AMPHI 1

REPRÉSENTATIONS DES GROUPES FINIS (1895-1905)

•Ancètres : cristallographie (vers 1830) et théorème de la progression arithmétique de Dirichlet (1837, cas commutatif).

•Étude simultanée de plusieurs isomorphismes d'un espace vectoriel.

•Théorie des caractères = analyse de Fourier sur les groupes finis.

Groupe opérant sur un ensemble

•G un groupe et X un ensemble. G *opère sur* X, si on a $(g, x) \mapsto g \cdot x$ de $G \times X$ dans X, avec $1 \cdot x = x$ et $g \cdot (g' \cdot x) = gg' \cdot x$.

•Si $x \in X$, *l'orbite* O_x de x est l'ensemble $\{g \cdot x,\ g \in G\}$. Si $y = h \cdot x \in O_x$, alors $O_y = \{g \cdot (h \cdot x),\ g \in G\} = \{gh \cdot x,\ g \in G\} = \{g \cdot x,\ g \in G\} = O_x$. Les orbites forment une partition de X.

•Le *stabilisateur* G_x de x est le sous-groupe des $g \in G$ vérifiant $g \cdot x = x$.

•Si V est un K-e.v., le groupe $\mathbf{GL}(V)$ des $g : V \to V$ linéaires bijectives opère sur V (par $g \cdot v = g(v)$) ; si $V = K^n$, alors $\mathbf{GL}(V) = \mathbf{GL}_n(K)$.

•D_4 groupe des symétries du carré.

•Si $H \subset G$ est un sous-groupe, $G/H = \{xH,\ x \in G\}$ est l'ensemble des *classes à droite modulo* H. G opère sur G/H par $g \cdot xH = gxH$.

•Si G fini, $|G| = |H| \cdot |G/H|$ ($\Rightarrow$ Lagrange).

•Si G opère sur X et $x \in X$, alors $G/G_x \to O_x$ définie par $gG_x \mapsto g \cdot x$ est une bijection. Si G fini, $|G| = |O_x| \cdot |G_x|$.

•G opère sur G par *conjugaison* $g \cdot x = gxg^{-1}$. Les orbites $C_x = G/Z_x$ sont les *classes de conjugaison* ; $\mathrm{Conj}(G) = \{$classes de conjugaison$\}$.

– G est commutatif ssi les classes de conjugaison n'ont qu'un élément.

– $A \in GL_n(K)$ diagonalisable $\Leftrightarrow$ A conjuguée à matrice diagonale.

– Classes de conjugaison de D_4.

Représentations des groupes

•Si G est un groupe, une K-*représentation* V est un K-espace vectoriel muni d'une action linéaire de G ($\mathrm{v} \mapsto \mathrm{g} \cdot \mathrm{v}$ linéaire pour tout $\mathrm{g} \in \mathrm{G}$). C'est équivalent à la donnée de $\rho_{\mathrm{V}} : \mathrm{G} \to \mathbf{GL}(\mathrm{V})$, morphisme de groupes (i.e. $\rho_{\mathrm{V}}(\mathrm{gg}') = \rho_{\mathrm{V}}(\mathrm{g})\rho_{\mathrm{V}}(\mathrm{g}')$), avec $\mathrm{g} \cdot \mathrm{v} = \rho_{\mathrm{V}}(\mathrm{g})(\mathrm{v})$.

•Représentations de C_2, $\mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_2$.

•Action de D_4 sur le carré $\mapsto$ représentation de D_4 (sous-groupe de $\mathbf{GL}(\mathrm{V})$).

•Représentations des groupes finis en cristallographie.

•Rep. des groupes de Lie $\mathbf{U}(1)$, $\mathbf{SU}(2)$... en physique des particules.

•Représentations de $\mathrm{Aut}(\mathbf{C})$, groupe des automorphismes du corps $\mathbf{C}$. Si $\mathrm{a^p} + \mathrm{b^p} = \mathrm{c^p}$, alors $\mathrm{y}^2 = \mathrm{x}(\mathrm{x} - \mathrm{a^p})(\mathrm{x} + \mathrm{b^p})$ fournit une $(\mathbf{Z}/\mathrm{p}\mathbf{Z})$-représentation de $\mathrm{Aut}(\mathbf{C})$ trop belle pour exister (Wiles, 1994).

•Étude des objets sur lesquels G agit à travers les représentations de G.

•Étude des groupes : construction (Griess, 1982) du *monstre* de cardinal

$$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71,$$

dont l'existence était prévue depuis 10 ans, via la construction d'une représentation de dimension 196883 (sans ordinateur !). Point final de la classification des groupes finis simples (1950–198-).

Représentations des groupes finis

•G fini, $K = \mathbf{C}$, représentations V de dimension finie $\dim V$. Cas simple servant de modèle à tous les autres.

•*Caractère* χ_V de V défini par $\chi_V(g) = \mathrm{Tr}(\rho_V(g))$, si $g \in G$. C'est la somme des valeurs propres de $\rho_V(g)$ avec multiplicité ou la somme des termes diagonaux de la matrice $R_V(g)$ dans une base quelconque.

•$\chi_V(1) = \mathrm{Tr}(1) = \dim V$.

•$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA) \Rightarrow$

$$\chi_V(ghg^{-1}) = \mathrm{Tr}(\rho_V(g)\rho_V(h)\rho_V(g)^{-1}) = \mathrm{Tr}(\rho_V(h)) = \chi_V(h)$$

donc χ_V est constant sur les classes de conjugaison (*fonction centrale*).

•V_1 et V_2 sont *isomorphes* s'il existe $u : V_1 \to V_2$ linéaire bijectif tel que $u(g \cdot v) = g \cdot u(v)$, pour tout $v \in V_1$. Ceci se traduit par $u \circ \rho_{V_1}(g) = \rho_{V_2}(g) \circ u$ et donc $\rho_{V_1}(g) = u^{-1} \circ \rho_{V_2}(g) \circ u$ (i.e. on passe de ρ_{V_1} à ρ_{V_2} par un changement de base) et donc $\chi_{V_1} = \chi_{V_2}$.

•Surprise : V *est déterminée par son caractère* (à isomorphisme près).

Exemples

•Représentations de dimension $1 \leftrightarrow \eta : G \to \mathbf{C}^*$ morphismes de groupes (*caractères linéaires* ; $\widehat{G}$ leur ensemble). Si $V \leftrightarrow \eta$, alors $\chi_V = \eta$.

Représentation triviale $\mathbf{1} \leftrightarrow$ *caractère trivial* $\eta(g) = 1, \forall g$.

•*Torsion par un caractère linéaire* $V \otimes \eta$: on a $\chi_{V\otimes\eta} = \eta \cdot \chi_V$.

•*Somme directe* $V = V_1 \oplus V_2$, avec $g \cdot (v_1, v_2) = (g \cdot v_1, g \cdot v_2)$. On a $\chi_{V_1 \oplus V_2} = \chi_{V_1} + \chi_{V_2}$. Plus généralement $\oplus m_i V_i$ de caractère $\sum_i m_i \chi_{V_i}$.

•X ensemble fini muni d'une action de G définit une *représentation de permutation* V_X de base les e_x, pour $x \in X$, avec action de G dans cette base donnée par $g \cdot e_x = e_{g \cdot x}$. On a $\chi_{V_X}(g) = |\{x \in X,\ g \cdot x = x\}|$.

Cas important $X = G$ et $g \cdot x = gx$, *représentation régulière*.

$$\chi_{V_G}(1) = |G| \text{ et } \chi_{V_G}(g) = 0, \text{ si } g \neq 1.$$

Décomposition des représentations

•V est *irréductible*, si V n'a pas de sous-espace stable par G autre que V et 0 ($\Leftrightarrow$ pour tout $\mathrm{v} \in \mathrm{V} - \{0\}$, les $\mathrm{g} \cdot \mathrm{v}$, pour $\mathrm{g} \in \mathrm{G}$, engendrent V).

•Classifier les objets irréductibles et comprendre comment les assembler.

•Action de D_4 sur le carré $\mapsto$ représentation irréductible de D_4.

•Représentations irréductibles de C_2 et $\mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_2$.

Théorème (Maschke, 1899) *Toute représentation* V *est une somme directe de représentations irréductibles.*

•Cas de $\mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_2$: diagonalisation simultanée.

•*Table des caractères* de C_2, $\mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_2$ et D_4.

Produits scalaires hermitiens et espaces préhilbertiens

•Un *produit scalaire* $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel E est une application *sesquilinéaire, symétrique, définie positive*.

•$x \mapsto \|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ est une norme sur E.

•$\langle x, y\rangle = 0$ (x, y *orthogonaux*) $\Longrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

•$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$ (Cauchy-Schwarz) $\Longrightarrow (x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ continu.

•Si $F \subset E$ de dimension finie et si $(f_j)_{j\in J}$ base orthornormée de F, alors $p_F(x) = \sum_{j\in J}\langle f_j, x\rangle f_j$ (projection orthogonale sur F) et $E = F \oplus F^{\perp}$.

Théorème *Il existe sur* V *un produit scalaire hermitien* $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{V}}$ *invariant sous l'action de* G.

$\ast$On part de $\langle\ ,\ \rangle$ et on fait la moyenne $\langle \mathrm{v}, \mathrm{v}' \rangle_{\mathrm{V}} = \dfrac{1}{|\mathrm{G}|} \displaystyle\sum_{\mathrm{g} \in \mathrm{G}} \langle \mathrm{g} \cdot \mathrm{v}, \mathrm{g} \cdot \mathrm{v}' \rangle$.

$\bullet$Démonstration du th. de Maschke (stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable, récurrence sur la dimension).