AMPHI 6

FONCTIONS HOLOMORPHES

Ω ouvert de $\mathbf{C}$ dans tout ce qui suit.

Séries entières (ou formelles)

•L'anneau $\mathrm{K}[[\mathrm{T}]] = \{\mathrm{F}(\mathrm{T}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{T}^n\}$.

•$$\mathrm{F}'(\mathrm{T}) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} \mathrm{T}^n, \qquad \frac{1}{k!}\mathrm{F}^{(k)}(\mathrm{T}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} a_{n+k} \mathrm{T}^n.$$

•$\mathrm{K} = \mathbf{C}$: *rayon de convergence* $\rho(\mathrm{F})$ de $\mathrm{F} \in \mathbf{C}[[\mathrm{T}]]$.

•La fonction $z \mapsto \mathrm{F}(z)$, pour $z \in \mathrm{D}(0, \rho(\mathrm{F})^-)$.

$$\mathrm{F}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k}{n} a_{n+k} z_0^k \Big) (z - z_0)^n, \quad \text{si } |z_0| + |z - z_0| < \rho(\mathrm{F}).$$

•F est *dérivable au sens complexe* : $\lim_{z \to z_0} \dfrac{\mathrm{F}(z) - \mathrm{F}(z_0)}{z - z_0} = \mathrm{F}'(z_0)$.

•f est *holomorphe* sur Ω si, pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe $F_{z_0} \in \mathbf{C}[[T]]$ de rayon de convergence $r > 0$, tel que $f(z) = F_{z_0}(z - z_0)$, si $|z - z_0| < r$.

•Un polynôme ou $\exp(\lambda z)$, pour $\lambda \in \mathbf{C}$ sont holomorphes sur $\mathbf{C}$.

•Produit et somme de deux fonctions holomorphes sont holomorphes.

$*(FG)(z) = F(z)G(z)$ et $(F + G)(z) = F(z) + G(z)$, si $|z| < \rho(F), \rho(G)$.

•f holomorphe et ne s'annulant pas $\Rightarrow 1/f$ holomorphe.

•la composée de deux fonctions holomorphes et l'inverse d'une bijection holomorphe sont holomorphes.

Coupures dans le plan complexe et logarithme

•$\mathrm{z} \rightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{z}}$ est biholomorphe de $\{\mathrm{z},\ \alpha < \mathrm{Im}(\mathrm{z}) < \alpha + 2\pi\}$ sur $\mathbf{C} - \mathbf{R}_+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$.

•$\log_\alpha : \mathbf{C} - \mathbf{R}_+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \rightarrow \{\mathrm{z},\ \alpha < \mathrm{Im}(\mathrm{z}) < \alpha + 2\pi\}$ inverse de exp : une détermination du logarithme.

•$\log_{-\pi} : \mathbf{C} - \mathbf{R}_- \rightarrow \{\mathrm{z},\ -\pi < \mathrm{Im}(\mathrm{z}) < \pi\}$: *détermination principale du logarithme*.

•On écrit simplement $\log \mathrm{z}$, et sa dérivée est $1/\mathrm{z}$, mais log est multivaluée.

•Si $\mathrm{s} \in \mathbf{C}$, on pose $\mathrm{z}^{\mathrm{s}} = \exp(\mathrm{s} \log \mathrm{x})$; fonction multivaluée si $\mathrm{s} \notin \mathbf{Z}$.

Premières propriétés

• *ordre du zéro* $v_{z_0}(f) \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ d'une fonction holomorphe : si $f(z - z_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$, alors $v_{z_0}(f) = \inf\{n,\ a_n \neq 0\}$.

Théorème (des zéros isolés) *Soit* f *holomorphe sur* Ω *connexe. Si* $f \neq 0$*, et si* $f(z_0) = 0$*, il existe* $r > 0$ *tel que* $f(z) \neq 0$*, si* $0 < |z - z_0| < r$.

$*z_0$ est un zéro non isolé ssi $f = 0$ sur $D(z_0, r^-)$, avec $r > 0$ (condition ouverte) ssi $f^{(n)}(z_0) = 0$, quel que soit $n \in \mathbf{N}$ (condition fermée).

•*Unicité du prolongement analytique* : si $f : \Omega \to \mathbf{C}$ est holomorphe et si $\Omega' \supset \Omega$, avec Ω' connexe, il existe au plus une $\tilde{f} : \Omega' \to \mathbf{C}$ holomorphe avec $\tilde{f}_{|\Omega} = f$.

•Exemples : $\sum_{n \in \mathbf{N}} z^n$ et $\zeta(z) = \sum_{n \geq 1} n^{-z}$.

Théorème (Principe du maximum) $f : \Omega \to \mathbf{C}$ *holomorphe,* Ω *connexe. Si* $|f|$ *admet un maximum local en* $z_0 \in \Omega$*, alors* f *est constante sur* Ω.

•Une fonction holomorphe atteint son maximum au bord.

Intégration le long d'un chemin

•Un *chemin* γ dans Ω est une application $\gamma : [a, b] \to \Omega$, continue, $\mathscr{C}^1$ par morceaux. $\gamma(a)$ est *l'origine* et $\gamma(b)$ *l'extrémité* de γ.

•$\lg(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$ est la *longueur* de γ.

•$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$ et $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq \lg(\gamma) \cdot \sup_{z\in\gamma} |f(z)|$.

•Longueur et *intégrale le long de* γ sont invariantes par *reparamétrage*.

•Le *cercle* $C(z_0, r)$ *parcouru dans le sens direct* (longueur $2\pi r$) : $t \in [0, 1]$,

$$t \mapsto z_0 + re^{2i\pi\, t}, \quad \int_{C(z_0,r)} f(z)dz = 2i\pi r \int_0^1 f(z_0 + re^{2i\pi\, t})e^{2i\pi t}dt.$$

•Le *segment* $[a, b]$ (longueur $|b - a|$) : $t \in [0, 1]$,

$$t \mapsto a + t(b - a), \quad \int_{[a,b]} f(z)dz = (b - a) \int_0^1 f(a + t(b - a))\,dt.$$

Théorème (Formule de Cauchy) $f : \Omega \to \mathbf{C}$ *de classe* $\mathscr{C}^1$ *au sens complexe,* $z_0 \in \Omega$, $r > 0$, *tels que* $D(z_0, r) \subset \Omega$. *Alors*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw, \quad \textit{si } z - z_0 < r.$$

•holomorphe $\Leftrightarrow$ $\mathscr{C}^1$ au sens complexe $\Leftrightarrow$ vérifie la formule de Cauchy.

•f est somme de sa série de Taylor sur tout disque contenu dans Ω.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw \right) (z - z_0)^n, \text{ si } |z - z_0| < r.$$

•$\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(z_0) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{C(z_0,r)} \dfrac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw$

$$\left|\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)\right| \leq r^{-n} \sup_{w\in C(z_0,r)} |f(w)|,$$ *inégalité de Cauchy*.

Si $K \subset U \subset \overline{U} \subset \Omega$, avec K compact et U ouvert,

$$\sup_{z\in K} |f^{(n)}(z)| \leq M(K,U,n) \sup_{z\in U} |f(z)|.$$

•Liouville : f *holomorphe et bornée sur* $\mathbf{C} \Rightarrow f$ *constante.*

•d'Alembert-Gauss : $\mathbf{C}$ est algébriquement clos.

Séries et produits infinis de fonctions holomorphes

Théorème $\mathrm{u_n}$, *pour* $\mathrm{n} \in \mathbf{N}$, *holomorphes sur* Ω ; $\sum_{\mathrm{n}} \mathrm{u_n} \to \mathrm{f}$ *uniformément (resp. normalement) sur tout compact de* Ω, *alors* f *est holomorphe, et* $\sum_{\mathrm{n}} \mathrm{u_n^{(k)}} \to \mathrm{f^{(k)}}$ *uniformément (normalement) sur tout compact,* $\forall \mathrm{k}$.

•Même énoncé avec une suite convergeant uniformément sur tout compact.

∗Formule de Cauchy + inversion de limite et intégrale.

Théorème $\mathrm{u_n}$, *pour* $\mathrm{n} \in \mathbf{N}$, *holomorphes sur* Ω, *telles que* $\sum_{\mathrm{n}} \mathrm{u_n}$ *converge normalement sur tout compact. Alors* $\prod_{\mathrm{n}} (1 + \mathrm{u_n}) \to \mathrm{f}$, *uniformément sur tout compact,* f *est holomorphe et* $\mathrm{v_z(f)} = \sum_{\mathrm{n}} \mathrm{v_z}(1 + \mathrm{u_n})$, *si* $\mathrm{z} \in \Omega$.

Fonctions holomorphes définies par une intégrale

Théorème $X \subset \mathbf{R}^m$ *mesurable, et* $F : \Omega \times X \to \mathbf{C}$, *avec*

•$z \mapsto F(z,t)$ *holomorphe sur* Ω, *pour tout* $t \in X$ *;*

•*pour tout* $z_0 \in \Omega$, *il existe* $r > 0$ *et* $g \in \mathscr{L}^1(X)$, *tels que* $D(z_0, r) \subset \Omega$ *et* $|F(z,t)| \leq g(t)$, *si* $|z - z_0| \leq r$ *et* $t \in X$.

Alors $f(z) = \int_X F(z,t)\,dt$ *est holomorphe sur* Ω.

∗Formule de Cauchy + Fubini.