AMPHI 7

FORMULES DE CAUCHY ET DES RESIDUS

Ω ouvert de $\mathbf{C}$ dans tout ce qui suit.

Coupures dans le plan complexe et logarithme

•$z \to e^z$ est biholomorphe de $\{z,\ \alpha < \mathrm{Im}(z) < \alpha + 2\pi\}$ sur $\mathbf{C} - \mathbf{R}_+ e^{i\alpha}$.

•$\log_\alpha : \mathbf{C} - \mathbf{R}_+ e^{i\alpha} \to \{z,\ \alpha < \mathrm{Im}(z) < \alpha + 2\pi\}$ une détermination du logarithme : $\log z = \log|z| + i\,\arg_\alpha z$.

•$\log_{-\pi} : \mathbf{C} - \mathbf{R}_- \to \{z,\ -\pi < \mathrm{Im}(z) < \pi\}$: *détermination principale du logarithme*.

•$\log_{-\pi} z = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n$ sur $D(1, 1^-)$.

•On écrit simplement $\log z$, et sa dérivée est $1/z$, mais log est multivaluée.

Vocabulaire de topologie algébrique

•$\Omega \subset \mathbf{C}$ est *contractile* (homotope à un point) s'il existe $\mathrm{u} : [0,1] \times \Omega \to \Omega$ continue, avec $\mathrm{u}(0,\mathrm{z}) = \mathrm{z}$ et $\mathrm{u}(1,\mathrm{z}) = \mathrm{z}_0$.

•contractile $\Rightarrow$ connexe par arcs ; *étoilé* $\Rightarrow$ contractile.

•$\mathbf{C}$ privé d'une demi-droite est étoilé ; $\mathbf{C} - \{\mathrm{z}_0\}$ non contractile.

•Un *lacet* dans Ω est un chemin ($\mathscr{C}^1$ par morceaux) fermé : $\gamma : [0,1] \to \Omega$, avec $\gamma(0) = \gamma(1)$, ou $\gamma : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \to \Omega$, ou $\gamma : \mathrm{S}^1 \to \Omega$.

•2 lacets γ_0, γ_1 sont *homotopes*, s'il existe $\mathrm{u} : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$, continue, avec $\mathrm{u}(0,\mathrm{t}) = \gamma_0(\mathrm{t})$, $\mathrm{u}(1,\mathrm{t}) = \gamma_1(\mathrm{t})$, et $\mathrm{u}(\mathrm{s},0) = \mathrm{u}(\mathrm{s},1)$, si $\mathrm{s} \in [0,1]$.

•Un lacet est *contractile* dans Ω s'il est homotope à un lacet constant (automatique si Ω est contractile).

•Cercle dans $\mathbf{C} - \{\mathrm{z}_0\}$, lacets sur la sphère et le tore. Point de départ de la topologie algébrique créée par Poincaré (Analysis in situ).

Théorème *Soit* f *de classe* $\mathscr{C}^1$ *au sens complexe sur* Ω*. Si* γ_0, γ_1 *sont des lacets homotopes dans* Ω*, alors* $\int_{\gamma_0} \mathrm{f(z)dz} = \int_{\gamma_1} \mathrm{f(z)dz}$.

•Si γ est contractile dans Ω, alors $\int_\gamma \mathrm{f(z)\,dz} = 0$.

Théorème (Formule de Cauchy) $f : \Omega \to \mathbf{C}$ *de classe* $\mathscr{C}^1$ *au sens complexe,* $z_0 \in \Omega$, $r > 0$, *tels que* $D(z_0, r) \subset \Omega$.

- $f(z) = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_{C(z_0,r)} \dfrac{f(w)}{w - z}\, dw$, *si* $|z - z_0| < r$.
- *Si* $a_n = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_{C(z_0,r)} \dfrac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw$, *alors* $f^{(n)}(z_0) = n!\, a_n$.
- $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$, *pour tout* z *tel que* $D(z_0, |z - z_0|) \subset \Omega$.

•holomorphe $\Leftrightarrow$ $\mathscr{C}^1$ au sens complexe $\Leftrightarrow$ vérifie la formule de Cauchy.

Fonctions holomorphes sur un disque épointé ; résidus

Théorème f *holomorphe sur* $D(z_0, R^-) - \{z_0\}$. *Si*

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw, \textit{ où } 0 < r < R,$$

$$g(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n \textit{ holomorphe sur } D(z_0, R^-),$$

$$h(z) = \sum_{n<0} a_n (z - z_0)^n \textit{ holomorphe sur } \mathbf{C} - \{z_0\},$$

$$f(z) = g(z) + h(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n (z - z_0)^n \text{ (série de Laurent).}$$

•h et a_{-1} sont la *partie singulière* et le *résidu* $\mathrm{Res}(f, z_0)$ de f en z_0.

$\bullet$Valuation $v_{z_0}(f) \in \mathbf{Z} \cup \{\pm\infty\}$ de f en z_0.

$\bullet$*Holomorphe en* z_0 si $v_{z_0}(f) \geq 0$, *méromorphe en* z_0 si $v_{z_0}(f) \neq -\infty$, *pôle d'ordre* $k \in \mathbf{N}$ si $v_{z_0}(f) = -k$, *singularité essentielle* (pôle d'ordre infini) si $v_{z_0}(f) = -\infty$.

Proposition $\bullet$f *holomorphe en* $z_0 \Leftrightarrow$ f *est bornée autour de* z_0.

$\bullet$f *méromorphe non holomorphe* $\Leftrightarrow |f| \to +\infty$ *quand* $z \to z_0$.

$\bullet$f *admet une singularité essentielle* $\Leftrightarrow f(D(z_0, r) - \{z_0\})$ *dense dans* $\mathbf{C}$.

$\bullet$f est *méromorphe sur* Ω si f est méromorphe en tout point de Ω. (f méromorphe $\Leftrightarrow f = g/h$, avec g, h holomorphes : $\Leftarrow$ facile, $\Rightarrow$ difficile.)

Primitives et indice d'un lacet par rapport à un point

•f holomorphe sur Ω, une *primitive* F de f est une fonction vérifiant $\mathrm{F}' = \mathrm{f}$.

•Si $\gamma : [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \to \Omega$ est un chemin, alors $\int_\gamma \mathrm{f}(\mathrm{z})\mathrm{dz} = \mathrm{F}(\gamma(\mathrm{b})) - \mathrm{F}(\gamma(\mathrm{a}))$.

•Il y a toujours une primitive localement ou si Ω est contractile.

Proposition Ω *connexe,* f *holomorphe sur* Ω. *Alors* f *admet une primitive* F *sur* Ω *ssi* $\int_\gamma \mathrm{f}(\mathrm{z})\mathrm{dz} = 0$ *pour tout lacet* γ *dans* Ω.

•Une fonction f, holomorphe sur Ω contractile, et ne s'annulant pas, admet un logarithme holomorphe : $\mathrm{h} = \displaystyle\int \frac{\mathrm{f}'}{\mathrm{f}}$ vérifie $\mathrm{e}^{\mathrm{h}} = \lambda \mathrm{f}$, avec $\lambda \in \mathbf{C}^*$.

•$\int_{C(z_0,r)} \frac{dz}{z-z_0} = 2i\pi \neq 0$, donc $1/(z-z_0)$ n'admet pas de primitive sur $\mathbf{C} - \{z_0\}$ qui n'est donc pas contractile (ainsi que $D(z_0, R^-) - \{z_0\}$).

•Si γ est un lacet dans $\mathbf{C}$ et $z_0 \notin \gamma$, alors $I(\gamma, z_0) = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} \in \mathbf{Z}$; c'est *l'indice de γ par rapport à z_0* (le nombre de tours de γ autour de z_0).

Proposition (Détermination visuelle de l'indice) *Soit γ un lacet dans* $\mathbf{C}$. *Alors* $I(\gamma, z) = 0$ *à l'infini, et si on franchit γ en un point simple non anguleux, alors* $I(\gamma, z)$ *augmente de* 1 *si γ arrive de la gauche, et diminue de* 1 *si γ arrive de la droite.*

La formule des résidus

Théorème $\mathrm{F} \subset \Omega$ *fini,* f *holomorphe sur* $\Omega - \mathrm{F}$*,* γ *un lacet contractile dans* Ω*, ne rencontrant pas* F*, alors*

$$\int_\gamma \mathrm{f}(\mathrm{z})\mathrm{d}\mathrm{z} = 2\mathrm{i}\pi \sum_{\mathrm{a}\in\mathrm{F}} \mathrm{I}(\gamma, \mathrm{a})\mathrm{Res}(\mathrm{f}, \mathrm{a}).$$

$*\mathrm{f}(\mathrm{z}) = \sum_{\mathrm{n}\in\mathbf{Z}} \mathrm{c}_{\mathrm{a},\mathrm{n}}(\mathrm{z}-\mathrm{a})^{\mathrm{n}}$, si $\mathrm{a} \in \mathrm{F}$ et $|\mathrm{z}-\mathrm{a}| < \mathrm{r}_{\mathrm{a}}$.

$*\mathrm{g}_{\mathrm{a}} = \sum_{\mathrm{n}\leq -2} \mathrm{c}_{\mathrm{a},\mathrm{n}}(\mathrm{z}-\mathrm{a})^{\mathrm{n}}$ a une primitive G_{a} sur $\mathbf{C} - \{\mathrm{a}\}$.

$*\mathrm{f} - \sum_{\mathrm{a}\in\mathrm{F}} \mathrm{g}_{\mathrm{a}} - \sum_{\mathrm{a}\in\mathrm{F}} \frac{\mathrm{c}_{\mathrm{a},-1}}{\mathrm{z}-\mathrm{a}}$ holomorphe sur Ω.

Quelques applications

•Des tas d'applications parfois très astucieuses à des calculs d'intégrales.

•$\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{C(0,R)} \dfrac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)} \longrightarrow$ Liouville.

•$\zeta(2) = \pi^2/6$ en intégrant $1/z^2(e^z - 1)$ sur le carré de sommets $(2N+1)\pi(\pm 1 \pm i)$.

Proposition (localisation des zéros d'une fonction holomorphe)

$D(z_0, r) \subset \Omega$ *et* f *holomorphe sur* Ω *ne s'annulant pas sur* $C(z_0, r)$. *Alors* $\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{C(z_0,r)} \dfrac{f'(z)}{f(z)}dz$ *est le nombre de zéros de* f *dans* $D(z_0, r)$.