SOMMES DE DEDEKIND
ET PÉRIODES DE FORMES MODULAIRES DE HILBERT

Nous commençons par étendre la construction des sommes de Dedekind dans le cas d'un corps de nombres F totalement réel de nombre de classes 1. Notre méthode repose sur le choix d'un analogue convenable du logarithme de la fonction η de Dedekind. Sa formule de transformation modulaire, que nous déduisons de la formule limite de Kronecker obtenue par Asai, fait apparaître une généralisation Φ' de la fonction Φ de Rademacher. Ceci nous permet de définir et d'étudier les sommes de Dedekind correspondantes.

Dans un deuxième temps, nous considérons cette nouvelle fonction Φ' à valeurs réelles comme une période associée à une série d'Eisenstein. Nous la relions à des valeurs spéciales de fonctions L de Hecke-Shimizu en $s = 0$. On observe que la nature arithmétique de ces valeurs spéciales est gouvernée par la conjecture de Stark lorsque F est quadratique.

Finalement, nous proposons, en collaboration avec Henri Darmon, un raffinement de cette conjecture. En relevant Φ' en un invariant complexe, nous donnons une construction qui, dans l'esprit du $12^{\text{ème}}$ problème de Hilbert, devrait permettre de récupérer non seulement le module mais aussi l'argument de l'unité de Stark. Notre conjecture a également des conséquences sur la valeur des invariants géométriques de Hirzebruch-Atiyah-Singer, et nous en donnons des tests numériques.

Mots-clés : Valeurs spéciales de fonctions L, conjecture de Stark, $12^{\text{ème}}$ problème de Hilbert, périodes de séries d'Eisenstein, groupe modulaire de Hilbert, fonction Φ de Rademacher, sommes de Dedekind, invariants de Hirzebruch-Atiyah-Singer-Shimizu.

DEDEKIND SUMS AND PERIODS OF HILBERT MODULAR FORMS

We first extend the construction of Dedekind sums to the case of an arbitrary totally real number field F of class number 1. Our method is based on the choice of some convenient analogue of the logarithm of Dedekind η function. We deduce its modular transformation formula from the Kronecker limit formula established by Asai. From this we obtain a generalization Φ' of Rademacher's Φ function. We use it to define and study the corresponding Dedekind sums.

In a second part we consider the real valued function Φ' as a period of some Eisenstein series. We relate it to special values of Hecke-Shimizu L-functions at $s = 0$. One notices that the arithmetic behaviour of such special values is controlled by Stark's Conjecture, at least when F is quadratic.

Finally, in collaboration with Henri Darmon, we discuss a refinement of this conjecture, which involves a natural complex "lifting" of Φ'. This new invariant should give not only the absolute value of the Stark unit, but also its argument. This conjectural construction is in the spirit of Hilbert's 12^{th} problem. Our conjecture also has consequences on the value of the geometric invariants of Hirzebruch and Atiyah-Singer. We provide some numerical experimentations of these consequences.

Key-words : Special values of L-functions, Stark's conjecture, Hilbert's 12^{th} problem, periods of Eisenstein series, Hilbert modular group, Rademacher's Φ function, Dedekind sums, Hirzebruch-Atiyah-Singer-Shimizu invariants.

MATHÉMATIQUES PURES

Laboratoire A2X, Institut de Mathématiques de l'Université Bordeaux 1, 351 Cours de la Libération, 33405 Talence , France