^{n} \frac{e^{+2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{u + mv + mw} .$$

wo M u. N nach einander - in beliebiger Reihenfolge - unendlich werden.]

Wählt man nun z_0 in irgend einem andern Parallelogramm mit dem Seiten v und w, so bewirkt das nur eine Verschiebung des größten aber noch endlichen Parallelogramms, für welches [S.125] die Summation zunächst auszuführen ist. Auf Grund der letzten zwei Seiten würden sich demnach für m die Summationsgrenzen $-M+h, +M+h$ und für n die Grenzen $-N+k, +N+k$ ergeben, während man bei der Betrachtung von S.115–122 die oberen Summationsgrenzen je um eine Einheit niedriger fände, d.h. für m u. n je eine gerade Anzahl von Werten zu setzen hätte. Ändert man jetzt noch die Bezeichnung so, daß man M u. N um beliebige ganze Zahlen ändert, so kann man auch ganz allgemein schreiben: [47]

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w) = \lim \sum_{-M-h',+M+h''}^{m} \sum_{-N-k',+N+k''}^{n} \frac{e^{+2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{u + mv + mw} ,$$

wo h',h",k',k" irgend welche positive oder negative ganze Zahlen sind und entweder M nach N oder N nach M unendlich wird. Man wäre zu diesem Resultat natürlich auch direkt gekommen, [S.126] wenn man z_0 innerhalb des Parallelogramms mit den Ecken $0, v, v+w, w$ gewählt hätte und das Randintegral für das große Parallelogramm mit den Ecken

$$\begin{aligned} &z_0 - (M + h'' + 1)v - (N + k'' + 1)w, \\ &z_0 + (M + h')v - (N + k'' + 1)w, \\ &z_0 + (M + h')v + (N + k')w, \\ &z_0 - (M + h'' + 1)v + (N + k')w \end{aligned}$$

betrachtet hätte. Diese Begrenzung umfließt die Punkte $sv + tw$ für $-(M + h'') \le s \le M + h'$ und $-(N + k'') \le t \le N + k'$, und $s = -m, t = -n$ giebt für m, n die unten a.v.S. stehenden Summationsgrenzen.

[46] u. in ihren Nennern würde sich nur wenig ändern.

[47] Man hätte dazu überhaupt vom Parallelogramm mit den Ecken $-(M_1 + \frac{1}{2})v - (N_1 + \frac{1}{2})w, +(M_2 + \frac{1}{2})v - (N_1 + \frac{1}{2})w, +(M_2 + \frac{1}{2})v + (N_2 + \frac{1}{2})w, -(M_1 + \frac{1}{2})v + (N_2 + \frac{1}{2})w$ ausgehen sollen.

Für die meisten Zwecke reicht die Formel

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w) = \lim \sum_{-M,+M}^{m} \sum_{-N,+N}^{n} \frac{e^{+2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{u + mv + mw}$$

aus. Zur Herleitung dieser u. der allgemeineren Formel a.v.S. waren die Eigenschaften

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u + sv + tw, v, \varepsilon w) = e^{2(s\tau_0 - t\sigma_0)\pi i} \cdot \overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$$

und [S.127]

$$\lim_{u=0} u \cdot \overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w) = +1$$

benutzt, und vorausgesetzt war noch, daß die Funktion keine weiteren Unendlichkeitspunkte hat als die hiermit gegebenen Punkte $u = sv + tw$ mit ganzzahligem s u. t. Für die Umformungen von S.117–119 war die Annahme

$$0 < \sigma_0 < +1 \qquad\qquad 0 > \tau_0 > -1$$

nötig [48]. Und von u war vorausgesetzt, daß es nicht gerade ein Unendlichkeitspunkt der Funktion ist.

Für die ganze Herleitung war die Annahme notwendig, daß eine Funktion mit den den oben angeführten Eigenschaften existiere. Und das weiß man bei Benutzung der Definition

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w) = \frac{e^{2\tau_0 \frac{u}{v}\pi i}}{v} \cdot \frac{\vartheta'(0, \frac{\varepsilon w}{v}) \cdot \vartheta(\frac{u}{v} + \frac{\varepsilon u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}) \cdot \vartheta(\frac{\varepsilon u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v})}$$

(vgl. die Umformungen von S.101). Sonst wäre die ganze Grundlage unsicher. Diese Definition zeigt [S.128]
auch weiter, daß die Funktion $\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$ ungeändert bleibt, wenn in $u_0 = \sigma_0 v + \tau_0 w$ die reellen Größen σ_0 u. τ_0 sich um ganze Zahlen ändern. (Auf S.100, 101 ist dieser Beweis aus Eigenschaften der Thetafunktionen nur angedeutet). Da nun $\lim \sum \frac{e^{2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{u+mv+nw}$ dieselbe Eigenschaft hat, so ist für die Gleichung [49]

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w) &= \frac{e^{2\tau_0 \frac{u}{v}\pi i}}{v} \cdot \frac{\vartheta'(0, \frac{\varepsilon w}{v}) \cdot \vartheta(\frac{u}{v} + \frac{\varepsilon u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}) \cdot \vartheta(\frac{\varepsilon u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v})} \\ &= \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{-M-h', M+h''}^{m} \sum_{-N-k', N+k''}^{n} \frac{e^{+2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{u + mv + nw}\end{aligned}$$

(wo M nach N oder vor N unendlich zu setzen ist) nur die Annahme nötig, daß σ_0 und τ_0 keine ganzen Zahlen sind [50]. Wollte man die Reihe mit $\mathcal{S}er(u_0, u, v, w)$ – nach Kronecker – bezeichnen und ihren Wert für solche u_0, wo entweder σ_0 oder τ_0 ganzzahlig ist, durch einen [S.129]
einfachen Grenzproceß definitionsweise festsetzten, so würde die Beziehung $\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w) = \mathcal{S}er(u_0, u, v, w)$ immer gelten, wenn nicht in $u_0 = \sigma_0 v + \tau_0 w$ oder in $u = \sigma v + \tau w$ die beiden Coefficienten von v und w zugleich ganzahlig sind, wofür die Gleichung unbestimmte Form $\infty = \infty$ annimmt, weil man weiß, daß im Ausdruck durch die Thetafunktionen der Nenner zu Null wird [51].

Sehr wichtige Invarianzeigenschaften von $\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$ kann man jetzt aus der Reihendarstellung herleiten, was bei der weit spezielleren Art des Grenzübergangs in der S.85–99 unter der Annahme, daß τ und τ_0 nicht ganzzahlig seien, bewiesenen Gleichung [S.130]

[48] S.227-234 werden die Ausnahmefälle behandelt.
[49] Der Limes kann übrigen auch ein einziger sein, s. S.265 unten
[50] ganzzahliges σ_0 u. τ_0 wird S.227–234 betrachtet.
[51] Ganzzahliges σ_0 oder τ_0 wird S.227 hehandelt.

$$\frac{e^{2\tau_0 \frac{u}{v}\pi i}}{v} \cdot \frac{\vartheta'(0, \frac{\varepsilon w}{v}) \cdot \vartheta(\frac{u}{v} + \frac{\varepsilon u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}) \cdot \vartheta(\frac{\varepsilon u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v})} = \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{-M,M}^{m} \sum_{-N,N}^{n} \frac{e^{2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{u + mv + nw}$$

nicht möglich gewesen wäre. Es soll nämlich, wie schon S.103–105 angedeutet ist, die Änderung von $\overline{\mathcal{A}tr}$ bei den Transformationen von S.14, 15

$$\begin{aligned} v' &= \beta' v - \alpha' w & v &= \alpha v' + \alpha' w' \\ w' &= -\beta v + \alpha w & w &= \beta v' + \beta' w' \\ \sigma' &= \alpha\sigma + \beta\tau + \gamma & \sigma_0' &= \alpha\sigma_0 + \beta\tau_0 + \gamma \\ \tau' &= \alpha'\sigma + \beta'\tau + \gamma' & \tau_0' &= \alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0 + \gamma' \\ u' &= u + \gamma v' + \gamma' w' & u_0' &= u_0 + \gamma v' + \gamma' w' \end{aligned}$$

$$(\alpha \cdot \beta' - \alpha' \cdot \beta = +1)$$

dadurch bestimmt werden, daß man in der Doppelreihe die Summationsindices geeignet transformiert [52]. Zuerst betrachtet man die für σ, τ, σ_0 u. τ_0 homogenen Transformationen ($\gamma = 0, \gamma' = 0$), bei denen u u. u_0 ganz ungeändert bleiben. Und es genügt hier völlig, die beiden speziellen [S.131] Transformationen

$$v' = -w, \; w' = +v$$

(d.h. $\alpha = 0, \beta = -1, \alpha' = +1, \beta' = 0$) und

$$v' = v, \; w' = w + v$$

(d.h. $\alpha = +1, \beta = -1, \alpha' = 0, \beta' = +1$) zu betrachten, weil sich hieraus die allgemeinen Transformationen zusammensetzen lassen.

1) $\alpha = 0, \beta = -1, \alpha' = +1, \beta' = 0$ giebt $v' = -w, w' = +v$ und $\sigma_0' = -\tau_0, \tau_0' = +\sigma_0, u' = u$. In $\frac{w'}{v'}$ hat der imaginäre Teil dasselbe Zeichen, wie in $\frac{w}{v}$, ε' ist gleich ε (vgl. auch S.48). So hat man

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v', \varepsilon w') = \lim \sum \frac{e^{2(n\sigma_0' - m\tau_0')\pi i}}{u + mv' + nw'} = \lim \sum \frac{e^{2(-n\tau_0 - m\sigma_0)\pi i}}{u - mw + nv} ,$$

wo z.B. nach m von $-M$ bis $+M$, nach n von $-N$ bis $+N$ zu summieren ist und erst M, dann N unendlich gesetzt werden kann. Indem man nun $m = -n_1, n = +m_1, M = N_1, N = M_1$ setzt, folgt

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, -w, \varepsilon v) = \lim_{M_1=\infty} \lim_{N_1=\infty} \sum_{-M_1,M_1}^{m_1} \sum_{-N_1,N_1}^{n_1} \frac{e^{2(-m_1\tau_0 + n_1\sigma_0)\pi i}}{u + m_1 v + n_1 w} ,$$

und das ist nichts anderes als $\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$. So hat man [S.132]

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, -w, \varepsilon v) = \overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, +v, \varepsilon w).$$

2) $\alpha = +1, \beta = -1, \alpha' = 0, \beta' = +1$ giebt $v' = -v, w' = v + w$ $(\varepsilon' = \varepsilon), \sigma_0' = \sigma_0 - \tau_0, \tau_0' = +\tau_0$, d.h.

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon(v + w)) = \lim \sum \frac{e^{2(n\sigma_0' - m\tau_0')\pi i}}{u + mv' + nw'} = \lim \sum \frac{e^{2(n\sigma_0 - (m+n)\tau_0)\pi i}}{u + (m+n)v + nw} ,$$

[52] Diese Betrachtung schließt sich wesentlich an §4 u. 6 des art. XXI v. Kroneckers Abhandlung (13.3.90) an. — Andere Behandlung (auch nach Kronecker) S.265–261.

wobei die Summation für m auf die Werte von $-M$ bis $+M$, für n von die Werte von $-N$ bis $+N$ bezogen werden kann und man erst M, dann N unendlich machen darf. Schreibt man m_1 für $m+n$, und läßt dann den Index 1 wieder weg, so ergibt sich hierbei

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon(v+w)) = \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty} \sum_{-N,N}^{n} \sum_{-M+n,M+n}^{m} \frac{\mathrm{e}^{2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{u+mv+nw} .$$

Das stimmt nun allerdings auch mit dem allgemeinsten Wert der Doppelsumme für $\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$ [S.133] (S.125) noch nicht überein. Aber für jedes endliche n unterscheidet sich der Ausdruck

$$\sum_{-M+n,M+n}^{m} \frac{\mathrm{e}^{2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{u+mv+nw} \quad \text{von} \quad \sum_{-M,M}^{m} \frac{\mathrm{e}^{2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{u+mv+nw}$$

nur um

$$\sum_{+M+1,M+n}^{m} \frac{\mathrm{e}^{2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{u+mv+nw} - \sum_{-M,-M+n-1}^{m} \frac{\mathrm{e}^{2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{u+mv+nw} ,$$

d.h. um

$$\sum_{1,n}^{k} \frac{\mathrm{e}^{2(n\sigma_0 - (M+k)\tau_0)\pi i}}{u+(M+k)v+nw} - \sum_{0,n-1}^{k} \frac{\mathrm{e}^{2(n\sigma_0 + (M-k)\tau_0)\pi i}}{u-(M-k)v+nw} ,$$

was für $M=\infty$ bei jedem noch so hohen endlichen n zu 0 wird. Bei endlichem, wenn auch sehr großem N kann man deshalb

$$\lim_{M=\infty} \sum_{-N,+N}^{n} \sum_{-M+n,+M+n}^{m} \frac{\mathrm{e}^{2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{u+mv+nw} \quad \text{durch} \quad \lim_{M=\infty} \sum_{-N,+N}^{n} \sum_{-M,+M}^{m} \frac{\mathrm{e}^{2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{u+mv+nw}$$

ersetzen, d.h. für die rechte Seite der letzten Gleichung a.v.S. kann man schreiben:

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty} \sum_{-N,+N}^{n} \sum_{-M,+M}^{m} \frac{\mathrm{e}^{2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{u+mv+nw}$$

und das ist $\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$. So hat man die beiden Gleichnungen [S.134]

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, w, \varepsilon v) = \overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, w, v, \varepsilon w)$$
$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon(w+v)) = \overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$$

aus denen allgemein

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v', \varepsilon w') = \overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$$

für

$$v' = \beta' v - \alpha' w \qquad\qquad w' = -\beta' v + \alpha' w$$
$$(\alpha\beta' - \beta\alpha' = +1)$$

folgt [53].

Das Verhalten von $\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$ bei der allgemeinen a. S.130 wieder angeführten Transformation von S.14 ergibt sich nun auch unter Benutzung der a. S.100, 101 zuerst entwickelten und später noch mehrfach auftretenden Formeln:

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon(u_0+sv+tw), u, v, \varepsilon w) = \overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$$
$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u+sv+tw, v, \varepsilon w) = \mathrm{e}^{2(s\tau_0 - t\sigma_0)\pi i} \cdot \overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w) .$$

[53] Hierzu ist übrigens S.138 zu vergleichen.

Es ist nämlich

$$u_0' = \sigma_0' v' + \tau_0' w' = u_0 + \gamma v' + \gamma' w'$$

$$u' = \sigma' v' + \tau' w' = u + \gamma v' + \gamma' w' \ ,$$

und so findet man [S.135]

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v', \varepsilon w') &= \overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon(u_0 - \gamma v' - \gamma' w'), u' - \gamma v' - \gamma' w', v', \varepsilon w') \\ &= \mathrm{e}^{+2\{(-\gamma)\tau_0' - (-\gamma')\sigma_0'\}\pi i} \cdot \overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0', u', v', \varepsilon w') \ ,\end{aligned}$$

d.h.

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0', u', v', \varepsilon w') = \mathrm{e}^{+2(\gamma\tau_0' - \gamma'\sigma_0')\pi i} \cdot \overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v', \varepsilon w')$$

u. daher

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0', u', v', \varepsilon w') = \mathrm{e}^{+2(\gamma\tau_0' - \gamma'\sigma_0')\pi i} \cdot \overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w) \ .$$

Die Funktion $\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$ ändert sich nur um einen Faktor — der absolute Wert ändert sich sogar überhaupt nicht — sobald das System der Argumente u_0, u, v, w durch ein äquivalentes (S.14, 15) ersetzt wird. Für die spezielle Äquivalenz, bei der γ u. γ' Null sind, d.h. wo die Transformation der σ, τ u. σ_0, τ_0 homogen ist, für die Äquivalenz

$$(u_0, u, \beta' v - \alpha' w, -\beta v + \alpha w) \sim (u_0, u, v, w)$$

(wo immer $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ ganze Zahlen sind und $\alpha\beta' - \alpha'\beta$ gleich $+1$ ist) ist die Funktion eine [S.136]
vollkommene Invariante, u. wegen dieses atropen Charakters ist das Funktionszeichen $\overline{\mathcal{A}tr}$ gewählt. Die Überstreichung rührt davon her, daß Kronecker zuerst auf eine andere Funktion (von nur drei Argumenten) geführt wurde, die er mit $\mathcal{A}tr$ bezeichnete und durch die man die hier behandelte Funktion $\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$ ausdrücken kann:

Wegen $\sigma_0' = \alpha\sigma_0 + \beta\tau_0 + \gamma, \tau_0' = \alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0 + \gamma'$ hat man

$$\gamma\tau_0' - \gamma'\sigma_0' = (\gamma\alpha' - \gamma'\alpha)\sigma_0 + (\gamma\beta' - \gamma'\beta)\tau_0 \ ,$$

d.h. für

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0', u', v', \varepsilon w') = \mathrm{e}^{+2(\gamma\tau_0' - \gamma'\sigma_0')\pi i} \cdot \overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$$

kann man auch schreiben:

$$\begin{aligned}&\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon(u_0 + \gamma v' + \gamma' w', u + \gamma v' + \gamma' w', v', \varepsilon w') \\ &\quad = \mathrm{e}^{2\{(\gamma\alpha' - \gamma'\alpha)\sigma_0 + (\gamma\beta' - \gamma'\beta)\tau_0\}\pi i} \cdot \overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)\end{aligned}$$

[$v' = \beta' v - \alpha' w, \ w' = -\beta' v + \alpha' w, \ \alpha\beta' - \beta\alpha' = +1$] [S.137]

[eine etwas allgemeinere Formel findet sich auch noch bei Kronecker, nämlich eine solche für die Transformation

$$\begin{aligned}
v'' &= \beta' v - \alpha' w & w'' &= -\beta v + \alpha w \\
\sigma'' &= \alpha\sigma + \beta\tau + \gamma & \sigma_0'' &= \alpha\sigma_0 + \beta\tau_0 + \gamma_0 \\
\tau'' &= \alpha'\sigma + \beta'\tau + \gamma' & \tau_0'' &= \alpha\sigma_0 + \beta\tau_0 + \gamma_0 \\
u'' &= \sigma'' v'' + \tau'' w'' = u + \gamma v'' + \gamma' w'' & u_0'' &= \sigma_0'' v'' + \tau_0'' w'' = u_0 + \gamma_0 v'' + \gamma_0' w'' \ .
\end{aligned}$$

Aus
$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0'', u'' - \gamma v'' - \gamma' w'', v'', \varepsilon w'') = \mathrm{e}^{-2(\gamma\tau_0'' - \gamma'\sigma_0'')\pi i} \cdot \overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0'', u'', v'', \varepsilon w'')$$
(vgl. auch S.134, 135) folgt
$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0'', u'', v'', \varepsilon w'') = \mathrm{e}^{+2(\gamma\tau_0'' - \gamma'\sigma_0'')\pi i} \cdot \overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0'', u, v'', \varepsilon w'')\ ,$$
d.h. $= \mathrm{e}^{+2(\gamma\tau_0'' - \gamma'\sigma_0'')\pi i} \cdot \overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v'', \varepsilon w'')$ — wegen $\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon(u_0, +\gamma_0 v'' + \gamma_0' w''), u, v'', \varepsilon w'') = \overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v'', \varepsilon w'')$ — u. nach S.134 folgt so allgemein
$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0'', u'', v'', \varepsilon w'') = \mathrm{e}^{+2(\gamma\tau_0'' - \gamma'\sigma_0'')\pi i} \cdot \overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)\ ,$$
und weil $\gamma\tau_0'' - \gamma'\sigma_0''$ gleich $(\gamma\alpha' - \gamma'\alpha)\sigma_0 + (\gamma\beta' - \gamma'\beta)\tau_0 + (\gamma\gamma_0' - \gamma'\gamma_0)$ und $\mathrm{e}^{2\pi i(\gamma\gamma_0' - \gamma'\gamma_0)} = +1$ ist, so folgt auch ganz analog wie a.v.S.
$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0'', u'', v'', \varepsilon w'') = \mathrm{e}^{2\{(\gamma\alpha' - \gamma'\alpha)\sigma_0 + (\gamma\beta' - \gamma'\beta)\tau_0\}\pi i} \cdot \overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)\ .\quad]$$

[S.138]

Zu der Folgerung von S.134
$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v', \varepsilon w') = \overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$$
für $v' = \beta' v - \alpha' w,\ w' = -\beta v + \alpha w\ (\alpha \cdot \beta' - \alpha' \cdot \beta = +1)$ ist nach §6 im art. XXI von Kroneckers Abhandlung (März 90) zu bemerken, daß die Beziehung zunächst nur aus Wiederholungen der beiden behandelten Haupttransformationen $v' = -w, w' = +v;\ v' = +v, w' = w + v$ bewiesen ist, wenn man weiß, daß bei keiner der einzelnen Transformationen der Ausnahmefall eintritt, daß in $u_0^{(i)} = \sigma_0^{(i)} v^{(i)} + \tau_0^{(i)} w^{(i)}$ eine der Größen $\sigma_0^{(i)}$ und $\tau_0^{(i)}$ oder beide ganzzahlig werden, oder daß in $u^{(i)} = \sigma^{(i)} v + \tau^{(i)} w$ die $\sigma^{(i)}$ und $\tau^{(i)}$ beide ganzzahlig sind. Die allgemeine Gültigkeit des Satzes schließt man daraus, daß, wenn die Größen $\sigma, \tau, \sigma_0, \tau_0$ und $\sigma', \tau', \sigma_0', \tau_0'$ zwar den erwähnten Bedingungen genügen, wenn dies aber nicht gilt für die bei den Zwischentransformationen auftretenden [S.139] Größen, daß es dann möglich sein wird, von einem etwas veränderten Größensystem $\overline{\sigma}, \overline{\tau}, \overline{\sigma_0}, \overline{\tau_0}$ durch diesselbe Reihe von Fundamentaltransformationen zu einem Größensystem $\overline{\sigma}', \overline{\tau}', \overline{\sigma_0}', \overline{\tau_0}'$ überzugehen, welches mit $\sigma', \tau', \sigma_0', \tau_0'$ nahezu identisch ist, und wo bei den einzelnen Transformationen nirgends der Ausnahmefall eintritt. Damit erhält man zunächst den invarianten Charakter der Funktion für die Äquivalenz
$$(\overline{\sigma}, \overline{\tau}, \overline{\sigma_0}, \overline{\tau_0}, v, w) \sim (\overline{\sigma'}, \overline{\tau'}, \overline{\sigma_0'}, \overline{\tau_0'}, v', w')$$
und indem man nun einen stetigen Übergang zu den nicht überstrichenen Werten macht bei $\sigma, \tau, \sigma_0, \tau_0$ und den zugehörigen Übergang bei den accentuierten Größen, muß die Atropie bestehen bleiben. Denn $\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon(\sigma_0 v + \tau_0 w), \sigma v + \tau w, v, \varepsilon w)$ ist eine stetige Funktion aus $\sigma_0, \tau_0, \sigma, \tau$, solange nicht σ_0 und τ_0 oder σ und τ ganzzahlig sind, wie die Gleichung [S.140]
$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w) = \frac{\mathrm{e}^{2\tau_0 \frac{u}{v} \pi i}}{v} \cdot \frac{\vartheta'(0, \frac{\varepsilon w}{v}) \cdot \vartheta(\frac{u}{v} + \frac{\varepsilon u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}) \cdot \vartheta(\frac{\varepsilon u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v})}$$
zeigt.

Die Gültigkeit der Gleichungen
$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v', \varepsilon w') = \overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$$

und

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0', u', v', \varepsilon w') = \mathrm{e}^{+2(\gamma\tau_0' - \gamma'\sigma_0')\pi i} \cdot \overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w) \; ,$$

wobei

$$\begin{aligned} v' &= \beta' v - \alpha' w & v &= \alpha v' + \alpha' w' \\ w' &= -\beta v + \alpha w & w &= \beta v' + \beta' w' \\ \sigma' &= \alpha\sigma + \beta\tau + \gamma & \sigma_0' &= \alpha\sigma_0 + \beta\tau_0 + \gamma \\ \tau' &= \alpha'\sigma + \beta'\tau + \gamma' & \tau_0' &= \alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0 + \gamma' \\ u' &= u + \gamma v' + \gamma' w' & u_0' &= u_0 + \gamma v' + \gamma' w' \end{aligned}$$

$$(\alpha \cdot \beta' - \alpha' \cdot \beta = +1)$$

ist deshalb nur an die Bedingungen geknüpft, welche nach S.128, 129 überhaupt für die Darstellbarkeit von $\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$ u. von den linken Seiten der Gleichungen als Doppelreihen [54] nötig sind.

Aus den Transformationsgleichungen kann man nun noch einen wichtigen Schluß über die Doppelreihe $\lim \sum \frac{\mathrm{e}^{2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{u+mv+nw}$ ziehen. Setzt man nämlich in [S.141]

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0', u', v', \varepsilon w') = \lim \sum_{-M,M}^{m'} \sum_{-N,N}^{n'} \frac{\mathrm{e}^{2(n'\sigma_0' - m'\tau_0')\pi i}}{u' + m'v' + n'w'}$$

$$m' = \alpha m + \beta n - \gamma \quad \text{und} \quad n' = \alpha' m + \beta' n - \gamma'$$

ein (vgl. S.14), so hat man rechts

$$u' + m'v' + n'w' = u + mv + nw$$

und

$$n'\sigma_0' - m'\tau_0' = n\sigma_0 - m\tau_0 + (\gamma\alpha' - \gamma'\alpha)\sigma_0 + (\gamma\beta' - \gamma'\beta)\tau_0 \; ,$$

weshalb man für die rechte Seite schreiben kann:

$$\mathrm{e}^{2\{(\gamma\alpha' - \gamma'\alpha)\sigma_0 + (\gamma\beta' - \gamma'\beta)\tau_0\}\pi i} \cdot \lim \sum \frac{\mathrm{e}^{2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{u + mv + nw} \; ,$$

wobei die Summe sich auf die sämtlichen Wertepaare m, n bezieht, wofür $m' = \alpha m + \beta n - \gamma$ absolut genommen höchstens gleich M und $n' = \alpha' m + \beta' n - \gamma$ absolut genommen höchstens gleich N ist.

Die linke Seite der Formel aber hat nach S.136 (unten) einen solchen Wert, daß die ganze Gleichung in [S.142]

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w) = \lim \sum \frac{\mathrm{e}^{2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{u + mv + nw}$$

für

$$-M \leq \alpha m + \beta n - \gamma \leq M \, , \quad -N \leq \alpha' m + \beta' n - \gamma' \leq N'$$

$$(\alpha\beta' - \alpha'\beta = +1)$$

[54] bei denen die beiden Grenzübergänge $\lim\limits_{M=\infty}(\lim\limits_{N=\infty})$ und $\lim\limits_{N=\infty}(\lim\limits_{M=\infty})$ zulässig sind

übergeht, wo M u. N noch nacheinander in beliebiger Reihenfolge unendlich werden. Nach S.125 hätte man auch allgemeiner die Summationsgrenzen

$$-M-h' \leq \alpha m+\beta n-\gamma \leq M+h'', \quad -N-k' \leq \alpha' m+\beta' n-\gamma' \leq N'+k''$$

erhalten können; und indem man hieraus Grenzen für $\alpha m+\beta n$ und $\alpha' m+\beta' n$ bestimmt, erkennt man, daß die Behandlung des einfacheren Falles, wo γ u. γ' gleich 0 sind, d.h. die Umformung von

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w) = \lim \sum_{-M-h', M+h''}^{m'} \sum_{-N-k', N+k''}^{n'} \frac{e^{2(n'\sigma_0'-m'\tau_0')\pi i}}{u+m'v'+n'w'}$$

$(u_0' = \sigma_0' v' + \tau_0' w')$ durch $v' = \beta' v - \alpha' w$, $w' = -\beta v + \alpha w$, $m' = \alpha m + \beta n$, $n' = \alpha' m + \beta' n$, $\sigma_0' = \alpha\sigma_0 + \beta\tau_0$, $\tau_0' = \alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0$ hier völlig genügt hätte für das Resultat, daß die Funktion $\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$ nicht blos aus $\sum_{m,n} \frac{e^{2(n\sigma_0-m\tau_0)\pi i}}{u+mv+nw}$ für $-M \leq \alpha m+\beta n-\gamma \leq M$, $-N \leq \alpha' m+\beta' n-\gamma' \leq N'$ oder für $-M-h' \leq \alpha m+\beta n-\gamma \leq M+h''$, $-N-k' \leq \alpha' m+\beta' n-\gamma' \leq N'+h''$ dadurch entsteht, daß man M u. N nach einander unendlich werden läßt, sondern daß auch diesselben beiden Arten des Grenzüberganges von der endlichen Summe $\sum_{m,n} \frac{e^{2(n\sigma_0-m\tau_0)\pi i}}{u+mv+nw}$ für [S.143]

$$-M-h' \leq \alpha m+\beta n-\gamma \leq M+h'', \quad -N-k' \leq \alpha' m+\beta' n-\gamma' \leq N'+h''$$

zu $\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$ führen. Denkt man sich die Wertepaare m, n durch Punkte mit den rechtwinkligen Coordinaten m u. n dargestellt, so entspricht der erste Fall der Summation innerhalb eine Rechtecks mit zu den Axen parallelen Seiten, der zweite Fall aber der Summation innerhalb eine gewissen Parallelogrammes; in beiden Fällen bleibt der Mittelpunkt des Vierecks beim Grenzübergang fest, während die Seitenpaare ins Unendliche rücken. [S.144]

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w) &= \frac{e^{2\tau_0 \frac{u}{v}\pi i}}{v} \cdot \frac{\vartheta'(0, \frac{\varepsilon w}{v}) \cdot \vartheta(\frac{u}{v} + \frac{\varepsilon u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}) \cdot \vartheta(\frac{\varepsilon u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v})} \\
&= \lim \sum_{-M-h', M+h''}^{m} \sum_{-N-k', N+k''}^{n} \frac{e^{+2(n\sigma_0-m\tau_0)\pi i}}{u+mv+nw} \\
&= \lim \sum_{\substack{-M-h' \leq \alpha m+\beta n \leq M+h'' \\ -N-k' \leq \alpha' m+\beta' n \leq N'+h'' \\ (\alpha\beta'-\alpha'\beta=+1)}} \frac{e^{+2(n\sigma_0-m\tau_0)\pi i}}{u+mv+nw}\,.
\end{aligned}$$

Dabei sind σ_0, τ_0 die reellen Größen, welche die Darstellung $u_0 = \sigma_0 v + \tau_0 w$ ermöglichen. M und N werden unendlich und zwar nacheinander, die Reihenfolge der beiden Grenzübergänge ist gleichgültig — σ_0 u. τ_0 sollen keine ganzen Zahlen und σ, τ nicht gleichzeitig ganze Zahlen sein. S. 227–237 wird auf die Fälle noch etwas eingegangen, wo σ_0 oder τ_0 ganzzahlig ist, S. 253–261 bietet einfachere Behandlung der Transformation.

[S.145]

Auf einem der letzten Blätter von Kroneckers Manuskript finden sich Formeln, welche den Übergang von der allgemeinen Reihe $\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, w) = \lim \sum \frac{e^{2(n\sigma_0-m\tau_0)\pi i}}{u+mv+nw}$ zu speziellen Entwicklungen für die fundamentalen elliptischen Funktionen bei Abel andeuten.

Abel geht (Crelle's Journal II, S.154ff. [55]) von der Multiplikation der elliptischen Funktionen aus, und zwar für seine dem $\sin\operatorname{am} u$ ähnliche Funktion $\varphi(\alpha)$ von der a.S.149 stehenden Formel

[55] Werke I, 323ff.

(126)

$$\varphi((2n+1)\beta) = \frac{1}{2n+1}\sum_{-n,+n}^{m}\sum_{-n,+n}^{\mu}(-1)^{m+\mu}\varphi(\beta+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}),$$

aus welcher er durch $(2n+1)\beta=\alpha$ und $\lim_{n=\infty}$ zur Gleichung (134)

$$\varphi(\alpha) = -\frac{i}{e\cdot c}\cdot\lim_{n=\infty}\sum_{0,n-1}^{m}\sum_{0,n-1}^{\mu}(-1)^{m+\mu}\{\psi(m,\mu)-\psi_1(m,\mu)\}$$

gelangt, wobei gesetzt ist (133)

$$\psi(m,\mu) = \frac{1}{2n+1}\left\{\frac{1}{\varphi(\frac{\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega+(\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1})}+\frac{1}{\varphi(\frac{\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega-(\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1})}\right\}$$

und wo $\psi_1(m,\mu)$ aus $\psi(m,\mu)$ dadurch gebildet wird, daß man $-\varpi i$ für $+\varpi i$ setzt. Dann [S.146] untersucht Abel die Differenz (136)

$$\psi(m,\mu)-\theta(m,\mu),$$

wobei

$$\begin{aligned}\theta(m,\mu) &= \frac{2\alpha}{\alpha^2-\{(m+\frac{1}{2})\omega+(\mu+\frac{1}{2})\varpi i\}^2}\\ &= \frac{1}{\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega+(\mu+\frac{1}{2})\varpi i}+\frac{1}{\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega-(\mu+\frac{1}{2})\varpi i}\end{aligned}$$

[er selbst schreibt aber plötzlich m und μ statt $m+\frac{1}{2}$ und $\mu+\frac{1}{2}$ [56]] und kommt schließlich zu dem Resultat (146) S.160.

$$\sum_{0,n-1}^{\mu}(-1)^{\mu}\psi(m,\mu) = \sum_{0,\infty}^{\mu}(-1)^{\mu}\theta(m,\mu)+\frac{v_m}{2n+1},$$

wo v_m eine für $n=\infty$ verschwindende Größe ist, d.h. zu (147)

$$\sum_{0,n-1}^{m}\sum_{0,n-1}^{\mu}(-1)^{m+\mu}\psi(m,\mu) = \sum_{0,n-1}^{m}(-1)^{m}\rho_m+\frac{1}{2n+1}\cdot\sum_{0,n-1}^{m}v_m$$

oder zu (149)

$$\lim_{n=\infty}\sum_{0,n-1}^{m}\sum_{0,n-1}^{\mu}(-1)^{m+\mu}\psi(m,\mu) = \sum_{0,\infty}^{m}(-1)^{m}\rho_m,$$

wobei (148)

$$\rho_m = \sum_{0,\infty}^{\mu}(-1)^{\mu}\theta(m,\mu).$$

Führt man dann $\psi_1(m,\mu)$, $\theta_1(m,\mu)$ u. ρ'_m aus $\psi(m,\mu)$, $\theta(m,\mu)$ u. ρ_m durch Umkehrung des [S.147] Zeichens von ϖi ein, so entsteht schließlich aus Formel (134) die Gleichung (152) S.161 in Band II v. Crelle's Journal

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha) = -\frac{i}{e\cdot c}\cdot\sum_{0,\infty}^{m}\Big(\sum_{0,\infty}^{\mu}(-1)^{m+\mu}\Big\{&\frac{2\alpha}{\alpha^2-\{(m+\frac{1}{2})\omega+(\mu+\frac{1}{2})\varpi i\}^2}\\ &-\frac{2\alpha}{\alpha^2-\{(m+\frac{1}{2})\omega-(\mu+\frac{1}{2})\varpi i\}^2}\Big\}\Big).\end{aligned}$$

[56]In den Werken findet sich diese Änderung der Bezeichnung nicht.

[Bei Abel steht $(-1)^m$ statt $(-1)^{m+\mu}$, aber in der nächsten Formel (153), wo der Ausdruck auf reelle Form gebracht ist, kehrt dieser Fehler nicht wieder. [57]].

Nach der zweiten Darstellung von $\theta(m,\mu)$ oben a.v.S. kann man auch schreiben:

$$\begin{aligned} i\,e\,c\cdot\varphi(\alpha) = & \sum_{0,\infty}^{m}\Big(\sum_{0,\infty}^{n}(-1)^{m+n}\Big\{\frac{1}{\alpha+(m+\frac12)\omega+(\mu+\frac12)\varpi i}+\frac{1}{\alpha-(m+\frac12)\omega-(\mu+\frac12)\varpi i}\Big\}\Big) \\ & -\sum_{0,\infty}^{m}\Big(\sum_{0,\infty}^{n}(-1)^{m+n}\Big\{\frac{1}{\alpha+(m+\frac12)\omega-(\mu+\frac12)\varpi i}+\frac{1}{\alpha-(m+\frac12)\omega+(\mu+\frac12)\varpi i}\Big\}\Big)\,. \end{aligned}$$

Dabei ist n für μ gesetzt. Für die rechte Seite kann man nun schreiben

$$\lim_{M=\infty}\lim_{N=\infty}\left(\begin{array}{l} +\sum\limits_{0,M}^{m}\sum\limits_{0,N}^{n}\frac{(-1)^{m+n}}{\alpha+(m+\frac12)\omega+(\mu+\frac12)\varpi i}+\sum\limits_{0,-M}^{m}\sum\limits_{0,-N}^{n}\frac{(-1)^{m+n}}{\alpha+(m-\frac12)\omega+(\mu-\frac12)\varpi i} \\ -\sum\limits_{0,M}^{m}\sum\limits_{0,-N}^{n}\frac{(-1)^{m+n}}{\alpha+(m+\frac12)\omega+(\mu-\frac12)\varpi i}-\sum\limits_{0,-M}^{m}\sum\limits_{0,N}^{n}\frac{(-1)^{m+n}}{\alpha+(m-\frac12)\omega+(\mu+\frac12)\varpi i} \end{array}\right).$$

Von den vier einzelnen Summen formt man nun die letzten drei um, indem man m durch $m'+1$ [S.148]
ersetzt, wo m sich auf $0,-M$ bezieht und n durch $n'+1$, überall, wo n sich auf $0,-N$ bezieht. Dann geht m' von -1 bis $-(M+1)$ u. n' von -1 bis $-(N+1)$ und $-(-1)^m$ ist gleich $+(-1)^{m'}, -(-1)^n=(-1)^{n'}$. Es folgt bei Weglassung der Accente der Ausdruck

$$\lim_{M=\infty}\lim_{N=\infty}\left(\begin{array}{l} +\sum\limits_{0,M}^{m}\sum\limits_{0,N}^{n}\frac{(-1)^{m+n}}{\alpha+(m+\frac12)\omega+(\mu+\frac12)\varpi i}+\sum\limits_{-1,-M-1}^{m}\sum\limits_{-1,-N-1}^{n}\frac{(-1)^{m+n}}{\alpha+(m+\frac12)\omega+(\mu+\frac12)\varpi i} \\ -\sum\limits_{0,M}^{m}\sum\limits_{-1,-N-1}^{n}\frac{(-1)^{m+n}}{\alpha+(m+\frac12)\omega+(\mu+\frac12)\varpi i}-\sum\limits_{-1,-M-1}^{m}\sum\limits_{0,N}^{n}\frac{(-1)^{m+n}}{\alpha+(m+\frac12)\omega+(\mu+\frac12)\varpi i} \end{array}\right),$$

d.h.

$$\lim_{M=\infty}\lim_{N=\infty}\sum_{-M-1,M}^{m}\sum_{-N-1,N}^{n}\frac{(-1)^{m+n}}{\alpha+(m+\frac12)\omega+(\mu+\frac12)\varpi i}\,.$$

Vergleicht man dies mit

$$\lim\sum_{-M-h',M+h''}^{m}\sum_{-N-k',N+k''}^{n}\frac{\mathrm{e}^{+2(n\sigma_0-m\tau_0)\pi i}}{u+mv+nw}\,,$$

so sieht man, daß hierin gesetzt werden muß

$$u=\alpha+\frac{\omega+\varpi i}{2},\ \omega=v,\ \varpi i=w,\ \sigma_0=\frac12,\ \tau_0=\frac12\,,$$

damit man von $\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0,u,v,\varepsilon w)$ zu der bei Abel auftretenden Summe gelangt. $\sigma_0=\frac12,\tau_0=\frac12$ [S.149]
(oder auch $\sigma_0=h+\frac12,\tau_0=k+\frac12$, wo h,k irgend welche ganze Zahlen sind) sind keine Werte, die für die Darstellung von $\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0,u,v,\varepsilon w)$ als Doppelreihe eine Ausnahmestellung einnehmen; man kann also sowohl M nach N als auch N nach M unendlich werden lassen, so daß in der oben auf S.147 angeführten Abel'schen Formel

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha)=-\frac{i}{e\cdot c}\cdot\sum_{0,\infty}^{m}\Big(\sum_{0,\infty}^{n}(-1)^{m+n}\Big\{&\frac{2\alpha}{\alpha^2-\{(m+\frac12)\omega+(n+\frac12)\varpi i\}^2}\\ &-\frac{2\alpha}{\alpha^2-\{(m+\frac12)\omega-(n+\frac12)\varpi i\}^2}\Big\}\Big)\end{aligned}$$

auch die Summationsfolge umgekehrt, d.h. erst nach m, dann nach n summiert werden darf.

Abel stellt auch noch Doppelsummen für seine mit Funktionen von am u einfach zusammenhängenden Funktionen $f(\alpha)$ und $F(\alpha)$ auf, auf die hier nicht mehr eingegangen werde. Ebenso [S.150] sei nur erwähnt, das Abel aus Formeln für die Multiplikation der elliptischen Grundfunktionen, wobei endliche Produkte — und nicht wie in der hier auf S.145 angeführten Formel (126) endliche Summen — auftreten, zu unendlichen Produkten für die Grundfunktionen gekommen ist, die mit den Eisenstein'schen Produkten verwandt sind.

Kronecker wies auf diese Dinge schon in den ersten Stunden der Vorlesung (S.2 Anmerkung) hin. „Funktionentheorie I" enthält auf S.213–240 [58] genaue Untersuchungen über Partialbruch-Doppelreihen der Funktionen sin am u, cos am u, Δam u, und weiter schließen sich Betrachtungen über eine ähnliche Doppelreihe an, die mit $Z(u) = \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}$ im Zusammenhang steht. Siehe auch S.266 in diesem Band. [S.151]

Vergleicht man die Partialbruch-Doppelreihe von $\sin\text{am}\ u$ (siehe z.B. S.269 in diesem Band) mit derjenigen von Abel's $\varphi(\alpha)$, so sieht man bedeutsame Unterschiede.

$$+i \cdot ec \cdot \varphi(\alpha) = \lim_{M=\infty} \lim_{N=\infty} \sum_{-M-1,M}^{m} \sum_{-N-1,N}^{n} \frac{(-1)^{m+n}}{\alpha + (m+\frac{1}{2})\omega + (\mu + \frac{1}{2})\varpi i}$$

$$+\kappa \sin \text{am} u = \lim \sum_{-M,M}^{m} \sum_{-N,N}^{n} \frac{(-1)^m}{u - 2m\text{K} - (2n+1)i\text{K}'} \ .$$

Das $\varphi(\alpha)$ entspricht dem $\sin\text{am}\,u$ nicht völlig. Das hängt damit zusammen, daß Abel $\varphi(\alpha)$ aus

$$\alpha = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}$$

einführt (und dann weiter $f(\alpha) = \sqrt{1-c^2x^2}$, $F(\alpha) = \sqrt{1+e^2x^2}$ setzt). Für $c^2 = 1$ kommt man zur Jakobi'schen Form mit rein imaginärem Modul κ - was freilich für spätere Anwendung auf die lemniskatischen Funktionen ($c^2 = e^2 = +1$, d.h. $\kappa = +i$) ganz gut ist. — Abel setzt weiter (§I, [S.152] art.1)

$$\frac{\omega}{2} = \int_0^{\frac{1}{c}} \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}} \qquad \frac{\varpi}{2} = \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}$$

und findet

$$\varphi(\frac{\omega}{2}) = \frac{1}{c} \qquad \varphi(\frac{\varpi \cdot i}{2}) = +i \cdot \frac{1}{e} \ ,$$

was schließlich (§I art.45) zu

$$\begin{aligned}
\varphi(m\omega + n\varpi i \pm \alpha) &= \pm(-1)^{m+n} \cdot \varphi(\alpha) \\
f(m\omega + n\varpi i \pm \alpha) &= (-1)^m \cdot \ f(\alpha) \\
F(m\omega + n\varpi i \pm \alpha) &= (-1)^n \cdot \ F(\alpha)
\end{aligned}$$

und zu

$$\begin{aligned}
\varphi(m\omega + n\varpi i) &= 0 \ , \qquad & \varphi\big((m+\tfrac{1}{2})\omega + (n+\tfrac{1}{2})\varpi i\big) &= \infty \\
f(m\omega + n\varpi i) &= 0 \ , \qquad & f\big((m+\tfrac{1}{2})\omega + (n+\tfrac{1}{2})\varpi i\big) &= \infty \\
F(m\omega + n\varpi i) &= 0 \ , \qquad & F\big((m+\tfrac{1}{2})\omega + (n+\tfrac{1}{2})\varpi i\big) &= \infty
\end{aligned}$$

[57] Ebenso tritt der Faktor in Bd. I der Werke (S.331) nicht auf.
[58] u. S.364–375

führt.

In späteren Abhandlungen hat sich Abel wieder mehr an Legendre u. Jakobi angeschlossen, er schreibt nur c^2 für κ^2 .

Anhang I

[S.159]

Die Atropie von $\lg \mathcal{E}n(u_0, u, v, w)$ für die allgemeine Äquivalenz von S.14,15 wurde auf S.16–30 aus der unbedingten Convergenz einer Reihe bewiesen. Von S.30 an wurde dann zur besseren Erläuterung nach eine zweite Beweisart angedeutet, die freilich nicht sehr wesentlich anders war. Die Frage wurde dann zurückgeführt auf den Nachweis, daß

$$\sum_{m,n} \sum_{3,\infty}^{\ell} \frac{1}{\ell} \frac{|u-u_0|^\ell}{|u+mv+nw|^\ell}$$

für alle ganzzahligen Wertepaare m, n mit Ausschluß der durch $|m| \leq M$ u. zugleich $|n| \leq N$ charakterisierten die Null zur Grenze hat bei wachsendem m und n. Im Anschluß an S.22–26 könnte man das so zeigen, daß man durch Einführung von $\xi = mv_1 + nw_1 + \alpha, \eta = mv_2 + nw_2 + \beta$ den Ausdruck $\frac{1}{\ell} \frac{|u-u_0|^\ell}{|u+m_1 v+n_1 w|^\ell}$ in $\frac{1}{\ell} \frac{\rho^\ell}{(\xi^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}\ell}}$ überführte und nun die Summation zunächst für alle [S.160] m, n ausführte, welche den Ungleichungen

$$R + hs \leq |\xi| < R + (h+1)s$$

und

$$R + ks \leq |\eta| < R + (k+1)s$$

genügen [früher stand statt R der spezielle Wert $\rho = |u - u_0|$]. Wird dann wieder die Summe für $h = 1, 2, 3 ... \infty$, $k = 1, 2, 3, ... \infty$ genommen, so findet man schließlich

$$\sum_{m,n} \frac{1}{|u+mv+nw|^\ell} < C \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\ell - 2} \cdot \frac{1}{R^{\ell-2}}$$

oder

$$\sum_{m,n} \sum_{3,\infty}^{\ell} \frac{1}{\ell} \frac{|u-u_0|^\ell}{|u+mv+nw|^\ell} < \sum_{3,\infty}^{\ell} \frac{C\pi}{2s^2} \cdot \frac{\rho^3}{R} (\frac{\rho}{R})^{\ell-3} \cdot \frac{1}{\ell(\ell-2)}$$

oder bei $R > \rho$

$$... < \sum_{3,\infty}^{\ell} \frac{C\pi}{2s^2} \cdot \frac{\rho^3}{R} \frac{1}{(\ell-2)^2} \ .$$

$$\sum_{3,\infty} \frac{1}{(\ell-2)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

ist endlich, $=$, und der ganze Ausdruck läßt sich durch wachsendes R beliebig klein machen. Daher wird

$$\sum_{m,n} \sum_{3,\infty}^{\ell} \frac{1}{\ell} \frac{|u-u_0|^\ell}{|u+mv+nw|^\ell}$$

beliebig klein, wenn die Summe auf alle Punkte mit ganzzahligen Coordinaten m, n außerhalb eines immer mehr wachsenden endlichen Bereiches sich bezieht. Ein anderer Beweis, teils nach [S.161] Kroneckers Andeutungen, läßt sich so geben:

$$u + mv + nw = (\sigma + m)(v_1 + iv_2) + (\tau + n)(w_1 + iw_2)$$

ist gleich

$$(\sigma + m) \frac{v_1^2 + v_2^2}{v_1 - iv_2} + (\tau + n) \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2}{v_1 - iv_2} + i(\tau + n) \frac{v_1 w_2 - v_2 w_1}{v_1 - iv_2} \ ,$$

d.h.

$$|u+mv+nw|^2 \geq \frac{\{(\sigma+m)|v|^2+(\tau+n)(v_1w_1+v_2w_2)\}^2+(\tau+n)^2(v_1w_2-v_2w_1)^2}{|v|^2}$$

oder

$$|u+mv+nw|^2 \geq (\tau+n)^2 \cdot \frac{(v_1w_2-v_2w_1)^2}{|v|^2} .$$

Ebenso hat man

$$|u+mv+nw|^2 \geq (\sigma+m)^2 \cdot \frac{(v_1w_2-v_2w_1)^2}{|w|^2} .$$

Liegt nun α über 0, und $2\alpha^2$ sowohl unter $\frac{(v_1w_2-v_2w_1)^2}{|v|^2}$ als auch unter $\frac{(v_1w_2-v_2w_1)^2}{|w|^2}$ so folgt

$$|u+mv+nw|^2 > 2\alpha^2(\tau+n)^2$$

$$|u+mv+nw|^2 > 2\alpha^2(\sigma+m)^2$$

oder

$$|u+mv+nw|^2 > \alpha^2 \cdot \{(\sigma+m)^2+(\tau+n)^2\} ,$$

d.h.

$$\frac{1}{|u+mv+nw|^\ell} < \frac{1}{\alpha^\ell} \cdot \frac{1}{\{(\sigma+m)^2+(\tau+n)^2\}^{\frac{1}{2}\ell}} .$$

Stellt man die Wertepaare m,n wieder durch Punkte mit den Coordinaten m,n dar, so sind [S.162]
die Punkte m,n zu betrachten, die außerhalb eines endlichen Bereiches um den Nullpunkt der Hülfsebene liegen. Nimmt man dieses Gebiet nicht zu klein, so ist $(\sigma+m)^2+(\tau+n)^2$ nie null und $\frac{(\sigma+m)^2+(\tau+n)^2}{m^2+n^2}$ ist immer endlich und von Null verschieden [59], etwa immer $>\beta^2$, wo β positiv sei. Dann folgt

$$\frac{1}{(\sigma+m)^2+(\tau+n)^2} < \frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{1}{m^2+n^2}$$

oder

$$\frac{1}{|u+mv+nw|^\ell} < \frac{1}{\alpha^\ell} \cdot \frac{1}{\{(\sigma+m)^2+(\tau+n)^2\}^{\frac{1}{2}\ell}} < \frac{1}{(\alpha\beta)^\ell} \cdot \frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{1}{2}\ell}} .$$

Für die Summe des rechts stehenden Ausdrucks kann man eine obere Grenze in Form eines Integrals erhalten, vollkommen streng auf folgende Art. x,y sei ein Punkt in den Quadrat mit den Ecken
$(m,n),(m+1,n),(m+1,n+1)$ u. $(m,n+1)$ d.h. es sei $m \leq x \leq m+1$, $n \leq y \leq n+1$. [S.163]
Dann ist geometrisch direkt anschaulich und auch analytisch leicht einzusehen, daß $\frac{x^2+y^2}{m^2+n^2}$ bei fixiertem m,n und veränderter Wahl von x,y innerhalb des Quadrates in endlichen Grenzen hin und her schwankt und daß diese Grenzen sich immer mehr einander und der Einheit nähern, je weiter der Punkt m,n vom Nullpunkt entfernt ist. Es gibt eine obere Grenze G, unter der das Verhältnis $\frac{x^2+y^2}{m^2+n^2}$ immer liegt, wenn der Punkt m,n außerhalb eines um den Nullpunkt abgegrenzten geeigneten Gebietes liegt. So hat man $\frac{1}{m^2+n^2} < G \cdot \frac{1}{x^2+y^2}$ oder

$$\frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{1}{2}\ell}} < G^{\frac{1}{2}\ell} \cdot \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}\ell}} = G^{\frac{1}{2}\ell} \cdot \frac{1}{r^\ell}$$

und nach dem Integralbegriff

$$\frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{1}{2}\ell}} < G^{\frac{1}{2}\ell} \cdot \int\limits_m^{m+1} \int\limits_n^{n+1} \frac{dy\,dx}{r^\ell} .$$

Sind nun zu allen Punkten m, n außerhalb eines gewissen Bereiches der Ebene die Quadrate construiert, welche vorhin betrachtet wurden, so kann man um den Nullpunkt der Ebene einen Kreis mit Radius R legen, außerhalb dessen alle diese Quadrate liegen und dann folgt aus $\iint \frac{dx\,dy}{r^\ell}$ für den Integrationsbereich $x^2+y^2>R^2$ oder aus [S.164]

$$\int_0^{2\pi}\int_R^\infty \frac{rdr\,d\phi}{r^\ell} = 2\pi\cdot\frac{1}{\ell-2}\cdot\frac{1}{R^{\ell-2}}$$

die Beziehung

$$\sum_{m,n}\frac{1}{|u+mv+nw|^\ell} < \frac{G^{\frac{1}{2}\ell}}{(\alpha\beta)^\ell}\cdot\frac{2\pi}{(\ell-2)R^{\ell-2}}\ ,$$

wo die Summation sich auf alle Punkte m, n außerhalb des gegebenen endlichen Bereiches erstreckt. Vergrößert man dieses Bereich mehr u. mehr, so wächst auch R unbegrenzt.

[Die Betrachtung der letzten zwei Seiten hätte sich noch etwas mehr zusammenziehen lassen, wenn man für das Quadrat mit den Ecken $(m,n),(m+1,n),(m+1,n+1)$ u. $(m,n+1)$ das Verhältnis von x^2+y^2 — wo x, y ein beliebiger Punkt im Quadrat ist — zu $(\sigma+m)^2+\tau+n)^2$ betrachtet hätte. Dies Verhältnis schwankt, wie die geometrische Anschauung zeigt, in endlichen von Null verschiedenen Grenzen und wird zu 1 für unbegrenztes Wachsen von m oder n. Es giebt so eine endliche obere Grenze M für $\frac{x^2+y^2}{(\sigma+m)^2+\tau+n)^2}$ und man kommt dann zu [S.165]

$$\sum_{m,n}\frac{1}{|u+mv+nw|^\ell} < \frac{M^{\frac{1}{2}\ell}}{\alpha^\ell}\cdot\frac{2\pi}{(\ell-2)R^{\ell-2}}\ . \quad]$$

Es existiert eine endliche Grenze C, so daß

$$\sum_{m,n}\frac{1}{|u+mv+nw|^\ell} < C^\ell\cdot\frac{2\pi}{(\ell-2)R^{\ell-2}}$$

ist. Für $|u-u_0|=\rho$ folgt nun [S.166]

$$\sum_{m,n}\frac{1}{\ell}\frac{|u-u_0|^\ell}{|u+mv+nw|^\ell} < 2\pi\cdot\frac{C^\ell\rho^\ell}{\ell(\ell-2)R^{\ell-2}} < 2\pi\cdot\frac{C^3\rho^3}{R}\Big(\frac{C\rho}{R}\Big)^{\ell-3}\frac{1}{(\ell-2)^2} \qquad \text{für } \ell>3\ .$$

Wählt man R nun größer als $C\cdot\rho$, so hat man

$$\sum_{m,n}\frac{1}{\ell}\frac{|u-u_0|^\ell}{|u+mv+nw|^\ell} < 2\pi\cdot\frac{C^3\rho^3}{R}\frac{1}{(\ell-2)^2}$$

und da

$$\sum_{3,\infty}\frac{1}{(\ell-2)^2} = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots = \frac{\pi^2}{6}\ ,$$

endlich ist, so hat man auch [60]

$$\sum_{3,\infty}^{\ell}\sum_{m,n}\frac{1}{\ell}\frac{|u-u_0|^\ell}{|u+mv+nw|^\ell} < \frac{C'}{R}\ ,$$

[59] Für unbegrenzt wachsendes m od. n gleich 1.

[60] Daß man in $\sum\limits_{m,n}\sum\limits_{3,\infty}^{\ell}\frac{1}{\ell}\frac{|u-u_0|^\ell}{|u+mv+nw|^\ell}$ nach ℓ zuletzt summieren darf, zeigt sich später (S.169)

und das verschwindet mit unbegrenzt wachsendem R oder mit unbegrenzter Vergrößerung des Bereiches, außerhalb dessen die Punkte m, n legen sollen. Hiermit ist der Satz bewiesen.

Eine andere Beweisart – im Anschluß an den Weierstraß'schen Convergenzbeweis der bei Bildung der σ-Funktion auftretenden Reihe – ist folgende.

Für einen Punkt m, n außerhalb eines gewissen Bereiches um $m = 0, n = 0$ herum zeigt [S.167]
die geometrische Darstellung der complexen Größen, daß $\frac{|u+mv+nw|}{|mv+nw|}$ immer endlich und von Null verschieden ist und bei wachsendem m oder n sich der Einheit nähern. Es giebt eine untere Grenze $\alpha > 0$ dafür, und man hat dann

$$\frac{1}{|u+mv+nw|^{\ell}} < \frac{1}{\alpha^{\ell}} \cdot \frac{1}{|mv+nw|^{\ell}} \,.$$

Ordnet man nun die Punkte $mv + nw$ im Parallelogramm um den Nullpunkt an, und ist β der

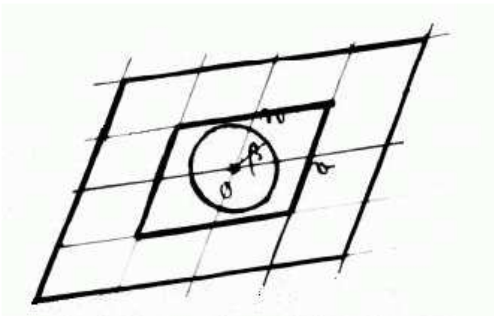

Abb. 3: zu S.167

Radius eines ganz innerhalb des kleinsten Parallelogramms liegenden Kreises, so hat man beim k-ten Parallelogramm $\frac{1}{|mv+nw|} < \frac{1}{k\beta}$ oder $\sum \frac{1}{|u+mv+nw|^{\ell}}$ für alle Punkte des k-ten Parallelogramms liegt unter $\frac{8k}{k^{\ell}(\alpha\beta)^{\ell}}$ oder $\frac{8}{k^{\ell-1}(\alpha\beta)^{\ell}}$, d.h. $\sum \frac{1}{|u+mv+nw|^{\ell}}$ für alle Wertepaare m, n die zum [S.168]
$(N-1)$ ten ... $(N+h)$ ten Parallelogramm gehören, liegt unter

$$\frac{8}{(\alpha\beta)^{\ell}} \sum_{N+1, N+h}^{k} \frac{1}{k^{\ell-1}}$$

oder erst recht unter

$$\frac{8}{(\alpha\beta)^{\ell}} \cdot \sum_{N+1,N+h}^{k} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^{\ell-1}} = \frac{8}{(\alpha\beta)^{\ell}} \cdot \int_{N}^{N+h} \frac{dx}{x^{\ell-1}} = \frac{8}{(\alpha\beta)^{\ell}} \cdot \frac{-1}{\ell-2} \frac{1}{x^{\ell-2}} \Big|_{N}^{N+h}$$
$$= \frac{8}{(\alpha\beta)^{\ell}} \cdot \frac{1}{\ell-2} \left\{ \frac{1}{N^{\ell-2}} - \frac{1}{(N+h)^{\ell-2}} \right\}$$

oder (wegen $\ell \geq 3$) unter

$$\frac{8}{(\alpha\beta)^{\ell}} \cdot \frac{1}{\ell-2} \frac{1}{N^{\ell-2}}$$

bei beliebig großem h.

Für Summation bezüglich des $(N+1)$ ten, $(N+2)$ ten ... $(N+h)$ ten Parallelogramms hat man demnach

$$\sum_{m,n} \sum_{3,\infty}^{\ell} \frac{1}{\ell} \frac{|u-u_0|^{\ell}}{|u+mv+nw|^{\ell}} < \sum_{3,\infty}^{\ell} 8 \cdot \frac{\rho}{(\alpha\beta)}^{\ell} \cdot \frac{1}{\ell(\ell-2)} \frac{1}{N^{\ell-2}} < \sum_{3,\infty}^{\ell} 8 \cdot \left(\frac{\rho}{\alpha\beta}\right)^{3} \cdot \frac{1}{N} \frac{1}{(\ell-2)^{2}} \left(\frac{\rho}{\alpha\beta N}\right)^{\ell-3}.$$

Wählt man also N größer als $\frac{\rho}{\alpha\beta}$, so hat man

$$\sum_{m,n}\sum_{3,\infty}^{\ell}\frac{1}{\ell}\frac{|u-u_0|^\ell}{|u+mv+nw|^\ell} < 8\cdot\left(\frac{\rho}{\alpha\beta}\right)^3\cdot\frac{1}{N}\sum_{3,\infty}^{\ell}\frac{1}{(\ell-2)^2}\ ,$$

und man sieht daraus, daß die links stehende Summe, bezogen auf alle Punkte $u+mv+nw$ des $(N+1)$ ten, $(N+2)$ ten $\ldots$ $(N+h)$ ten Parallelogramms in der Zahlenebene (wobei h beliebig groß genommen werden kann, selbst unendlich groß), mit wachsendem N gegen die Grenze 0 abnimmt. [S.169]

— Bei dieser Art der Betrachtung tritt auch klar hervor, wie die Vertauschung in der Reihenfolge der Summationen auf S.24–26 – wo zuerst die Summation nach m und n bis ins Unendliche erstreckt wurde und dann erst die Summation von 3 bis ∞ für ℓ erfolgte – zu keinem Fehler Anlaß giebt, denn man braucht die Summation für m u. n zunächst nur auf einen großen endlichen Wertbereich zu beziehen und kommt dabei zu denselben oberen Grenzen wie auf S.25, dann kann [S.170] man nach ℓ bis ins Unendliche summieren und findet schließlich bei Ausdehnung der Summation für m,n bis ins Unendliche dasselbe Resultat wie a. S.26. – Für die Untersuchung von S.164-166 gilt gleiches.

— Die Beziehung

$$\frac{1}{|u+mv+nw|^2} < const\cdot\frac{1}{m^2+n^2}\ ,$$

welche beim zweiten Beweis in diesem Anhang benutzt wurde, läßt sich auch noch anders herleiten. Nach S.16, 17 hat man

$$\begin{aligned}|u+mv+nw|^2 &= \xi^2+\eta^2\\ &= (mv_1+nw_1+\alpha)^2+(mv_2+nw_2+\beta)^2\\ &= (v_1^2+v_2^2)m^2+2(v_1w_1+v_2w_2)mn+(w_1^2+w_2^2)n^2\\ &\quad +2\{\alpha v_1+\beta v_2\}m+2\{\alpha w_1+\beta w_2\}n+\alpha^2+\beta^2\\ &= Am^2+2Bmn+Cn^2+2Dm+2En+F\ .\end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}AC-B^2 &= (v_1^2+v_2^2)(w_1^2+w_2^2)-(v_1w_1+v_2w_2)^2\\ &= v_1^2w_2^2+v_2^2w_1^2-2v_1w_1v_2w_2\\ &= (v_1w_2-v_2w_1)^2\\ &> 0\ ,\end{aligned}$$

und zwar wesentlich von Null veschieden, weil das Verhältnis von v und w nicht reell ist. Eine [S.171] Gleichung $Ax^2+2Bx+C=0$ hätte imaginäre Wurzeln, $Am^2+2Bmn+Cn^2$ ist daher stets von 0 verschieden und (wie A und C selbst) immer positiv. Für einen Punkt m,n außerhalb eines gewissen Bereiches um den Nullpunkt der Coordinatenebene ist $Am^2+2Bmn+Cn^2+2Dm+2En+F$ stets positiv und von $\frac{Am^2+2Bmn+Cn^2+2Dm+2En+F}{m^2+n^2}$ gilt dasselbe. Wird hierin m oder n unendlich, so nähert sich der Ausdruck der Grenze A oder C und werden m u. n zugleich unendlich, so entsteht auch ein endlicher Grenzwert, der vom Verhältnis zwischen m u. n beim Grenzproceß abhängt. [Man kann etwa $m=at+b$, $n=ct+d$ setzen und t unendlich werden

lassen, $\frac{Aa^2+2Bac+Cc^2}{a^2+b^2}$ wird der Grenzwert und der Zähler ist nach dem oben gesagten nie null. [S.172]
Sobald deshalb der Punkt m, n außerhalb eines endlichen Bereiches um den Nullpunkt liegt, ist der Quotient $\frac{Am^2+2Bmn+Cn^2+2Dm+2En+F}{m^2+n^2}$ endlich und wesentlich positiv, auch wenn m u. n nicht mehr beide endlich bleiben. Es existiert für den Quotienten oder für $\frac{|u+mv+nw|^2}{m^2+n^2}$ eine untere Grenze $g > 0$ oder es ist $|u+mv+nw|^2 > g \cdot (m^2+n^2)$ oder

$$\frac{1}{|u+mv+nw|^2} < \frac{1}{g} \cdot \frac{1}{m^2+n^2}\,.$$

Hieran könnte sich dann wieder die Betrachtung anschließen, die auf der Mitte von S.162 beginnt.

Anhang II

[S.172]

Auf S.22 steht

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-N,+N}^{n}\sum_{-M,+M}^{m}\lg\bigl(1-\frac{u-u_0}{u+mv+nw}\bigr)$$

$$=\sum_{m_0,n_0}\Bigl\{\lg\bigl(1-\frac{u-u_0}{u+m_0v+n_0w}\bigr)+\frac{u-u_0}{u+m_0v+n_0w}+\frac{1}{2}\frac{(u-u_0)^2}{(u+m_0v+n_0w)^2}\Bigr\}$$

$$-\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{\substack{|n|\leq N\\|m|\leq M}}\frac{u-u_0}{u+mv+nw}-\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{\substack{|n|\leq N\\|m|\leq M}}\frac{1}{2}\frac{(u-u_0)^2}{(u+mv+nw)^2}$$

$$-\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{\substack{|n|\leq N\\|m|\leq M}}\sum_{3,\infty}^{l}\frac{1}{l}\frac{(u-u_0)^l}{(u+mv+nw)^l}\,.$$

Daß die linke Seite convergiert, weiß man schon, die Convergenz des letzten Ausdrucks rechts wird [S.173]
S.22–26 nachgewiesen. Und so bleiben noch die beiden Reihen

$$f_1(u,v,w)=\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-M,M}^{m}\sum_{-N,N}^{n}\frac{1}{u+mv+nw}$$

$$f_2(u,v,w)=\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-M,M}^{m}\sum_{-N,N}^{n}\frac{1}{(u+mv+nw)^2}$$

(vgl. auch S.28) bezüglich der Convergenz zu prüfen. Nach der eben angeführten Gleichung reicht der Convergenznachweis für nur eine der Reihen völlig aus.

Wegen

$$\lim_{M=\infty}\sum_{-M,M}^{m}\frac{1}{v\cdot(\frac{u+nw}{v}+m)}=\frac{\pi}{v}\cdot\operatorname{ctg}\frac{u+nw}{v}$$

hat man

$$f_1(u,v,w)=\lim_{N=\infty}\sum_{-N,N}^{n}\tfrac{\pi}{v}\cdot\frac{e^{\frac{\pi iu}{v}+\frac{\pi inw}{v}}+e^{-\frac{\pi iu}{v}-\frac{\pi inw}{v}}}{\frac{1}{i}(e^{\frac{\pi iu}{v}+\frac{\pi inw}{v}}-e^{-\frac{\pi iu}{v}-\frac{\pi inw}{v}})}$$

$$=\tfrac{\pi i}{v}\cdot\frac{e^{\frac{\pi iu}{v}}+e^{-\frac{\pi iu}{v}}}{e^{\frac{\pi iu}{v}}-e^{-\frac{\pi iu}{v}}}+\tfrac{\pi i}{v}\cdot\lim_{N=\infty}\sum_{1,N}^{n}\Bigl(\frac{xy^n+x^{-1}y^{-n}}{xy^n-x^{-1}y^{-n}}+\frac{xy^{-n}+x^{-1}y^{+n}}{xy^{-n}-x^{-1}y^{+n}}\Bigr)$$

$$=\tfrac{\pi i}{v}\cdot\frac{x+x^{-1}}{x-x^{-1}}+\tfrac{\pi i}{v}\cdot\sum_{1,\infty}^{n}\frac{2(x^2-x^{-2})}{-y^{2n}+x^2-x^{-2}+y^{-2n}}\,,$$

falls zur zur Abkürzung gesetzt ist [S.174]

$$x=e^{\frac{\pi iu}{v}}\qquad\qquad y=e^{\frac{\pi iw}{v}}\,.$$

$|y|$ ist <1 oder >1, je nachdem $\frac{w}{v}$ positiven oder negativen imaginären Teil hat, d.h. je nachdem das S.9 eingeführte ε gleich $+1$ oder -1 ist. Das allgemeine Glied der Reihe wird demnach mit unbegrenzt wachsendem n zu Null in demselben Grade wie $\frac{1}{y^{-2n}}$ oder wie $\frac{1}{y^{+2n}}$ je nachdem $\varepsilon=+1$ oder $\varepsilon=-1$. Daraus ist die Convergenz der Reihe leicht zu erkennen, man braucht nur die Reihe mit $\sum_{1,\infty}^{n}(|y|^{\varepsilon})^{2n}$ zu vergleichen oder den Grenzwert der Quotienten zweier aufeinander folgender Glieder der Reihe zu betrachten. [S.175]

Für

$$f_2(u,v,w) = \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty} \sum_{-M,M}^{m} \sum_{-N,N}^{n} \frac{1}{(u+mv+nw)^2}$$

ist die Convergenzbetrachtung wesentlich einfacher, nach

$$\lim_{M=\infty} \sum_{-M,M}^{m} \frac{1}{v^2 \cdot (\frac{u+nw}{v}+m)^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\pi^2}{\sin^2 \frac{\pi(u+nw)}{v}}$$

hat man

$$f_2(u,v,w) = \lim_{N=\infty} \sum_{-N,N}^{n} \frac{\pi^2}{v^2} \frac{-4}{(\mathrm{e}^{\frac{\pi i(u+mv)}{v}} - \mathrm{e}^{-\frac{\pi i(u+mv)}{v}})^2}$$

und dies zerfällt in eine Summe mit positivem und eine mit negativem n, die jede für sich absolut convergieren, wie der Quotient aufeinander folgender Glieder zeigt.

Bemerkt sei noch, daß man aus dem Doppelprodukt

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty} \prod_{-M,+M}^{m} \prod_{-N,+N}^{n} \frac{u_0+mv+nw}{u+mv+nw}$$

durch logarithmische Differentiation nach u zu $-f_1(u,v,w)$ und durch weitere Differentiation nach u zu $+f_2(u,v,w)$ kommmt (vgl. S.57) [61]. Daraus folgt auch, daß $f_1(u,v,w)$ und $f_2(u,v,w)$ bestimmte Größen sind, daß also die betreffenden Reihen convergieren. Aber der Differentiations- [S.176] proceß bedarf doch immer einer besonderen Rechtfertigung. Es ist nicht selbstverständlich, daß die Derivierte einer unendlichen Doppelreihe durch formelle Differentiation erhalten wird. [62]

[61] Das zugehörige einfache Produkt u. die einfache Reihe ermöglichen strenge Begründung mit dem allgemeinen Satz v. S.168–181 in Bd. I der „Funktionentheorie“.

[62] S. d. Anmerkung z.v.S. u. auf S.255–259 a.a.O.

Anhang III

[S.176]

Auf S.76 ergab sich

$$-\frac{d^2}{du^2}\lg\overline{\mathcal{E}n}(u,v,w) = en(u,v,w)\ ,$$

d.h. gleich der Weierstraß'schen $\wp$-Funktion, wenn man mit v und w deren Perioden bezeichnet. Daraus folgt $\overline{\mathcal{E}n}(u,v,w) = \mathrm{e}^{\alpha+\beta u}\cdot\sigma(u)$ und die Constante β ist null, weil $\overline{\mathcal{E}n}(u,v,w)$ und $\sigma(u)$ ungerade Funktionen von u sind. Aus

$$\overline{\mathcal{E}n}(u,v,w) = v\cdot\frac{\vartheta(\frac{u}{v},\frac{\varepsilon w}{v})}{\vartheta'(0,\frac{\varepsilon w}{v})}\cdot\mathrm{e}^{+\frac{u^2}{2}\lim\sum\frac{1}{(mv+nw)^2}}\ ,$$

wo die Summation sich auf $|m|\le M, |n|\le$ N bezieht und erst M, dann N unendlich werden soll, und wo $m=0, n=0$ natürlich auszuschließen ist, erhält man nach einer Formel oben S.11 [S.177]
den Ausdruck

$$\overline{\mathcal{E}n}(u,v,w) = u\cdot\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\prod\Big(1-\frac{u}{mv+nw}\Big)\mathrm{e}^{\frac{\frac{1}{2}u^2}{(mv+nw)^2}}\ ,$$

wo sich das endliche Produkt wieder auf alle m,n mit Ausnahme von $0,0$ bezieht, wo $|m| <= M$ und $|n| <= N$. $\frac{1}{u}\cdot\overline{\mathcal{E}n}(u,v,w)$ wird diesmal für $u=0$ zu $+1$, wie $\frac{1}{u}\cdot\sigma(u)$, und so hat man

$$\overline{\mathcal{E}n}(u,v,w) = \sigma(u)\ .$$

[Nach Weierstraß hat man

$$\sigma(u) = u\cdot\prod_{m,n}\Big(1-\frac{u}{mv+nw}\Big)\mathrm{e}^{\frac{u}{mv+nw}+\frac{\frac{1}{2}u^2}{(mv+nw)^2}}\ ,$$

wo das unbedingt convergente Produkt sich auf alle m,n außer von 0,0 bezieht. Summiert man in der oben benutzten besonderen Art, so ist $\sum\frac{1}{(mv+nw)^2}$ gleich 0, durch paarweises Aufheben der Glieder, und man erhält so für $\sigma(u)$ wirklich den obenstehenden Ausdruck des $\overline{\mathcal{E}n}(u,v,w)$.] [S.178]

Die Invariante der allgemeinen Äquivalenz von S.14, 15, die Eisenstein'sche Invariante $\mathcal{E}n(u_0,u,v,w)$ war durch die spezielle Invariante $\overline{\mathcal{E}n}(u,v,w)$ in folgender Weise darstellbar (S.54):

$$\mathcal{E}n(u_0,u,v,w) = \frac{\overline{\mathcal{E}n}(u_0,v,w)}{\overline{\mathcal{E}n}(u,v,w)}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{u_0^2-u^2}{2}\lim\sum\frac{1}{(mv+nw)^2}+(u-u_0)f_1+\frac{(u-u_0)^2}{2}f_2}\ .$$

Darum ist es möglich die Eisenstein'sche allgemeine Invariante $\mathcal{E}n(u_0,u,v,w)$ durch die Weierstraß'sche σ-Funktion darzustellen. [63]

Für die Eigenschaften von $\mathcal{E}n(u_0,u,v,w)$, für die Leistungsfähigkeit dieser Funktion als Invariante war es sehr wesentlich, daß man die Argumente, von denen die Funktion abhängt, so vielseitig durch die lineare Transformation verändern konnte. Recht zu Veränderungen, Transformationen geeignete Argumente sind überhaupt oft recht vorteilhaft. So bietet q als zweites Argument (Modul) bei elliptischen Funktionen manche Vorteile vor k, und $\lg q$ ist vielfach noch vorzuziehen. [S.179]
Auch die Reduktion von u auf ein (reelles) Grössenpaar σ,τ [durch $u=\sigma v+\tau w$] ist vielfach gut.

— Die Funktion $\overline{\mathcal{E}n}(u_0,v,w)$ kann man aus $\mathcal{E}n(u_0,u,v,w)$ durch einen Grenzübergang erhalten, indem man bildet

$$u\cdot\mathcal{E}n(u_0,u,v,w)\cdot\mathrm{e}^{-\frac{u-u_0}{u}-\frac{1}{2}(\frac{u-u_0}{u})^2} = u\cdot\frac{\vartheta(\frac{u_0}{v},\frac{\varepsilon w}{v})}{\vartheta(\frac{u}{v},\frac{\varepsilon w}{v})}\cdot\mathrm{e}^{(u-u_0)\{f_1(u,v,w)-\frac{1}{u}\}+\frac{(u-u_0)^2}{2}\{f_2(u,v,w)-\frac{1}{u^2}\}}$$

[63] Die Bemerkung, daß $\mathcal{E}n(u_0,u,v,w)$ durch σ-Funktionen darstellbar ist, machte Kronecker mehr zu Anfang der Vorlesung beiläufig; daß $\overline{\mathcal{E}n}(u,v,w)$ die σ-Funktion ist, findet sich im Collegheft nicht bemerkt.

was eine Invariante der speziellen Äquivalenz $(u_0, u, v, w) \sim (u_0, u, v', w')$ ist, weil da u und u_0 [S.180]
selbst atrop sind. Nach S.39, 40 und 46 hat man für kleines u:

$$f_1(u,v,w) - \frac{1}{u} = -u \cdot \lim \sum \frac{1}{(mv+nw)^2} - u^3 \cdot \sum \frac{1}{(\cdots)^4}$$

$$f_2(u,v,w) - \frac{1}{u^2} = +\lim \sum \frac{1}{(mv+nw)^2} + 3u^3 \cdot \sum \frac{1}{(\cdots)^4}\ ,$$

und

$$(u-u_0)\Big\{f_1(u,v,w) - \frac{1}{u}\Big\} + \frac{1}{2}(u-u_0)^2\Big\{f_2(u,v,w) - \frac{1}{u^2}\Big\}$$

geht deshalb für $u = 0$ in

$$+\frac{u_0^2}{2} \cdot \lim \sum \frac{1}{(mv+nw)^2}$$

über. So hat man

$$\lim_{u=0}\Big(u \cdot \mathcal{E}n(u_0,u,v,w) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{u-u_0}{u} - \frac{1}{2}(\frac{u-u_0}{u})^2}\Big) = v \cdot \frac{\vartheta(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v})}{\vartheta'(0, \frac{\varepsilon w}{v})} \cdot \mathrm{e}^{+\frac{u_0^2}{2}\lim \sum \frac{1}{(mv+nw)^2}} = \overline{\mathcal{E}n}(u_0,v,w)\ .$$

Diese Entwicklung von $\overline{\mathcal{E}n}(u_0,v,w)$ aus $\mathcal{E}n(u_0,u,v,w)$ durch einen Grenzprozeß ist aus Kroneckers eigenem Heft entnommen, in der Vorlesung nicht gebracht worden. Sie steht am Schluß des ganz kurzen Entwurfs zu dem Abschnitt von S.67 (Mitte) bis 76, am Schluss der Notizen zum 7.12.91. Vielleicht wollte Kronecker die Funktion $\overline{\mathcal{E}n}(u_0,v,w)$ noch auf eine neue Art einführen, [S.181]
um auf ihre Beziehung zu $en(u,v,w)$ oder dem Weierstraß'schen $\wp(u)$, d.h. auf ihre Identität mit $\sigma(u)$ hinzuweisen, was dann wegen Schluß der Stunde unterblieb (am 14. Dec. 91 begann der wesentlich neue Abschnitt, S.77ff).

Anhang IV

[S.181]

Auf S.82, 87, 97, 112 wird die Formel

$$\lim_{N=\infty} \sum_{-N,N}^{n} \frac{e^{-n\xi\pi i}}{\eta+n} = 2\pi i \cdot \frac{e^{+\xi\eta\pi i}}{e^{2\eta\pi i}-1}$$

angeführt, die für ein reelles ξ zwischen 0 und $+2$ gilt und die nach S.82 sich schon bei Euler, Cauchy und Lipschitz findet und über deren Beweis Kronecker in der Vorlesung und in art. I seiner Abhandlung über elliptische Funktionen (Akademie-Schriften von 1883 (S.497ff. 19. März)) auf die Fourier'schen Entwicklungen hinwies. Man kann zu der Formel und zu einer genauen Bestim- [S.182] mung ihres Gültigkeitsbereiches auch dadurch kommen, daß man für die Funktion der complexen Variablen z,

$$f(z) = \frac{e^{\xi z\pi i}}{e^{2z\pi i}-1}$$

das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)\,dz}{z-\eta}$$

für eine geschlossene Curve nach Cauchy's Sätzen bestimmt und diese Curve ins Unendliche ausdehnt. [Dieses Prinzip hat Kronecker in sehr fruchtbarer Weise mehrfach verwendet [64], z.B. S.111 ff. und hier in Anhang S. ... [65], wo auch Literaturangaben stehen; diese Anwendung ist eine selbständige.]

$f(z) = \frac{e^{\xi z\pi i}}{e^{2z\cdot\pi i}-1}$ ist unendlich nur für $z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ und nach $e^{2z\pi i} = 1 + \frac{2z\pi i}{1} + \frac{(2z\pi i)^2}{1\cdot 2} + \ldots$ wird $z \cdot f(z)$ für $z = 0$ zu $+\frac{1}{2}\pi i$. Für ganzzahliges h ist $e^{2z\pi i} = e^{2(z-h)\pi i} = 1 + 2\pi i(z-h) + \ldots$ und so folgt $\lim_{z=h}(z-h)\cdot f(z) = \frac{e^{h\xi\pi i}}{2\pi i}$. Die Funktion $\frac{f(z)}{z-h}$, wo η irgend ein complexer oder reeller [S.183] Zahlenwert ist, nur keine reelle ganze Zahl, hat demnach in $z = h$ das Residuum $\frac{e^{h\xi\pi i}}{2\pi i(h-\eta)}$, in $z = \eta$ aber das Residuum $f(\eta)$; und der Cauchy'sche Satz liefert:

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)\,dz}{z-\eta} = f(\eta) + \frac{1}{2\pi i}\sum_h \frac{e^{h\xi\pi i}}{h-\eta} ,$$

d.h.

$$\frac{e^{\xi\eta\pi i}}{e^{2\eta\pi i}-1} = \frac{1}{2\pi i}\sum_h \frac{e^{h\xi\pi i}}{\eta-h} + \frac{1}{2\pi i}\int \frac{e^{\xi z\pi i}\,dz}{(e^{2z\pi i}-1)(z-\eta)} ,$$

wo das Integral sich auf eine geschlossene Curve und die Summe sich auf alle von ihr eingeschlossenen Punkte $z = h$ bezieht. Wird das Integral zu Null bei einer bestimmten mehr und mehr ins Unendliche ausgedehnten Curve, so hat man für $\frac{e^{\xi\eta\pi i}}{e^{2\eta\pi i}-1}$ einen Ausdruck als Grenzwert einer Summe gefunden. Das Verhalten von $f(z) = \frac{e^{\xi z\pi i}}{e^{2z\pi i}-1}$ im Unendlichen ist zu prüfen. Der Parameter [S.184] ξ sei reell. [66]. Für $z = x + yi$ hat man

$$f(z) = \frac{e^{\xi x\pi i - \xi y\pi}}{e^{2x\pi i - 2y\pi}-1} = \frac{e^{(\xi-2)x\pi i-(\xi-2)y\pi}}{1-e^{-2x\pi i+2y\pi}} ,$$

und für $y = +\infty$ wird für $\xi > 0$ der erste Ausdruck zu 0, während für $y = -\infty$ bei $\xi - 2 > 0$ der zweite Ausdruck verschwindet (x darf hierbei endlich oder unendlich sein).

[64] Weitere Anwendungen s. „Funktionentheorie I" S.205–229 und 261–68.

[65] Ich wollte einen Auszug aus der Arbeit in d. Monatsberichten v. Dec. 1881 machen (vgl. auch hier S. 85,86), habe aber jetzt einen Abdruck.

[66] Reelles ξ ist nötig, damit $\frac{e^{h\xi\pi i}}{\eta-h}$ für $h = +\infty$ u. $h = -\infty$ verschwindet.

Für

$$0 < \xi < 2$$

und nur da, sofern wenigstens ξ reell ist, wird $f(z)$ zu null (und in höherer als irgend einer endlichen Ordnung), wenn z so unendlich wird, daß sein imaginärer Teil nicht endlich bleibt [67]. Für $x = \infty$ bei endlichem y dagegen sinkt $|f(z)|$ nicht unter jede Grenze herab; der Zähler [S.185]
bleibt endlich u. von 0 verschieden, der Nenner wird nie unendlich, aber auch nie Null, wenn nicht $y = 0$ und x ganzzahlig ist. Man kann darum einen kleinen Kreisradius ρ festsetzen, so daß bei Ausschluss der Kreise mit diesem Radius um die Punkte mit ganzzahligem z ein Gebiet entsteht, in dem $|f(z)|$ unter einer angebbaren endlichen Grenze liegt, wenn in $z = x + yi$ das x bei endlich bleibendem y unendlich wird. [Genaueres hierüber S.189 ff.]

Jetzt kann man das Integral von $\frac{f(z)}{z-\eta}$ für einen Kreis mit dem Radius R, der sich von einer ganzen Zahl wesentlich unterscheidet, bestimmen [68]:

$$\int \frac{f(z)\,dz}{z-\eta} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\varphi})iRe^{i\varphi}\,d\varphi}{Re^{i\varphi}-\eta} = i \cdot \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\varphi})\,d\varphi}{1 - R^{-1}e^{-i\varphi}\,\eta}$$

$$= i \cdot \Big(\int\limits_{\alpha}^{\pi-\alpha} + \int\limits_{\pi+\alpha}^{2\pi-\alpha} + \int\limits_{-\alpha}^{+\alpha} + \int\limits_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} \Big) \frac{f(Re^{i\varphi})\,d\varphi}{1 - R^{-1}e^{-i\varphi}\,\eta}\,.$$

[S.186]

Daraus folgt leicht

$$\Big| \int \frac{f(z)\,dz}{z-\eta} \Big| < \Big(\int\limits_{\alpha}^{\pi-\alpha} + \int\limits_{\pi+\alpha}^{2\pi-\alpha} + \int\limits_{-\alpha}^{+\alpha} + \int\limits_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} \Big) \frac{|f(Re^{i\varphi})|\,d\varphi}{1 - R^{-1}|\eta|}\,,$$

denn der absolute Wert eines Integrals mit reellem Integrationsbereich ist kleiner als das Integral des absoluten Wertes, und $|1 - R^{-1}e^{-i\varphi}\,\eta|$ liegt über $1 - |R^{-1}e^{-i\varphi}\,\eta| = 1 - R^{-1}|\eta|$, wobei R natürlich $> |\eta|$ vorausgesetzt ist, damit schon η innerhalb der Kreisfläche liegt. Für die Integrale zwischen den Grenzen $-\alpha$ und $+\alpha$ und zwischen $\pi - \alpha$ u. $\pi + \alpha$ liegt $|f(Re^{i\varphi})|$ unter einer angebbaren Grenze G, wie auch das von ganzen Zahlen wesentlich verschiedene R wächst, und $1 - R^{-1}|\eta|$ liegt immer über einer von 0 verschiedenen angebbaren Größe, falls $R > |\eta|$ (für $R > 2|\eta|$ z.B. über $1/2$). In den beiden Integralen zwischen $-\alpha$ und $+\alpha$ und zwischen $\pi - \alpha$ [S.187]
u. $\pi + \alpha$ bleibt die zu integrierende Funktion unter einer endlichen angebbaren Grenze, und die beiden Integrale zusammen lassen sich für jeden der in Betracht kommenden Werte von R durch hinreichend kleines, aber von 0 verschiedenes α unter eine beliebig kleine vorgeschriebene Grenze $\frac{1}{2}\beta$ bringen. Die beiden Integrale

$$\int\limits_{\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{|f(Re^{i\varphi})|\,d\varphi}{1 - R^{-1}|\eta|} \quad \text{und} \quad \int\limits_{\pi+\alpha}^{2\pi-\alpha} \frac{|f(Re^{i\varphi})|\,d\varphi}{1 - R^{-1}|\eta|}$$

dagegen lassen sich nun, wenn α der letzten Forderung gemäß bestimmt ist, dadurch beliebig klein, zusammengenommen $< \frac{1}{2}\beta$ machen, daß man R hinreichend groß wählt. Denn indem für

[67] darum auch eine endliche obere Grenze für $|f(z)|$ im Gebiet $-1/2 \leq x \leq +1/2, |z| > \rho$ $(\rho < 1/2)$. Ferner $|f(z+1)| = |f(z)|$ und daraus d. Satz a. nächst. S.

[68] Hieraus könnte man schon recht einfach schließen. daß das Integral im Grenzfall einen endlichen von η unabhängigen Wert hat, d.h. daß $\lim\limits_{N=\infty} \sum\limits_{-N,N}^{n} \frac{e^{n\xi\pi i}}{\eta - n}$ bestimmten Wert hat u. sich von $\frac{e^{\xi\eta\pi i}}{e^{2\eta\pi i}-1}$ höchstens um eine Funktion von ξ unterscheidet. Diese Angabe enthält noch einen unsicheren Punkt, s. S.283.

die Integrationsintervalle die Größe $e^{i\varphi}$ einen nicht verschwindenden imaginären Teil hat, wächst mit R auch der imaginäre Teil von $z = Re^{i\varphi}$ unbegrenzt und $|f(Re^{i\varphi})|$ nimmt darum nach S.184 [S.188] in sehr starkem Maaße gegen Null ab.

Hiermit ist gezeigt, wie das ganze Integral $\int \frac{f(z)\,dz}{z-\eta}$ für einen Kreis mit nicht ganzzahligem Radius zu Null wird, wenn dieser Radius (sprungweise) unbegrenzt wächst. Liegt R zwischen den ganzen Zahlen N und $N+1$, so lautet die letzte Formel auf S.183:

$$\frac{e^{\xi\eta\pi i}}{e^{2\eta\pi i}-1} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{-N,N}^{h} \frac{e^{h\xi\pi i}}{\eta - h} + \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)\,dz}{z-\eta} \; ,$$

und es folgt

$$\frac{e^{\xi\eta\pi i}}{e^{2\eta\pi i}-1} = \frac{1}{2\pi i}\lim_{N=\infty}\sum_{-N,N}^{h} \frac{e^{h\xi\pi i}}{\eta - h}$$

oder

$$\frac{e^{\xi\eta\pi i}}{e^{2\eta\pi i}-1} = \frac{1}{2\pi i}\lim_{N=\infty}\sum_{-N,N}^{n} \frac{e^{-n\xi\pi i}}{\eta + n} \; .$$

Dabei war ξ reell [69] genommen und mußte zwischen 0 und 2 liegen mit Ausschluß dieser Gren- [S.189] zen, η konnte beliebig complex oder reell sein, nur nicht reell ganzzahlig. [$\xi = +1$ giebt eine Partialbruchreihe für die Funktion $\sec(\pi z)$, nämlich

$$\pi \cdot \sec \pi z = \frac{\pi}{\sin \pi z} = \lim_{N=\infty}\sum_{-N,N}^{n} \frac{(-1)^n}{z+n} \; ,$$

die sich aber direkt auf dieselbe Art leichter beweisen läßt, weil da der Nachweis für das Verschwinden des Integrals bei unbegrenzter Vergrößerung des Kreises viel einfacher wird. Siehe darüber u. über eine andere Beweisart der Formel den Anhang in Band I der „Funktionentheorie“ (Webers Vorlesung vom S.S. 86) S.207–210 u. 197–199.]

Zu den auf S.184, 185 durchgeführten Betrachtungen über das Verhalten von

$$f(z) = \frac{e^{\xi z\pi i}}{e^{2z\pi i}-1}$$

im Unendlichen sind noch einige Ergänzungen nötig. Daß $f(z)$ in sehr hohem Maaße zu Null wird, [S.190] sobald in $z = x + yi$ das y unendlich wird, ist streng bewiesen. Daß aber $|f(z)|$ immer unter einer angebbaren Grenze bleibt, wenn in $z = x+yi$ das x bei irgend einem endlichen y unendlich wird, sobald man nur die Umgebungen der Punkte mit ganzzahligem reellen z ausschließt, soll noch näher ausgeführt werden [70]. Für $y > 0$ schreibt man

$$f(z) = f(x+yi) = \frac{e^{\xi z\pi i}}{e^{2z\pi i}-1} = \frac{e^{\xi x\pi i - \xi y\pi}}{e^{2x\pi i - 2y\pi}-1} \; .$$

Der absolute Wert des Zählers ist wegen $\xi > 0$ höchstens $+1$, der absolute Wert des Nenners aber ist derselbe wie der von $e^{2x'\pi i - 2y\pi} - 1$, wo $x = x' + h$ und $-\frac{1}{2} \le x' \le +\frac{1}{2}$ ist, und dieser liegt über einer von 0 verschiedenen positiven Größe g, sobald der Radius des um $z = +h$ in der z-Ebene ausgeschnittenen Kreises eine hinreichende Größe hat (zu kleinem Kreisradius gehört auch kleines [S.191]

[69] Sonst divergiert die Reihe sicher, da $\frac{e^{-n\xi\pi i}}{\eta+n}$ nicht zugleich für $n = +\infty$ u. $n = -\infty$ verschwindet.

[70] Einfacher: $f(z+1) = e^{\xi\pi i}$ giebt $|f(z+1)| = |f(z)|$ u.s.w.

g). Das kann man ganz streng daraus schließen, daß durch $w = \mathrm{e}^{2z'\pi i}$ oder $w = \mathrm{e}^{2x'\pi i - 2y\pi}$, wo $-\frac{1}{2} \leq x' \leq +\frac{1}{2}$ ist, w eindeutig durch z', aber auch z' eindeutig durch w' bestimmt ist, daß dabei auch die Größe $\frac{dw}{dz'}$ endlich und von 0 verschieden ist für jedes endliche z', daß also die Abbildung der w-Ebene auf den Streifen der z-Ebene frei von singulären Stellen in dem Bereich ist, worauf es hier allein ankommt. Nur zu $z' = 0$ kann $w = +1$ gehören, für $|z'| \geq \rho > 0$ muß $|w-1|$ von 0 verschieden, $> g$ sein. Den Radius ρ des um $z' = 0$ auszuschließenden Kreises wird man kleiner als $\frac{1}{2}$ wählen, damit bei Ausschluß solcher Kreise um alle Stellen $z = +h$ überhaupt noch Stellen der reellen Axe übrig bleiben. Und so ist auch $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\xi z\pi i}}{\mathrm{e}^{2z\pi i}-1}$ für jedes z, dessen mit i [S.192] multiplizierter Bestandteil y nicht negativ ist und welches außerhalb der mit dem kleinen Radius ρ um die ganzzahligen Punkte der reellen Axe gelegten Kreise sich befindet, seinem absoluten Werte nach $< \frac{1}{g}$, d.h. kleiner als eine endliche Zahl G. [Das gilt für jedes endliche $y \geq 0$, auch für sehr hohes und selbst im Grenzfall $y = +\infty$]

– Der Fall $y < 0$ ist noch zu betrachten. Da schreibt man

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\xi z\pi i}}{\mathrm{e}^{2z\pi i} - 1} = \frac{\mathrm{e}^{-(2-\xi)z\pi i}}{1 - \mathrm{e}^{-2z\pi i}} = \frac{\mathrm{e}^{-(2-\xi)x\pi i + (2-\xi)y\pi}}{1 - \mathrm{e}^{-2x\pi i + 2y\pi}}$$

und wegen $2 - \xi > 0$ ist der absolute Wert des Zählers höchstens $+1$, während man für den Nenner wieder ganz dieselben Schlüsse machen kann, wie vorhin für $y \geq 0$. So folgt ganz streng, daß $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\xi z\pi i}}{\mathrm{e}^{2z\pi i}-1}$ bei $0 < \xi < 2$ absolut genommen immer unter einer endlichen Grenze G [S.193] bleibt, falls der Punkt z in der Zahlenebene außerhalb der mit gemeinsamen kleinen Radius ρ um die Punkte mit ganzzahligen reellen Argumentwerten gezogenen Kreise liegt.

Bei dem hiermit ganz streng gegebenen Beweis der Formel

$$2\pi i \cdot \frac{\mathrm{e}^{\xi\eta\pi i}}{\mathrm{e}^{2\eta\pi i} - 1} = \lim_{N=\infty} \sum_{-N,N}^{n} \frac{\mathrm{e}^{-n\xi\pi i}}{\eta + n}$$

für reelles ξ zwischen und $+2$, mit Ausschluss dieser Grenzen, war die linke Seite als Funktion von η betrachtet und in Partialbrüche zerlegt worden mittels des Cauchy'schen Residuensatzes. Man kann auch die linke Seite, oder das in ihr auftretende $\mathrm{e}^{+\xi\eta\pi i}$ als Funktion von ξ betrachten und im Intervall $0 < \xi < 2$ in eine Fourier'sche Reihe nach cos u. sin der Vielfachen von $\xi\pi$ [S.194] entwickeln. Aus der Fourier'schen Formel kommt man leicht zu

$$\varphi(\xi) = \lim_{N=\infty} \sum_{-N,N}^{n} A_n \cdot \mathrm{e}^{n\xi\pi i}, \quad A_n = \frac{1}{2} \int_0^{+2} \varphi(x) \mathrm{e}^{-nx\pi i}\, dx\,,$$

und für $\varphi(\xi) = \mathrm{e}^{\xi\eta\pi i}$ folgt

$$A_n = \frac{1}{2} \int_0^{+2} \mathrm{e}^{\eta x\pi i} \cdot \mathrm{e}^{-nx\pi i}\, dx = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{e}^{(\eta-n)x\pi i}}{\pi i(\eta - n)} \Bigg|_{x-0}^{x=2} = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{e}^{2(\eta-n)\pi i} - 1}{\pi i(\eta - n)} = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{e}^{2\eta\pi i - 1}}{\pi i(\eta - n)}\,,$$

d.h.

$$\mathrm{e}^{\xi\eta\pi i} = \frac{1}{2\pi i} (\mathrm{e}^{2\eta\pi i} - 1) \cdot \lim_{N=\infty} \sum_{-N,N}^{n} \frac{\mathrm{e}^{n\xi\pi i}}{\eta - n}$$

oder

$$2\pi i \cdot \frac{\mathrm{e}^{\xi\eta\pi i}}{\mathrm{e}^{2\eta\pi i} - 1} = \lim_{N=\infty} \sum_{-N,N}^{n} \frac{\mathrm{e}^{-n\xi\pi i}}{\eta + n}\,.$$

Das ist jedenfalls der einfachste Beweis für die Formel. ξ muß reell, > 0 u. $< +2$ sein und η darf gewiß nicht reell ganzzahlig sein.

Auf diese Ableitung aus dem Fourier'schen Satz wies Kronecker auch in der Vorlesung hin, ebenso in art. I der Abhandlung über elliptische Funktionen in den Akademieberichten v. 19.April 1883. [Dort steht aber, ξ dürfe nicht negativ u. müsse kleiner als 2 sein, so daß $\xi = 0$ noch zulässig erscheint. Das ergibt sich sofort als Fehler, denn $\frac{e^{\xi\eta\pi i}}{e^{2\eta\pi i}-1}$ giebt für $\xi = 0$: $\frac{e^{-\eta\pi i}}{e^{\eta\pi i}-e^{-\eta\pi i}} = \frac{e^{-\eta\pi i}}{2i \cdot \sin \eta\pi}$ während $\frac{1}{2\pi i} \cdot \lim_{N=\infty} \sum_{-N,N}^{n} \frac{1}{\eta-n}$ gleich $\frac{1}{2i \cdot \mathrm{tg}\, \eta\pi}$ ist.] [S.195]

— In den Akademieberichten von 1885 (16. Juli) hat Kronecker in einer Arbeit „über eine bei partieller Integration nützliche Formel" einen Beweis für die hier behandelte Reihenformel gegeben, der im Grunde auf den Nachweis der Fourier'schen Reihenentwicklung für eine im Intervall $0 < \xi < 2$ stetige, aber nicht periodische Funktion herauskommt und bei dem wieder der Cauchy'schen Integralsatz als Grundlage dient. [S.196]

$\varphi(z)$ sei eindeutig und stetig in dem Streifen der z-Ebene, wo der reelle Teil von z zwischen 0 und $+2$ liegt. Dieser Streifen durch $w = e^{+z\pi i}$ eindeutig auf die w-Ebene abgebildet. Hierdurch wird $\varphi(z)$ zu einer Funktion $\Phi(w)$, welche in der w-Ebene eindeutig u. stetig ist, sobald man die nächste Umgebung der Stelle $w = 0$ ausschließt und durch einen Schnitt die Umkreisung dieser Stelle hindert; und zwar muß dieser Schnitt mit der positiven reellen Axe zusammenfallen, damit seine beiden Ränder den Grenzlinien des Streifens in der z-Ebene, den Geraden $0 + yi$ u. $2 + yi$ entsprechen. Auf ein umgrenztes Stück in dem so aus der w-Ebene erhaltenen Gebiet kann man den Cauchy'schen Integralsatz

$$\Phi(u) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\Phi(w)\, dw}{w-u}$$

anwenden. $|u|$ sei ρ und r u. R seien so gewählt, daß $r < \rho < R$ ist. Für die ganze Begrenzung [S.197]

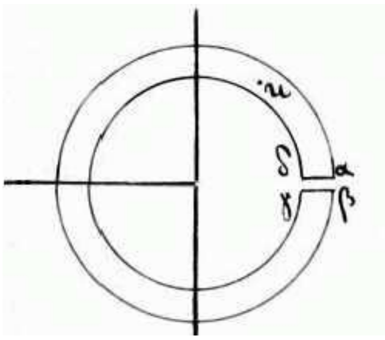

Abb. 4: zu S.197

des gezeichneten bei der reellen Axe durchschnittenen ringförmigen Gebietes bestimmt man das Integral von $\frac{\Phi(w)}{w-u}$, indem man für die Kreislinien von

$$\frac{1}{w-u} = \frac{1}{w(1-\frac{u}{w})} = \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} + \frac{u^2}{w^3} + \cdots; \quad |w| > |u|$$

$$\frac{1}{w-u} = \frac{-1}{u(1-\frac{w}{u})} = -\frac{1}{w} - \frac{u}{w^2} - \frac{u^2}{w^3} - \cdots; \quad |w| < |u|$$

Gebrauch macht, ganz wie beim Laurent'schen Satz. Es folgt

$$\Phi(u) = \frac{1}{2\pi i}\Big\{ \sum_{0,\infty}^{k} u^k \int_\alpha^\beta \frac{\Phi(w)\, dw}{w^{k+1}} + \sum_{1,\infty}^{k} u^{-k} \int_\delta^\gamma \Phi(w) w^{k-1}\, dw + \int_\beta^\gamma \frac{\Phi(w)\, dw}{w-u} + \int_\delta^\alpha \frac{\Phi(w)\, dw}{w-u} \Big\}$$

oder

$$\Phi(u) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \Big\{ \sum_{0,\infty}^{k} u^k \int_\alpha^\beta \Phi(w) w^{-k-1} dw + \sum_{-1,-\infty}^{k} u^k \int_\delta^\gamma \Phi(w) w^{-k-1} dw$$
$$+ \int_\beta^\gamma \frac{\Phi(w)\, dw}{w-u} + \int_\delta^\alpha \frac{\Phi(w)\, dw}{w-u} \Big\} .$$

Indem man jetzt $w = \mathrm{e}^{+z\pi i}$, $w^{-1} dw = \pi i \, dz$, $u = \mathrm{e}^{+\xi\pi i}$ setzt, entsteht [S.198]

$$\Phi(u) = \varphi(\xi) = \frac{1}{2} \Big\{ \sum_{0,\infty}^{k} \mathrm{e}^{k\xi\pi i} \int_a^b \varphi(z) \mathrm{e}^{-kz\pi i} dz + \sum_{-1,-\infty}^{k} \mathrm{e}^{k\xi\pi i} \int_d^c \varphi(z) \mathrm{e}^{-kz\pi i} dz$$
$$+ \int_b^c \frac{\varphi(z)\mathrm{e}^{z\pi i}\, dz}{\mathrm{e}^{z\pi i} - \mathrm{e}^{\xi\pi i}} + \int_d^a \frac{\varphi(z)\mathrm{e}^{z\pi i}\, dz}{\mathrm{e}^{z\pi i} - \mathrm{e}^{\xi\pi i}} \Big\} .$$

Das hätte man auch direkt durch Betrachtung von

$$\frac{1}{2} \int \frac{\varphi(z)\mathrm{e}^{z\pi i}\, dz}{\mathrm{e}^{z\pi i} - \mathrm{e}^{\xi\pi i}}$$

für die Begrenzung der Rechtecks $abcd$ in der z-Ebene gefunden. [Das Integral $\int \frac{\varphi(z)\, dz}{1-\mathrm{e}^{(\xi-z)\pi i}}$ für positiven Umlauf um das Rechteck ist gleich dem mit $2\pi i$ multiplizierten Residuum von $\frac{\varphi(z)}{1-\mathrm{e}^{(\xi-z)\pi i}}$, wenn $\varphi(z)$ im Rechteck endlich, eindeutig u. stetig ist.] — Es entspricht jetzt die Gerade $\overline{ab}$ der

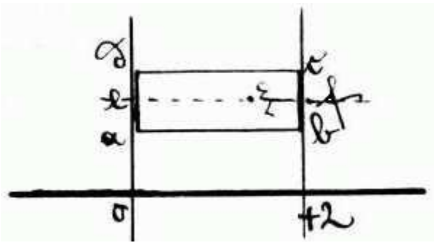

Abb. 5: zu S.198

fast geschlossenen Kreislinie $\alpha\beta$ mit dem Radius $|w| = R$ (nach $w = \mathrm{e}^{z\pi i}$ ist für die Gerade $\overline{ab}$ die Ordinate y aus $|\mathrm{e}^{x\pi i} - \mathrm{e}^{y\pi}| = \mathrm{e}^{-y\pi} = R$ bestimmt). Analog verhält es sich mit der Geraden [S.199] $\overline{cd}$, und wegen $r < R$ liegt $\overline{cd}$ oberhalb $\overline{ab}$, wenn die positiv imaginäre Axe nach oben geht.

Läßt man nun $\overline{ab}$ und $\overline{dc}$ mehr u. mehr zusammenrücken, so daß sie immer den Punkt ξ zwischen sich enthalten, so werden im Grenzfall die Integrale für die Strecken $\overline{bc}$ und $\overline{da}$ zu Null — die unter dem Integralzeichen stehende Funktion ist ja sicher endlich — und die Integrale für die Strecken $\overline{ab}$ und $\overline{dc}$ lassen sich durch Integrale für die Linie $\overline{ef}$, welche durch ξ hindurchgeht, ersetzen. Für diese Gerade ist aber $z = x + yi$, wo x von 0 bis $+2$ geht und y aus $|\mathrm{e}^{x\pi i - y\pi}| = \mathrm{e}^{-y\pi} = \rho$ sich bestimmt. Es entsteht

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{-\infty,\infty}^{k} \mathrm{e}^{k\xi\pi i} \int_0^2 \varphi(x+yi) \mathrm{e}^{-kx\pi i + ky\pi} dx$$

und $y = 0$ $(\rho = +1)$ führt zu der Formel für reelles ξ zwischen 0 u. 2 — mit Ausschluß [S.200] der Grenzen, denn der Punkt ξ darf vor dem Grenzübergang nicht schon auf dem Umfang des Rechtecks liegen — wie sie vor sechs Seiten als Umformung des Fourier'schen Satzes citiert ist.

Hiermit ist aber nur der Gang des Beweises charakterisiert, zu einem strengen Beweis gehört eine genauere Grenzbetrachtung besonders wegen der unendlichen Reihen, die hier an der Grenze ihres Convergenzbereiches benutzt werden. Die Frage ist sehr wichtig zur Entscheidung, ob die Reihe für $k = -\infty \ldots + \infty$ wirklich so summiert werden darf, daß man zuerst von $-N$ bis $+N'$ geht u. N u. N' unabhängig von einander unendlich werden läßt, oder ob etwa $N' = N$ oder [S.201]
nur um eine endliche Zahl hiervon verschieden genommen werden muß.

[— Anmerkung —
Die a.S.189 erwähnte specielle Reihe für $\xi = +1$

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \lim_{N=\infty} \sum_{-N,N}^{n} \frac{(-1)^n}{z+n} ,$$

kann in der That auch so geschrieben werden:

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \lim_{N=\infty, N'=\infty} \sum_{-N,N'}^{n} \frac{(-1)^n}{z+n} ,$$

da sowohl $\sum_{0,N'}^{n} \frac{(-1)^n}{z+n}$ als auch $\sum_{-1,-N}^{n} \frac{(-1)^n}{z+n}$ bestimmte Grenzwerte für $N' = \infty$ resp. $N = \infty$ besitzen. Denn für $\sum_{0,N'}^{n} \frac{(-1)^n}{z+n}$ kann man bei ungeradem $N', N' = 2M+1$, auch schreiben

$$\sum_{0,M}^{m} \left(\frac{1}{z+2m} - \frac{1}{z+2m+1} \right) = \sum_{0,M}^{m} \frac{1}{(z+2m)^2 + z + 2m} ,$$

und das hat für $M = \infty$ bestimmten Limes; bei geradem N' käme nur ein in Grenzfall verschwindendes Glied hinzu. Bei der anderen Reihe ist alles entsprechend — die Convergenz ist nur bedingt! — direkte Convergenzprüfung von $\sum_{0,N'}^{n} \frac{e^{n\xi\pi i}}{z-n}$ a.S.214–17, 219–21.
— Ende der Anmerkung —]

Bei dem ersten Beweis der Formel

$$2\pi i \cdot \frac{e^{+\xi\eta\pi i}}{e^{2\eta\pi i} - 1} = \lim_{N=\infty} \sum_{-N,N}^{n} \frac{e^{-n\xi\pi i}}{\eta + n}$$

war eine solche Annahme in der That erfolgt durch die Benutzung eines Kreises um den Nullpunkt der z-Ebene als Integrationsweg für

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{e^{\xi z \pi i}\, dz}{(e^{2z\pi i} - 1)(z - \eta)}$$

(S.182-193).

Statt der unendlichen Reihen auf S.197 müssen jetzt endliche Reihen mit dem genauen Restglied eingeführt werden nach

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^h + \frac{x^{h+1}}{1-x} .$$

Für $|w| > |u|$ hat man [S.202]

$$\frac{1}{w-u} = \frac{1}{w(1-\frac{u}{w})} = \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} + \frac{u^2}{w^3} + \cdots + \frac{u^h}{u^{h+1}} + \frac{u^{h+1}}{u^{h+2}(1-\frac{u}{w})} \ ,$$

d.h.

$$\frac{1}{w-u} = \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} + \frac{u^2}{w^3} + \cdots + \frac{u^h}{w^{h+1}} + \frac{u^{h+1}}{w^{h+1}(w-u)} \ ,$$

und analog folgt für $|w| < |u|$

$$\frac{1}{w-u} = -\frac{1}{u} - \frac{w}{u^2} - \frac{w^2}{u^3} - \cdots - \frac{w^h}{u^{h+1}} + \frac{u^{h+1}}{u^{h+1}(w-u)} \ ,$$

d.h.

$$\frac{1}{w-u} = \sum_{0,M}^{m} \frac{u^m}{w^{m+1}} + \frac{u^{M+1}}{w^{M+1}(w-u)} \ ; \quad |w| > |u|$$

$$\frac{1}{w-u} = -\sum_{1,N}^{n} \frac{w^{n-1}}{u^n} + \frac{w^N}{u^N(w-u)} \ ; \quad |w| < |u| \ .$$

An Stelle der letzten Gleichung a.S.197 erhält man so die folgende Darstellung von $\Phi(u)$: [S.203]

$$\begin{aligned}\Phi(u) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \Big\{ \ & \sum_{0,M}^{m} u^m \int_\alpha^\beta \Phi(w) w^{-m-1} dw + \sum_{1,N}^{n} u^{-n} \int_\delta^\gamma \Phi(w) w^{n-1} dw \\ & + u^{M+1} \int_\alpha^\beta \frac{\Phi(w)\, dw}{w^{M+1}(w-u)} - u^{-N} \int_\delta^\gamma \frac{\Phi(w) w^N\, dw}{w-u} \\ & + \int_\beta^\gamma \frac{\Phi(w)\, dw}{w-u} + \int_\delta^\alpha \frac{\Phi(w)\, dw}{w-u} \ \Big\}\end{aligned}$$

Für die Integrale über den fast geschlossenen Kreisbogen $\alpha\beta$ ist $|w|$ gleich $R > \rho$, für den anderen kreisförmigen Integrationsweg hat man $|w| = r < \rho$, wo $\rho = |u|$ ist. Der Grenzübergang besteht darin, daß man R u. r dem festen ρ mehr und mehr annähert. (Die Betrachtung soll hier in der w-Ebene durchgeführt werden [Figur a.S.197], weil so die Formeln sich etwas besser schreiben als bei der Substitution $w = \mathrm{e}^{z\pi i}$ (S.198); erst das Resultat soll dann transformiert werden.)

$w = R\mathrm{e}^{i\theta}$ resp. $w = r\mathrm{e}^{i\theta}$ und $u = \rho\mathrm{e}^{i\psi}$ giebt für θ die Grenzen 0 u. 2π , $\frac{dw}{w}$ ist gleich $i \cdot d\theta$, und so folgt für die beiden Integrale in der zweiten Zeile: [S.204]

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot u^{M+1} \int_\alpha^\beta \frac{\Phi(w)\, dw}{w^{M+1}(w-u)} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \Big(\frac{\rho}{R}\Big)^{M+1} \mathrm{e}^{(M+1)i\psi} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi(R\mathrm{e}^{i\theta})\, i\, d\theta}{\mathrm{e}^{(M+1)i\theta} \cdot (1 - \frac{\rho}{R}\mathrm{e}^{i(\psi-\theta)})}$$

und

$$-\frac{1}{2\pi i} \cdot u^{-N} \int_\delta^\gamma \frac{\Phi(w) w^N\, dw}{w-u} = -\frac{1}{2\pi i} \cdot \Big(\frac{r}{\rho}\Big)^N \mathrm{e}^{-Ni\psi} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi(r\mathrm{e}^{i\theta})\mathrm{e}^{Ni\theta}\, i\, d\theta}{(1 - \frac{\rho}{r}\mathrm{e}^{i(\psi-\theta)})}$$

oder

$$\Big|\frac{1}{2\pi i} \cdot u^{M+1} \int_\alpha^\beta \frac{\Phi(w)\, dw}{w^{M+1}(w-u)}\Big| < \frac{1}{2\pi} \cdot \Big(\frac{\rho}{R}\Big)^{M+1} \int_0^{2\pi} \frac{|\Phi(R\mathrm{e}^{i\theta})|\, d\theta}{|1 - \frac{\rho}{R}\mathrm{e}^{i(\psi-\theta)})|}$$

$$\Big| -\frac{1}{2\pi i}\cdot u^{-N}\int\limits_{\delta}^{\gamma}\frac{\Phi(w)w^N\,dw}{w-u}\Big| < \frac{1}{2\pi}\cdot\Big(\frac{r}{\rho}\Big)^N\int\limits_0^{2\pi}\frac{|\Phi(re^{i\theta})|\,d\theta}{|(1-\frac{\rho}{r}\mathrm{e}^{i(\psi-\theta)})|}$$

Der absolute Wert einer algebraischen Summe von zwei Gliedern liegt nun über der Differenz der absoluten Werte; außerdem besitzt $\Phi(w)$ seinem absoluten Werte nach eine obere Grenze G in dem ganzen Gebiet, welches a.S.197 betrachtet wurde. Dadurch kommt man zu den beiden Grenzen

$$\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^{M+1}\cdot\frac{G}{1-\frac{\rho}{R}}\qquad\qquad \Big(\frac{r}{\rho}\Big)^N\cdot\frac{G}{\frac{\rho}{r}-1}\ ,$$

unter denen die absoluten Werte der zwei Integrals jedenfalls liegen. Aus $R>\rho>r$ sieht man, daß [S.205]
diese Grenzen durch hohes positives M resp. N immer der Null beliebig nahe zu bringen sind, auch wenn R und r recht nahe an ρ liegen. Die beiden Integrale von $\frac{\Phi(w)}{w-u}$ für die Strecken $\overline{\beta\gamma}$ und $\overline{\delta\alpha}$ (Figur a.S.197) werden mit der Länge $R{-}r$ dieser Strecken zu Null, weil die Funktion unter dem Integralzeichen gewiß endlich bleibt, falls der Punkt u nicht an der Grenze des Flächenstücks liegt. So kann man durch Annäherung von R u. r an ρ die beiden Integrale in der dritten Zeile oben a.S.203 zusammengenommen ihrem absoluten Betrage nach noch unter eine beliebig kleine
Größe $\frac{1}{2}\omega$ bringen und dann für diese Werte von R u. r durch hinreichend hohes M u. N die [S.206]
in der zweiten Zeile von S.203 stehenden Integrale zusammen absolut genommen ebenfalls $<\frac{1}{2}\omega$ machen. Dann unterscheidet sich $\Phi(u)$ von

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\Big\{\ \sum_{0,M}^{m}u^m\int\limits_{\alpha}^{\beta}\Phi(w)w^{-m-1}dw+\sum_{1,N}^{n}u^{-n}\int\limits_{\delta}^{\gamma}\Phi(w)w^{n-1}dw\ \Big\}$$

um eine Größe, deren absoluter Betrag kleiner als ω ist. Man kommt so im Grenzfall zu

$$\Phi(u)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\sum_{-\infty,\infty}^{k}u^k\int\Phi(w)w^{-k-1}dw\ ,$$

wo der Integrationsweg durch $w=\rho\mathrm{e}^{i\theta}$ gegeben ist, wo ρ der absolute Wert von u ist und wo θ von 0 bis 2π geht. $w=\rho\mathrm{e}^{i\theta}$, $\frac{dw}{w}=\pi i\,dz$, $u=\mathrm{e}^{\xi\pi i}$, giebt

$$\Phi(\mathrm{e}^{\xi\pi i})=\varphi(\xi)=\frac{1}{2}\cdot\sum_{-\infty,\infty}^{k}\mathrm{e}^{k\xi\pi i}\int\varphi(z)\mathrm{e}^{-kz\pi i}\,dz\ ,$$

wo der mit i multiplizierte Teil von $\xi\pi i$ zwischen 0 und 2π, d.h. der reelle Teil von ξ zwischen
0 und $+2$ — mit Ausschluß dieser Grenzen — liegt und wo bei der imaginäre Teil von z constant [S.207]
gleich dem von ξ bleibt, während der reelle Teil von z von 0 bis $+2$ geht.

Diese Formel steht schon a.S.199 unten [71]; reelles ξ $(0<\xi<2)$ giebt dann nach S.194 die schon bei Euler auftretende Summenformel. Die Summe ist nicht absolut convergent, die Reihenfolge der Glieder bei der Summation darf nicht geändert werden, aber es ist nicht notwendig, daß die Zahl der zu positivem Summationsindex k gehörigen Glieder u. die der zu negativen k gehörigen in der noch endlichen Summe gleich genommen wird; man darf vielmehr die Summation nach beiden Seiten der Reihe in ungleich starkem Maaße ins Unendliche fortsetzen, wie dies nach S.201, 202
(Anmerkung) für den speciellen Fall $\xi=+1$ unittelbar klar ist. [72] Auf S.163 ff wurde das Integral [S.208]
$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)\,dz}{z-\eta}$ für $f(z)=\frac{\mathrm{e}^{\xi z\pi i}}{\mathrm{e}^{2z\pi i}-1}$ über einen sehr großen Kreis bestimmt, und dadurch kam man zu

[71] „Funktionentheorie I“ Anfang XV S.133–139 ist auch wichtig.

[72] Direkter Convergenzbeweis für solche Summationsart findet sich S.214–221.

einer Partialbruchreihe für $f(\eta)$. Man kann auch statt des Kreises ein Rechteck mit zu den Axen parallelen Seiten benutzen. Damit ist die Möglichkeit gegeben, die zur imaginären Axe parallelen Seiten in ungleichem Maaße ins Unendliche zu rücken, indem man etwa das Rechteck mit dem Eckpunkten $z = x + yi = -N' - \frac{1}{2} - ci,\ +N'' + \frac{1}{2} - ci,\ +N'' + \frac{1}{2} + ci,\ -N' - \frac{1}{2} + bi$ betrachtet, wo N' u. N'' ganze Zahlen sind u. c irgend eine reelle positive Größe. Das Gebiet umschließt die Unendlichkeitpunkte $z = n$ für $-N' \leq n \leq +N''$ der Funktion $f(z)$ und es umschließe auch den Punkt η. Dann folgt [S.209]

$$f(\eta) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{-N',N''}^{n} \frac{\mathrm{e}^{n\xi\pi i}}{n - \eta}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-N'-\frac{1}{2}}^{N''+\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{e}^{\xi x\pi i + \xi c\pi}\, dx}{(\mathrm{e}^{2x\pi i + 2c\pi} - 1)(x - ci - \eta)} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-N'-\frac{1}{2}}^{N''+\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{e}^{\xi x\pi i - \xi c\pi}\, dx}{(\mathrm{e}^{2x\pi i - 2c\pi} - 1)(x + ci - \eta)}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-c}^{c} \frac{\mathrm{e}^{\xi(N''+\frac{1}{2})\pi i + \xi y\pi}\, i\, dy}{(\mathrm{e}^{2(N''+\frac{1}{2})\pi i - 2y\pi} - 1)(N'' + \frac{1}{2} + iy - \eta)} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-c}^{c} \frac{\mathrm{e}^{xi(N'+\frac{1}{2})\pi i - \xi y\pi}\, i\, dy}{(\mathrm{e}^{-2(N'+\frac{1}{2})\pi i - 2y\pi} - 1)(-N' - \frac{1}{2} + iy - \eta)}$$

Wegen $0 < \xi < 2$ übersieht man, daß die beiden Integrale mit der Integrationsvariablen x bei fixiertem N' u, N'' durch wachsendes c beliebig klein werden, während die zwei übrigen Integrale bei fixiertem c durch hohes N' resp. N'' beliebig klein zu machen sind. Wenn man also zeigen kann, daß die ersten beiden Integrale durch ein und dasselbe hinreichend große c bei jedem beliebig hohen N' u. N'' den absoluten Werten nach kleiner zu machen sind, als eine beliebig kleine Größe [S.210] $\omega/4$, also beide zusammen absolut genommen $< \omega/2$, so wird man nun für dieses ω und c die letzten beiden Integrale jedes für sich absolut genommen dadurch unter $\omega/4$ bringen können, daß man N' u. N'' hinreichend groß wählt. Und dann ist der absolute Wert der ganzen rechten Seite in der Gleichung oben a.v.S. kleiner als ω, oder es entsteht

$$2\pi i\, \frac{\mathrm{e}^{\xi\eta\pi i}}{\mathrm{e}^{2\eta\pi i} - 1} = \lim \sum_{-N'+N''}^{n} \frac{\mathrm{e}^{n\xi\pi i}}{\eta - n}\,.$$

wo N' u. N'' unabhängig von einander unendlich werden dürfen.

Der Nachweis also, daß die Integrale

$$\int\limits_{-N'-\frac{1}{2}}^{N''+\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{e}^{\xi x\pi i + \xi c\pi}\, dx}{(\mathrm{e}^{2x\pi i + 2c\pi} - 1)(x - ci - \eta)}, \qquad \int\limits_{-N'-\frac{1}{2}}^{N''+\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{e}^{\xi x\pi i - \xi c\pi}\, dx}{(\mathrm{e}^{2x\pi i - 2c\pi} - 1)(x + ci - \eta)}$$

für jede noch so hohen Werte von N' u. N'' durch ein von diesen Größen N', N'' ganz unabhängiges großes c sich beliebig klein machen läßt, hängt mit Convergenzuntersuchungen zusammen. Daß [S.211] keine absolute Convergenz vorliegt, ist klar. Bei reellen Funktionen mit Zeichenwechseln setzt man die bis ∞ genommenen Integrale oft in Beziehung zu unendlichen Reihen; so läßt sich auch hier verfahren. Man hat

$$\int\limits_{-N'-\frac{1}{2}}^{N''+\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{e}^{\xi x\pi i + \xi c\pi}\, dx}{(\mathrm{e}^{2x\pi i + 2c\pi} - 1)(x - ci - \eta)} = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{e}^{\xi x'\pi i - (2-\xi)c\pi}}{\mathrm{e}^{2x'\pi i} - \mathrm{e}^{2c\pi}} \sum_{-N',N''}^{n} \frac{\mathrm{e}^{n\xi\pi i}}{n + x' - ci - \eta}\, dx'$$

und

$$\int_{-N'-\frac{1}{2}}^{N''+\frac{1}{2}} \frac{e^{\xi x\pi i-\xi c\pi}\,dx}{(e^{2x\pi i-2c\pi}-1)(x+ci-\eta)} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{e^{\xi x'\pi i-\xi)c\pi}}{e^{2x'\pi i-2c\pi}-1} \sum_{-N',N''}^{n} \frac{e^{n\xi\pi i}}{n+x'+ci-\eta}\,dx'$$

(Dabei ist $x = n + x'$ gesetzt, wo $\frac{1}{2} \leq x' < \frac{1}{2}$ ist.) Wegen $0 < \xi < 2$ werden die Faktoren in den Zählern, $e^{-(2-\xi)c\pi}$ u. $e^{-\xi c\pi}$ zu Null für $c = +\infty$, die Größen $e^{2x'\pi i} - e^{-2c\pi}$ u. $e^{2x'\pi i-2c\pi} - 1$ in den Nennern bleiben endlich und von Null verschieden; falls also die Reihen für unendliches N' u. [S.212] N'' convergieren, so werden die ganzen Integrale durch hinreichend hohes c beliebeig klein, wie groß auch N' u. N'' (unabhängig von einander) gewählt sind.

Hiermit ist der Nachweis der Formel

$$f(\eta) = \frac{e^{\xi\eta\pi i}}{e^{2\eta\pi i}-1} = \frac{1}{2\pi i}\cdot\lim\sum_{-N',N''}^{n}\frac{e^{n\xi\pi i}}{\eta-n}\,.$$

im wesentlichen auf den Convergenzbeweis der rechts auftretenden Summe reduciert, denn die a.v.S. auftretenden beiden Summen entsprechen nur einem veränderten η. Aus einem Convergenzbeweis der Reihe für beliebig unabhängig von einander unendlich werdende N' u. N'' kann man aber auch zu dieser allgemeineren Formel kommen aus der etwas specielleren von S.193, wo $N' = N''$ war. [Und endlich käme man aus der Convergenz der Summe [S.213]

$$\psi(\eta) = \sum_{-\infty,\infty}^{n}\frac{e^{n\xi\pi i}}{\eta-n}\,.$$

zu $\psi(\eta+1) = e^{\xi\pi i}\psi(eta)$, und diese Periodeneigenschaft hat auch $\frac{e^{(\xi-1)\eta}}{sin\pi\eta}$, was mit $\psi(\eta)$ alle Unendlichkeitspunkte im Endlichen gemein hat. Residuenbestimmung zeigt, daß $\psi(\eta) - \pi\cdot\frac{e^{(\xi-1)\eta\pi i}}{sin\pi\eta} = \psi(\eta) - 2\pi i\cdot\frac{e^{\xi\eta\pi i}}{e^{2\eta\pi i}-1}$ eine ganze transcendente Funktion ist, die bei Änderung von η um eine ganze Zahl $+h$ den Faktor $e^{h\xi\pi i}$ annimmt, dessen absoluter Wert $+1$ ist wegen reellem ξ. Wenn also die Funktion im Streifen der η-Ebene, wo der reelle Teil des η zwischen 0 u. $+1$ liegt, nicht unendlich wird, so wird sie nirgends unendlich u. ist eine Constante, u. zwar 0, falls sie im Unendlichen Null ist. Und das läßt sich in der That nachweisen. Damit sind die Grundzüge einer neuen Beweisart gegeben [73].]

— Was nun den Nachweis betrifft, daß die Reihe $\lim\sum_{-N',N''}^{n}\frac{e^{n\xi\pi i}}{\eta-n}$ für unabhängig von einan- [S.214] der unendlich werdendes N' u. N'' einen bestimmten Grenzwert hat, d.h. daß sowohl die Reihe, wo n auf $0, 1, 2, 3 \ldots$ als auch die, wo n auf $-1, -2, -\cdots$ sich bezieht, convergent ist — aber nur bedingt convergent — so kommt man durch $e^{n\xi\pi i} = \cos n\xi\pi + i\sin n\xi\pi$ zu Fourier'schen Reihen mit Coefficienten, die mit steigendem Index gegen Null abnehmen.

In Thomae's „elementarer Theorie der analytischen Funktionen" findet sich nun in §98 (S.73) der Satz:

Sind $a_0, a_1 \ldots a_n \ldots$ von bestimmtem n ab niemals zunehmende positive Zahlen und ist $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$, so sind

$$\frac{1}{2}a_0 + a_1\cos\vartheta + a_2\cos 2\vartheta + \ldots + a_n\cos n\vartheta + \ldots$$

und [S.215]

$$a_1\sin\vartheta + a_2\sin 2\vartheta + \ldots + a_n\sin n\vartheta + \ldots$$

[73]Siehe auch S.218, 219 u. 281–183.

immer convergent, solange ϑ nicht 0 oder ein Vielfaches von 2π ist; in diesem Ausnahmefall kann die erste Reihe divergieren [74]. Dieser auch sonst wichtige Satz wird hier benutzt.

$$\frac{1}{\eta - n} = \frac{1}{\eta_1 + i\eta_2 - n} = \frac{\eta_1 - n - i\eta_2}{(\eta_1 + i\eta_2 - n)(\eta_1 - i\eta_2 - n)}$$

ist gleich

$$\frac{\eta_1 - n}{(\eta_1 - n)^2 + \eta_2^2} - i\frac{\eta_2}{(\eta_1 - n)^2 + \eta_2^2}\,,$$

und sowohl der reelle, als der mit i multiplizierte Teil hat die Eigenschaft, mit wachsendem positiven oder gegen $-\infty$ abnehmendem negativen n sich der Null zu nähern und dabei von bestimmten n ab ein und dasselbe Zeichen zu besitzen. Es convergieren deshalb die Summen [S.216]

$$\sum_{0,\infty}^{n} \frac{\eta_1 - n}{(\eta_1 - n)^2 + \eta_2^2} \cdot \cos n\xi\pi, \quad \sum_{0,\infty}^{n} \frac{\eta_1 - n}{(\eta_1 - n)^2 + \eta_2^2} \cdot \sin n\xi\pi,$$

$$\sum_{0,\infty}^{n} \frac{\eta_2}{(\eta_1 - n)^2 + \eta_2^2} \cdot \cos n\xi\pi, \quad \sum_{0,\infty}^{n} \frac{\eta_2}{(\eta_1 - n)^2 + \eta_2^2} \cdot \sin n\xi\pi$$

und ebenso die entsprechenden Summen, wo n von -1 bis $-\infty$ geht, sobald nur ξ nicht 0 oder ein Vielfaches von 2 ist. Zu beachten ist dabei noch, daß der imaginäre Teil $i\eta_2$ von η auch sehr groß werden darf, ohne die Convergenz zu stören, weil hierdurch die Coeffizienten in den oben stehenden trigonometrischen Reihen verkleinert werden (wenn man vom Vorzeichen absieht). Das Resultat ist demnach die (bedingte) Convergenz von

$$\sum_{0,\infty}^{n} \frac{e^{n\xi\pi i}}{\eta - n} \quad \text{und} \quad \sum_{-1,-\infty}^{n} \frac{e^{n\xi\pi i}}{\eta - n}$$

bei jedem complexen η, soweit es nicht reell ganzzahlig ist, unter der Voraussetzung, daß ξ reell, nicht 0 und kein Vielfaches von 2 ist. [S.217]

In den Integralen auf S.211 sind daher die beiden Summen

$$\sum_{-N',N''}^{n} \frac{e^{n\xi\pi i}}{n + x' \mp ci - \eta}$$

bei beliebig hohen N' u. N'' endliche Größen auch, wenn c mehr und mehr wächst; es existieren für die absoluten Beträge der beiden Summen gewiß obere Grenzen, die unabhängig von N', N'' und c sind. Die Faktoren, mit denen diese Summen unter den Integralzeichen multipliziert sind, nehmen (wie dort gezeigt ist) mit wachsendem c gegen die Grenze 0 ab. Und die Schlüsse von S.209–210 lehren dann, daß man bei beliebig klein vorgeschriebenem ω durch hohes c die ersten beiden Integrale auf der rechten Seite der Formel oben a.S.209 zusammen absolut genommen unter $\frac{\omega}{2}$ bringen kann, unabhängig von N' und N'', und daß man dann duch hohes N' u. N'' bei dem einmal bestimmten c die zwei übrigen Integrale ebenfalls zusammen absolut genommen unter $\frac{\omega}{2}$ [S.218]

[74] Man findet
$\{\frac{1}{2}a_0 + a_1\cos\vartheta + a_2\cos 2\vartheta + \ldots + a_n\cos n\vartheta\}\cdot 2\sin\frac{\vartheta}{2} = (a_0 - a_1)\sin\frac{\vartheta}{2} + (a_1 - a_2)\sin\frac{3\vartheta}{2} + \ldots + (a_{n-1} - a_n)\sin\frac{(2n-1)\vartheta}{2} + a_n\sin\frac{(2n+1)\vartheta}{2}$ und
$\{a_1\sin\vartheta + a_2\sin 2\vartheta + \ldots + a_n\sin n\vartheta\}\cdot 2\sin\frac{\vartheta}{2} = +a_1\cos\frac{\vartheta}{2} - (a_1 - a_2)\cos\frac{3\vartheta}{2} - \ldots - (a_{n-1} - a_n)\cos\frac{(2n-1)\vartheta}{2} - a_n\cos\frac{(2n+1)\vartheta}{2}$ und
$(a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots$ ist eine (absolut) convergente Reihe mit lauter positiven Gliedern, etc.

bringen kann, so daß die ganze rechte Seite der Gleichung oben a.S.209 absolut genommen unter ω liegt. Es folgt

$$\frac{e^{\xi\eta\pi i}}{e^{2\eta\pi i}-1} = \frac{1}{2\pi i}\cdot\lim\sum_{-N',N''}^{n}\frac{e^{n\xi\pi i}}{\eta-n}\;.=\frac{1}{2\pi i}\cdot\lim\sum_{-\infty,\infty}^{n}\frac{e^{n\xi\pi i}}{\eta-n}$$

für reelles ξ, das über 0 und unter 2 liegt, und für beliebiges i.a. complexes η mit Ausnahme ganzzahliger Werte, wofür beide Seiten unendlich werden.

Auf S.212, 213 ist noch auf eine andere Beweisart der Formel hingewiesen [75], welche einen Convergenznachweis der rechts stehenden Summe voraussetzt; Gleichförmigkeit der Convergenz für ein gewisses Gebiet der η-Ebene wird leicht einzusehen sein und der Satz über den Funktionscharakter einer gleichmäßig convergenten Summe ist noch nötig. [Vgl. „Funktionentheorie I“ Anhang S.168–173.] [S.219]

Was den Convergenzbeweis von $\lim\sum_{-N',N''}^{n}\frac{e^{n\xi\pi i}}{\eta-n}$ betrifft, so kann man die Betrachtungen von S.214–217 kürzer so fassen:

$$\Big(\sum_{-N',N''}^{n}\frac{e^{n\xi\pi i}}{\eta-n}\Big)\cdot\big(e^{\frac{1}{2}\xi\pi i}-e^{-\frac{1}{2}\xi\pi i}\big)=\frac{e^{(N''+\frac{1}{2})\xi\pi i}}{\eta-N''}-\frac{e^{-(N'+\frac{1}{2})\xi\pi i}}{\eta+N'}+\sum_{-N',N''-1}^{n}\Big(\frac{1}{\eta-n}-\frac{1}{\eta-n-1}\Big)e^{(n+\frac{1}{2})\xi\pi i}$$

Wegen $\frac{1}{\eta-n}-\frac{1}{\eta-n-1}=\frac{-1}{(\eta-n)(\eta-n-1)}=\frac{-1}{n^2+n(1-2\eta)+\eta^2-\eta}$ hat $\sum_{-N',N''}^{n}\left|\frac{1}{\eta-n}-\frac{1}{\eta-n-1}\right|$ einen endlichen Grenzwert, wenn N' u. N'' unabhängig von einander irgendwie ins Unendliche wachsen; $e^{(n+\frac{1}{2})\xi\pi i}$ hat den absoluten Wert 1 bei reellem ξ und $\sum_{-N',N''-1}^{n}(\frac{1}{\eta-n}-\frac{1}{\eta-n-1})e^{(n+\frac{1}{2})\xi\pi i}$ wird also im Grenzfall für unabhängig von einander unendliche werdendes N' u. N'' zu einer absolut convergenten Summe, und da die beiden Glieder, welche Mitte voriger Seite im Ausdruck für [S.220] $(\sum_{-N',N''}^{n}\frac{e^{n\xi\pi i}}{\eta-n})\cdot(e^{\frac{1}{2}\xi\pi i}-e^{-\frac{1}{2}\xi\pi i})$ noch vorkommen, im Grenzfall verschwinden, so hat die eben genannte Größe einen bestimmten Grenzwert für $N'=\infty, N''=\infty$. Von $\sum_{-N',N''}^{n}\frac{e^{n\xi\pi i}}{\eta-n}$ gilt dasselbe, solange $e^{\frac{1}{2}\xi\pi i}-e^{-\frac{1}{2}\xi\pi i}$ nicht 0 ist, d.h. solange das reelle ξ nicht 0 oder ein Vielfaches von 2 ist.

[In diesem Ausnahmefall ist leicht zu sehen, daß ein bestimmter Grenzwert herauskommt, wenn N' u. N'' so ins Unendliche wachsen, daß ihre Differenz 0 oder eine endliche Zahl ist. Bleibt nur das Verhältnis $N':N''$ endlich, aber von 1 verschieden, so kann ein anderer Grenzwert entstehen, bleibt aber das Verhältnis nicht einmal endlich, so entsteht sicher kein endlicher Grenzwert mehr [76] .]

Das Resultat ist daher wieder die Existenz eines bestimmten Grenzwertes von $\sum_{-N',N''}^{n}\frac{e^{n\xi\pi i}}{\eta-n}$ [S.221] für unabhängig von einander unendlich werdendes N' u. N'', sobald das reelle ξ nicht 0 oder ein Vielfaches von 2 ist. Die Convergenz der im Grenzfall entstehenden unendlichen Reihe $\sum_{-\infty,\infty}^{n}\frac{e^{n\xi\pi i}}{\eta-n}$ ist immer nur eine bedingte; andere Anordnung der Glieder kann i.a. zu einer anderen Summe führen.

[75] Nähere S.281

[76] Ein ähnliches Verhalten bei einem bedingt convergentem Produkt s. Thomae §126 (S.96, 97).

[S.221]

Anhang V
Die Differentialgleichung von $\lim\limits_{N=\infty}\lim\limits_{M=\infty}\sum\limits_{-M,M}^{m}\sum\limits_{-N,N}^{n}\frac{1}{(u+mv+nw)^2}$ (zu S.78)

Kronecker deutete in der Vorlesung an, daß man die Differentialgleichung von

$$f_2(u,v,w)=\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-M,M}^{m}\sum_{-N,N}^{n}\frac{1}{(u+mv+nw)^2}$$

aus rein funktionentheoretischen Betrachtungen, wie die Cauchy'schen Integralsätze sie ermöglichen, ableiten kann, im Gegensatz zu den rein algebraischen Umformungen Eisenstein's (Crelle Bd. [S.222] 35, S.221–225). Die Betrachtung ist ganz analog zum entsprechenden Verfahren bei $\wp(u)$ a.S.42–43 des Heftes über die σ- und $\wp$-Funktion.

$f_2(u,v,w)$ ist gerade Funktion von u mit den Unendlichkeitsstellen 2. Ordnung $u=gv+hw$, wo g,h ganze Zahlen sind, u. mit den beiden Perioden v u. w (S.39 oben). $f_2'(u)$ ist ungerade Funktion mit denselben Perioden u. Null in $\frac{v}{2},\frac{w}{2},\frac{v+w}{2}$, weil sie dort gewiß nicht unendlich ist, und weil die Größen je eines der Paare $f_2'(-\frac{v}{2})$ u. $f_2'(+\frac{v}{2})$, $f_2'(-\frac{w}{2})$ u. $f_2'(+\frac{w}{2})$, $f_2'(-\frac{v+w}{2})$ u. $f_2'(+\frac{v+w}{2})$ nach der Periodizität gleich u. nach $f_2'(-u)=-f_2'(u)$ entgegengesetzt sind. Diese 3 Nullstellen sind von erster Ordnung, da $f_2'(u)$ im Periodenparallelogramm nur eine dreifache Unendlichkeitsstelle hat. Die Taylor'sche Entwicklung zeigt dann, daß $f_2(u)-f_2(\frac{v}{2})$ in $u=\frac{v}{2}$, [S.223] $f_2(u)-f_2(\frac{w}{2})$ in $u=\frac{w}{2}$, u. $f_2(u)-f_2(\frac{v+w}{2})$ in $u=\frac{v+w}{2}$ in zweiter Ordnung 0 sind (weitere Nullstellen kommen dann nicht vor, von solchen abgesehen, die sich nur um Perioden unterscheiden). Man erkennt dann leicht, daß $(f_2'(u))^2$ und $(f_2(u)-f_2(\frac{v}{2}))\cdot(f_2(u)-f_2(\frac{w}{2}))\cdot(f_2(u)-f_2(\frac{v+w}{2}))$ gemeinsame Unendlichkeits- und Nullstellen haben und dabei auch gemeinsame Ordungen des unendlich Werdens oder Verschwindens. Der Quotient ist nirgends unendlich im Periodenparallelogramm, d.h. überhaupt nirgends unendlich, also constant. Um $u=0$ hat nun $f_2(u)$ die Entwicklung

$$\frac{1}{u^2}+A_0+A_1u^2+A_2u^4+\dots\ ,$$

$f_2'(u)$ die Entwicklung

$$\frac{-2}{u^3}+2A_0+4A_1u^2+A_2u^4+\dots\ ,$$

daraus folgt leicht

$$(f_2'(u))^2=4\cdot(f_2(u)-f_2(\tfrac{v}{2}))\cdot(f_2(u)-f_2(\tfrac{w}{2}))\cdot(f_2(u)-f_2(\tfrac{v+w}{2}))\ .$$

Die Gleichung entspricht völlig der für $\wp(u)$ geltenden, nur ist in der rechts stehenden rationalen [S.224] Funktion dritten Grades von $f_2(u)$ nicht der Coefficient von $(f_2(u))^2$ gleich 0, weil zwar auch auf der linken Seite $\frac{1}{u^4}$ den Coefficienten 0 hat, rechts aber $\frac{1}{u^4}$ gar nicht

$$f_2(\tfrac{v}{2})+f_2(\tfrac{w}{2})+f_2(\tfrac{v+w}{2})$$

zum Coefficienten hat, sondern

$$3A_0-\left\{f_2(\tfrac{v}{2})+f_2(\tfrac{w}{2})+f_2(\tfrac{v+w}{2})\right\}\ ,$$

wo A_0 nicht 0 ist. [Denn

$$(f_2(u) - f_2(\tfrac{v}{2})) \cdot (f_2(u) - f_2(\tfrac{w}{2})) \cdot (f_2(u) - f_2(\tfrac{v+w}{2}))\ .$$

ist gleich

$$\Big\{\frac{1}{u^2}+(A_0-f_2(\tfrac{v}{2}))+A_1u^2+\dots\Big\}\Big\{\frac{1}{u^2}+(A_0-f_2(\tfrac{w}{2}))+A_1u^2+\dots\Big\}\Big\{\frac{1}{u^2}+(A_0-f_2(\tfrac{v+w}{2}))+A_1u^2+\dots\Big\}$$

$$= \frac{1}{u^6} + \big\{3A_3 - f_2(\tfrac{v}{2}) - f_2(\tfrac{w}{2}) - f_2(\tfrac{v+w}{2})\big\}\frac{1}{u^4} + \cdots \qquad]$$

Da A_0 den Wert

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-M,M}^{m}\sum_{-N,N}^{n}\frac{1}{(mv+nw)^2}$$

hat (S.46), wo bei der Summation $m=0, n=0$ auszuschließen ist, so hat man beiläufig

$$f_2(\tfrac{v}{2}) + f_2(\tfrac{w}{2}) + f_2(\tfrac{v+w}{2}) = 3\cdot\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-M,M}^{m}\sum_{-N,N}^{n}\frac{1}{(mv+nw)^2}\ .$$

Für die anderen Ausdrücke, welche bei Darstellung von

$$(f_2'(u))^2 = 4\cdot(f_2(u) - f_2(\tfrac{v}{2})) \cdot (f_2(u) - f_2(\tfrac{w}{2})) \cdot (f_2(u) - f_2(\tfrac{v+w}{2}))\ .$$

in der Form [S.225]

$$(f_2'(u))^2 = 4\cdot f_2^3(u) + a_1f_2^2(u) + a_2f_2(u) + a_3$$

auftreten, könnte man auch Ausdrücke finden.

Die Gleichung läßt sich auch so schreiben

$$f_2'(u) = 2\sqrt{(f_2(u) - f_2(\tfrac{v}{2})) \cdot (f_2(u) - f_2(\tfrac{w}{2})) \cdot (f_2(u) - f_2(\tfrac{v+w}{2}))}\ .$$

Setzt man

$$f_2(u)=z,\ f_2(\tfrac{v}{2})=\alpha_1,\ f_2(\tfrac{w}{2})=\alpha_2,\ f_2(\tfrac{v+w}{2})=\alpha_3,$$

so folgt

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{dz}{\sqrt{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_2)}}\ =\ du\ ,$$

und $z=f_2(u)$ ist demnach eine elliptische Funktion im engeren Sinn, eine elliptische Transcendente erster Gattung, die Inverse eines Integrals erster Gattung.

Aus $f_1(u) = -\int f_2(u, du$ folgt weiter

$$f_1(u) = -\tfrac{1}{2}\cdot\int\frac{z\cdot dz}{\sqrt{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_2)}}\ ,$$

$f_1(u)$ ist eine Transcendente zweiter Gattung.

Durch fortgesetzte Differentiationen kann man aus der Gleichung oben auf dieser Seite neue Formeln ableiten. So wie diese erste Gleichung als algebraische Relation zwischen $f_3(u,v,w)$ und [S.226] $f_2(u,v,w)$ aufgefaßt werden kann, so geben die abgeleiteten Formeln algebraische Beziehungen zwischen verschiedenen Funktionen $f_r(u,v,w)$, $(r=2,3\dots)$ und man kann schließlich jedes $f_r(u,v,w)$ für $r>3$ in rationaler Weise durch $f_2(u,v,w)$ und $f_3(u,v,w)$ darstellen (genau wie bei $\wp(u)$ jede höhere Derivierte als die erste rational durch $\wp(u)$ u. $\wp'(u)$ darstellbar ist). Der Beweis bietet keine Schwierigkeiten — auch sind die Sätze 18 u. 19 in dem von den doppelt periodischen Funktionen handelnden Teil des Bobek'schen Buches über elliptische Funktionen (S.82–86) zu vergleichen.

Eisenstein leitete [77] algebraische Beziehungen zwischen den verschiedenen $f_r(u,v,w)$ (von $r = 2$ an) direkt durch algebraische Umformungen her. Diese Behandlung ist einfacher u. läßt [S.227]
mehr funktionentheoretische Principien in den Vordergrund treten. Ähnlich verhält es sich mit der Kronecker'schen Ableitung eines Additionstheorems für

$$\lim_{N=\infty} \sum_{-N,N}^{n} \frac{1}{z-n}$$

im Anhang von „Funktionentheorie I" S.339-351. Kronecker leitete dann die Differentialgleichung durch einen Grenzübergang her. Ihre Aufstellung gelingt jedoch auch direkt mit denselben Hülfsmitteln, s. S.352–55 a.a.O.

[77] Crelle's Journal Bd.35 S.221-226.

Anhang VI
Über ganzzahliges σ_0 und τ_0 bei der Funktion $\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$ (zu S.111–144)

Bisher wurden σ_0 und τ_0 als nicht ganzzahlig vorausgesetzt, und dann ergab sich für

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w) = \frac{e^{2\tau_0 \frac{u}{v}\pi i}}{v} \cdot \frac{\vartheta'(0, \frac{\varepsilon w}{v}) \cdot \vartheta(\frac{\varepsilon u_0 + v}{v}, \frac{\varepsilon w}{v})}{\vartheta(\frac{\varepsilon u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}) \cdot \vartheta(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v})}$$

die Entwicklung

$$\lim \sum_{-M-h', M+h''}^{m} \sum_{-N-k', N+k''}^{n} \frac{e^{+2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{u + mv + nw} ,$$

wo M vor oder nach N unendlich wurde [78]. S.117–121 lassen klar erkennen, wie bei ganzzahligen [S.228] σ_0 , aber gebrochenem τ_0 der eine Grenzübergang $\lim_{N=\infty}(\lim_{M=\infty})$ zulässig ist, und ebenso bei ganzzahligen τ_0 und gebrochenem σ_0 der eine Grenzübergang $\lim_{M=\infty}(\lim_{N=\infty})$. Aber es läßt sich aus den früheren Untersuchungen nichts drüber schließen, ob nicht in jedem dieser Ausnahmefälle auch noch die andere Art des Grenzübergangs erlaubt ist. Die dort benutzte Euler'sche Summenformel

$$\lim_{K=\infty} \sum_{-K,K}^{k} \frac{e^{-k\xi\pi i}}{\eta + k} = 2\pi i \cdot \frac{e^{+\xi\eta\pi i}}{e^{2\eta\pi i} - 1} ,$$

wo das reelle ξ größer als 0 u. kleiner als 2 war, schloß gerade diese anderen Grenzübergänge aus. Zur Behandlung dieser Frage braucht man die die Formel [S.229]

$$\lim_{K=\infty} \sum_{-K,K}^{k} \frac{1}{\eta + k} = \pi \cdot \operatorname{ctg} \pi\eta .$$

Die Untersuchung ist sehr wichtig für die Entwicklung der doppelt periodischen Funktionen in zweifach unendliche Reihen rationaler Partialbrüche.

Es braucht nur der Fall behandelt zu werden, wo τ_0 ganzzahlig ist, σ_0 gebrochen ist und M vor N unendlich wird [79].

Die beiden Summen unten auf S.117 verschwinden wieder, die auf S.118 stehenden werden wegen ganzem τ_0 zu

$$\sum_{-M,M-1}^{m} \frac{e^{2N\sigma_0\pi i}}{z_0 + mv + yv - Nw - u} \quad \text{und} \quad \sum_{-M,M-1}^{m} \frac{e^{-2N\sigma_0\pi i}}{z_0 + mv + yv + Nw - u} ,$$

haben demnach für $M = \infty$ die Werte [S.230]

$$\frac{\pi i}{v} e^{2N\sigma_0\pi i} \cdot \frac{\alpha\beta^{-N} + \alpha^{-1}\beta^{N}}{\alpha\beta^{-N} - \alpha^{-1}\beta^{N}} \quad \text{und} \quad \frac{\pi i}{v} e^{-2N\sigma_0\pi i} \cdot \frac{\alpha\beta^{N} + \alpha^{-1}\beta^{-N}}{\alpha\beta^{N} - \alpha^{-1}\beta^{-N}} ,$$

[78] S.237 ff behandelt gleichzeitig wachsendes M u. N .

[79] Gleichzeitig sind σ_0 und τ_0 nicht 0 , weil sonst im Nenner von $\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$ der Ausdruck $\vartheta(\frac{\varepsilon u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v})$ verschwände.

wenn für der Augenblick zur Abkürzung gesetzt ist

$$\mathrm{e}^{\frac{z_0+yv-u}{v}\pi i}=\alpha, \qquad \mathrm{e}^{\frac{w}{v}\pi i}=\beta\ .$$

Für positiven imaginären Teil von $\frac{w}{v}$ ($\varepsilon>0$) hat man $|\beta|<1$, für negativen imaginären Teil (d.h. $\varepsilon<0$) hat man $|\beta|>1$. Die Brüche nähern sich deshalb für $\varepsilon>0$ bei wachsendem N den Werten $+1$ und -1 , für $\varepsilon<0$ den Werten -1 u. $+1$ an. Aber die Faktoren, mit denen die Brüche multipliziert sind, haben keine festen Grenzwerte, weil σ_0 keine ganze Zahl ist.

Die Integrale für die beiden Seiten des großen Parallelogramms, bei deren Umformung diese Summen auftraten (S.115, 116), verschwinden daher im Grenzfall nicht, noch nähern sie sich festen Grenzen. Es kommt aber nur auf die Differenz dieser Integrale an. Diese würde im Grenzfall [S.231] verschwinden, wenn von der Differenz der beiden Ausdrücke oben a.a.O. dies gälte. Diese Differenz ist aber

$$\begin{aligned}&\frac{\pi i}{v}\cdot\frac{\mathrm{e}^{+2N\sigma_0\pi i}(\alpha^2+\beta^{2N}-\beta^{-2N}-\alpha^{-2})-\mathrm{e}^{-2N\sigma_0\pi i}(\alpha^2-\beta^{2N}+\beta^{-2N}-\alpha^{-2})}{\alpha^2-\beta^{2N}-\beta^{-2N}+\alpha^{-2}}\\ =&\frac{\pi i}{v}\cdot\frac{(\alpha^2-\alpha^{-2})(\mathrm{e}^{+2N\sigma_0\pi i}-\mathrm{e}^{-2N\sigma_0\pi i})+(\beta^{2N}-\beta^{-2N})(\mathrm{e}^{+2N\sigma_0\pi i}+\mathrm{e}^{-2N\sigma_0\pi i})}{\alpha^2-\beta^{2N}-\beta^{-2N}+\alpha^{-2}}\ ,\end{aligned}$$

und weil σ_0 nicht ganzzahlig ist, verschwindet der ganze Bruch bei keinem Wert von σ_0 im Grenzfall $\lim_{N=\infty}$ und er nähert sich auch keiner festen Grenze an.

Daher kann die Summe mit dem allgemeinen Glied

$$\frac{\mathrm{e}^{+2(n\sigma_0-m\tau_0)\pi i}}{u+mv+nw}$$

und mit den Summationsgrenzen $-M,+M-1$ für m , $-N,+N-1$ für n (S.122) im Falle ganzzahligen τ_0 's sich bei $\lim_{N=\infty}(\lim_{M=\infty})$ niemals einer festen Grenze nähern.

Die Summe mit den Grenzen $-M,+M$ für m und $-N,+N$ für n ist aber wichtiger. Um zu [S.232] ihr zu kommen, hätte man nach S.122, 123 ein Parallelogramm mit den Ecken

$$z_0-(M+1)v-(N+1)w,\ z_0+Mv-(N+1)w,\ z_0+Mv+Nw,\ z_0-(M+1)v+Nw$$

benützen müssen, und man hätte statt der unten auf S.229 angeführten Summe die folgenden erhalten:

$$\sum_{-M-1,M-1}^{m}\frac{\mathrm{e}^{2(N+1)\sigma_0\pi i}}{z_0+mv+yv-(N+1)w-u} \quad\text{und}\quad \sum_{-M-1,M-1}^{m}\frac{\mathrm{e}^{-2N\sigma_0\pi i}}{z_0+mv+yv+Nw-u}\ .$$

Für $M=\infty$ haben sie die Werte

$$\frac{\pi i}{v}\mathrm{e}^{2(N+1)\sigma_0\pi i}\cdot\frac{\alpha\beta^{-N-1}+\alpha^{-1}\beta^{N+1}}{\alpha\beta^{-N-1}-\alpha^{-1}\beta^{N+1}} \quad\text{und}\quad \frac{\pi i}{v}\mathrm{e}^{-2N\sigma_0\pi i}\cdot\frac{\alpha\beta^{N}+\alpha^{-1}\beta^{-N}}{\alpha\beta^{N}-\alpha^{-1}\beta^{-N}}\ ,$$

unter Benutzung der Abkürzungen von S.230. Die Differenz läßt sich in die Form bringen

$$\frac{\pi i}{v}\cdot\frac{(\alpha^2\beta^{-1}-\alpha^{-2}\beta)(\mathrm{e}^{+2(N+1)\sigma_0\pi i}-\mathrm{e}^{-2N\sigma_0\pi i})+(\beta^{2N+1}-\beta^{-2N-1})(\mathrm{e}^{+2(N+1)\sigma_0\pi i}+\mathrm{e}^{-2N\sigma_0\pi i})}{\alpha^2\beta^{-1}-\beta^{2N+1}-\beta^{-2N-1}+\alpha^{-2}\beta}\ .$$

Sie verschwindet bei unbegrenzt wachsendem N , sobald $\mathrm{e}^{+2(N+1)\sigma_0\pi i}+\mathrm{e}^{-2N\sigma_0\pi i}$ Null ist, d.h. für $\sigma_0=\frac{1}{2}$ [80]; sobald aber dieser Wert nicht 0 ist, verschwindet der Ausdruck nicht im Grenzfall, [S.233]

[80] oder allgemeiner $\sigma_0=k+\frac{1}{2}$, wo k ganzzahlig ist.

noch nähert er sich einem festen endlichen Wert an.

Der Fall mit ganzzahligem σ_0 und gebrochenem τ_0, wobei erst N, dann M unendlich werden, ist ganz entsprechend zu behandeln.

Die Untersuchung von S.111–129 ist demnach so zu vervollständigen:

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w) = \frac{\mathrm{e}^{2\tau_0 \frac{u}{v}\pi i}}{v} \cdot \frac{\vartheta'(0, \frac{\varepsilon w}{v}) \cdot \vartheta(\frac{\varepsilon u_0 + v}{v}, \frac{\varepsilon w}{v})}{\vartheta(\frac{\varepsilon u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}) \cdot \vartheta(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v})} \,.$$

(wobei $u_0 = \sigma_0 v + \tau_0 w$ ist und σ_0, τ_0 reell sind) ist eine im allgemeinen endliche Funktion von u, wenn σ_0 und τ_0 nicht beide ganzzahlig sind. Die Funktion erfüllt die Bedingung

$$f(u + sv + tw) = \mathrm{e}^{2(s\tau_0 - t\sigma_0)\pi i} \cdot f(u)$$

und ist in die folgende Partialbruchreihe entwickelbar: [S.234]

$$\lim \sum_{-M-h', M+h''}^{m} \sum_{-N-k', N+k''}^{n} \frac{\mathrm{e}^{+2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{u + mv + nw} \,,$$

wo M vor oder nach N unendlich werden darf und h', h'', h', k'' willkürliche feste ganze Zahlen sind, wenn σ_0 und τ_0 nicht ganzzahlig sind, wo aber im allgemeinen nur der Grenzübergang $\lim_{N=\infty}(\lim_{M=\infty})$ zulässig ist, wenn σ_0 ganzahlig ist, und nur der Grenübergang $\lim_{M=\infty}(\lim_{N=\infty})$, wenn τ_0 ganzahlig ist.

Ausnahmen gibt es nur zwei: Bei ganzzahligem σ_0 ist für $\tau_0 = \frac{1}{2}$ (oder $\frac{2g+1}{2}$) auch der Grenzübergang $\lim_{M=\infty}(\lim_{N=\infty})$ erlaubt, wenn man h' u. h'' gleich 0 nimmt [81], und bei ganzzahligem τ_0 ist für $\sigma_0 = \frac{1}{2}$ (oder $\frac{2g+1}{2}$) der Grenzübergang $\lim_{N=\infty}(\lim_{M=\infty})$ zulässig, wenn man k' u. k'' gleich 0 wählt.

Anwendung auf die Funktionen $sn(u), cn(u), dn(u)$ S.266 ff. u. in „Funktionentheorie I“ a. S.226–29.

[81] oder auch für $h' \equiv h''$ (mod 2) resp. $k' \equiv k''$ (mod 2)

Anhang VII

[S.235]

Auf S.111–129 war unter der Annahme, daß σ_0 u. τ_0 keine ganzen Zahlen sind, zu Umformungen die Summenformel

$$\lim_{k=\infty} \sum_{-K,K}^{k} \frac{\mathrm{e}^{-k\xi\pi i}}{\eta + k} = 2\pi i \cdot \frac{\mathrm{e}^{+\xi\eta\pi i}}{\mathrm{e}^{2\eta\pi i} - 1}$$

benutzt, die für $0 < \xi < 2$ gilt. Man könnte auch ohne weiteres k auf $-K - h', -K - h' + 1 \ldots + K + h''$ beziehen u. dann K gleich ∞ machen. Nach S.200–221 aber darf die Gleichung sogar in der Form

$$\lim_{K',K''=\infty} \sum_{-K',+K''}^{k} \frac{\mathrm{e}^{-k\xi\pi i}}{\eta + k} = 2\pi i \cdot \frac{\mathrm{e}^{+\xi\eta\pi i}}{\mathrm{e}^{2\eta\pi i} - 1}$$

benutzt werden, wo K' u. K'' zugleich (oder selbst nach eineinander) unendlich werden, so daß ihr Verhältnis sich nicht der Einheit zu nähern braucht.

Bei der Darstellung von $\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$ als Doppelsumme wurden zuerst alle Glieder

$$\frac{\mathrm{e}^{2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{u + mv + nw}$$

summiert, für welche die Punkte $u + mv + nw$ in einem gewissen Parallelogramm liegen u. dann [S.236] wurden die Seitenpaare des Parallelogramms nacheinander ins Unendliche gerückt (in beliebiger Reihenfolge, wenn σ_0 u. τ_0 nicht ganzzahlig sind, in einer ganz bestimmten Reihenfolge, wenn eine der Größen σ_0, τ_0 eine ganze Zahl ist). Früher wurde ausgesprochen, daß der Mittelpunkt des Parallelogramms beim Grenzübergang fest bleiben müsse; jetzt sieht man, daß dies nicht nötig ist.

Aber diese Verallgemeinerung des Summationsverfahrens in der Reihe für $\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$ ist von geringer Wichtigkeit, sie trägt zu keiner Vereinfachung der früheren Unteruchungen bei. Der nächste Abschnitt bietet weiteres über die Summationsarten, das Resultat findet sich S.251, 252.

Anhang VIII
Konvergenzuntersuchung und Eigenschaften der Reihe $\mathcal{S}er_\rho(u_0, u, v, w)$ (nach Kronecker)

Von S.111 an wurde

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w) = \frac{e^{2\tau_0 \frac{u}{v}\pi i}}{v} \cdot \frac{\vartheta'(0, \frac{\varepsilon w}{v}) \cdot \vartheta(\frac{\varepsilon u_0 + v}{v}, \frac{\varepsilon w}{v})}{\vartheta(\frac{\varepsilon u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}) \cdot \vartheta(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v})}$$

in die Doppelreihe

$$\lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{-M,M}^{m} \sum_{-N,N}^{n} \frac{e^{2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{u + mv + nw}$$

entwickelt für besondere Arten des Grenzübergangs. Die Convergenz der Reihe war aus der Existenz der Funktion u. dem ganzen Entwicklungsverfahren klar.

Man kann andererseits von der Reihe ausgehn und nach ihrer Convergenz und ihren Eigenschaften fragen.

Schon S.85 ist die Reihe für $\lim\limits_{N=\infty} (\lim\limits_{M=\infty})$ betrachtet u. umgeformt worden. Eine Convergenzprüfung fand da allerdings nicht statt, weil man die umgeformte Reihe nachher mit einer anderen vergleichen konnte, deren Convergenz aus ihrer Entwicklung klar war; aber sie wäre möglich gewesen an der oben a.S.88 stehenden einfachen Reihe [vgl. Kroneckers Abhandlung im Sitzungsbericht vom 30. Jan. 90, S.120 im ersten Band des Jahrgangs, S.72 des Separatabzugs.] [S.238]

Wichtig ist aber die Convergenzfrage bei dem Grenzübergang, wo M, N zugleich unendlich werden u. am einfachsten dabei gleich sind. Man betrachtet gleich die allgemeinere Reihe

$$\mathcal{S}er_\rho(u_0, u, v, w) = \lim_{M=\infty} \sum_{-M,M}^{m} \sum_{-M,M}^{n} \frac{e^{2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{(u + mv + nw)^{1+\rho}} \ .$$

Die Summe für noch endliches M bezieht sich auf alle Punkte m, n eines Quadrates mit der Mitte $m = 0, n = 0$. Man muß das Quadrat in vier Teile zerlegen u. jede der vier Teilsummen für sich behandeln. Dieselben sind von der Form [S.239]

$$\sum_{m,n} \frac{e^{2(\varepsilon_1 n\sigma_0 - \varepsilon_0 m\tau_0)\pi i}}{(u + \varepsilon_0 mv + \varepsilon_1 nw)^{1+\rho}}$$

mit den Summationsbedingungen

$$\begin{array}{llll}
1) & \varepsilon_0 = +1, \varepsilon_0 = +1: & m = 0, 1, 2 \dots M; & n = 0, 1, 2 \dots M \\
2) & \varepsilon_0 = +1, \varepsilon_0 = -1: & m = 0, 1, 2 \dots M; & n = 1, 2 \dots M \\
3) & \varepsilon_0 = -1, \varepsilon_0 = +1: & m = 1, 2 \dots M; & n = 0, 1, 2 \dots M \\
4) & \varepsilon_0 = -1, \varepsilon_0 = -1: & m = 1, 2 \dots M; & n = 1, 2 \dots M\ .
\end{array}$$

Die Summe

$$\sum_{m,n} \frac{e^{2(\varepsilon_1 n\sigma_0 - \varepsilon_0 m\tau_0)\pi i}}{(u + \varepsilon_0 mv + \varepsilon_1 nw)^{1+\rho}} \ ,$$

für ein bestimmtes ε_0, ε_1 und für

$$m = m_0, m_0+1, \ldots m_0+h-1, \qquad n = n_0, n_0+1, \ldots n_0+k-1$$

läßt sich durch ein Integral ausdrücken, sobald m_0, n_0 gewisse Bedingunen erfüllen, und daraus läßt sich ein Convergenzbeweis finden. (Kroneckers Mitteilung in der Sitzung vom 13. März 90, [S.240]
S.230 ff im ersten Teil des Jahrgangs, S.81 ff im Separatabzug.)

Man setzt $w = v(\varepsilon'\varphi + \varepsilon''\psi\, i)$, wo φ und ψ reell u. positiv [82], $\varepsilon', \varepsilon''$ aber entweder $+1$ od. -1 sind. [Da früher ε so eingeführt wurde, daß $\frac{\varepsilon w}{v}$ einen positiven imaginären Teil hatte (S.9), so ist ε'' mit ε identisch, es kommt aber darauf hier weniger an.] Bestimmt man jetzt a, b, c aus der für m, n identischen Formel

$$(u + \varepsilon_0 mv + \varepsilon_1 nw)(2\varepsilon_0\psi + (2\varepsilon'\varepsilon_0 - \varepsilon_1)\,\varepsilon''\varphi i) = v\,(am + bn + c)\;,$$

so sieht man, daß a u. b positiven reellen Teil haben; für $a = a_0 + a_1 i, b = b_0 + b_1 i, c = c_0 + c_1 i$ findet man nämlich $a_0 = 2\varepsilon_0^2\psi = 2\psi$ und $b_0 = \varepsilon_1\{\varepsilon'\varphi \cdot 2\varepsilon_0\psi + i^2\varepsilon''\psi(2\varepsilon'\varepsilon_0 - \varepsilon_1)\varepsilon''\varphi\} = \varphi\psi\{2\varepsilon_1\varepsilon'\varepsilon_0 - \varepsilon_1\varepsilon''^2(2\varepsilon'\varepsilon_0 - \varepsilon_1)\} = \varphi\psi$.

c wird von u abhängen, aber für einen Wert von u in einem bestimmten Bereich der u-Ebene [S.241]
hat c_0 jedenfalls eine endliche untere Grenze, u. deshalb ist die reelle Größe $a_0 m + b_0 n + c_0$ immer positiv zu machen durch hinreichend großes m oder n für jedes u des endlichen Gebiets. m_0 u. n_0 seien so bestimmt, daß der Wert $a_0 m_0 + b_0 n_0 + c_0$ positiv ist, dann gilt von $a_0 m + b_0 n + c_0$ dasselbe für $m \geq m_0, n \geq n_0$ und

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(am+bn+c)z} \cdot z^\rho\, dz$$

ist convergent. Man hat

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{e}^{2(\varepsilon_1 n\sigma_0 - \varepsilon_0 m\tau_0)\pi i}}{(u + \varepsilon_0 mv + \varepsilon_1 nw)^{1+\rho}} \\
&= \mathrm{e}^{2(\varepsilon_1 n\sigma_0 - \varepsilon_0 m\tau_0)\pi i} \cdot \left\{\frac{2\varepsilon_0\psi + (2\varepsilon'\varepsilon_0 - \varepsilon_1)\,\varepsilon''\varphi i}{v\,(am + bn + c)}\right\}^{1+\rho} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{2(\varepsilon_1 n\sigma_0 - \varepsilon_0 m\tau_0)\pi i} \cdot \left\{2\varepsilon_0\psi + (2\varepsilon'\varepsilon_0 - \varepsilon_1)\,\varepsilon''\varphi i\right\}^{1+\rho}}{v^{1+\rho} \cdot \Gamma(1+\rho)} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(am+bn+c)z} \cdot z^\rho\, dz \\
&= \frac{\left\{\,2\varepsilon_0\psi + (2\varepsilon'\varepsilon_0 - \varepsilon_1)\,\varepsilon''\varphi i\,\right\}^{1+\rho}}{v^{1+\rho} \cdot \Gamma(1+\rho)} \int_0^\infty \mathrm{e}^{m(-az - 2\varepsilon_0\tau_0\pi i) + n(-bz + 2\varepsilon_1\sigma_0\pi i) - cz} \cdot z^\rho\, dz\;.
\end{aligned}$$

Nun kann man die vor 2 Seiten angedeutete Summation nach m von m_0 bis $m_0 + h - 1$, nach n von n_0 bis $n_0 + k - 1$ unter dem Integralzeichen ausführen (nach $\sum_{m_0, m_0+h-1}^{m} x^m =$ [S.242]
$x^{m_0}(1 + x + \ldots + x^{h-1}) = x^{m_0}\frac{1-x^h}{1-x}$) u. findet

$$\begin{aligned}
&\sum_{m_0, m_0+h-1}^{m}\;\sum_{n_0, n_0+k-1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{2(\varepsilon_1 n\sigma_0 - \varepsilon_0 m\tau_0)\pi i}}{(u + \varepsilon_0 mv + \varepsilon_1 nw)^{1+\rho}} \\
&= A \cdot \int_0^\infty \mathrm{e}^{-m_0(az+xi) - n_0(bz+yi) - cz} \cdot \frac{1 - \mathrm{e}^{-h(az+xi)}}{1 - \mathrm{e}^{-(az+xi)}} \cdot \frac{1 - \mathrm{e}^{-k(bz+yi)}}{1 - \mathrm{e}^{-(bz+yi)}} \cdot z^\rho\, dz\;,
\end{aligned}$$

[82] ψ ist gewiß nicht 0 , φ könnte auch 0 sein; doch muß $\varphi = 0$ ausgeschlossen werden, damit b_0 nicht 0 wird. Das ist freilich eine störende Einschränkung. Vgl. S.245.

falls gesetzt ist

$$2\varepsilon_0\tau_0\pi i = +xi \qquad\qquad 2\varepsilon_1\sigma_0\pi i = -yi$$

$$A = \frac{\left\{\ 2\varepsilon_0\psi + (2\varepsilon'\varepsilon_0 - \varepsilon_1)\,\varepsilon''\varphi i\ \right\}^{1+\rho}}{v^{1+\rho}\cdot\Gamma(1+\rho)}\ .$$

Sind x u. y keine Vielfachen von 2π , d.h. sind σ_0 u. τ_0 keine ganzen Zahlen, so ist weder $az+xi$ noch $bz+yi$ gleich 0 oder einem Vielfachen von $2\pi i$ für irgend ein z des Integrationsintervalles. Denn für $z>0$ ist ein reeller Bestandteil vorhanden, der nicht 0 ist, und für $z=0$ reducieren sich die Größen auf xi u. yi , die nach Voraussetzung nicht durch $2\pi i$ teilbar sind. Für nicht [S.243] ganzzahliges σ_0 u. τ_0 sind deshalb $1-\mathrm{e}^{-(az+xi)}$ u. $1-\mathrm{e}^{-(bz+yi)}$ nicht 0 , wenn das reelle x von 0 an wächst, Da in $a=a_0+a_1i$ u. $b=b_0+b_1i$ die reellen Teile a_0 u. b_0 positiv sind, so nähern sich die Größen dem Wert $+1$ für $z=+\infty$. Es giebt dann eine endliche positive Zahl G [83] von solcher Beschaffenheit, daß $1-\mathrm{e}^{-(az+xi)}$ u. $1-\mathrm{e}^{-(bz+yi)}$ den absoluten Werten nach über $\frac{2}{G}$ liegen. Die im Zähler auftretenden Größen $1-\mathrm{e}^{-h(az+xi)}$ u. $1-\mathrm{e}^{-k(bz+yi)}$ liegen absolut genommen im Integrationsintervall immer unter $+2$, weil z.B. $|1-\mathrm{e}^{-h(az+xi)}|$ unter $1+|\mathrm{e}^{-h(az+xi)}|$ liegt und $-haz$ einen negativen reellen Teil hat. So hat man

$$\left|\frac{1-\mathrm{e}^{-h(az+xi)}}{1-\mathrm{e}^{-(az+xi)}}\cdot\frac{1-\mathrm{e}^{-k(bz+yi)}}{1-\mathrm{e}^{-(bz+yi)}}\right| \ \le\ G^2$$

für jedes reelle z von $z=0$ bis zu $z=+\infty$. Und dies ermöglicht den Nachweis, daß das oben auf [S.244] vorletzter Seite stehende Integral überhaupt Sinn hat, auch noch bei beliebig hohem h,k . Denn man hat

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^\infty \mathrm{e}^{-m_0(az+xi)-n_0(bz+yi)-cz}\cdot\frac{1-\mathrm{e}^{-h(az+xi)}}{1-\mathrm{e}^{-(az+xi)}}\cdot\frac{1-\mathrm{e}^{-k(bz+yi)}}{1-\mathrm{e}^{-(bz+yi)}}\cdot z^\rho\,dz\right|\\ &\le \int_0^\infty \mathrm{e}^{-m_0a_0z-n_0b_0-c_0z}\cdot G^2\cdot z^\rho\,dz\end{aligned}$$

und wegen $a_0m_0+b_0n_0+c_0>0$ (Voraussetzung auf S.241) ist dies ein convergentes Integral, eine bestimmte endliche Größe, u. zwar

$$G^2\cdot\frac{\Gamma(1+\rho)}{(a_0m_0+b_0n_0+c_0)^{1+\rho}}\ .$$

Hiermit ist für ein bestimmtes Wertepaar $\varepsilon_0,\varepsilon_1$ die Beziehung

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{m_0,m_0+h-1}^{m}\ \sum_{n_0,n_0+k-1}^{n}\frac{\mathrm{e}^{2(\varepsilon_1n\sigma_0-\varepsilon_0m\tau_0)\pi i}}{(u+\varepsilon_0mv+\varepsilon_1nw)^{1+\rho}}\right|\\ &\le\left|\frac{\left\{\ 2\varepsilon_0\psi+(2\varepsilon'\varepsilon_0-\varepsilon_1)\,\varepsilon''\varphi i\ \right\}^{1+\rho}}{v^{1+\rho}\cdot\Gamma(1+\rho)}\right|\cdot G^2\cdot\frac{\Gamma(1+\rho)}{(a_0m_0+b_0n_0+c_0)^{1+\rho}}\end{aligned}$$

gefunden. h u. k kommen rechts gar nicht vor, dürfen daher links beliebig groß, selbst unendlich [S.245] sein. a_0 u. b_0 waren positiv, u. m_0,n_0 waren so groß vorausgesetzt, daß $a_0m_0+b_0n_0+c_0>0$ war.

Die obere Grenze für den absoluten Wert von

$$\sum_{m_0,m_0+h-1}^{m}\ \sum_{n_0,n_0+k-1}^{n}\frac{\mathrm{e}^{2(\varepsilon_1n\sigma_0-\varepsilon_0m\tau_0)\pi i}}{(u+\varepsilon_0mv+\varepsilon_1nw)^{1+\rho}}$$

[83] Kronecker sucht in §2 (1890 I S.233–235, S.94–96 des Separatabzugs) einen Wert für G .

nähert sich nun der Null, wenn m_0 oder n_0 mehr u. mehr wächst [84], mögen dabei nun h u. k endlich oder unendlich sein.

Setzt man jetzt mit Kronecker für den Augenblick

$$F(M) = \sum_{-M,M}^{m} \sum_{-M,M}^{n} \frac{\mathrm{e}^{2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{(u + mv + nw)^{1+\rho}} ,$$

so wird

$$F(M + r) - F(M)$$

durch ein Aggregat von 8 Summen der oben betrachteten Form dargestellt, wie man am besten aus einer schematischen Figur sieht. $F(M)$ ist die Summe für alle Punkte mit ganzzahligen Coordina- [S.246]

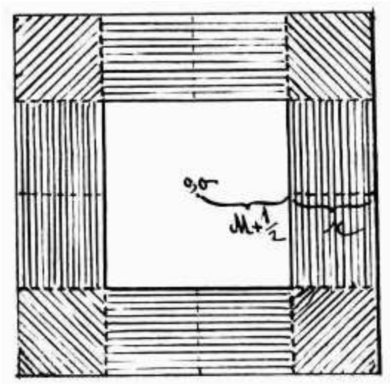

Abb. 6: zu S.246

ten m, n im Inneren des weiß gelassenen Quadrates (die halbe Quadratseite ist nicht ganzzahlig gewählt, damit auf dem Umfang keine Punkte liegen). $F(M+r) - F(M)$ setzt sich aus den Summen mit dem allgemeinen Glied $\frac{\mathrm{e}^{2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\rho}}$ zusammen für die einzelnen schraffierten Gebiete, von denen vier noch durch das Axenkreuz geteilt werden. Die 12 Teilsummen haben die a.v.S. stehende Form, wobei entweder m_0 oder n_0 gleich $M + 1$ ist oder wo beide $M + 1$ sind. Für $M = \infty$ werden die Summen jede für sich zu 0, daher ist

$$\lim_{M=\infty} F(M + r) - F(M) = 0$$

bei beliebig hohem ganzzahligen r, oder $F(M)$ hat für $M = \infty$ einen bestimmten Limes. [S.247]

Damit ist

$$\mathcal{S}er_\rho(u_0, u, v, w) = \lim_{M=\infty} \sum_{-M,M}^{m} \sum_{-M,M}^{n} \frac{\mathrm{e}^{2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{(u + mv + nw)^{1+\rho}}$$

definiert als eine von u abhängige bestimmte endliche Größe, solange das u nicht von der Form $gv + hw$ bei ganzzahligem g, h ist. In $u_0 = \sigma_0 v + \tau_0 w$ aber durften σ_0 u. τ_0 nicht ganzzahlig sein.

Daß die Reihe aber Funktion von u im Riemann'schen Sinne ist, folgt nach den allgemeinen Untersuchungen im Anhang von „Funktionentheorie I" aus der Gleichförmigkeit der Convergenz. Dazu ist schon S.240, 241 ausgesprochen worden, daß in $am + bn + c = (a_0 m + b_0 n + c_0) + i(a_1 m + b_1 n + c_1)$ nur $c = c_0 + ic_1$ von u abhängt u. daß für ein bestimmtes Gebiet der u-Ebene das

reelle c_0 eine Ungleichung $c_0 > \overline{c_0}$ (wo $c_0 \gtreqless 0$ sein kann) erfüllen muß. $a_0m + b_0n + c_0$ ist größer [S.248]
als $a_0m + b_0n + \overline{c_0}$ und m, n waren durch $m \geq m_0, n \geq n_0$ so zu beschränken, daß dies immer positiv ist. Dadurch erhält man für

$$\sum_{m_0, m_0+h-1}^{m} \sum_{n_0, n_0+k-1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{2(\varepsilon_1 n\sigma_0 - \varepsilon_0 m\tau_0)\pi i}}{(u + \varepsilon_0 mv + \varepsilon_1 nw)^{1+\rho}}$$

eine von u unabhängige obere Grenze, solange u in dem bestimmten Gebiet liegt, und man kann daraus leicht nachweisen, daß der Rest der Reihe , d.h.

$$(\lim_{M=\infty} F(M)) - F(M)$$

sich durch hohes M unter eine kleine Zahl δ bringen läßt unabhängig von der Lage des u im Gebiet, Darin liegt die Gleichmäßigkeit der Convergenz von $\mathcal{S}er_\rho(u_0, u, v, w)$ begründet, und deshalb ist die Reihe eine Funktion von u im Riemann'schen Sinn. [Vgl. Anfang von §10 bei Kronecker, [S.249]
Sitzungsberichte v. 20. März 90, S.313–315 des Bandes, S.109–111 im Separatabdruck. — Meine Untersuchungen über den Funktionscharacter bei gleichmäßiger Convergenz waren vorher [85] selbstständig entstanden.] — Über $\frac{d}{du}\mathcal{S}er_\rho(u_0, u, v, w)$ siehe S.262 ff.

Nun muß

$$\sum_{-M,M}^{m} \sum_{-N,N}^{n} \frac{\mathrm{e}^{2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{(u + mv + nw)^{1+\rho}}$$

betrachtet werden für den Fall, daß M u. N nicht gleich sind und zugleich oder nach einander unendlich werden. Es sei $N > M$, dann unterscheiden sich diese Summen von der bisher betrachteten, wo m u. n von $-M$ bis $+M$ gehen, um

$$\sum \frac{\mathrm{e}^{2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{(u + mv + nw)^{1+\rho}}$$

für

$$m = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots \pm M$$

$$n = \pm M, \pm(M+1), \pm(M+2) \cdots \pm N\ .$$

Das giebt vier Summen der früher betrachteten Form

$$\sum_{m_0, m_0+h-1}^{m} \sum_{n_0, n_0+k-1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{2(\varepsilon_1 n\sigma_0 - \varepsilon_0 m\tau_0)\pi i}}{(u + \varepsilon_0 mv + \varepsilon_1 nw)^{1+\rho}}$$

von denen man weiß, daß sie für $M = \infty$ verschwinden, mag nun $N - M$ bei der Vermehrung des [S.250]
M endlich bleiben oder schon unendlich geworden sein, ehe man das M unendlich werden läßt. — Für $M > N$ und unendlich werdendes M u. N (M vor N oder mit N zugleich unendlich) ist alles entsprechend. Man kann noch etwas weiter gehen, indem man die Summe auf

$$m = -M - h', -M - h' + 1\ \ldots + M + h''$$

$$n = -N - k', -N - k' + 1\ \ldots + N + k''$$

[84] Dies ist der Punkt, wo $b_0 > 0$, d.h. $\varphi > 0$ (nicht $= 0$) nötig ist, vgl. Anm. a.S.240.
[85] Ende vom W.S. 91/92, während ich diese Kronecker'sche Arbeit erst im S.S.92 studierte.

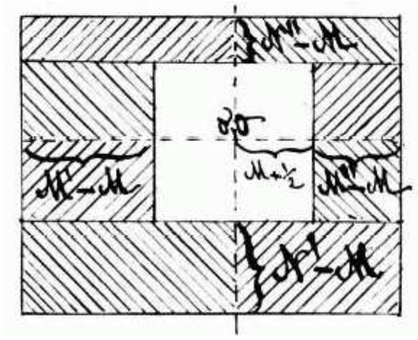

Abb. 7: zu S.250

bezieht, wo h', h'', k', k'' feste ganze Zahlen sind. Einfacher kann man dann schreiben:

$$m = -M' \dots + M''$$

$$n = -N' \dots + N'' ,$$

wo M', M'', N', N'' alle über M liegen.

$$\sum_{-M',M''}^{m} \sum_{-N',N''}^{n} \frac{e^{2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\rho}} - \sum_{-M,M}^{m} \sum_{-N,N}^{n} \frac{e^{2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\rho}}$$

ist dann wieder ein Ausdruck, der in mehrere Summen der früher (S.239–245) betrachteten Form zerfällt, u. jede dieser Summen wird zu Null für $M = \infty$, mögen nun $M' - M, M'' - M, N' - M$ [S.251] u. $N'' - M$ hierbei endliche Größen bleiben oder teils schon unendlich geworden sein, ehe M ins Unendliche wächst. Die einzelnen Summen beziehen sich wieder auf die Punktpaare m, n innerhalb der einzelnen schraffierten Gebiete. Das innere Quadrat hat die halbe Seitenlänge $M + \frac{1}{2}$, damit auf den Seiten selbst keine Punkte liegen. Nur das Axenkreuz enthält noch Punkte, die man dann willkürlich einer der Teilsummen für ein anstoßendes Rechteck zuordnet.

Das Hauptresultat der Untersuchung ist der Satz:
Für nicht ganzzahliges σ_0 u. τ_0 ist

$$\mathcal{S}er_\rho(u_0, u, v, w) = \lim_{M=\infty} \sum_{-M,M}^{m} \sum_{-M,M}^{n} \frac{e^{2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\rho}}$$

eine bestimmte Größe und eine Funktion von u im Riemann'schen Sinn. Die Reihen [S.252]

$$\lim_{M,N=\infty} \sum_{-M,M}^{m} \sum_{-N,N}^{n} \frac{e^{2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\rho}}$$

und

$$\lim_{M,N=\infty} \sum_{-M-h',M+h''}^{m} \sum_{-N-k',N+k''}^{n} \frac{e^{2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\rho}}$$

haben ganz denselben Grenzwert, mögen nun M, N gleichzeitig oder in irgend einer Reihenfolge nach einander unendlich werden. Und selbst

$$\lim \sum_{-M',M''}^{m} \sum_{-N',N''}^{n} \frac{e^{2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\rho}}$$

hat denselben Grenzwert $\mathcal{S}er_\rho(u_0,u,v,w)$ bei irgendwie gleichzeitig oder nach einander unendlich werdendem M',M'',N',N'', auch wenn $M'-M'',N'-M''$ dabei keine endlichen positiven oder negativen Größen bleiben. (Vgl. auch S.235, 236). [86]

Hiermit sind die Hauptuntersuchungen der Kronecker'schen Abhandlung in den Sitzungsberichten vom März 90, art. XXI über elliptische Funktionen dargestellt, soweit sie sich auf die Convergenzfragen beziehen (§1–3, §8 u. die erste Hälfte von §10). §5 enthält Stetigkeitsbetrachtungen bezüglich der in $u_0=\sigma_0 v+\tau_0 w$ auftretenden reellen und nicht ganzzahligen Parameter σ_0 u. τ_0, §4 u. 6–7 enthalten Untersuchungen über die Transformation u. die Invarianten-Eigenschaften von $\mathcal{S}er_\rho(u_0,u,v,w)$, deren Grundzüge für den speziellen Fall $\rho=0$ bei den Entwicklungen von S.129–144 Verwendung fanden. §9 behandelt auch noch die lineare Transformation. Es bleibt nur noch die letzte Hälfte von §10, die sehr wichtiges enthält, nämlich neue Mittel zur Untersuchungen der Invarianten-Eigenschaften von $\mathcal{S}er_\rho(u_0,u,v,w)$ und zum Nachweis der Identität von $\mathcal{S}er_\rho(u_0,u,v,w)$ mit der früher betrachteten Funktion [S.253] [S.254]

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0,u,v,\varepsilon w)=\frac{e^{2\tau_0\frac{u}{v}\pi i}}{v}\cdot\frac{\vartheta'(0,\frac{\varepsilon w}{v})\cdot\vartheta(\frac{\varepsilon u_0+v}{v},\frac{\varepsilon w}{v})}{\vartheta(\frac{\varepsilon u_0}{v},\frac{\varepsilon w}{v})\cdot\vartheta(\frac{u}{v},\frac{\varepsilon w}{v})}\,.$$

Es muß dazu erst noch $\mathcal{S}er_\rho(u_0+sv+tw,v,w)$ durch $\mathcal{S}er_\rho(u_0,u,v,w)$ für ganze Zahlen s,t dargestellt werden.

$$\mathcal{S}er_\rho(u_0+sv+tw,v,w)=\lim\sum_{-M,M}^{m}\sum_{-N,N}^{n}\frac{e^{2(n\sigma_0-m\tau_0)\pi i}}{(u+(m+s)v+(n+t)w)^{1+\rho}}$$
$$=e^{-2(t\sigma_0-s\tau_0)\pi i}\lim\sum_{-M,M}^{m}\sum_{-N,N}^{n}\frac{e^{2((n+t)\sigma_0-(m+s)\tau_0)\pi i}}{(u+(m+s)v+(n+t)w)^{1+\rho}}$$

führt durch $m+s=m_1,n+t=n_1$ auf einen Ausdruck, der nach den allgemeinen Summationsbedingungen sofort als $e^{-2(t\sigma_0-s\tau_0)\pi i}\mathcal{S}er_\rho(u_0,u,v,w)$ zu erkennen ist:

$$\mathcal{S}er_\rho(u_0+sv+tw,v,w)=e^{-2(t\sigma_0-s\tau_0)\pi i}\mathcal{S}er_\rho(u_0,u,v,w)\,.$$

Nun war $\mathcal{S}er_\rho(u_0,u,v,w)$ eine Funktion von u im Riemann'schen Sinn, eindeutig u. mit den Unendlichkeitspunkten $(\rho+1)$-ter Ordnung [bei ganzzahligem $\rho(=0,+1,+2\ldots)$] $u=gv+hw$, wo g u. h ganze Zahlen sind. Um $u=0$ herum hat $\mathcal{S}er_\rho(u_0,u,v,w)$ die Entwicklung [S.255]

$$\frac{1}{u^{1+\rho}}+A+Bu+Cu^2+\ldots$$

und nach der Formel über Änderung von $\mathcal{S}er_\rho(u_0,u,v,w)$ hat man

$$\mathcal{S}er_\rho(u_0,u,v,w)=e^{2(g\tau_0-h\sigma_0)\pi i}\mathcal{S}er_\rho(u_0,u-gv-hw,v,w)\,,$$

d.h. $\mathcal{S}er_\rho(u_0,u,v,w)$ hat um $u=gv+hw$ die Entwicklung

$$\frac{e^{2(g\tau_0-h\sigma_0)\pi i}}{(u-gv-hw)^{1+\rho}}+A'+B'(u-gv-hw)^1+\ldots\,,$$

wie ja auch die Reihe selbst erkennen läßt.

Jetzt werde gesetzt (vgl. S.14, 103, 134–144)

$$v'=\beta' v-\alpha' w\qquad\qquad w'=-\beta v+\alpha w$$

[86] $\frac{w}{v}$ ist nicht reell, es darf aber auch nicht rein imaginär sein, s.S.240, 245. Das ist sehr störend.

wo $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ ganze Zahlen mit der Determinante

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = +1$$

sind. Dann ist jede Größe $gv + hw$ auch als $g'v' + h'w'$ darstellbar (u. zwar durch

$$g' = \alpha g + \beta h \qquad\qquad h' = \alpha' g + \beta' h\ )$$

und es ist zunächst klar, daß [S.256]

$$\mathcal{S}er_\rho(u_0, u, v, w) \quad \text{und} \quad \mathcal{S}er_\rho(u_0, u, v', w')$$

zwei eindeutige Funktionen von u mit gemeinsamen Unendlichkeitspunkten sind. (ρ ist ganzzahlig, $\rho = 0, 1, 2 \ldots$) Sie haben aber auch an denselben Unendlichkeitsstellen gemeinsame unstetige Glieder in der Entwicklung. Aus

$$w = \sigma v + \tau w = \sigma' v' + \tau' w' \qquad\qquad u_0 = \sigma_0 v + \tau_0 w = \sigma_0' v' + \tau_0' w'$$

folgt nämlich

$$\begin{aligned} \sigma' &= \alpha\sigma + \beta\tau & \qquad\qquad \sigma_0' &= \alpha\sigma_0 + \beta\tau_0 \\ \tau' &= \alpha'\sigma + \beta'\tau & \qquad\qquad \tau_0' &= \alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0 \end{aligned}$$

und wenn man weiter

$$s' = \alpha s + \beta t \qquad\qquad t' = \alpha' s + \beta' t$$

einführt, wodurch $s'v' + t'w' = sv + tw$ wird, so folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{S}er_\rho(u_0, u + sv + tw, u', v') &= \mathcal{S}er_\rho(u_0, u + s'v' + t'w', v', w') \\ &= \mathrm{e}^{2(s'\tau_0' - t'\sigma_0')\pi i} \cdot \mathcal{S}er_\rho(u_0, u, v', w') \\ &= \mathrm{e}^{2(s\tau_0 - t\sigma_0)\pi i} \cdot \mathcal{S}er_\rho(u_0, u, v', w')\ , \end{aligned}$$

d.h. $\mathcal{S}er_\rho(u_0, u, v', w')$ nimmt bei Verwandlung von u in $u + s'v' + t'w' = u + sv + tw$ genau [S.257]
denselben Faktor an wie $\mathcal{S}er_\rho(u_0, u, v, w)$, nämlich den Faktor $\mathrm{e}^{2(s\tau_0 - t\sigma_0)\pi i}$. Da beide Funktionen um $u = 0$ herum das gemeinsame unstetige Glied in der Entwicklung $\frac{+1}{u^{1+\rho}}$ haben, so stimmen nun auch die unstetigen Teile ihrer Entwicklungen um irgend einen anderen gemeinsamen Unendlichkeitspunkt überein, oder $\mathcal{S}er_\rho(u_0, u, v', w') - \mathcal{S}er_\rho(u_0, u, v, w)$ ist bei endlichem u nirgends unendlich. Und diese neue Funktion von u hat auch wieder die Eigenschaft, daß sie bei Verwandlung von u in $u + sv + tw$ den Faktor $\mathrm{e}^{2(s\tau_0 - t\sigma_0)\pi i}$ annimmt. Dieser Faktor hat den absoluten Wert $+1$, und deshalb bleibt die Funktion ihrem absoluten Werte nach unverändert, [S.258]
wenn u in $u + sv + tw$ übergeht; sie bleibt auch im Unendlichen endlich, hat gar keine singuläre Stelle und ist darum eine Constante. Da aber gezeigt ist, daß sie bei Änderung von u um $sv + tw$ den sicher von $+1$ verschiedenen [87] Faktor $\mathrm{e}^{2(s\tau_0 - t\sigma_0)\pi i}$ annimmt, so kann die Differenz $\mathcal{S}er_\rho(u_0, u, v', w') - \mathcal{S}er_\rho(u_0, u, v, w)$ unmöglich eine von 0 verschiedene Constante sein.

[87] der Faktor ist wenigstens nicht für jedes s, t gleich $+1$.

Hiermit ist die Gleichung

$$\mathcal{S}er_\rho(u_0, u, v', w') = \mathcal{S}er_\rho(u_0, u, v, w)$$

bewiesen unter der Voraussetzung,

$$\begin{aligned} v' &= \beta' v - \alpha' w \\ w' &= -\beta v + \alpha w \end{aligned} \qquad (\alpha\beta' - \alpha'\beta = +1)\ .$$

Man erhält aus ihr und den beiden Formeln [S.259]

$$\begin{aligned} \mathcal{S}er_\rho(u_0 + s_0 v + t_0 w, u, v, w) &= +\mathcal{S}er_\rho(u_0, u, v, w) \\ \mathcal{S}er_\rho(u_0, u + sv + tw, v, w) &= \mathrm{e}^{2(s\tau_0 - t\sigma_0)\pi i} \cdot \mathcal{S}er_\rho(u_0, u, v, w) \end{aligned}$$

die allgemeine Gleichung

$$\mathcal{S}er_\rho(u_0', u', v', w') = \mathrm{e}^{2(\gamma\tau_0' - \gamma'\sigma_0')\pi i} \cdot \mathcal{S}er_\rho(u_0, u, v, w)$$

für die lineare Transformation von S.14 u. S.140:

$$\begin{aligned} v' &= \beta' v - \alpha' w \\ w' &= -\beta v + \alpha w \end{aligned} \qquad (\alpha\beta' - \alpha'\beta = +1)\ .$$

$$\begin{aligned} \sigma' &= \alpha\sigma + \beta\tau + \gamma & \sigma_0' &= \alpha\sigma_0 + \beta\tau_0 + \gamma \\ \tau' &= \alpha'\sigma + \beta'\tau + \gamma' & \tau_0' &= \alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0 + \gamma' \\ u' &= u + \gamma v' + \gamma' w' & u_0' &= u_0 + \gamma v' + \gamma' w' \end{aligned}$$

(Vgl. S.134 ff; es giebt noch eine etwas allgemeinere Transformation, wo bei σ_0' und τ_0' nicht γ und γ', sondern andere Größen γ_0' und γ_0' auftreten, darüber ist S.137 zu vergleichen.)

Die Betrachtungen über die lineare Transformation von $\mathcal{S}er_\rho(u_0, u, v, w)$ ist hier aus rein funktionentheoretischen Prinzipien und möglichst unabhängig von dem Ausdruck der Reihe durchgeführt, damit sie fast wörtlich auf [S.260]

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w) = \frac{\mathrm{e}^{2\tau_0 \frac{u}{v}\pi i}}{v} \cdot \frac{\vartheta'(0, \frac{\varepsilon w}{v}) \cdot \vartheta(\frac{\varepsilon u_0 + v}{v}, \frac{\varepsilon w}{v})}{\vartheta(\frac{\varepsilon u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}) \cdot \vartheta(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v})}\ .$$

anwendbar wird, wo die Eigenschaft

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u + sv + tw, v, \varepsilon w) = \mathrm{e}^{2(s\tau_0 - t\sigma_0)\pi i} \cdot \overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$$

aus den Periodeneigenschaften der Thetafunktionen folgt (durchgeführt a.S.101).

Aus diesem Umstand, der bei Kronecker nicht erwähnt ist [88], ist es möglich, den Invariantencharakter von $\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$ rein funktionentheoretisch u. ganz einfach aus den Periodeneigenschaften der Thetafunktionen zu entwickeln, also ganz unabhängig von einer Reihenentwicklung der Funktion $\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$ und ganz unabhängig von der Transformationtheorie der Thetafunktionen. Später soll versucht werden, wie weit sich die lineare Transformation der Thetafunktion selbst aus der Transformation von $\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$ herleiten läßt. [S.261]

[88] Übrigens kommt bei Kronecker art. XXI, §10 sehr ähnliches vor.

Nach ein Resultat soll hier kurz erwähnt werden, das bei Kronecker steht. $\mathcal{S}er_{\rho=0}(u_0,u,v,w)$ und $\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0,u,v,\varepsilon w)$ haben gemeinsame Unendlichkeitspunkte erster Ordnung ($u = gv + hw$), habe beide die Eigenschaft

$$\varphi(u + sv + tw) = \mathrm{e}^{2(s\tau_0 - t\sigma_0)\pi i} \cdot \varphi(u)$$

und haben um $u = 0$ beide die Entwicklungsform $+\frac{1}{u} + f.c.$. Deshalb haben sie bei jedem Unendlichkeitspunkt gemeinsame unstetige Entwicklungsglieder; die Differenz ist im Endlichen nirgends unendlich, nimmt bei Änderung des u um $sv + tw$ den Faktor $\mathrm{e}^{2(s\tau_0 - t\sigma_0)\pi i}$ an, dessen [S.262] absoluter Wert $+1$ ist, während er selbst im allgemeinen wenigstens nicht 1 ist (d.h. nicht für jedes s, t gleich 1 ist). Man sieht dann wieder, daß die Differenz eine Constante und zwar 0 sein muß.

Hiermit ist die Gleichung

$$\mathcal{S}er_{\rho=0}(u_0,u,v,w) = \overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0,u,v,\varepsilon w)$$

bewiesen.

Als eine Folge der Transformationsformel für $\mathcal{S}er_\rho(u_0,u,v,w)$ ist noch die Gleichung

$$\mathcal{S}er_\rho(u_0,u,v,w) = \lim \sum_{m.n} \frac{\mathrm{e}^{2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i}}{(u + mv + nw)^{1+\rho}}$$

$$(-M' \leq \alpha m + \beta n \leq M'',\ -N' \leq \alpha' m + \beta' n \leq N'')$$

zu erwähnen, wo $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ ganze Zahlen mit der Determinante $\alpha\beta' - \alpha'\beta = +1$ sind, und wo $\alpha\sigma_0 + \beta\tau_0$ u. $\alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0$ keine ganzen Zahlen sind.

- Auf S.247–249 ergab sich der Funktionscharakter von $\mathcal{S}er_\rho(u_0,u,v,w)$ für die Variable u aus der gleichmäßigen Convergenz. Die allgemeine Untersuchung in Bd. I der „Funktionentheorie“ [S.263] geben für Differentiation und Integration folgendes Resultat.

$$\frac{d}{du}\mathcal{S}er_\rho(u_0,u,v,w) = -(1+\rho) \cdot \mathcal{S}er_{\rho+1}(u_0,u,v,w)$$

$$\int_{u_1}^{u_2} \mathcal{S}er_\rho(u_0,u,v,w)\,du = -\frac{1}{\rho}\big\{\mathcal{S}er_{\rho-1}(u_0,u_2,v,w) - \mathcal{S}er_{\rho-1}(u_0,u_1,v,w)\big\}\ ,$$

wo in der ersten Formel ρ gleich $0,1,2,\ldots$, in der zweiten aber nur $\rho = 1,2,3,\ldots$ ist. Zum Beweis muß immer die Summe für $m = -M \ldots + M, n = -M \ldots + M$ und der einzige Grenzübergang $\lim\limits_{M=\infty}$ benutzt werden, der für das Resultat selbst allerdings nicht nötig ist. Das Integral von $\mathcal{S}er_{\rho=0}(u_0,u,v,w)$ zwischen u_1 u. u_2 ist auch als Grenzwert einer Summe für $m = -M \ldots + M, n = -M \ldots + M$ ohne weiteres aus den allgemeinen Untersuchungen zu erhalten: [S.264]

$$\int_{u_1}^{u_2} \mathcal{S}er_0(u_0,u,v,w)\,du = \lim_{M=\infty} \sum_{-M,M}^{m} \sum_{-M,M}^{n} \mathrm{e}^{2(n\sigma_0 - m\tau_0)\pi i} \cdot \lg\frac{u_2 + mv + nw}{u_1 + mv + nw}\ ;$$

in wie weit aber diese Summe noch Sinn hat und denselben Wert darstellt, wenn eine andre Summationsart eintritt, läßt sich nicht ohne weiteres sagen. Hier soll noch nicht darauf eingegangen werden.

Nach der Differentiationsformel von $\mathcal{S}er_\rho(u_0,u,v,w)$ und nach der a. S.261, 262 bewiesenen Identität von $\mathcal{S}er_0(u_0,u,v,w)$ mit

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0,u,v,\varepsilon w)=\frac{\mathrm{e}^{2\tau_0\frac{u}{v}\pi i}}{v}\cdot\frac{\vartheta'(0,\frac{\varepsilon w}{v})\cdot\vartheta(\frac{\varepsilon u_0+v}{v},\frac{\varepsilon w}{v})}{\vartheta(\frac{\varepsilon u_0}{v},\frac{\varepsilon w}{v})\cdot\vartheta(\frac{u}{v},\frac{\varepsilon w}{v})}$$

kann man die Coeffizienten in der Taylor'schen Entwicklung von $\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0,u,v,\varepsilon w)$ nach z einfach durch die verschiedenen $\mathcal{S}er_\rho(u_0,u,v,w)$ darstellen:

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0,u,v,\varepsilon w)=\varphi_0(u)+\varphi_1(u)\cdot z+\varphi_2(u)\cdot\frac{z^2}{1\cdot 2}+\dots$$

$$\begin{aligned}
\varphi_0(u)&=\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0,u,v,\varepsilon w)=\mathcal{S}er_0(u_0,u,v,w)\\
\varphi_1(u)&=\frac{d\varphi_0(u)}{du}\\
\varphi_2(u)&=\frac{d^2\varphi_0(u)}{du^2}\\
&\dots\\
\varphi_k(u)&=\frac{d^k\varphi_0(u)}{du^k}=\frac{d^k}{du^k}\mathcal{S}er_0(u_0,u,v,w)=(-1)^k 1\cdot 2\dots k\cdot\mathcal{S}er_k(u_0,u,v,w)
\end{aligned}$$

d.h. [S.265]

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0,u+z,v,\varepsilon w)=\sum_{0,\infty}^{k}(-1)^k\cdot z^k\cdot\mathcal{S}er_k(u_0,u,v,w)$$

oder einfacher in der Schreibweise:

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0,u-z,v,\varepsilon w)=\sum_{0,\infty}^{k}z^k\cdot\mathcal{S}er_k(u_0,u,v,w)\ .$$

Hiermit ist der Inhalt des Abschnitts XXI von Kronecker's Untersuchungen über elliptische Funktionen (Sitzungsberiche vom März 1890) erschöpft.

Die Convergenz-Untersuchung der Doppelreihe bei zwei Grenzübergängen nacheinander ist recht einfach, s. Anm. a.S.88. Funktionscharakter und Eigenschaften lassen sich leicht feststellen.
— Nach Plänen von Mitte Januar 93 habe ich Anfang Februar aus dem Residuensatz (cf. pag 111 ff) die Entwicklung von $\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0,u,v,\varepsilon w)$ in die Reihe $\mathcal{S}er_0(u_0,u,v,w)$ von S.238 (mit <u>einem</u> Limes) oder in die mitten a.S. 252 stehende Reihe (für $\rho=0$) gegeben (Umformung mit den Mitteln von S.283, 284).

Anhang IX:
Die elliptischen Funktionen als Spezialfälle von $\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$

Für $v = 2\mathrm{K}$, $w = 2i\mathrm{K}'$ hat man $\varepsilon = +1$ zu nehmen u. findet

$$\overline{\mathcal{A}tr}(2\sigma_0\mathrm{K} + 2\tau_0 i\mathrm{K}', u, 2\mathrm{K}, 2i\mathrm{K}') = \frac{\mathrm{e}^{\frac{\tau_0 u\pi i}{\mathrm{K}}}}{2\mathrm{K}} \cdot \frac{\vartheta'(0)\cdot\vartheta(\frac{2\sigma_0\mathrm{K}+2\tau_0 i\mathrm{K}'+u}{2\mathrm{K}})}{\vartheta(\frac{2\sigma_0\mathrm{K}+2\tau_0 i\mathrm{K}'}{2\mathrm{K}})\cdot\vartheta(\frac{u}{2\mathrm{K}})}$$

oder nach $\vartheta(\frac{u}{2\mathrm{K}}) = \mathrm{H}(u)$, $\frac{1}{2\mathrm{K}}\vartheta'(0) = \mathrm{H}'(0)$

$$\overline{\mathcal{A}tr}(2\sigma_0\mathrm{K} + 2\tau_0 i\mathrm{K}', u, 2\mathrm{K}, 2i\mathrm{K}') = \mathrm{e}^{\frac{\tau_0 u\pi i}{\mathrm{K}}} \cdot \frac{\mathrm{H}'(0)\cdot\mathrm{H}(2\sigma_0\mathrm{K}+2\tau_0 i\mathrm{K}'+u)}{\mathrm{H}(2\sigma_0\mathrm{K}+2\tau_0 i\mathrm{K}')\cdot\mathrm{H}(u)}\ .$$

Um zu doppelt periodischen Funktionen zu kommen, muß man σ_0 u. τ_0 gleich 0 oder $\frac{1}{2}$ annehmen; $\sigma_0 = \tau_0 = 0$ führt zu keinem endlich bleibenden Wert, so bleiben die drei Annahmen

1) $\sigma_0 = 0, \quad \tau_0 = \frac{1}{2}$

2) $\sigma_0 = \frac{1}{2}, \quad \tau_0 = \frac{1}{2}$

3) $\sigma_0 = \frac{1}{2}, \quad \tau_0 = 0\ .$

Die Gleichungen

$$\mathrm{H}(u+i\mathrm{K}') = +iq^{-\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{i\pi u}{2\mathrm{K}}}\cdot\Theta(u)$$

$$\mathrm{H}(i\mathrm{K}') = +iq^{-\frac{1}{4}}\Theta(0)$$

$$\mathrm{H}(u+\mathrm{K}+i\mathrm{K}') = \mathrm{H}_1(u+i\mathrm{K}') = +q^{-\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{i\pi u}{2\mathrm{K}}}\cdot\Theta_1(u)$$

$$\mathrm{H}(\mathrm{K}+i\mathrm{K}') = +q^{-\frac{1}{4}}\Theta_1(0)$$

geben [S.267]

$$\frac{\mathrm{H}(u+i\mathrm{K}')}{\mathrm{H}(i\mathrm{K}')}\cdot\mathrm{e}^{+\frac{i\pi u}{2\mathrm{K}}} = \frac{\Theta(u)}{\Theta(0)}$$

$$\frac{\mathrm{H}(u+\mathrm{K}+i\mathrm{K}')}{\mathrm{H}(\mathrm{K}+i\mathrm{K}')}\cdot\mathrm{e}^{+\frac{i\pi u}{2\mathrm{K}}} = \frac{\Theta_1(u)}{\Theta_1(0)}$$

und man hat

$$\overline{\mathcal{A}tr}(i\mathrm{K}', u, 2\mathrm{K}, 2i\mathrm{K}') = \frac{\mathrm{H}'(0)}{\Theta(0)}\cdot\frac{\Theta(u)}{\mathrm{H}(u)} = \frac{\mathrm{H}_1(0)}{\Theta_1(0)}\cdot\frac{\Theta(u)}{\mathrm{H}(u)}$$

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\mathrm{K}+i\mathrm{K}', u, 2\mathrm{K}, 2i\mathrm{K}') = \frac{\mathrm{H}'(0)}{\Theta_1(0)}\cdot\frac{\Theta_1(u)}{\mathrm{H}(u)} = \frac{\Theta(0)\mathrm{H}_1(0)}{\Theta_1^2(0)}\cdot\frac{\Theta_1(u)}{\mathrm{H}(u)}$$

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\mathrm{K}, u, 2\mathrm{K}, 2i\mathrm{K}') = \frac{\mathrm{H}'(0)}{\mathrm{H}_1(0)}\cdot\frac{\mathrm{H}_1(u)}{\mathrm{H}(u)} = \frac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)}\cdot\frac{\mathrm{H}_1(u)}{\mathrm{H}(u)}\ ,$$

wobei

$$\mathrm{H}'(0) = \frac{\Theta(0)\cdot\mathrm{H}_1(0)}{\Theta_1(0)}$$

benutzt ist. Wegen

$$sn(u) = \frac{\Theta_1(0)}{\mathrm{H}_1(0)}\cdot\frac{\mathrm{H}(u)}{\Theta(u)}$$

$$cn(u) = \frac{\Theta(0)}{\mathrm{H}_1(0)} \cdot \frac{\mathrm{H}_1(u)}{\Theta(u)}$$
$$dn(u) = \frac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)} \cdot \frac{\Theta_1(u)}{\Theta(u)}$$

folgt nun

$$\overline{\mathcal{A}tr}(i\mathrm{K}', u, 2\mathrm{K}, 2i\mathrm{K}') = \frac{+1}{sn(u)}$$
$$\overline{\mathcal{A}tr}(\mathrm{K} + i\mathrm{K}', u, 2\mathrm{K}, 2i\mathrm{K}') = \frac{dn(u)}{sn(u)}$$
$$\overline{\mathcal{A}tr}(\mathrm{K}, u, 2\mathrm{K}, 2i\mathrm{K}') = \frac{cn(u)}{sn(u)}$$

oder (S.233, 234) [S.268]

$$\frac{1}{sn(u)} = \lim \sum_{-M,M}^{m} \sum_{-N.N}^{n} \frac{(-1)^m}{u - 2m\mathrm{K} - 2ni\mathrm{K}'}$$
$$\frac{dn(u)}{sn(u)} = \lim \sum_{-M,M}^{m} \sum_{-N.N}^{n} \frac{(-1)^{m+n}}{u - 2m\mathrm{K} - 2ni\mathrm{K}'}$$
$$\frac{cn(u)}{sn(u)} = \lim \sum_{-M,M}^{m} \sum_{-N.N}^{n} \frac{(-1)^{n}}{u - 2m\mathrm{K} - 2ni\mathrm{K}'} \,,$$

wo M vor oder nach N unendlich werden darf. [Die Vorzeichen bei $2m\mathrm{K}$ und $2ni\mathrm{K}'$ in den Nennern sind geändert, indem einfach m u. n durch $-m, -n$ ersetzt wurde, was bei diesen Summationsgrenzen erlaubt ist.]

Aus den Formeln

$$sn(u - \mathrm{K}) = -\frac{cn(u)}{dn(u)}, \qquad cn(u - \mathrm{K}) = +\kappa' \frac{sn(u)}{dn(u)}, \qquad dn(u - \mathrm{K}) = +\kappa' \frac{1}{dn(u)}$$
$$sn(u - i\mathrm{K}') = +\frac{1}{\kappa} \frac{1}{sn(u)}, \qquad cn(u - i\mathrm{K}') = +\frac{i}{\kappa} \frac{dn(u)}{sn(u)}, \qquad dn(u - i\mathrm{K}') = +i \frac{cn(u)}{sn(u)}$$
$$sn(u - \mathrm{K} - i\mathrm{K}') = -\frac{1}{\kappa} \frac{dn(u)}{cn(u)}, \quad cn(u - \mathrm{K} - i\mathrm{K}') = -\frac{i\kappa'}{\kappa} \frac{1}{cn(u)}, \quad dn(u - \mathrm{K} - i\mathrm{K}') = -i\kappa' \frac{sn(u)}{cn(u)}$$

erhält man nun drei neue Gleichungssysteme [S.269]

$$\begin{cases} -\dfrac{dn(u)}{cn(u)} = \lim \displaystyle\sum_{-M,M}^{m} \sum_{-N.N}^{n} \frac{(-1)^m}{u - (2m+1)\mathrm{K} - 2ni\mathrm{K}'} \\[2ex] -\kappa' \dfrac{1}{cn(u)} = \lim \displaystyle\sum_{-M,M}^{m} \sum_{-N.N}^{n} \frac{(-1)^{m+n}}{u - (2m+1)\mathrm{K} - 2ni\mathrm{K}'} \\[2ex] -\kappa' \dfrac{sn(u)}{cn(u)} = \lim \displaystyle\sum_{-M,M}^{m} \sum_{-N.N}^{n} \frac{(-1)^{n}}{u - (2m+1)\mathrm{K} - 2ni\mathrm{K}'} \end{cases}$$

$$\begin{cases} +\kappa\, sn(u) = \lim \displaystyle\sum_{-M,M}^{m} \sum_{-N.N}^{n} \frac{(-1)^m}{u - 2m\mathrm{K} - (2n+1)i\mathrm{K}'} \\[2ex] +i\kappa\, cn(u) = \lim \displaystyle\sum_{-M,M}^{m} \sum_{-N.N}^{n} \frac{(-1)^{m+n}}{u - 2m\mathrm{K} - (2n+1)i\mathrm{K}'} \\[2ex] +i\, dn(u) = \lim \displaystyle\sum_{-M,M}^{m} \sum_{-N.N}^{n} \frac{(-1)^{n}}{u - 2m\mathrm{K} - (2n+1)i\mathrm{K}'} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\kappa\,\dfrac{cn(u)}{dn(u)} = \lim \displaystyle\sum_{-M,M}^{m} \sum_{-N.N}^{n} \dfrac{(-1)^m}{u-(2m+1)\mathrm{K}-(2n+1)i\mathrm{K}'} \\ +i\kappa\kappa'\,\dfrac{sn(u)}{dn(u)} = \lim \displaystyle\sum_{-M,M}^{m} \sum_{-N.N}^{n} \dfrac{(-1)^{m+n}}{u-(2m+1)\mathrm{K}-(2n+1)i\mathrm{K}'} \\ +i\kappa'\,\dfrac{1}{dn(u)} = \lim \displaystyle\sum_{-M,M}^{m} \sum_{-N.N}^{n} \dfrac{(-1)^n}{u-(2m+1)\mathrm{K}-(2n+1)i\mathrm{K}'} \end{cases}$$

Immer sind die beiden Grenzübergänge $\lim\limits_{N=\infty}\lim\limits_{M=\infty}$ u. $\lim\limits_{M=\infty}\lim\limits_{N=\infty}$ zulässig; man muß aber dann bei dem ersten dieser Grenzprocesse jedesmal für die letzte Formel eines Systems genau die ange- [S.270] gebenen Summationsgrenzen für n, bei dem zweiten Grenzproceß jedesmal für die erste Formel eines Systems genau die angegebenen Summationsgrenzen für m beachten, weil sonst oscillierende Reihen entstehen können; von den genannte Fällen abgesehen darf man auch die allgemeineren Summationsgrenzen $-M-h', +M+h''$ für m, $-N-k', +N+k''$ für n einführen.

Das zweite Formelsystem a.v.S. ist das wichtigste. Durch Ausführung einer Summation mittels der Partialbruchreihen für die Cotangente oder den reciproken Wert des Sinus kommt man zu einfach unendlichen Reihen mit transcendenten Gliedern, aus denen sich auch Fourier'sche Reihen [S.271] für ein beschränktes Gebiet der u-Ebene ableiten lassen [siehe Webers Werk, S.133-137]

Ein System von speciellen linearen Transformationsformeln für $sn(u), cn(u), dn(u)$ ergibt sich aus den Doppelsummen direkt. Der Vertauschung von κ mit κ' entspricht Vertauschung von K mit K'. Bildet man demnach $\kappa'\,sn(iu,\kappa')$, $+i\kappa'\,cn(iu,\kappa')$ und $+i\,dn(iu,\kappa')$, so kommt man bei geringer Änderung der Bezeichnungen mittels des ersten Systems von S.269 zu

$$sn(iu,\kappa') = +i\cdot\frac{sn(u)}{cn(u)}$$

$$cn(iu,\kappa') = +\frac{1}{cn(u)}$$

$$dn(iu,\kappa') = +\frac{dn(u)}{cn(u)}\,.$$

[S.272]

Allgemeinere Formeln für die lineare Transformation werden sich aus

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u', v', \varepsilon w') = \overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$$

$$\begin{array}{ll} v' = \beta' v - \alpha' w & (\alpha\cdot\beta' - \alpha'\cdot\beta = +1) \\ w' = -\beta v + \alpha w & \\ \sigma' = \alpha\sigma + \beta\tau & \sigma_0' = \alpha\sigma_0 + \beta\tau_0 \\ \tau' = \alpha'\sigma + \beta'\tau & \tau_0' = \alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0 \\ (u' = u) & (u_0' = u_0) \end{array}$$

finden lassen, wo man aber nicht auf die Untersuchungen von S.129–144 sich beziehen darf, weil dort σ_0, τ_0 Beschränkungen unterworfen waren, sondern wo man an S.259–261 anknöpfen muß, wo die rein funktionentheoretischen Hülfsmittel keine besonderen Einschränkungen nötig machten.

Die folgende Tabelle, welche aus S.267–269 sich ergibt, wird für die Aufstellung der Transformationsbedingungen wichtig sein: [S.273]

		$\sigma_0=0,\tau_0=\frac{1}{2}$	$\sigma_0=\frac{1}{2},\tau_0=\frac{1}{2}$	$\sigma_0=\frac{1}{2},\tau_0=0$
$\overline{\mathcal{A}tr}(2\sigma_0\mathrm{K}+2\tau_0 i\mathrm{K}', u,\ 2\mathrm{K}, 2i\mathrm{K}')$	$=$	$+\dfrac{1}{sn(u)}$	$+\dfrac{dn(u)}{sn(u)}$	$+\dfrac{cn(u)}{sn(u)}$
$\overline{\mathcal{A}tr}(2\sigma_0\mathrm{K}+2\tau_0 i\mathrm{K}', u-\mathrm{K},\ 2\mathrm{K}, 2i\mathrm{K}')$	$=$	$-\dfrac{dn(u)}{cn(u)}$	$-\kappa'\,\dfrac{1}{cn(u)}$	$-\kappa'\,\dfrac{sn(u)}{cn(u)}$
$\overline{\mathcal{A}tr}(2\sigma_0\mathrm{K}+2\tau_0 i\mathrm{K}', u-i\mathrm{K}',\ 2\mathrm{K}, 2i\mathrm{K}')$	$=$	$+\kappa\, sn(u)$	$+i\kappa\, cn(u)$	$+i\, dn(u)$
$\overline{\mathcal{A}tr}(2\sigma_0\mathrm{K}+2\tau_0 i\mathrm{K}', u-\mathrm{K}-i\mathrm{K}', 2\mathrm{K}, 2i\mathrm{K}')$	$=$	$-\kappa\,\dfrac{cn(u)}{dn(u)}$	$+i\kappa\kappa'\,\dfrac{sn(u)}{dn(u)}$	$+i\kappa'\,\dfrac{1}{dn(u)}$

Aber eine Hilfsbetrachtung muß erst durchgeführt werden. A und A' seien zwei Größen, so daß $\dfrac{iA'}{A}$ nicht reell ist [89]. In welcher Beziehung steht

$$\overline{\mathcal{A}tr}(2\sigma_0 A + 2\tau_0 iA',\ u,\ 2A,\ 2iA')$$

für $\sigma_0,\tau_0 = 0,\frac{1}{2};\ \frac{1}{2},\frac{1}{2};\ \frac{1}{2},0$ zu den Jakobi'schen Grundfunktionen?

Man kann eindeutig den Modul κ und die ihm zugehörigen Größen K,K' bestimmen, so daß die Beziehung besteht:

$$\mathrm{K}:\mathrm{K}' = A : A'$$

[S.274]

$$K=\lambda A \qquad\qquad K'=\lambda A'$$

denn aus $\omega = \dfrac{i\mathrm{K}'}{\mathrm{K}} = \dfrac{iA'}{A}$ läßt sich $q = \mathrm{e}^{+\pi i\omega}$ bilden, ($|q|<1$ für die gemachten Annahmen) und dann geben die zu diesem q gehörigen $\vartheta_{gh}(u)$-Funktionen einen Modul κ und sein Complement durch

$$\frac{\vartheta_{10}(0)}{\vartheta_{00}(0)} = \sqrt{\kappa} \qquad\qquad \frac{\vartheta_{01}(0)}{\vartheta_{00}(0)} = \sqrt{\kappa'}\ .$$

Die zu solchem κ gehörenden Jakobi'schen Funktionen $sn(v,\kappa)$, $cn(v,\kappa)$ u. $dn(v,\kappa)$, welche sich auch vermittels der Thetafunktionen darstellen lassen [90], besitzen ein mit den Perioden eng zusammenhängendes Größenpaar $\mathrm{K}, i\mathrm{K}'$, welches wirklich das vorgeschriebene Verhältnis hat. Beiläufig wird K durch $\dfrac{\pi}{2}\cdot\vartheta_{00}^2$ ausgedrückt, und K' kann man aus der Proportion finden.

Denkt man sich jetzt κ und K,K' aus den gegebenen A, A' auf die angegebene Art eindeutig bestimmt, so sind damit Doppelreihen für die Funktionen $sn(v,\kappa)$, $cn(v,\kappa)$ u. $dn(v,\kappa)$ gegeben [S.275] u. für die Quotienten u. reciproken Werte dieser Funktionen. Siehe die Tabelle a. vorletzter Seite.

[89] u. zwar habe $\dfrac{iA'}{A}$ positiven imaginären Teil ($\varepsilon>0$).

[90] S. Webers Vorlesung v. W.S. 87/88, S.93–98 u. 233–35 im 2. Band

Und mit diesen Reihen stehen die zu untersuchenden Reihen $\overline{\mathcal{A}tr}(2\sigma_0 A + 2\tau_0 iA', u, 2A, 2iA')$ für $\sigma_0, \tau_0 = 0, \frac{1}{2}; = \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; = \frac{1}{2}, 0$ in sehr einfachem Zusammenhang. Man hat nämlich

$$\frac{1}{sn(v)} = \lim \sum \frac{(-1)^m}{v - 2m\mathrm{K} - 2ni\mathrm{K}'} = \frac{1}{\lambda} \lim \sum \frac{(-1)^m}{\frac{v}{\lambda} - 2mA - 2niA'}$$

$$\frac{dn(v)}{sn(v)} = \lim \sum \frac{(-1)^{m+n}}{v - 2m\mathrm{K} - 2ni\mathrm{K}'} = \frac{1}{\lambda} \lim \sum \frac{(-1)^{m+n}}{\frac{v}{\lambda} - 2mA - 2niA'}$$

$$\frac{cn(v)}{sn(v)} = \lim \sum \frac{(-1)^n}{v - 2m\mathrm{K} - 2ni\mathrm{K}'} = \frac{1}{\lambda} \lim \sum \frac{(-1)^n}{\frac{v}{\lambda} - 2mA - 2niA'} ,$$

d.h.

$$\overline{\mathcal{A}tr}(2\sigma_0 A + 2\tau_0 iA', u, 2A, 2iA')$$

ist je nach

$$\sigma_0 = 0, \tau_0 = \tfrac{1}{2} \qquad \sigma_0 = \tfrac{1}{2}, \tau_0 = \tfrac{1}{2} \qquad \sigma_0 = \tfrac{1}{2}, \tau_0 = 0$$

gleich

$$\lambda \cdot \frac{1}{sn(\lambda u, \kappa)} \qquad \lambda \cdot \frac{dn(\lambda u, \kappa)}{sn(\lambda u, \kappa)} \qquad \lambda \cdot \frac{cn(\lambda u, \kappa)}{sn(\lambda u, \kappa)} ,$$

wobei λ u. κ eindeutig durch das Verfahren der S.274 bestimmt sind. - Diejenigen Funktionen [S.276]
$\overline{\mathcal{A}tr}$, wo statt u $u - A, u - iA', u - A - iA'$ steht, sind ganz ähnlich zu behandeln.

Jetzt können die Hauptformeln der linearen Transformation für sn, cn, dn aufgestellt werden. Man knüpft dabei am einfachsten an die Ausdrücke für $\frac{1}{sn}, \frac{dn}{sn}$ u. $\frac{cn}{sn}$ an, weil man dann weniger Formeln im Auge zu behalten braucht, und in den $\overline{\mathcal{A}tr}$ -Ausdrücken u direkt (u. nicht $u - \mathrm{K}, u - i\mathrm{K}', u - \mathrm{K} - i\mathrm{K}'$) auftritt.

Zuerst werde der Fall betrachtet, wo das Verhältnis $\frac{i\mathrm{K}'}{\mathrm{K}} = \omega$ in $\frac{i\mathrm{K}_1'}{\mathrm{K}_1} = \omega_1 = \omega + 1$ übergeht. Man setzt dazu

$$\mathrm{K} = A,\ i\mathrm{K}' = -A + iA' \qquad (\text{d.h.}\quad iA' = \mathrm{K} + i\mathrm{K}')$$

ein in die allgemeine Formel. Man hat in diesem Fall $\beta' = +1,\ \alpha' = 0,\ \beta = -1,\ \alpha = +1,$ also wirklich $\alpha\beta' - \alpha'\beta = +1$ (vgl. S.272). Es gehen dann σ_0 und τ_0 über in

$$\sigma_0' = \alpha\,\sigma_0 + \beta\,\tau_0 \ = \sigma_0 - \tau_0$$
$$\tau_0' = \alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0 = \tau_0$$

oder man erhält [S.277]

$$\frac{1}{sn(u, \kappa}) = \overline{\mathcal{A}tr}(i\mathrm{K}', u, 2\mathrm{K}, 2i\mathrm{K}') = \overline{\mathcal{A}tr}(-A + iA', u, 2A, 2iA') = \lambda \cdot \frac{dn(\lambda u, \kappa_1)}{sn(\lambda u, \kappa_1)}$$

u. entsprechend noch zwei andere Gleichungen; Direktes Operieren an den Summenausdrücken macht die Sache eigentlich noch übersichtlicher, auch würde man sich die symbolische Umformung wohl etwas erleichtern, wenn man $\overline{\mathcal{A}tr}(\sigma_0, \tau_0, u, v, w)$ statt $\overline{\mathcal{A}tr}(\sigma_0 v + \tau_0 w, u, v, w)$ schriebe.

Die drei Gleichungen lauten

$$\frac{1}{sn(u, \kappa)} = \lambda \cdot \frac{dn(\lambda u, \kappa_1)}{sn(\lambda u, \kappa_1)}$$

$$\frac{dn(u, \kappa)}{sn(u, \kappa)} = \lambda \cdot \frac{1}{sn(\lambda u, \kappa_1)}$$

$$\frac{cn(u,\kappa)}{sn(u,\kappa)} = \lambda \cdot \frac{cn(\lambda u,\kappa_1)}{sn(\lambda u,\kappa_1)},$$

wobei λ und κ_1 eindeutig bestimmt sind.

$u = \mathrm{K}, u_1 = \lambda u = \lambda A = \mathrm{K}_1$ liefern wegen

$$sn(\mathrm{K},\kappa) = +1, \qquad cn(\mathrm{K},\kappa) = 0, \qquad dn(\mathrm{K},\kappa) = +\kappa'$$

aus der 2-ten Formel

$$\lambda = \kappa' \, ,$$

und aus der ersten Formel $1 = \lambda \cdot \kappa_1'$ oder $\kappa_1' = \dfrac{1}{\kappa'}$ oder $\kappa_1^2 = -\dfrac{\kappa^2}{\kappa'^2}$. Die genaue Vorzeichenbestimmung von κ_1 aber kann u.a. so erfolgen, daß man in die erste Formel $u = \mathrm{K} + i\mathrm{K}'$ u. $u_1 = \lambda u = \lambda i A' = i\mathrm{K}'$ einsetzt; $sn(\mathrm{K} + i\mathrm{K},\kappa)$ ist $+\dfrac{1}{\kappa}$ und $\lim\limits_{z=0} \dfrac{dn(i\mathrm{K}_1' + z,\kappa_1)}{sn(i\mathrm{K}_1' + z,\kappa_1)}$ ist gleich $-i\kappa_1 \cdot cn(0,\kappa_1) = -i\kappa_1$; so hat man $+\kappa = \lambda \cdot (-i\kappa_1)$ oder $\kappa_1 = +\dfrac{i\kappa}{\lambda} = +\dfrac{i\kappa}{\kappa'}$. [S.278]

Damit ist gefunden:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{sn(u,\kappa)} &= \kappa' \cdot \frac{dn(\kappa' u, \frac{i\kappa}{\kappa'})}{sn(\kappa' u, \frac{i\kappa}{\kappa'})} \\
\frac{dn(u,\kappa)}{sn(u,\kappa)} &= \kappa' \cdot \frac{1}{sn(\kappa' u, \frac{i\kappa}{\kappa'})} \\
\frac{cn(u,\kappa)}{sn(u,\kappa)} &= \kappa' \cdot \frac{cn(\kappa' u, \frac{i\kappa}{\kappa'})}{sn(\kappa' u, \frac{i\kappa}{\kappa'})}
\end{aligned}$$

oder endlich

$$\begin{aligned}
sn(\kappa' u, \frac{i\kappa}{\kappa'}) &= \kappa' \cdot \frac{sn(u,\kappa)}{dn(u,\kappa)} \\
cn(\kappa' u, \frac{i\kappa}{\kappa'}) &= + \frac{cn(u,\kappa)}{dn(u,\kappa)} \\
dn(\kappa' u, \frac{i\kappa}{\kappa'}) &= + \frac{1}{dn(u,\kappa)} \, .
\end{aligned}$$

[S.279]

Ein zweites fundamentales System von Transformationsformeln entspricht dem Übergang von ω zu $\omega_1 = -\dfrac{1}{\omega}$. Dieser Fall ist schon auf S.171 behandelt worden, freilich mit der Voraussetzung, daß der Vertauschung von K und K′ die Vertauschung von κ mit κ' entspricht. Will man davon absehen, so hätte man in den Formeln für $\dfrac{1}{sn(u,\kappa)}, \dfrac{dn(u,\kappa)}{sn(u,\kappa)}$ und $\dfrac{cn(u,\kappa)}{sn(u,\kappa)}$ $\mathrm{K} = iA', i\mathrm{K}' = -A$ zu substituieren ($\mathrm{K} = \alpha A + \alpha' iA,\ i\mathrm{K}' = \beta A + \beta' iA;\ \alpha = 0,\ \alpha' = +1,\ \beta = -1,\ \beta' = 0;\ \alpha\beta' - \alpha'\beta$ ist wirklich $+1$) .

σ_0 u. τ_0 gehen über in

$$\sigma_0' = \alpha\sigma_0 + \beta\tau_0 = -\tau_0$$

und

$$\tau_0' = \alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0 = +\sigma_0$$

und man findet, daß zu

$$\sigma_0, \tau_0 = 0, \tfrac{1}{2}; \qquad \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; \qquad \tfrac{1}{2}, 0$$

die Werte gehören:

$$\sigma_0', \tau_0' = -\tfrac{1}{2}, 0; \qquad -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; \qquad 0, \tfrac{1}{2}$$

oder

$$\sigma_0', \tau_0' = +\tfrac{1}{2}, 0; \qquad +\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; \qquad 0, \tfrac{1}{2}$$

weil σ_0' u. τ_0' sich ohne weiteres um ganze Zahlen ändern lassen. So gehen schließlich die drei Funktionen

$$\frac{1}{sn(u,\kappa)}, \qquad \frac{dn(u,\kappa)}{sn(u,\kappa)}, \qquad \frac{cn(u,\kappa)}{sn(u,\kappa)}$$

über in

$$\lambda \cdot \frac{cn(\lambda u, \kappa_1)}{sn(\lambda u, \kappa_1)}, \qquad \lambda \cdot \frac{dn(\lambda u, \kappa_1)}{sn(\lambda u, \kappa_1)}, \qquad \lambda \cdot \frac{\lambda}{sn(\lambda u, \kappa_1)} \ ,$$

und die eindeutig bestimmten Größen λ u. κ_1 findet man aus Specialwerten von u. Zu [S.280]

$$u = 0, \ \mathrm{K}, \ i\mathrm{K}', \ \mathrm{K} + i\mathrm{K}'$$

gehört

$$\lambda u = u_1 = 0, \ \lambda i A', \ -\lambda A, \ \lambda(iA' - A)$$

oder

$$\lambda u = u_1 = 0, \ i\mathrm{K}_1', \ -\mathrm{K}_1, \ -\mathrm{K}_1 + i\mathrm{K}_1$$

Setzt man jetzt in die ersten beiden von den drei Formeln

$$\frac{1}{sn(u,\kappa)} = \lambda \cdot \frac{cn(\lambda u, \kappa_1)}{sn(\lambda u, \kappa_1)}$$

$$\frac{dn(u,\kappa)}{sn(u,\kappa)} = \lambda \cdot \frac{dn(\lambda u, \kappa_1)}{sn(\lambda u, \kappa_1)}$$

$$\frac{cn(u,\kappa)}{sn(u,\kappa)} = \lambda \cdot \frac{1}{sn(\lambda u, \kappa_1)}$$

$u = \mathrm{K}, \lambda u = i\mathrm{K}'$ ein, und benutzt man dabei

$$\frac{cn(i\mathrm{K}_1' + z, \kappa_1)}{sn(i\mathrm{K}_1' + z, \kappa_1)} = -i \cdot dn(z, \kappa_1)$$

und

$$\frac{dn(i\mathrm{K}_1' + z, \kappa_1)}{sn(i\mathrm{K}_1' + z, \kappa_1)} = -i\kappa_1 \cdot cn(z, \kappa_1) \ ,$$

so findet man

$$1 = \lambda \cdot (-i) \qquad + \kappa' = \lambda \cdot (-i \cdot \kappa_1)$$

oder

$$\lambda = +i \qquad \kappa_1 = +\kappa'.$$

Weiter liefert die zweite Gleichung bei $u = i\mathrm{K}', u_1 = \lambda u = -i\mathrm{K}_1$:

$$-i \cdot \kappa = \lambda \cdot \frac{dn(-\mathrm{K}_1, \kappa_1)}{sn(\mathrm{K}_1, \kappa_1)} = \lambda \cdot \frac{\kappa_1'}{-1}$$

oder [91]

$$\kappa_1' = +\kappa \ .$$

Damit kommt man zum System: [S.281]

[91] Man findet auch $\mathrm{K} = \lambda A = +\mathrm{K}', \ \mathrm{K}' = \frac{\lambda}{i} i A' = \frac{\lambda}{\mathrm{K}} = \mathrm{K}.$

$$
\begin{aligned}
sn(iu, \kappa') &= +i \cdot \frac{sn(u, \kappa)}{cn(u, \kappa)} \\
cn(iu, \kappa') &= \ + \frac{1}{cn(u, \kappa)} \\
dn(iu, \kappa') &= \ + \frac{dn(u, \kappa)}{cn(u, \kappa)} \ .
\end{aligned}
$$

[S.281]

Anhang X: Über die Reihe $\sum \frac{e^{n\xi\pi i}}{\eta - n} = 2\pi i \cdot \frac{e^{\xi\eta\pi i}}{e^{2\eta\pi i} - 1}$

Auf S.212–13 u. S.218–19 ist darauf hingewiesen, daß man die Eigenschaften der Reihe direkt untersuchen u. damit schließlich ihren Wert bestimmen kann. Die Reihe hat Funktionscharakter, hat dieselben Unendlichkeitspunkte u. Residuen wie die rechts stehende Funktion u. beide Ausdrücke haben die Eigenschaft $\varphi(\eta+1) = e^{+\xi\pi i} \cdot \varphi(\eta)$. Das reelle ξ sei auf das Gebiet $0 < \xi < +2$ beschränkt. Setzt man $\eta = x + i \cdot y$, so läßt sich das Verschwinden für $y = \pm\infty$ bei endlichem x nur für den rechts stehenden Ausdruck, nicht aber für die Reihe zeigen[92]. Stellt man aber für [S.282] die Derivierten beider Ausdrücke diese Betrachtung an, so ergibt sich für dieselben diese Eigenschaft leicht, wenigstens sieht man, daß die Reihe im Unendlichen ($y = \pm\infty$, x endlich) nicht unendlich wird. Das lehrt die Gleichheit der Derivierten der Reihe $\sum \frac{e^{+n\xi\pi i}}{\eta - n}$ u. des Ausdrucks $2\pi i \cdot \frac{e^{+\xi\eta\pi i}}{e^{+2\eta\pi i} - 1}$ bis auf eine additive Constante, die aber 0 ist, weil beide Größen die Eigenschaft $f(\eta+1) = e^{+\xi\pi i} \cdot f(\eta)$ haben, wo $e^{\xi\pi i}$ nicht $+1$ sein kann. Die Funktionen selbst, deren Derivierten gleich sind, werden dann durch dieselbe Schlußweise als vollkommen (u. nicht blos bis auf eine additive Constante) gleich erkannt. — Gefunden Mitte Juli (Nachts), ausführlicher dargestellt in den Entwürfen einer Abhandlung über Partialbruch-Entwicklungen (vom Sommer 1892). [S.283]

— Zur Anmerkung a.S.185 ist zu bemerken: In $f(\eta) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)dz}{z - \eta} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{-N,N}^{n} \frac{e^{+n\xi\pi i}}{\eta - n}$, wo sich das Integral etwa auf den Kreis vom Radius $R = N + \frac{1}{2}$ bezieht, wird das Integral im $\lim_{N=\infty}$ gewiß nicht unendlich, u. wenn es einen Grenzwert besitzt, so ist er von η unabhängig (u. endlich; daß er 0 ist, übersieht man zunächst noch nicht). Nun hat der Summenausdruck für $N = \infty$ einen bestimmten Wert (S.219, 220), also hat das Integral auch einen Grenzwert u. es ist: $f(\eta) = \text{Const} + \frac{1}{2\pi i} \lim_{N=\infty} \sum_{-N,N}^{n} \frac{e^{+n\xi\pi i}}{\eta - n}$, wo die Constante übrigens noch vom Parameter ξ abhängen könnte. Die linke Seite hat aber die Eigenschaft $f(\eta+1) = e^{+\xi\pi i} \cdot f(\eta)$, dasselbe gilt von der Reihe rechts; also kann die Const. nur 0 sein.[93]

— Zur Anmerkung a.v.S.: Nach S.219 hat man

$$\left|(e^{\frac{1}{2}\xi\pi i} - e^{-\frac{1}{2}\xi\pi i}) \cdot \lim_{N_1,N_2=\infty} \sum_{-N_1,+N_2}^{n} \frac{e^{n\xi\pi i}}{\eta - n}\right| \leq \sum_{-\infty,+\infty}^{n} \frac{1}{|\eta - n| \cdot |\eta - n - 1|}.$$

η sei $\alpha + \beta i$, dann folgt [S.284]

$$\begin{aligned}\sum_{-\infty,+\infty}^{n} \frac{1}{|\eta - n| \cdot |\eta - n - 1|} &= \sum_{-\infty,+\infty}^{m} \frac{1}{|m + \alpha + \beta i| \cdot |m - 1 + \alpha + \beta i|} \\ &= \sum_{-\infty,+\infty}^{m} \frac{1}{\sqrt{(m+\alpha)^2 + \beta^2} \cdot \sqrt{(m - 1 + \alpha)^2 + \beta^2}}.\end{aligned}$$

[92] Auch für die Reihe $\varphi(\eta)$ gelang der Beweis (Februar 1993), vgl. auch den Schlußsatz auf S.265. S. nächste S. unten.

[93] Nicht ganz so einfach folgt $\text{Const} = 0$ aus dem Verhalten im Unendlichen, vgl. nächste Seite.

α darf jetzt auf das Gebiet $0 <= \alpha <= +1$ beschränkt werden, wegen der Periodizität des Ausdrucks für α. Die Reihe besteht aus dem Glied für $m = 0$ – dieses verschwindet für $\beta = \infty$ – u. aus

$$S_1 = \sum_{+1,+\infty}^{m} \frac{1}{\sqrt{(m+\alpha)^2 + \beta^2} \cdot \sqrt{(m-1+\alpha)^2 + \beta^2}}$$

$$S_2 = \sum_{+1,+\infty}^{m} \frac{1}{\sqrt{(m-\alpha)^2 + \beta^2} \cdot \sqrt{(m+1-\alpha)^2 + \beta^2}} \,.$$

Für $0 \leq \alpha \leq 1$ u. $m = 1, 2, 3 \ldots$ hat man aber

$$m + \alpha > m - 1 + \alpha \geq m - 1$$

$$m + 1 - \alpha > m - \alpha \geq m - 1\,,$$

u. S_1 sowohl wie S_2 liegt unter $\displaystyle\sum_{1,\infty}^{m} \frac{1}{(m-1)^2 + \beta^2} = \sum_{0,\infty}^{m} \frac{1}{m^2 + \beta^2}$, d.h. unter $\displaystyle\frac{1}{\beta^2} + \int_0^\infty \frac{dt}{t^2 + \beta^2} = \frac{1}{\beta^2} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\beta^2}}$. Das verschwindet für $\beta = \pm\infty$.

Inhaltsverzeichnis

ANHANG

$\boxed{\text{Some definitions/formulas}}$

$$\mathcal{E}n(u_0,u,v,w) \;=\; \frac{\vartheta(\frac{u_0}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta'(0,\varepsilon\frac{w}{v})}\cdot \mathrm{e}^{(u-u_0)\cdot f_1(u,v,w)+\frac{(u-u_0)^2}{2}\cdot f_2(u,v,w)} \tag{S.30}$$

$$f_r(u,v,w) \;=\; \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-N,N}^{n}\sum_{-M,M}^{m}\frac{1}{(u+mv+nw)^r} \tag{S.36,56}$$

$$\overline{\mathcal{E}n}(u_0,v,w) \;=\; v\cdot\frac{\vartheta(\frac{u_0}{v},\varepsilon\frac{w}{v})}{\vartheta'(0,\varepsilon\frac{w}{v})}\cdot \mathrm{e}^{+\frac{u_0^2}{2}\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-N,N}^{n}\sum_{-M,M}^{m}\frac{1}{(mv+nw)^2}} \tag{S.52}$$

$$en(u,v,w) \;=\; \frac{1}{u^2}+\sum_{m,n}\Big\{\frac{1}{(u+mv+nw)^2}-\frac{1}{(mv+nw)^2}\Big\} \tag{S.77}$$

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0,u,v,\varepsilon w) \;=\; \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{-M,M}^{m}\sum_{-N,N}^{n}\frac{\mathrm{e}^{2(n\sigma_0-m\tau_0)\pi i}}{u+mv+nw} \tag{S.100}$$

$$\overline{\mathcal{A}tr}(\varepsilon u_0,u,v,\varepsilon w) \;=\; \frac{\mathrm{e}^{2\tau_0\frac{u}{v}\pi i}}{v}\cdot\frac{\vartheta'(0,\frac{\varepsilon w}{v})\cdot\vartheta(\frac{\varepsilon u_0+v}{v},\frac{\varepsilon w}{v})}{\vartheta(\frac{\varepsilon u_0}{v},\frac{\varepsilon w}{v})\cdot\vartheta(\frac{u}{v},\frac{\varepsilon w}{v})}$$

$$\mathcal{S}er_\rho(u_0,u,v,w) \;=\; \lim_{M=\infty}\sum_{-M,M}^{m}\sum_{-M,M}^{n}\frac{\mathrm{e}^{2(n\sigma_0-m\tau_0)\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\rho}} \tag{S.128,238}$$

$$2\pi i\cdot\frac{\mathrm{e}^{\xi\eta\pi i}}{\mathrm{e}^{2\eta\pi i}-1} \;=\; \lim_{N=\infty}\sum_{-N,N}^{n}\frac{\mathrm{e}^{n\xi\pi i}}{\eta-n} \tag{S.82,281}$$