UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE DE GRENOBLE
*Laboratoire de Mathématiques Pures associé au C.N.R.S.*

Jean-Marc Fontaine
INSTITUT FOURIER
MATHÉMATIQUES PURES
Boîte Postale 116
38402 SAINT-MARTIN-D'HÈRES

Téléphone (76) 87-45-61 à 64

*Nouveau n° Tél. (76) 54 61 45*

le 14 janvier 1978

Cher Serre,

Voici deux théorèmes :

I. - Puissances extérieures des groupes p-divisibles.

Théorème 1. - Soit $k$ un corps parfait de car. $p \neq 0$, et soit $A = W(k)$. Soit $G$ un groupe p-divisible sur $A$, de dimension un, et soit $T$ son module de Tate. Alors, pour tout entier $r \geqslant 0$ $\Lambda^r_{\mathbb{Z}_p}(T)$ est le module de Tate d'un groupe p-divisible sur $A$.

L'idée de la démonstration consiste, bien sûr, à remplacer $G$ par le module filtré $\underline{M}$ qui le classifie à isogénie près et à vérifier que $\Lambda^r(\underline{M})$ est un module filtré qui provient d'un groupe p-divisible sur $A$. Ce qui fait qu'en me fatigant un peu plus je devrais pouvoir admettre un peu plus de ramification ( $e \leq p-1$ ). En revanche, si $e > p-1$, je suis coincé car je ne sais pas reconnaître si un module filtré provient d'un groupe p-divisible.

II. - Représentations abéliennes provenant des groupes p-divisibles.

II.1. - Le théorème 2 (voir énoncé plus bas) les caractérise. A dire vrai, ce n'est pas encore un théorème car il reste beaucoup de choses à vérifier (ce que je pourrais d'ailleurs dire d'à peu près toute la théorie !), mais j'ai confiance que tout marche. Je vais d'abord énoncer deux corollaires (dans toute la suite $K$ est un corps valué, complet de car. $0$, à corps résiduel parfait $k$ de car. $p \neq 0$ , et $A$ est l'anneau des entiers de $K$ ) :

*Corollaire 1. - Soit* $E$ *une extension finie de* $\mathbb{Q}_p$ . *Pour qu'il existe un groupe p-divisible connexe sur* $A$ *tel que l'enveloppe algébrique de l'image de Galois dans la représentation p-adique associée soit isomorphe à* $GL_1(E)$ , *il faut et il suffit qu'il existe un* $\mathbb{Q}_p$*-plongement de* $E$ *dans* $K$ .

*Corollaire 2. - Soit* $\rho$ *une représentation abélienne de* $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ *(dans un vect. de dim. finie sur* $\mathbb{Q}_p$ ). *Pour qu'il existe un groupe p-divisible* $G$ *sur* $A$ *et un sous-groupe ouvert* $H$ *du groupe d'inertie sur lequel la restriction de* $\rho$ *et la restriction de la représentation provenant de* $G$ *sont isomorphes, il faut et il suffit que* $\rho$ *soit de Hodge-Tate , avec comme seuls poids* 0 *et* 1 .

*Remarque.* - Si l'on supprime l'hypothèse que $\rho$ est abélienne, cette condition, qui est toujours nécessaire, n'est plus suffisante comme le montre l'exemple des courbes elliptiques avec mauvaise réduction de type multiplicatif. Si l'on remplace "abélienne" par semi-simple, je serais surpris que la condition soit suffisante, mais je n'ai pas de contre-exemple.

II.2. - *Rappels sur les représentations abéliennes de type Hodge-Tate.*

Je reprend , sans les rappeler, les hypothèses et les notations de l'appendice du chap.III de "Abelian $\ell$-adic representations ... à ceci près que, pour des raisons évidentes, j'appelle $U$ ce que tu appelais $V$ et $\tau$ ce que tu appelais $\sigma$ . Je réécris le cor. de la page III-45 :

*Corollary* - $U$ *is of Hodge-Tate type if and only if there exist* $n_\tau \in \mathbb{Z}$ *such that* $\rho \cong \prod_{\tau \in \Gamma_E} \tau^{-1} \circ \chi_{\tau E}^{n_\tau}$ .

Je vais le réénoncer sous une forme un petit peu plus générale, que tu connais sûrement, i.e. je suppose toujours que $E$ est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, mais je ne suppose plus que $K$ contient tous les $\mathbb{Q}_p$-conjugués de $E$, ni même que $E$ peut être plongé dans $K$. Je note alors $\Gamma_E$ l'ensemble des $\mathbb{Q}_p$-plongements de $E$ dans $\overline{K}$. Alors $\mathcal{G}$ opère sur $\Gamma_E$. Si $\tau \in \Gamma_E$, je note $\tau^{-1} \circ \chi_{\tau E}$ le caractère évident de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K.\tau E)$ à valeurs dans $U_E$ et $\prod_{\tau' \text{conj. de } \tau} \tau'^{-1}.\chi_{\tau' E}$ le caractère de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ à valeurs dans $U_E$ déduit de $\tau^{-1} \circ \chi_{\tau E}$ par le transfert (qui ne dépend évidemment pas du choix de $\tau$ dans la classe de conjugaison).

Proposition. Un homomorphisme continu $\rho : \mathcal{G} \to U_E$ définit une représentation du type Hodge-Tate si et seulement si

$$\rho \equiv \prod_{\tau \in \Gamma_E} \tau^{-1} \circ \chi_{\tau E}^{n_\tau}$$

où les $n_\tau$ sont des entiers vérifiant $n_\tau = n_{\tau'}$ si $\tau$ et $\tau'$ sont conjugués par Galois. En outre la décomposition de Hodge-Tate n'a que les poids $0$ et $1$ si et seulement si tous les $n_\tau$ sont égaux à $0$ ou $1$.

II.3. - Le théorème II.

Je te rappelle que $\rho \equiv \rho'$ siginifie que $\rho$ et $\rho'$ coïncident sur un sous-groupe ouvert du groupe d'inertie. Je pose $\rho \underset{0}{\equiv} \rho'$ si $\rho$ et $\rho'$ coïncident sur tout le sous-groupe d'inertie.

Théorème II. - Pour que $\rho : \mathcal{G} \to U_E$ provienne de la représentation associée à un groupe p-divisible sur $A$, il faut et il suffit que

$$\rho \underset{0}{\equiv} \prod_{\tau \in \Gamma_E} \tau^{-1} \circ \chi_{\tau E}^{n_\tau} ,$$

où les $n_\tau$ valent $0$ ou $1$ et $n_\tau = n_{\tau'}$ si $\tau$ et $\tau'$ sont conjugués par Galois.

II.4. - La démonstration de ce théorème comprend deux parties :

- La première consiste à établir un résultat qui est dans le même esprit que celui qui dit que l'enveloppe algébrique de l'image de l'inertie dans la représentation provenant d'un p-divisible est connexe :

<u>Proposition 1.</u> - <u>Si</u> $\rho_1$ <u>et</u> $\rho_2$ <u>sont deux représentations semi-simples de</u> $\mathfrak{J}$ <u>vérifiant</u> $\rho_1 \equiv \rho_2$ <u>et si</u> $\rho_1$ <u>provient d'un groupe</u> p-<u>divisible sur</u> A , <u>alors</u> $\rho_2$ <u>provient d'un</u> p-<u>divisible sur</u> A <u>si et seulement si</u> $\rho_1 \underset{\sigma}{\equiv} \rho_2$ .

(L'hypothèse de semi-simplicité est probablement inutile, mais, pou le moment, je ne sais pas m'en débarasser).

- La deuxième consiste, bien sûr, pour chaque E et chaque famille de $n_\tau$ , vérifiant les conditions du théorème, à construire un groupe p-divisible qui définit la bonne représentation. En fait, j construis un "module filtré $\underline{M}$ " et je vérifie

- d'une part que la représentation associée à ce module filtré est celle qu'on cherche,

- d'autre part que le $\underline{M}$ provient bien d'un groupe p-divisible.

La vérification du "d'autre part" risque d'être un peu pénible : elle est très facile si E est non ramifié et est en principe faisable dans le cas général du fait que le groupe que l'on cherche est défini sur une base qui est une extension "peu ramifiée" du corp de ses endomorphismes.

II.5. - Je vais tenter de décrire le $\underline{M}$ correspondant à E et aux $n_\tau$

Si $K_o = \mathrm{Frac}(W(k))$ , il s'agit de se donner un couple $\underline{M} = (L,M)$ où M est un $K_o[F]$-module à gauche et où L est un sous-K-espace vectoriel de $M_K = K \otimes_{K_o} M$ .

En tant que $K_o$-espace vectoriel $M = K_o \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$. Si je considère $M$ comme un anneau, c'est un produit fini de corps locaux

$$M = K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_f .$$

Chaque $\tau \in \Gamma_E$ se prolonge par $K_o$-linéarité en un homomorphisme de $M$ dans $\overline{K}$ et je note, pour $i = 1,2,\ldots,f$, $s_i$ le nombre de $\tau$ vérifiant $n_\tau = 1$ et $\tau(K_i) \neq 0$. Si $v_i$ désigne la valuation de $K_i$ normalisée par $v(K_i^*) = \mathbb{Z}$, je choisis un élément $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_f) \in M$ tel que $v(\alpha_i) = s_i$ pour tout $i$ et je définis l'action de $F$ sur $M$ par

$$F(\lambda \otimes a) = (\lambda^\sigma \otimes a).\alpha .$$

Pour définir $L$, je procède ainsi ; j'ai $M_K = K \otimes_{K_o} M = K \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$. Chaque plongement $\tau$ de $E$ dans $\overline{K}$ se prolonge, par $K$-linéarité en une application $\beta \mapsto \beta_\tau$ de $M_K$ dans $\overline{K}$ ; alors $L$ est l'ensemble des $\beta \in M_K$ tels que $\beta_\tau = 0$ si $n_\tau = 0$.

III. - <u>Pour terminer, un mot sur</u> "$GL_2(K_2)$".

Soit $A = W(k)$ et soit $E = K_2$ une extension quadratique de $\mathbb{Q}_p$. Je prétend qu'il existe un groupe p-divisible $G$ sur $A$, connexe à dual connexe, de dim. 2 et hauteur 4, tel que, si $U = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_p(G)$, $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}_p[\eta]}(U)$ est isomorphe à $E$. Compte-tenu de ce que tu as raconté à Laurence, cela implique que, si $H$ est l'enveloppe algébrique de l'image de Galois,

i) ou bien $H = GL_2(E)$ ,

ii) ou bien $H$ est le sous-groupe de $GL_2(E)$ formé des matrices à déterminant dans $\mathbb{Q}_p$.

Si $E$ est non ramifié, il semble bien que les deux cas soient possibles. En revanche, si $E$ est ramifié, on est nécessairement dans le cas (ii) : l'espace $U$ est, en effet, un vectoriel de dimension 2 sur $E$ et 4 sur $\mathbb{Q}_p$ et il s'agit de savoir quelle est l'action de l'inertie sur $\Lambda^2_E U$ , i.e. quel est l'homomorphisme $\varrho : \mathcal{I} \longrightarrow U_E$ correspondant. Il y a deux plongements $\tau$ et $\tau'$ de $E$ dans $\bar{K}$ . Comme $\Lambda^2_E U$ est facteur-direct de $\Lambda^2_{\mathbb{Q}_p} U$ , il est de Hodge-Tate, et $\varrho$ est déterminé (prop. du n°II.2) par $n_\tau$ et $n_{\tau'}$ . Comme $\tau$ et $\tau'$ sont conjugués par Galois , on a $n_\tau = n_{\tau'}$ . Comme, avec des notations évidentes, $U$ est de H.T. de type $(2,2)$ , $\Lambda^2_{\mathbb{Q}_p} U$ est de H.T. de type $(1,4,1)$ , et on en déduit que $n_\tau = n_{\tau'} = 1$ . Autrement dit, $\varrho : \mathcal{I} \longrightarrow U_E$ est l'homomorphisme déduit de la représentation de Lubin-Tate de $E$ par le transfert. Tu constateras avec plaisir que $\varrho$ est bien à valeurs dans $\mathbb{Q}_p$ et que, en fait $\varrho = \chi$ (le car. fondamental). J'espère que tu es rassuré !

Bien à toi

JP Serre