AMPHI 4

INTÉGRALE DE LEBESGUE (SUITE)

Rappels

•Une fonction est *mesurable* si elle est limite simple p.p. d'une suite de fonctions en escalier (en pratique, toute fonction est mesurable).

•Si f est positive, mesurable, $\int \mathrm{f} \in \overline{\mathbf{R}}_+$.

•Si $\mathrm{u_n} \geq 0$, alors $\int \sum \mathrm{u_n} = \sum \int \mathrm{u_n}$ (CV monotone).

•f *sommable* si $\int |\mathrm{f}| < +\infty$, et $\int \mathrm{f} \in \mathbf{C}$.

•Si $|\mathrm{f_n}| \leq \mathrm{h}$ et $\mathrm{f_n} \to \mathrm{f}$ p.p., avec h sommable, alors $\int \mathrm{f_n} \to \int \mathrm{f}$ (CV dominée).

•Si $\sum \int |\mathrm{u_n}| < +\infty$, alors $\sum \mathrm{u_n}$ CV p.p. et $\int \sum \mathrm{u_n} = \sum \int \mathrm{u_n}$ (Fubini).

Espaces vectoriels normés

•Une *norme* $\| \ \| : \mathrm{E} \to \mathbf{R}$ sur un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E, est une application vérifiant $\|x\| = 0$ ssi $x = 0$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ et $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Alors $d(x, y) = \|x - y\|$ est une distance.

•$u : (\mathrm{E}, \| \ \|_{\mathrm{E}}) \to (\mathrm{F}, \| \ \|_{\mathrm{F}})$ linéaire est continue ssi il existe C tel que $\|u(x)\|_{\mathrm{F}} \leq \mathrm{C}\|x\|_{\mathrm{E}}$, pour tout $x \in \mathrm{E}$. On pose

$$\|u\| = \inf\{\mathrm{C}, \ \|u(x)\|_{\mathrm{F}} \leq \mathrm{C}\|x\|_{\mathrm{E}}, \ \forall x\} = \sup_{x \in \mathrm{E} - \{0\}} \|x\|_{\mathrm{E}}^{-1} \|u(x)\|_{\mathrm{F}}.$$

•$\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ sont *équivalentes* sur E si $\mathrm{id} : (\mathrm{E}, \| \ \|_1) \to (\mathrm{E}, \| \ \|_2)$ est continue ainsi que son inverse (ssi $\mathrm{C}^{-1}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \mathrm{C}\|x\|_1, \forall x \in \mathrm{E}$).

•Un EVN $(\mathrm{E}, \| \ \|)$ complet est un *espace de Banach*.

•Il suffit de vérifier $\sum_{\mathrm{n}\in\mathbf{N}} \|\mathrm{x_n}\| < +\infty \Longrightarrow \sum_{\mathrm{n}\in\mathbf{N}} \mathrm{x_n}$ converge dans E.

•Ex : $\mathscr{C}_\mathrm{b}(\mathrm{X})$, muni de $\|\mathrm{f}\|_\infty = \sup |\mathrm{f}(\mathrm{x})|$ (norme de la convergence uniforme), et $\mathscr{C}_0(\mathbf{R}^\mathrm{m})$ est fermé dans $\mathscr{C}_\mathrm{b}(\mathbf{R}^\mathrm{m})$, donc est complet.

Théorème *Si* E *est de dimension finie, toutes les normes sur* E *sont équivalentes,* E *est complet et la boule unité est toujours compacte*.

•Totalement faux en dimension infinie ; choix d'une norme dicté par le problème.

•Ex : $\mathscr{C}([0,1], \| \ \|_1)$ pas complet, $\|\mathrm{f}\|_1 = \int_0^1 |\mathrm{f}|$.

Espaces de Hilbert

•Un *produit scalaire* $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \mapsto \langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle$ sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel E est une application *sesquilinéaire, symétrique, définie positive*.

•$\mathrm{x} \mapsto \|\mathrm{x}\| = \langle \mathrm{x}, \mathrm{x} \rangle^{1/2}$ est une norme sur E.

•$\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle = 0$ (x, y *orthogonaux*) $\Longrightarrow \|\mathrm{x} + \mathrm{y}\|^2 = \|\mathrm{x}\|^2 + \|\mathrm{y}\|^2$.

•$|\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle| \leq \|\mathrm{x}\| \, \|\mathrm{y}\|$ (Cauchy-Schwarz) $\Longrightarrow (\mathrm{x}, \mathrm{y}) \mapsto \langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle$ continu.

•Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est *préhilbertien* ; c'est un *espace de Hilbert* s'il est complet.

•Un $\mathbf{C}$-EV de dimension n muni de $\langle\ ,\ \rangle$ ($\cong \mathbf{C}^{\mathrm{n}}$ muni de $\overline{\mathrm{x}_1}\mathrm{y}_1+\cdots+\overline{\mathrm{x}_\mathrm{n}}\mathrm{y}_\mathrm{n}$).

•L'espace ℓ^2 des suites $(\mathrm{a}_\mathrm{n})_{\mathrm{n}\in\mathbf{N}}$ vérifiant $\sum_\mathrm{n}|\mathrm{a}_\mathrm{n}|^2<+\infty$, muni du produit scalaire $\langle(\mathrm{a}_\mathrm{n})_{\mathrm{n}\in\mathbf{N}},(\mathrm{b}_\mathrm{n})_{\mathrm{n}\in\mathbf{N}}\rangle=\sum_\mathrm{n}\overline{\mathrm{a}_\mathrm{n}}\mathrm{b}_\mathrm{n}$.

$*|\mathrm{a}+\mathrm{b}|^2\leq(|\mathrm{a}|+|\mathrm{b}|)^2=2(|\mathrm{a}|^2+|\mathrm{b}|^2)-(|\mathrm{a}|-|\mathrm{b}|)^2\leq 2(|\mathrm{a}|^2+|\mathrm{b}|^2)$.

$*\mathrm{x}^{(\mathrm{k})}=(\mathrm{x}_\mathrm{n}^{(\mathrm{k})})_{\mathrm{n}\in\mathbf{N}}$, pour $\mathrm{k}\in\mathbf{N}$, tel que $\sum_\mathrm{k}\|\mathrm{x}^{(\mathrm{k})}\|_2<+\infty$.

$*|\mathrm{x}_\mathrm{n}^{(\mathrm{k})}|\leq\|\mathrm{x}^{(\mathrm{k})}\|_2$ donc $\sum_\mathrm{k}\mathrm{x}_\mathrm{n}^{(\mathrm{k})}\to\mathrm{y}_\mathrm{n}$ et $|\mathrm{y}_\mathrm{n}|\leq\sum_\mathrm{k}|\mathrm{x}_\mathrm{n}^{(\mathrm{k})}|$.

$*\sum_\mathrm{n}(\sum_\mathrm{k}|\mathrm{x}_\mathrm{n}^{(\mathrm{k})}|)^2=\sum_{\mathrm{k}_1,\mathrm{k}_2}\langle|\mathrm{x}^{(\mathrm{k}_1)}|,|\mathrm{x}^{(\mathrm{k}_2)}|\rangle\leq\sum_{\mathrm{k}_1,\mathrm{k}_2}\|\mathrm{x}^{(\mathrm{k}_1)}\|_2\,\|\mathrm{x}^{(\mathrm{k}_2)}\|_2$
$=\big(\sum_\mathrm{k}\|\mathrm{x}^{(\mathrm{k})}\|_2\big)^2$, donc $\mathrm{y}=(\mathrm{y}_\mathrm{n})_{\mathrm{n}\in\mathbf{N}}\in\ell^2$.

$*\big\|\mathrm{y}-\sum_{\mathrm{k}<\mathrm{k}_0}\mathrm{x}^{(\mathrm{k})}\big\|_2^2\leq\big(\sum_{\mathrm{k}\geq\mathrm{k}_0}\|\mathrm{x}^{(\mathrm{k})}\|_2\big)^2\to 0$ quand $\mathrm{k}_0\to+\infty$.

Bases hilbertiennes (= bases orthornormales).

•Si E est un Hilbert (séparable), une *base hilbertienne* de E est une famille *orthonormale* $(\mathrm{e_i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$ (I dénombrable) engendrant un sous-espace dense.

Théorème (i) E *admet des bases hilbertiennes.*

(ii) *Si* $(\mathrm{e_i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$ *en est une,* $\mathrm{x} \mapsto (\langle \mathrm{e_i}, \mathrm{x}\rangle)_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$ *est une isométrie* $\mathrm{E} \cong \ell^2(\mathrm{I})$.

- $\mathrm{x} \in \mathrm{E} \Rightarrow \sum_{\mathrm{i}} |\langle \mathrm{e_i}, \mathrm{x}\rangle|^2 = \|\mathrm{x}\|^2$ (Bessel-Parseval).
- $(\mathrm{x_i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \in \ell^2(\mathrm{I}) \Rightarrow \sum_{\mathrm{i}} \mathrm{x_i}\mathrm{e_i} \to \mathrm{x}$ *dans* E *et* $\langle \mathrm{e_i}, \mathrm{x}\rangle = \mathrm{x_i}$, *pour tout* i.

L'espace $\mathrm{L}^1(\mathrm{X})$

•$\|f\|_1 = \int_X |f|$. On a $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$.

•$\|f\|_1 = 0$ ssi $f = 0$ p.p. En particulier, $\|f\|_1$ n'est pas une norme.

•Deux fonctions égales p.p. sont considérées comme égales $\longrightarrow \mathrm{L}^1(\mathrm{X})$.

Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathrm{X})$, on ne peut pas parler de $f(x_0)$.

•$f \mapsto \int f$ bien définie sur $\mathrm{L}^1(\mathrm{X})$, linéaire, continue.

Théorème $(\mathrm{L}^1(\mathrm{X}), \|\ \|_1)$ *est un Banach.*

•Grande force de l'intégrale de Lebesgue.

Théorème *X ouvert* $\Longrightarrow$ $\mathrm{Esc}(X)$, $\mathscr{C}_c(X)$ *et* $\mathscr{C}_c^\infty(X)$ *denses dans* $L^1(X)$.

•Démonstration de résultats pour $L^1(X)$ via des fonctions compréhensibles.

$*X = \cup_n D_n$ réunion croissante.

$*\phi \in L^1(X)$, $\phi_n(x) = \phi(x)$ si $x \in D_n$ et $|\phi(x)| \leq n$, et $\phi_n(x) = 0$ sinon.

$*\phi_n \to \phi$ dans $L^1(X)$ (CV dominée).

$*$il existe $f_n \in \mathrm{Esc}(D_n)$, avec $\int |f_n - \phi_n| \leq 2^{-n}$.

$*$Existence de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ plateaux.

L'espace $\mathrm{L}^2(\mathrm{X})$

•$|(f+g)^2| \leq 2|f^2| + 2|g^2|$ et $2\,|fg| \leq |f^2| + |g^2|$.

•$\mathscr{L}^2(\mathrm{X}) = \{f : \mathrm{X} \to \mathbf{C}, f^2 \text{ sommable}\}$, espace vectoriel.

•$\langle f, g\rangle = \int \overline{f}\, g$ forme sesquilinéaire positive. On pose $\|f\|_2 = \langle f, f\rangle^{1/2}$.

•On a $\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$ et $\|f\|_2 = 0$, ssi $f = 0$ p.p.

•Deux fonctions égales p.p. sont considérées comme égales $\longrightarrow \mathrm{L}^2(\mathrm{X})$.

Théorème (i) $(\mathrm{L}^2(\mathrm{X}), \|\ \|_2)$ *est un Hilbert.*

(ii) *Si* $f_n \to f$ *dans* $\mathrm{L}^2(\mathrm{X})$*, il existe* φ *telle que* $f_{\varphi(n)} \to f$ *p.p.*

(iii) *Si* X *est ouvert,* $\mathrm{Esc}(\mathrm{X})$*,* $\mathscr{C}_c(\mathrm{X})$ *et* $\mathscr{C}_c^\infty(\mathrm{X})$ *sont denses dans* $\mathrm{L}^2(\mathrm{X})$.

Comparaison des différents modes de convergence

$X \subset \mathbf{R}^m$ et f_n, pour $n \in \mathbf{N}$ et f des fonctions de X dans $\mathbf{C}$.

•Convergence uniforme $\Longrightarrow$ convergence simple $\Longrightarrow$ convergence p.p.

•Convergence p.p. + domination $\Longrightarrow$ convergence dans $L^1(X)$ ou $L^2(X)$ (th. de CV dominée).

•Convergence dans $L^1(X)$ ou $L^2(X)$ $\Longrightarrow$ sous-suites convergeant p.p.

•Convergence dans $L^2(X)$ $\Longrightarrow$ convergence dans $L^1(X)$ si $\lambda(X) < +\infty$ (Cauchy-Schwarz).

Théorème (Fubini) (i) *Si* $\mathrm{f} : \mathbf{R}^{\mathrm{n}+\mathrm{m}} \to \overline{\mathbf{R}}_{+}$ *est mesurable, alors* $\mathrm{y} \mapsto \int_{\mathbf{R}^{\mathrm{n}}} \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})\,\mathrm{dx}$ *et* $\mathrm{x} \mapsto \int_{\mathbf{R}^{\mathrm{m}}} \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})\,\mathrm{dy}$ *sont mesurables et*

$$\int_{\mathbf{R}^{\mathrm{m}}} \Big(\int_{\mathbf{R}^{\mathrm{n}}} \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})\,\mathrm{dx} \Big)\,\mathrm{dy} = \int_{\mathbf{R}^{\mathrm{n}+\mathrm{m}}} \mathrm{f} = \int_{\mathbf{R}^{\mathrm{n}}} \Big(\int_{\mathbf{R}^{\mathrm{m}}} \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})\,\mathrm{dy} \Big)\,\mathrm{dx}.$$

(ii) *Si* $\mathrm{f} \in \mathscr{L}^1(\mathbf{R}^{\mathrm{n}+\mathrm{m}})$, *alors* $\mathrm{f}(\cdot,\mathrm{y}) \in \mathscr{L}^1(\mathbf{R}^{\mathrm{n}})$ *et* $\mathrm{f}(\mathrm{x},\cdot) \in \mathscr{L}^1(\mathbf{R}^{\mathrm{m}})$ *p.p ;* $\mathrm{y} \mapsto \int_{\mathbf{R}^{\mathrm{n}}} \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})\,\mathrm{dx}$ *et* $\mathrm{x} \mapsto \int_{\mathbf{R}^{\mathrm{m}}} \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})\,\mathrm{dy}$ *sont sommables, et*

$$\int_{\mathbf{R}^{\mathrm{m}}} \Big(\int_{\mathbf{R}^{\mathrm{n}}} \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})\,\mathrm{dx} \Big)\,\mathrm{dy} = \int_{\mathbf{R}^{\mathrm{n}+\mathrm{m}}} \mathrm{f} = \int_{\mathbf{R}^{\mathrm{n}}} \Big(\int_{\mathbf{R}^{\mathrm{m}}} \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})\,\mathrm{dy} \Big)\,\mathrm{dx}.$$

• Théorème de (semi-)existence et méthode de calcul.

Changement de variable

•Ω ouvert de $\mathbf{R}^m$, $\varphi : \Omega \to \varphi(\Omega)$ difféomorphisme (φ et φ^{-1} sont $\mathscr{C}^1$).

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_m)).$$

•Le *jacobien* $J_\varphi(x) = \det\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x)\right)$; on a $J_\varphi(x) \neq 0$.

Théorème *Si* f *est mesurable sur* $\varphi(\Omega)$, *alors* $f \circ \varphi$ *est mesurable sur* Ω *et* f *est sommable ssi* $x \mapsto f(\varphi(x))\,|J_\varphi(x)|$ *est sommable sur* Ω *et*

$$\int_{\varphi(\Omega)} f(y)\,dy = \int_\Omega f(\varphi(x))\,|J_\varphi(x)|\,dx.$$

•Cas de la dimension 1 et d'une application affine.

Continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre

Théorème X *espace métrique,* $\mathrm{x}_0 \in \mathrm{X}$*, et* $\mathrm{f} : \mathbf{X} \times \mathbf{R}^{\mathrm{m}} \to \mathbf{C}$*, telle que*

•$\mathrm{t} \mapsto \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{t})$ *mesurable,* $\forall \mathrm{x} \in \mathrm{X}$ *;*

•$\mathrm{x} \mapsto \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{t})$ *continue en* x_0*, si* $\mathrm{t} \notin \mathrm{A}(\mathrm{x}_0)$*, avec* $\mathrm{A}(\mathrm{x}_0)$ *de mesure nulle ;*

•*il existe* h *sommable, telle que* $|\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{t})| \leq \mathrm{h}(\mathrm{t})$*, si* $\mathrm{t} \notin \mathrm{A}(\mathrm{x})$*, avec* $\mathrm{A}(\mathrm{x})$ *de mesure nulle.*

Alors $\mathrm{x} \mapsto \int_{\mathbf{R}^{\mathrm{m}}} \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{t})\, \mathrm{dt}$ *est continue en* x_0*.*

$*\mathrm{y}_{\mathrm{n}} \to \mathrm{x}_0,\ \mathrm{g}_{\mathrm{n}}(\mathrm{t}) = \mathrm{f}(\mathrm{y}_{\mathrm{n}}, \mathrm{t}),\ \mathrm{g}(\mathrm{t}) = \mathrm{f}(\mathrm{x}_0, \mathrm{t})$

$*|\mathrm{g}_{\mathrm{n}}| \leq \mathrm{h}$ et $\mathrm{g}_{\mathrm{n}} \to \mathrm{g}$ p.p. $\Rightarrow \int \mathrm{g}_{\mathrm{n}} \to \int \mathrm{g}$ (CV dominée).

Dérivation sous le signe somme

Théorème *Soit* $f : I \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{C}$, *avec* $I \subset \mathbf{R}$ *intervalle, vérifiant :*

•$t \mapsto f(x, t)$ *sommable,* $\forall x \in I$ *;*

•*Il existe* $A \subset \mathbf{R}^m$ *de mesure nulle et* h *sommable, tels que, pour tous* $x \in I$ *et* $t \notin A$, *on ait* $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| \leq h(t)$.

Alors $x \mapsto \int_{\mathbf{R}^m} f(x, t)\, dt$ *est dérivable sur* I, *de dérivée* $\int_{\mathbf{R}^m} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)\, dt$.

•La dérivabilité est une propriété locale, donc on peut diminuer I.

•Si $\boldsymbol{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbf{N}^n$, on pose

$$|\boldsymbol{\ell}| = \ell_1 + \cdots + \ell_n \quad \text{et} \quad \partial^{\boldsymbol{\ell}} = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)^{\ell_1} \cdots \Big(\frac{\partial}{\partial x_n}\Big)^{\ell_n}.$$

Théorème *Soient* $f : \Omega \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{C}$, *avec* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *ouvert, et* $k \in \mathbf{N}$. *S'il existe* $A \subset \mathbf{R}^m$ *de mesure nulle et* h *sommable, tels que, pour tous* $x \in \Omega$, $|\boldsymbol{\ell}| \leq k$ *et* $t \notin A$, *on ait* $|\partial^{\boldsymbol{\ell}} f(x,t)| \leq h(t)$.
Alors $x \mapsto \int_{\mathbf{R}^m} f(x,t)\,dt$ *est de classe* $\mathscr{C}^k$ *sur* Ω, *et si* $|\boldsymbol{\ell}| \leq k$,

$$\partial^{\boldsymbol{\ell}} \int_{\mathbf{R}^m} f(x,t)\,dt = \int_{\mathbf{R}^m} \partial^{\boldsymbol{\ell}} f(x,t)\,dt.$$