AMPHI 8

SÉRIES DE DIRICHLET ET FONCTION ZETA DE RIEMANN

Principaux résultats de la théorie des fonctions holomorphes

•Principe du maximum, zéros isolés, unicité du prolongement analytique.

•Inégalités de Cauchy et convergence de la série de Taylor dans un disque d'holomorphie maximal.

•Construction de fonctions holomorphes (séries, produits et intégrales).

•Multivaluation du logarithme.

•Formule des résidus (contient la formule de Cauchy et l'invariance par homotopie de l'intégrale sur un lacet).

Premières propriétés des séries de Dirichlet

$\bullet \mathrm{L}(\mathbf{a}, \mathrm{s}) = \sum_{\mathrm{n}=1}^{+\infty} \mathrm{a_n n^{-s}}$, s variable complexe, $\mathbf{a} = (\mathrm{a_n})_{\mathrm{n} \geq 1}$, $\mathrm{a_n} \in \mathbf{C}$.

$\bullet$CV quelque part $\Leftrightarrow \mathrm{a_n} = \mathrm{O}(\mathrm{n^c})$. Abscisse de CV absolue σ_{abs}.

Théorème $\bullet \mathrm{L}(\mathbf{a}, \mathrm{s})$ *est holomorphe sur* $\mathrm{Re(s)} > \sigma_{\mathrm{abs}}$.

$\bullet \mathrm{L}^{(\mathrm{k})}(\mathbf{a}, \mathrm{s}) = \sum_{\mathrm{n}=1}^{+\infty} \mathrm{a_n} (-\log \mathrm{n})^{\mathrm{k}} \mathrm{n^{-s}}$, *si* $\mathrm{Re(s)} > \sigma_{\mathrm{abs}}$.

Théorème (Landau) *Si* $\mathrm{a_n} \geq 0$, *pour tout* n, *alors* $\mathrm{L}(\mathbf{a}, \mathrm{s})$ *ne peut se prolonger analytiquement dans aucun voisinage de* $\sigma = \sigma_{\mathrm{abs}}$.

$$*\text{holomorphe sur } \mathrm{D}(\sigma, 3\varepsilon^-) \Longrightarrow \mathrm{L}(\mathbf{a}, \sigma - \varepsilon) = \sum_{\mathrm{k}=0}^{+\infty} \mathrm{L}^{(\mathrm{k})}(\mathbf{a}, \sigma + \varepsilon) \frac{(-2\varepsilon)^{\mathrm{k}}}{\mathrm{k}!}.$$

La fonction ζ dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 1$

Théorème (i) $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$ *est holomorphe sur* $\mathrm{Re}(s) > 1$.

(ii) *Si* $\mathrm{Re}(s) > 1$, *le produit* $\prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$ *est convergent et égal à* $\zeta(s)$.

•Un produit infini $\prod_{i\in I} u_i$, avec $u_i \in \mathbf{C}$, est *convergent* s'il existe I_0 fini avec $u_i \neq 0$ si $i \notin I_0$ et $\sum_{i\notin I_0} |\log u_i| < +\infty$ ($\Leftrightarrow \sum_{i\in I} |u_i - 1| < +\infty$).

$$\prod_{i\in I} u_i = \Big(\prod_{i\in I_0} u_i\Big) \cdot \exp\Big(\sum_{i\notin I_0} \log u_i\Big)\,;$$

en particulier $\prod_{i\in I} u_i = 0$ ssi il existe i tel que $u_i = 0$.

•ζ ne s'annule pas sur $\mathrm{Re}(s) > 1$.

La fonction Γ d'Euler

Théorème *La fonction* $\Gamma(\mathrm{s}) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{t}}\mathrm{t}^{\mathrm{s}-1}\,\mathrm{dt}$, *si* $\mathrm{Re}(\mathrm{s}) > 0$, *admet un prolongement méromorphe sur* $\mathbf{C}$, *holomorphe sur* $\mathbf{C} - (-\mathbf{N})$, *vérifiant l'équation fonctionnelle* $\Gamma(\mathrm{s}+1) = \mathrm{s}\Gamma(\mathrm{s})$.

•Formule des compléments : $\Gamma(\mathrm{s})\Gamma(1-\mathrm{s}) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi \mathrm{s})}$.

•Formule de Stirling : sur $|\arg(\mathrm{s})| \leq \alpha < \pi$, quand $|\mathrm{s}| \to +\infty$,

$$\log\Gamma(\mathrm{s}) = \mathrm{s}\log\mathrm{s} - \mathrm{s} + \tfrac{1}{2}(\log 2\pi - \log\mathrm{s}) + \mathrm{O}_\alpha(\mathrm{s}^{-1}).$$

•$\frac{1}{\Gamma(\mathrm{s})}$ holomorphe sur $\mathbf{C}$.

Prolongement de ζ au plan complexe

Théorème (i) ζ *admet un prolongement méromorphe à* $\mathbf{C}$, *holomorphe en dehors d'un pôle simple en* $s = 1$ *de résidu* 1.

(ii) *Si* $\frac{z}{e^z-1} = \sum B_n \frac{z^n}{n!}$, *alors* $\zeta(-n) = (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1} \in \mathbf{Q}$.

•Les B_n sont les nombres de Bernoulli.

$$B_0 = 1, B_1 = \frac{-1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_{2n+1} = 0, \text{si } n \geq 1, B_{12} = \frac{-691}{2730}$$

$*$Si $\mathrm{Re(s)} > 1$, alors $\zeta(\mathrm{s}) = \dfrac{1}{\Gamma(\mathrm{s})}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{t}}{\mathrm{e^t}-1}\mathrm{t^{s-2}dt}$.

$*\mathrm{g(t)} = \frac{\mathrm{t}}{\mathrm{e^t}-1}$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+$ (holomorphe en dehors de $2\mathrm{i}\pi\mathbf{Z} - \{0\}$) et $\mathrm{t^N g^{(k)}(t)} \to 0$ quand $\mathrm{t} \to +\infty$, pour tous $\mathrm{N, k} \in \mathbf{N}$.

Proposition (i) *Si* f *est* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbf{R}_+$ *et* $\mathrm{t^N f^{(k)}(t)} \to 0$ *quand* $\mathrm{t} \to +\infty$, *pour tous* N, k, *alors* $\mathrm{M(f,s)} = \frac{1}{\Gamma(\mathrm{s})}\int_0^{+\infty} \mathrm{f(t)t^{s-1}dt}$ *est holomorphe sur* $\mathrm{Re(s)} > 0$, *admet un prolongement holomorphe à* $\mathbf{C}$.

(ii) $\mathrm{M(f,-k)} = (-1)^\mathrm{k}\mathrm{f^{(k)}(0)}$, *si* $\mathrm{k} \in \mathbf{N}$.

$\bullet(\mathrm{s}-1)\zeta(\mathrm{s}) = \mathrm{M(g, s-1)}$.

Fonctions L **de Dirichlet** $\mathrm{L}(\chi, \mathrm{s})$.

•*Caractère de Dirichlet modulo* D = caractère linéaire de $(\mathbf{Z}/\mathrm{D}\mathbf{Z})^*$. On note $\mathrm{Dir}(\mathrm{D})$ leur ensemble ; $\chi : (\mathbf{Z}/\mathrm{D}\mathbf{Z})^* \to \mathbf{C}^*$ est aussi vu comme $\chi : \mathbf{Z} \to \mathbf{C}^*$, de période D, avec $\chi(\mathrm{n}) = 0$, si $(\mathrm{n}, \mathrm{D}) \neq 1$.

•$\mathrm{L}(\chi, \mathrm{s}) = \sum_{\mathrm{n}=1}^{+\infty} \chi(\mathrm{n})\mathrm{n}^{-\mathrm{s}}$ (fonction L de Dirichlet).

•Si χ est *trivial*, alors $\mathrm{L}(\chi, \mathrm{s}) = \zeta(\mathrm{s}) \prod_{\mathrm{p}|\mathrm{D}}(1 - \mathrm{p}^{-\mathrm{s}})$.

Théorème (i) *Si* χ *est non trivial,* $\mathrm{L}(\chi, \mathrm{s})$ *converge absolument sur le demi-plan* $\mathrm{Re}(\mathrm{s}) > 1$ *et possède un prolongement holomorphe à* $\mathbf{C}$.

(ii) $\mathrm{L}(\chi, \mathrm{s})$ *se factorise* $\mathrm{L}(\chi, \mathrm{s}) = \prod_{\mathrm{p}}(1 - \chi(\mathrm{p})\mathrm{p}^{-\mathrm{s}})^{-1}$, *si* $\mathrm{Re}(\mathrm{s}) > 1$.

$*\mathrm{L}(\chi,\mathrm{s}) = \dfrac{1}{\Gamma(\mathrm{s})}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sum_{\mathrm{b}=1}^{\mathrm{D}} \chi(\mathrm{b})\mathrm{e}^{-\mathrm{bt}}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{Dt}}}\mathrm{t}^{\mathrm{s}}\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{t}}$

$*\sum_{\mathrm{b}=1}^{\mathrm{D}} \chi(\mathrm{b}) = \varphi(\mathrm{D})\,\langle \mathbf{1},\chi\rangle = 0$: orthogonalité des caractères de $(\mathbf{Z}/\mathrm{D}\mathbf{Z})^*$.

Théorème $\mathrm{L}(\chi,1) \neq 0$*, si* χ *est non trivial.*

$*$Si $\mathrm{L}(\chi,1)=0$, alors $\mathrm{F}(\mathrm{s}) = \prod_\chi \mathrm{L}(\chi,\mathrm{s})$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$.

$*$Si $\mathrm{Re}(\mathrm{s}) > 1$, alors $\mathrm{F}(\mathrm{s}) = \displaystyle\prod_{\mathrm{p}\nmid \mathrm{D}} \frac{1}{(1-\mathrm{p}^{-\mathrm{m_p s}})^{\varphi(\mathrm{D})/\mathrm{m_p}}}$ est une série de Dirichlet à coefficients entiers positifs $\Rightarrow$ contradiction avec le th. de Landau.

•Application au théorème de la progression arithmétique.

L'équation fonctionnelle de la fonction ζ

Théorème *La fonction ζ vérifie l'équation fonctionnelle*

$$\xi(\mathrm{s}) = \xi(1-\mathrm{s}), \quad \text{avec } \xi(\mathrm{s}) = \pi^{-\mathrm{s}/2}\Gamma(\mathrm{s}/2)\zeta(\mathrm{s}).$$

•En dehors de $0 \leq \mathrm{Re(s)} \leq 1$, *zéros triviaux* en $-2\mathrm{n}$, $\mathrm{n} \in \mathbf{N}^*$. *Hypothèse de Riemann* (1858) : tous les zéros dans la *bande critique* sur $\mathrm{Re(s)} = 1/2$.

$*$Si $\mathrm{Re}(s) > 1, 2\xi(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (g(t) - 1)t^{s/2}\, dt/t$, où $g(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{-\pi n^2 t}$.

$*$transformée de Fourier de $e^{-\pi x^2}$ est $e^{-\pi x^2}$, celle de $e^{-\pi t x^2}$ est $\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\pi t^{-1} x^2}$.

$*$Formule de Poisson : $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} g(t^{-1})$.

$*$On coupe l'intégrale en 1 et on fait le changement $t \mapsto t^{-1}$ sur $[0, 1]$.

$$\begin{aligned} 2\xi(s) &= \int_1^{+\infty} (g(t) - 1)t^{s/2} \frac{dt}{t} + \int_1^{+\infty} (t^{1/2} g(t) - 1)t^{-s/2} \frac{dt}{t} \\ &= \int_1^{+\infty} (g(t) - 1)(t^{s/2} + t^{(1-s)/2}) \frac{dt}{t} - (\frac{2}{1-s} + \frac{2}{s}). \end{aligned}$$