Séminaire BOURBAKI Novembre 1998
51ème année, 1998-99, n° 851

FONCTIONS L p-ADIQUES

par **P. COLMEZ**

Introduction

On a à présent une bonne compréhension (conjecturale) du comportement aux entiers des fonctions L complexes des motifs (conjectures de Deligne-Beilinson et de Bloch-Kato [15, 6, 46, 21] ; on pourra consulter le rapport Bourbaki de Fontaine [19] à ce sujet) et on aimerait bien obtenir le même genre de résultats pour leurs avatars p-adiques. Le premier problème auquel on est confronté est qu'on ne dispose pas (pour le moment) de définition p-adique de la fonction L p-adique d'un motif ; la fonction L complexe est "définie" par un produit eulérien qui converge dans un demi-plan alors que ce même produit eulérien diverge p-adiquement. De toute façon, même sur les complexes la définition en termes de produit eulérien ne donne à peu près aucun résultat intéressant et pour démontrer quoi que ce soit sur une fonction L complexe, il faut commencer par en trouver une autre définition ; de fait la seule méthode dont on dispose à l'heure actuelle est de commencer par relier la fonction L complexe à la théorie des formes automorphes.

Comme on ne sait pas définir p-adiquement les fonctions L p-adiques, on essaie de les construire par interpolation des valeurs aux entiers des fonctions L complexes. Par exemple, si $p \geq 3$, la fonction zêta p-adique (fonction zêta de Kubota-Leopoldt) a $p-1$ branches $\zeta_{p,i}$ pour $i \in \mathbf{Z}/(p-1)\mathbf{Z}$ et chacune de ces branches est construite en interpolant une partie des valeurs de la fonction zêta de Riemann aux entiers ; de manière précise,

$$\zeta_{p,i}(n) = \begin{cases} (1-p^{-n})\zeta(n) & \text{si } i \text{ est impair et } n \leq 0 \text{ est congru à } i \text{ modulo } p-1, \\ \frac{\Gamma(n)}{(2i\pi)^n}(1-p^{n-1})\zeta(n) & \text{si } i \text{ est pair et } n \geq 1 \text{ est congru à } i \text{ modulo } p-1. \end{cases}$$

Comme $i+(p-1)\mathbf{N}$ et $i-(p-1)\mathbf{N}$ sont denses dans $\mathbf{Z}_p$, cela détermine $\zeta_{p,i}$ de manière unique, le miracle étant qu'il existe une fonction raisonnable prenant ces valeurs.

Dans l'exemple de la fonction zêta de Kubota-Leopoldt, les valeurs que l'on interpole sont, d'après Euler, des nombres algébriques (et même rationnels) ; on est dans le cas favorable où l'on dispose de beaucoup de valeurs critiques au sens de Deligne [15]. La plupart des fonctions L p-adiques que l'on sait construire présupposent un lien avec la théorie des formes automorphes et l'existence de suffisamment de valeurs critiques [11] ; c'est le cas en particulier de celles construites par Manin [32] et Vishik [53], Amice et Vélu [3], Deligne et Ribet, Katz, Hida, Panchishkin… et nous renvoyons à [23, 24] pour ce point de vue que nous ne développerons pas, faute de place.

Dans cet exposé, nous allons décrire le point de vue de Perrin-Riou [41] qui est assez conjectural, mais fournit une image satisfaisante de ce que l'on peut espérer dans le cas de bonne réduction. En particulier, nous allons présenter une machine introduite par Perrin-Riou dans [40] qui permet de construire la fonction L p-adique d'un motif ayant bonne réduction en p à partir d'un "système compatible d'éléments spéciaux". Dans le cas de la fonction zêta de Kubota-Leopoldt, les éléments spéciaux sont les unités cyclotomiques et on retombe, en utilisant la machine de Perrin-Riou, sur la construction de la fonction zêta de Kubota-Leopoldt via les séries de Coleman [13], construction qui avait été inspirée par la construction par Coates et Wiles [12] de la fonction L p-adique d'une courbe elliptique à multiplication complexe à partir du système des unités elliptiques. Pour le moment, l'existence d'un "système compatible d'éléments spéciaux" relève, dans le cas général, de l'utopie mais, si on regarde les formules fournies par la machine de Perrin-Riou en ayant en tête le fait que les éléments spéciaux donnent, via une application "régulateur", les valeurs de la fonction L complexe, on obtient une conjecture sur les valeurs aux entiers de la fonction L p-adique que l'on peut voir soit comme l'analogue p-adique de la conjecture de Deligne-Beilinson, soit comme une définition (conjecturale) de la fonction L p-adique d'un motif par interpolation à partir des valeurs de sa fonction L complexe.

D'autre part, la machine de Perrin-Riou permet d'associer, sous des hypothèses beaucoup plus raisonnables que ci-dessus, une fonction L d'Iwasawa à un motif ayant bonne réduction en p. Cette fonction n'est bien définie qu'à multiplication près par une unité dans l'algèbre d'Iwasawa et on conjecture qu'elle ne diffère de la fonction L p-adique que par une unité dans l'algèbre d'Iwasawa (conjecture principale). Dans le cas du motif trivial, on retombe sur la conjecture d'Iwasawa reliant la fonction zêta de Kubota-Leopoldt aux groupes de classes d'idéaux des corps cyclotomiques, conjecture démontrée par Mazur et Wiles [34] et plus récemment par Rubin [44] en utilisant la méthode des systèmes d'Euler de Kolyvagin [31]. La conjecture principale peut aussi être énoncée en termes d'éléments spéciaux sans introduire de fonction L p-adique ; c'est le point de vue développé par Kato [28]. Comme la fonction L d'Iwasawa n'est bien définie qu'à une unité près dans l'algèbre d'Iwasawa, ses valeurs aux entiers ne sont bien définies qu'à multiplication près par une unité p-adique et le résultat principal de Perrin-Riou [41, chap. III] est que cette fonction L d'Iwasawa vérifie (l'analogue de) la conjecture de Bloch-Kato à une unité près, ce qui constitue le résultat général le plus encourageant en direction de la conjecture de Bloch-Kato. Signalons pour finir que la méthode des systèmes d'Euler [43, 29, 45] permet, dans le cas où la fonction L p-adique est obtenue à partir d'un système d'éléments spéciaux, de prouver une relation de divisibilité entre la fonction L d'Iwasawa et la fonction L p-adique.

1. EXEMPLES DE FONCTIONS L p-ADIQUES

1.1. Intégration sur $\mathbf{Z}_p$

1.1.1. *Quelques espaces fonctionnels.* Soient $\overline{\mathbf{Q}}_p$ une clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$ et $\mathbf{C}_p$ le complété de $\overline{\mathbf{Q}}_p$ pour la norme p-adique. Soit $\mathscr{C}^0$ l'espace des fonctions continues de $\mathbf{Z}_p$ dans $\mathbf{C}_p$. On fait de $\mathscr{C}^0$ un espace de Banach p-adique en le munissant de la norme $\| \ \|_{\mathscr{C}^0}$ définie par $\|f\|_{\mathscr{C}^0} = \sup_{x\in\mathbf{Z}_p} |f(x)|$.

Si $h \in \mathbf{N}$, soit LA_h l'espace des fonctions de $\mathbf{Z}_p$ dans $\mathbf{C}_p$ analytiques sur $a + p^h\mathbf{Z}_p$ quel que soit $a \in \mathbf{Z}_p$. Si $f \in \mathrm{LA}_h$, alors, quel que soit $x_0 \in \mathbf{Z}_p$, on peut développer f sous la forme $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x_0)\big(\frac{x-x_0}{p^h}\big)^k$, où $a_k(x_0)$ est une suite d'éléments de $\mathbf{C}_p$ tendant vers 0 quand k tend vers $+\infty$. Si $f \in \mathrm{LA}_h$ et $x_0 \in \mathbf{Z}_p$, on pose $\|f\|_h = \sup_{k\in\mathbf{N},x_0\in\mathbf{Z}_p}(|a_k(x_0)|)$ ce qui fait de LA_h un espace de Banach p-adique. On note LA l'espace des fonctions localement analytiques sur $\mathbf{Z}_p$ à valeurs dans $\mathbf{C}_p$; c'est la réunion des LA_h car $\mathbf{Z}_p$ est compact.

On dit qu'une fonction sur $\mathbf{Z}_p$ est de classe $\mathscr{C}^\infty_u$ si, pour tout $k \in \mathbf{N}$, la fonction $f^{[k]}$ définie sur $\mathbf{Z}_p \times (\mathbf{Z}_p - \{0\})^k$ par la formule

$$f^{[k]}(x, y_1, \ldots, y_k) = \frac{1}{y_1 \cdots y_k}\Big(\sum_{I\subset\{1,\ldots,k\}} (-1)^{k-|I|} f\Big(x + \sum_{i\in I} y_i\Big)\Big)$$

se prolonge en une fonction continue sur $\mathbf{Z}_p^{k+1}$.

Si f est une fonction de $\mathbf{Z}_p$ dans $\mathbf{C}_p$, soit $a_n(f)$ le n-ième coefficient de Mahler de f ; c'est l'élément de $\mathbf{C}_p$ donné par la formule $a_n(f) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}f(i)$.

THÉORÈME 1.1 (Mahler). — *f est continue sur $\mathbf{Z}_p$ si et seulement si $a_n(f)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. De plus, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f)\binom{x}{n}$ tend uniformément vers f sur $\mathbf{Z}_p$ et $\|f\|_{\mathscr{C}^0} = \sup_{n\in\mathbf{N}} |a_n(f)|$.*

Le théorème de Mahler nous donne donc une caractérisation des fonctions continues en termes de ses coefficients de Mahler. Le théorème suivant [1, 4] nous donne une caractérisation analogue des fonctions localement analytiques ou de classe $\mathscr{C}^\infty_u$.

THÉORÈME 1.2. — *(i) $f \in \mathrm{LA}_h$ si et seulement si $v_p(a_n(f)) - v_p([\frac{n}{p^h}]!)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. De plus, $\|f\|_{\mathrm{LA}_h} = p^{-\inf_n v_p(a_n(f))-v_p([\frac{n}{p^h}]!)}$.*

(ii) $f \in \mathrm{LA}$ si et seulement si $\liminf \frac{1}{n}v_p(a_n(f)) > 0$.

(iii) $f \in \mathscr{C}^\infty_u$ si et seulement si la suite de terme général $(1+n)^k|a_n(f)|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ quel que soit $k \in \mathbf{N}$.

1.1.2. *Distributions continues.* Si A est un espace de Banach p-adique, on appelle distribution continue sur $\mathbf{Z}_p$ à valeurs dans A toute application linéaire de LA dans A dont la restriction à LA_h est continue pour tout $h \in \mathbf{N}$. Les distributions continues sur $\mathbf{Z}_p$ à valeurs dans $\mathbf{C}_p$ forment une algèbre commutative et associative pour le produit de convolution.

On appelle mesure sur $\mathbf{Z}_p$ à valeurs dans A toute application linéaire continue de $\mathscr{C}^0$ dans A. Les mesures sur $\mathbf{Z}_p$ à valeurs dans $\mathbf{C}_p$ forment une sous-algèbre des distributions continues.

A une distribution continue, on associe deux séries formelles

$$\mathscr{A}_\mu(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(\mu) T^n \text{ avec } b_n(\mu) = \int_{\mathbf{Z}_p} \binom{x}{n} \mu(x) \quad \text{et} \quad \mathscr{L}_\mu(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \int_{\mathbf{Z}_p} x^n \mu(x)$$

appelées respectivement transformée d'Amice [2] et transformée de Laplace de μ. On a $\mathscr{L}_\mu(t) = \mathscr{A}_\mu(e^t - 1)$ et

$$\mathscr{A}_\mu(z) = \int_{\mathbf{Z}_p} (1+z)^x \mu(x) \text{ si } |z| < 1 \text{ et } \mathscr{L}_\mu(z) = \int_{\mathbf{Z}_p} e^{zx} \mu(x) \text{ si } |z| < p^{-\frac{1}{p-1}}.$$

Comme les fonctions de la forme ε^x, où ε décrit l'ensemble des racines de l'unité d'ordre une puissance de p, forment une base des fonctions localement constantes sur $\mathbf{Z}_p$, la transformée d'Amice permet de calculer les intégrales du type $\int_{\mathbf{Z}_p} x^k f(x)\, \mu$, où f est une fonction localement constante et $k \in \mathbf{N}$ (mais pas pour $k < 0$). En particulier, on a $\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p^*}(x) = 1 - \frac{1}{p} \sum_{\varepsilon^p = 1} \varepsilon^x$, ce qui permet de calculer la transformée d'Amice de la restriction à $\mathbf{Z}_p^*$ d'une distribution μ en termes de celle de μ. On obtient

$$\mathscr{A}_{\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(\mu)}(T) = \mathscr{A}_\mu(T) - \frac{1}{p} \sum_{\varepsilon^p = 1} \mathscr{A}_\mu(\varepsilon(1+T) - 1).$$

Théorème 1.3. — *(i) L'application qui à une distribution continue μ associe sa transformée d'Amice est un isomorphisme de l'espace des distributions continues sur $\mathbf{Z}_p$ à valeurs dans A sur celui des série entières à coefficients dans A de rayon de convergence supérieur ou égal à 1.*

(ii) Sa restriction aux mesures est un isomorphisme de l'espace des mesures sur $\mathbf{Z}_p$ à valeurs dans A sur celui des séries entières à coefficients bornés.

Définition 1.4. — *(i) Si r est un réel positif ou nul, une distribution continue sur $\mathbf{Z}_p$ est dite d'ordre r si la suite de terme général $(1+n)^{-r}|b_n(\mu)|$ est bornée.*

(ii) Une distribution continue μ est dite tempérée si et seulement si il existe $r \in \mathbf{R}_+$ tel que μ soit d'ordre r.

Remarque 1.5. — (i) Il résulte du (ii) du théorème précédent qu'une distribution d'ordre 0 n'est rien d'autre qu'une mesure.

(ii) Il résulte du (iii) du théorème 1.2 que l'espace des distributions tempérées est le dual de celui des fonctions de classe $\mathscr{C}_u^\infty$.

(iii) Les distributions tempérées sur $\mathbf{Z}_p$ à valeurs dans $\mathbf{C}_p$ forment une sous-algèbre des distributions continues.

Le théorème 1.3 permet de caractériser les distributions tempérées en termes de leurs transformées d'Amice ce qui permet de construire une distribution tempérée à partir d'une série entière de rayon de convergence 1 vérifiant des conditions de croissance. La connaissance de la transformée d'Amice d'une distribution est équivalente à la connaissance des $\int_{\mathbf{Z}_p} x^i \mu(x)$ pour $i \in \mathbf{N}$. Le théorème suivant [3, 2, 53, 33, 40] permet de construire une distribution tempérée en ne connaissant que les intégrales du type $\int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} x^i \mu(x)$ pour $a \in \mathbf{Z}_p$, $n \in \mathbf{N}$ et $0 \leq i \leq N$. Cette construction est très importante pour les applications arithmétiques.

THÉORÈME 1.6. — *(i) Soit $r \in \mathbf{R}^+$. Une distribution continue est d'ordre r si et seulement si, quel que soit $j \in \mathbf{N}$, la suite de terme général $p^{n(j-r)} \sup_{a\in\mathbf{Z}_p} \| \int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} (\frac{x-a}{p^n})^j \mu\|$ est bornée dans $\mathbf{R}$.*

(ii) Réciproquement, soit $N \in \mathbf{N}\cup\{+\infty\}$ strictement supérieur à r et soit μ une application linéaire sur les fonctions localement polynomiales de degré inférieur ou égal à N telle que, quel que soit $j \in [0, N]$, la suite de terme général $p^{n(j-r)} \sup_{a\in\mathbf{Z}_p} \| \int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} (\frac{x-a}{p^n})^j \mu\|$ est bornée dans $\mathbf{R}$. Alors il existe une unique distribution d'ordre r coïncidant avec μ sur les fonctions localement polynomiales de degré inférieur ou égal à N.

REMARQUE 1.7. — Pour $r = 0$, le théorème ci-dessus se traduit par le fait qu'une mesure est déterminée par sa valeur sur les fonctions localement constantes, ce qui est une conséquence de la densité de celles-ci dans les fonctions continues.

1.2. Intégration sur $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q})$

On fixe un plongement de $\overline{\mathbf{Q}}$ dans $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C}_p$ et on note Frob_∞ la conjugaison complexe. Si $n \in \mathbf{N}$, soit $\varepsilon_n = \exp \frac{2i\pi}{p^n} \in \overline{\mathbf{Q}} \subset \mathbf{C}$. Soit $\mathbf{Q}_\infty = \cup_{n\in\mathbf{N}}\mathbf{Q}(\varepsilon_n)$ l'extension abélienne maximale de $\mathbf{Q}$ non ramifiée en dehors de p et soient $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_\infty/\mathbf{Q})$ et $\Gamma_n = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_\infty/\mathbf{Q}(\varepsilon_n))$ si $n \geq 1$. Le caractère cyclotomique χ_{cycl} induit un isomorphisme de Γ sur $\mathbf{Z}_p^*$, ce qui permet de parler de distribution continue ou tempérée ou encore de mesure sur Γ.

On pose $q = 4$ (resp. $q = p$) si $p = 2$ (resp. si $p \neq 2$) et on note Δ le groupe des racines de l'unité contenues dans $\mathbf{Q}_p^*$. Si $x \in \mathbf{Z}_p^*$, on note $\omega(x)$ l'unique élément de Δ vérifiant $x-\omega(x) \in q\mathbf{Z}_p$ et on pose $\langle x\rangle = \omega(x)^{-1}x \in 1+q\mathbf{Z}_p$. Les applications $x \to \omega(x)$ et $x \to \langle x\rangle$ sont des caractères localement analytiques sur $\mathbf{Z}_p^*$ à valeurs dans $\mathbf{Z}_p^*$.

On sait depuis la thèse de Tate qu'il vaut mieux considérer une fonction L complexe comme une fonction sur les caractères continus du groupe des idèles plutôt que comme fonction d'une variable complexe. De même, une fonction L p-adique est une fonction définie sur les caractères continus $\psi : \Gamma \to \mathbf{C}_p^*$. Un tel caractère est automatiquement localement analytique et ceux de la forme $\eta\langle\chi_{\mathrm{cycl}}\rangle^s$, avec $s \in \mathbf{Z}_p$ et η d'ordre fini, seront particulièrement intéressants pour la suite de l'exposé (en particulier dans le cas $s \in \mathbf{Z}$). De manière idéale, on aimerait bien pouvoir écrire une fonction L p-adique sous la forme $L(\psi) = \int_\Gamma \psi\,\mu$, où μ est une distribution tempérée sur Γ car une fonction définie de cette manière a de bonnes propriétés (elle est par exemple analytique en ψ). Le problème est que les fonctions L p-adiques peuvent avoir des pôles en certains caractères, ce qui nous amène à introduire les notions de pseudo-mesures et pseudo-distributions tempérées.

Les distributions tempérées (resp. les mesures) sur Γ forment une algèbre $\mathscr{D}(\Gamma)$ (resp. $\mathscr{D}_0(\Gamma)$) pour la convolution et si ψ est un caractère de Γ, on a $\int_\Gamma \psi\, \mu\star\mu' = \int_\Gamma \psi\, \mu\cdot\int_\Gamma \psi\, \mu'$, ce qui permet de définir $\int_\Gamma \psi\, \mu$ pour n'importe quel élément μ de l'anneau total des fractions de $\mathscr{D}(\Gamma)$.

On appelle pseudo-mesure sur Γ un élément du localisé de $\mathscr{D}_0(\Gamma)$ en la partie multiplicative engendrée par les images réciproques par $\chi_{\rm cycl}$ des mesures μ sur $\mathbf{Z}_p^*$ de la forme $\int_{\mathbf{Z}_p^*} f\mu = f(u) - u^k\eta(u)f(1)$, où k décrit $\mathbf{Z}$, η décrit les caractères d'ordre fini de $\mathbf{Z}_p^*$ et u décrit $1+p\mathbf{Z}_p$. Si μ est une pseudo-mesure sur Γ, la fonction $\psi\to\int_\Gamma\psi$ n'a des pôles qu'en un nombre fini de caractères de Γ de la forme $\eta\chi_{\rm cycl}^k$, où η est d'ordre fini et $k\in\mathbf{Z}$. L'idée de passer à l'anneau des fractions a été introduite par Serre [50] qui utilise le mot pseudo-mesure dans un sens un peu différent du nôtre.

Si $h\in\mathbf{Z}$, soit ℓ_h l'image réciproque par $\chi_{\rm cycl}$ de la distribution $\tilde\ell_h$ sur $\mathbf{Z}_p^*$ définie par $\int_{\mathbf{Z}_p^*} f\,\tilde\ell_h = f'(1)+hf(1)$. On appelle pseudo-distribution tempérée sur Γ un élément du localisé de $\mathscr{D}(\Gamma)$ en la partie multiplicative engendrée par les ℓ_h. Un petit calcul nous donne $\int_\Gamma \eta\langle\chi_{\rm cycl}\rangle^s\ell_h = s+h$ si η est un caractère d'ordre fini de Γ et $s\in\mathbf{Z}_p$; on en déduit le fait que si μ est une pseudo-distribution tempérée, alors $\int_\Gamma \eta\langle\chi_{\rm cycl}\rangle^s\,\mu = \frac{F(s)}{P(s)}$, où F est une fonction analytique sur $\mathbf{Z}_p$ et P est un polynôme dont toutes les racines sont dans $\mathbf{Z}$. L'anneau des pseudo-distributions tempérées sera noté $\tilde{\mathscr{D}}(\Gamma)$.

Le groupe Γ étant le produit direct du groupe fini Δ par un groupe isomorphe à $\mathbf{Z}_p$, l'algèbre $\tilde{\mathscr{D}}(\Gamma)$ se décompose en un produit d'algèbres correspondant aux caractères du groupe Δ. Nous aurons en particulier besoin des idempotents

$$e^+ = \frac{1}{2}(\delta_1+\delta_{\mathrm{Frob}_\infty}) \quad\text{et}\quad e^- = \frac{1}{2}(\delta_1-\delta_{\mathrm{Frob}_\infty})$$

qui permettent de décomposer toute pseudo-mesure μ sous la forme $\mu=\mu^++\mu^-$, avec $\mu^+=e^+\mu$ et $\mu^-=e^-\mu$.

1.3. Fonctions L p-adiques attachées aux caractères de Dirichlet

On verra indifféremment un caractère de Dirichlet de conducteur d comme un caractère de $(\mathbf{Z}/d\mathbf{Z})^*$ ou comme un caractère de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}}$ se factorisant à travers $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\mu_d)/\mathbf{Q})$. Si χ_1 et χ_2 sont deux tels caractères, on note $\chi_1\otimes\chi_2$ le caractère de Dirichlet primitif attaché à leur produit (c'est juste leur produit si on utilise la seconde interprétation). Si χ est un caractère de Dirichlet de conducteur d, soit $G(\chi)=\sum_{x\in(\mathbf{Z}/d\mathbf{Z})^*}\chi(x)e^{\frac{2i\pi x}{d}}$ la somme de Gauss associée à χ. Soit finalement $L(\chi,s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}$ la fonction L complexe attachée à χ. Cette fonction admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe, holomorphe en dehors d'un pôle simple en $s=1$ si χ est le caractère trivial et on sait que $L(\chi,k)$ est un nombre algébrique si $k\le 0$ et que $(2i\pi)^{-k}L(\chi,k)$ est un nombre algébrique si $\chi(\mathrm{Frob}_\infty)(-1)^k=1$ et $k>0$. Finalement, en $s=1$, on a la formule suivante :

$$\text{(1)}\qquad \text{si } d\neq 1, \text{ alors }\ L(\chi,1) = -\frac{1}{G(\chi^{-1})}\sum_{x \bmod d}\chi^{-1}(x)\log(1-e^{\frac{2i\pi x}{d}}).$$

On peut interpoler p-adiquement les valeurs de la fonction L attachée à χ pour construire sa fonction L p-adique. De manière précise, on a le résultat suivant.

THÉORÈME 1.8. — *Soit χ un caractère de Dirichlet de conducteur d premier à p. Il existe une unique pseudo-mesure μ_χ sur Γ qui est une mesure si $\chi \neq 1$, telle que l'on ait*

$$\int_\Gamma \chi_{\mathrm{cycl}}^k \, \mu_\chi = \begin{cases} (1-\chi(p)p^{-k})L(\chi,k) & \text{si } k \leq 0 \text{ et } \chi(\mathrm{Frob}_\infty)(-1)^k = -1, \\ \frac{\Gamma(k)}{(2i\pi)^k}(1-\chi^{-1}(p)p^{k-1})L(\chi,k) & \text{si } k \geq 1 \text{ et } \chi(\mathrm{Frob}_\infty)(-1)^k = 1. \end{cases}$$

De plus la fonction L p-adique $\psi \to L_p(\chi \otimes \psi) = \int_\Gamma \psi \, \mu_\chi$ vérifie les propriétés suivantes :

(i) elle est analytique sauf si χ est le caractère trivial auquel cas elle n'est analytique qu'en dehors des caractères 1 et χ_{cycl} en lesquels elle a des pôles simples de résidus respectifs $-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})$ et $1-\frac{1}{p}$,

(ii) elle vérifie l'équation fonctionnelle

$$L_p(\chi \otimes \psi) = 2^{-\chi\otimes\psi(\mathrm{Frob}_\infty)} G(\chi)\psi(\sigma_d) L_p(\chi^{-1} \otimes \psi^{-1}\chi_{\mathrm{cycl}}),$$

où σ_d est l'élément de Γ tel que $\chi_{\mathrm{cycl}}(\sigma_d) = d$,

(iii) si $m \geq 1$ et si η est un caractère d'ordre fini de Γ trivial modulo Γ_m mais pas modulo Γ_{m-1}, alors

$$L_p(\chi \otimes \eta\chi_{\mathrm{cycl}}^k) = \begin{cases} L(\eta,k) & \text{si } k \leq 0 \text{ et } \eta\otimes\chi(\mathrm{Frob}_\infty)(-1)^k = -1, \\ \frac{\Gamma(k)}{(2i\pi)^k}\frac{p^{mk}}{G(\eta)}L(\eta,k) & \text{si } k \geq 1 \text{ et } \eta\otimes\chi(\mathrm{Frob}_\infty)(-1)^k = 1. \end{cases}$$

REMARQUE 1.9. — (i) L'existence de pôles simples en 1 et χ_{cycl} se traduit par les formules $\lim_{s\to 0} sL_p(\langle\chi_{\mathrm{cycl}}\rangle^s) = -\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})$ et $\lim_{s\to 0} sL_p(\chi_{\mathrm{cycl}}\langle\chi_{\mathrm{cycl}}\rangle^s) = 1-\frac{1}{p}$.

(ii) Si $i \in \mathbf{Z}/(p-1)\mathbf{Z}$ est impair (resp. $i=1$ si $p=2$), soit $\zeta_{p,i}$ la fonction définie sur $\mathbf{Z}_p$ par la formule $\zeta_{p,i}(s) = L_p(\omega^i\langle\chi_{\mathrm{cycl}}\rangle^s)$. Il résulte du théorème précédent que cette fonction est analytique sur $\mathbf{Z}_p$ (resp. méromorphe sur $\mathbf{Z}_p$, holomorphe en dehors de $s=1$ où elle a un pôle simple de résidu $1-\frac{1}{p}$) si $i \neq 1$ (resp. $i=1$) et que l'on a $\zeta_{p,i}(-n) = (1-p^n)\zeta(-n)$ si $n \in \mathbf{N}$ vérifie $-n \equiv i$ modulo $p-1$. La fonction $\zeta_{p,i}$ est la i-ème branche de la fonction zêta de Kubota-Leopoldt.

(iii) L'équation fonctionnelle de la fonction L p-adique nous fournit la formule

$$L(\eta,k) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(1-k)}{(2i\pi)^{1-k}}\frac{p^{m(1-k)}}{G(\eta^{-1})}L(\eta^{-1},1-k),$$

si $k \geq 0$ et $\eta(\mathrm{Frob}_\infty)(-1)^k = -1$. Cette formule est équivalente à l'équation fonctionnelle de la fonction L complexe aux entiers.

(iv) On voit que pour obtenir une propriété de continuité p-adique, on a été forcé de modifier un peu les valeurs des fonctions L. En particulier, on a dû rajouter ou non selon les cas, un "facteur à l'infini" $\frac{\Gamma(k)}{(2i\pi)^k}$, un facteur d'Euler en p et des constantes locales (sommes de Gauss). Le facteur d'Euler en p est soit celui du point que l'on considère soit celui du point qui lui correspond via l'équation fonctionnelle ; il trouvera une explication conceptuelle au chapitre suivant.

(v) Il est assez remarquable que la fonction L p-adique continue à être reliée à la fonction L complexe même aux caractères dont on ne s'est pas servi pour construire la fonction L p-adique (cf. (iii) du théorème ci-dessus). Le résultat suivant que l'on pourra comparer avec la formule (1) est une illustration du même phénomène en un point où l'on n'a plus de résultat d'algébricité.

Proposition 1.10 (Leopoldt). — *Si* $\chi(\mathrm{Frob}_\infty) = 1$, *alors*

$$L_p(\chi \otimes \chi_{\mathrm{cycl}}) = \frac{-1}{G(\chi^{-1})}(1 - \frac{\chi(p)}{p}) \sum_{x \bmod d} \chi^{-1}(x) \log_p(e^{\frac{2i\pi x}{d}} - 1).$$

Plus généralement, si $m \geq 1$ *et* η *est un caractère de* Γ *trivial modulo* Γ_m *mais pas* Γ_{m-1} *et tel que* $\chi \otimes \eta(\mathrm{Frob}_\infty) = 1$, *alors*

$$L_p(\chi \otimes \eta\chi_{\mathrm{cycl}})) = \frac{-1}{G((\chi \otimes \psi)^{-1})} \sum_{x \bmod dp^m} (\chi \otimes \psi)^{-1}(x) \log_p(e^{\frac{2i\pi x}{dp^m}} - 1).$$

Il y a un nombre considérable de manières de démontrer ces résultats. Considérons le cas du caractère trivial (le cas général se traite exactement de la même manière) et notons $\mu_{\mathrm{K-L}} = \mu^+_{\mathrm{K-L}} + \mu^-_{\mathrm{K-L}}$ la pseudo-mesure correspondante. La manière la plus efficace pour construire $\mu^-_{\mathrm{K-L}}$, compte tenu de la caractérisation des mesures par leur transformée d'Amice consiste à montrer que si $a \in \mathbf{Z}_p$, alors il existe une mesure sur $\mathbf{Z}_p$ dont la transformée de Laplace est $\frac{1}{e^t-1} - \frac{a}{e^{at}-1}$. Cette mesure μ_a vérifie alors les formules $\int_{\mathbf{Z}_p} x^n \mu_a = (-1)^n(1 - a^{1+n})\zeta(-n)$ si $n \leq 0$ comme on le voit à partir de la représentation intégrale $(1 - a^{1-s})\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \Big(\frac{1}{e^t-1} - \frac{a}{e^{at}-1}\Big) t^s \frac{dt}{t}$. Pour obtenir une mesure sur Γ à partir de μ_a, on commence par restreindre μ_a à $\mathbf{Z}_p^*$ (un petit calcul montre que cela fait sortir le facteur d'Euler en p) puis on se débarasse de la dépendance en a (et du facteur parasite $1 - a^{1+n}$) en divisant par $\delta_a - \delta_1$ et on obtient une pseudo-distribution que l'on tire sur Γ grâce à $\chi_{\mathrm{cycl}}^{-1}$ et qui n'est autre que $\mu^-_{\mathrm{K-L}}$. Pour construire $\mu^+_{\mathrm{K-L}}$, on utilise les entiers positifs en partant de la formule $-\sum_{k\in\mathbf{Z}} \frac{1}{t-2i\pi k} = \frac{1}{2}\coth\frac{t}{2}$, d'où l'on tire $(1 - a^{-2n})\frac{\Gamma(2n)}{(2i\pi)^{2n}}\zeta(2n) = \frac{1}{2}\big(\frac{d}{dt}\big)^{2n-1}\Big(\frac{1}{2}\coth\frac{t}{2} - \frac{1}{2a}\coth\frac{t}{2a}\Big)_{|t=0}$.

La construction la plus pertinente pour cet exposé est celle de Coleman [13] qui repose sur les "séries de Coleman" dont la construction est rappelée dans la proposition suivante.

Proposition 1.11. — *Si* $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *est un élément de la limite projective* $\varprojlim \mathscr{O}^*_{\mathbf{Q}_p(\varepsilon_n)}$ *des* $\mathscr{O}^*_{\mathbf{Q}_p(\varepsilon_n)}$ *relativement aux applications normes, il existe une unique série* $\mathrm{Col}_u(T)$ *élément de* $(\mathbf{Z}_p[[T]])^*$ *telle que l'on ait* $\mathrm{Col}_u(\varepsilon_n - 1) = u_n$ *quel que soit* $n \geq 1$.

Pour retrouver la fonction zêta de Kubota-Leopoldt à partir de ce résultat, commençons par remarquer que les unités cyclotomiques fournissent des éléments de $\varprojlim \mathscr{O}^*_{\mathbf{Q}(\varepsilon_n)}$ et donc de $\varprojlim \mathscr{O}^*_{\mathbf{Q}_p(\varepsilon_n)}$. De manière précise, si $\gamma \in \Gamma$, la collection $u_\gamma = (u_{\gamma,n})_{n\in\mathbf{N}}$, où $u_{\gamma,n} = \frac{\gamma(\varepsilon_n)-1}{\varepsilon_n-1}$ si $n \geq 1$, est un élément de $\varprojlim \mathscr{O}^*_{\mathbf{Q}(\varepsilon_n)}$ et si $a = \chi_{\mathrm{cycl}}(\gamma)$, alors $\mathrm{Col}_{u_\gamma}(T) = \frac{(1+T)^a-1}{T}$.

D'autre part, si $u \in \varprojlim \mathscr{O}^*_{\mathbf{Q}_p(\varepsilon_n)}$, Il existe une unique distribution tempérée λ_u sur $\mathbf{Z}_p$ dont la transformée d'Amice est $\log(\mathrm{Col}_u(T))$ et une comparaison des transformées d'Amice montre que si μ_a est la mesure définie ci-dessus, alors $\mu_a = x\lambda_{u_\gamma}$, ce qui nous fournit d'une part une construction de la fonction zêta de Kubota-Leopoldt et d'autre part une manière de calculer $\int_{\mathbf{Z}_p} f(x)x^{-1}\,\mu_a$ si f est une fonction localement constante ; on en tire la proposition 1.10.

1.4. Fonctions L p-adiques attachées aux formes modulaires

Soit $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{2i\pi nz}$ une forme modulaire de poids $2k$ pour $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. On suppose que f est propre pour les opérateurs de Hecke et $a_1 = 1$. Le sous-corps de $\mathbf{C}$ engendré par les a_n est un corps de nombres totalement réel que nous noterons $\mathbf{Q}[f]$.

Si χ est un caractère de Dirichlet de conducteur m, on pose

$$L(f\otimes\chi, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(n)a_n}{n^s} = \prod_\ell \frac{1}{1 - a_\ell(\chi(\ell)\ell^{-s}) + \ell^{2k-1}(\chi(\ell)\ell^{-s})^2}.$$

La fonction $L(f\otimes\chi, s)$ a un prolongement analytique à $\mathbf{C}$ tout entier et vérifie l'équation fonctionnelle

$$m^s \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \frac{L(f,\chi,s)}{G(\chi)} = (-1)^k \chi(-1) m^{2k-s} \frac{\Gamma(2k-s)}{(2\pi)^{2k-s}} \frac{L(f,\chi^{-1}, 2k-s)}{G(\chi^{-1})}.$$

On peut fabriquer [32, 3, 53] une fonction L p-adique à partir des nombres

$$\Lambda(f\otimes\chi, j) = m^j \frac{\Gamma(j)}{(-2i\pi)^j} L(f\otimes\chi, j),$$

pour $j \in \{1,\ldots,2k-1\}$ et χ variant parmi les caractères de Dirichlet de conducteur une puissance de p. Le principal ingrédient de la construction est le théorème suivant.

Théorème 1.12 (Manin). — *Soit f une forme modulaire cuspidale de poids $2k$ pour $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ propre sous l'action des opérateurs de Hecke. Il existe alors $\Omega_f^- \in \mathbf{R}$ et $\Omega_f^+ \in i\mathbf{R}$ tels que l'on ait*

$$\frac{\Lambda(f\otimes\chi, j)}{G(\chi)} \in \begin{cases} \Omega_f^- \mathbf{Q}[f,\chi] & \text{si } j \in \{1,\ldots,2k-1\} \text{ et } \chi(-1)(-1)^{j-1} = 1, \\ \Omega_f^+ \mathbf{Q}[f,\chi] & \text{si } j \in \{1,\ldots,2k-1\} \text{ et } \chi(-1)(-1)^{j-1} = -1 \end{cases}.$$

La démonstration de ce théorème s'appuie sur l'étude des intégrales (appelées symboles modulaires) du type $\int_r^{i\infty} f(z)P(z)dz$, où $r \in \mathbf{Q}$ et P est un polynôme de degré inférieur ou égal à $2k-2$ à coefficients entiers. On montre que, si $a \in \mathbf{Q}^*$ et $b \in \mathbf{Q}$, alors $\int_0^{i\infty} f(az+b)z^j$ a une partie réelle appartenant à $\Omega_f^-\overline{\mathbf{Q}}$ et une partie imaginaire appartenant à $\Omega_f^+\overline{\mathbf{Q}}$.

Convention 1. — si $a \in \mathbf{Z} - \{0\}$ et $b \in \mathbf{Z}$, on note $\int_0^{i\infty} f(az+b)z^j$ l'élément de $\mathbf{C}_p$ défini en faisant la somme de la partie réelle de $\int_0^{i\infty} f(az+b)z^j$ divisée par Ω_f^- et de sa partie imaginaire divisée par Ω_f^+.

Théorème 1.13. — *Soit f une forme modulaire de poids $2k$ pour $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ propre pour les opérateurs de Hecke et normalisée. Soient a_p la valeur propre de T_p, α une racine du polynôme $X^2 - a_pX + p^{2k-1} = 0$ et $\beta = \frac{p^{2k-1}}{\alpha}$ l'autre racine. Si $v_p(\alpha) < 2k-1$, il existe une unique distribution $\tilde{\mu}_{f,\alpha}$ d'ordre $v_p(\alpha)$ telle que si $n \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{Z}_p$ et $i \in \{0, \ldots, 2k-2\}$, alors*

$$\int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} x^i \tilde{\mu}_{f,\alpha}(x) = \frac{1}{(p\alpha)^n} \int_0^{i\infty} \Big(f\big(\frac{z-a}{p^n}\big) - \frac{p^{2k-1}}{\alpha} f\big(\frac{z-a}{p^{n-1}}\big) \Big) z^i dz.$$

Remarque 1.14. — La distribution $\tilde{\mu}_{f,\alpha}$ est vraiment d'ordre $v_p(\alpha)$; en particulier, si $v_p(\alpha) \neq 0$, ce n'est pas une mesure. Dans le cas où $v_p(\alpha) = 2k-1$, on n'a pas assez de valeurs pour garantir l'unicité d'une distribution tempérée d'ordre $v_p(\alpha)$ vérifiant les formules de la proposition, ce qui rend le résultat inutilisable tel quel. D'autre part, a_p étant un entier, il y a deux cas possibles. Soit $v_p(a_p) = 0$ (cas ordinaire) et une des racines de $X^2 - a_pX + p^{2k-1}$ est de valuation 0 tandis que l'autre est de valuation $2k-1$, soit $v_p(a_p) > 0$ (cas supersingulier) et les deux racines de $X^2 - a_pX + p^{2k-1}$ sont de valuation strictement comprise entre 0 et $2k-1$.

On note $\mu_{f,\alpha}$ la distribution tempérée sur Γ image réciproque de la restriction de $\tilde{\mu}_{f,\alpha}$ à $\mathbf{Z}_p^*$ et on définit la fonction L p-adique de f (associée à α) par la formule $L_p(f \otimes \psi, \alpha) = \int_\Gamma \psi(x)\mu_{f,\alpha}(x)$.

Proposition 1.15. — *La fonction L p-adique est reliée à la fonction L complexe par les formules suivantes*

(i) Si $i \in \{0, \ldots, 2k-2\}$,

$$L_p(f \otimes \chi_{\mathrm{cycl}}^i, \alpha) = (1 - \beta p^{-(i+1)})(1 - \beta p^{-(2k-i-1)})\Lambda(f, i+1).$$

(ii) Si $m \geq 1$ et η est un caractère d'ordre fini de Γ trivial modulo Γ_m mais pas modulo Γ_{m-1} et si $i \in \{0, \ldots, 2k-2\}$, alors

$$L_p(f \otimes \eta\chi_{\mathrm{cycl}}^i, \alpha) = \frac{1}{\alpha^m} \frac{\Lambda(f, \eta^{-1}, i+1)}{G(\eta^{-1})}.$$

(iii) De plus, la fonction L p-adique attachée à f vérifie l'équation fonctionnelle

$$L_p(f \otimes \psi, \alpha) = -\psi(-1) L_p(f \otimes \chi_{\mathrm{cycl}}^{2k-2}\psi^{-1}, \alpha)$$

Remarque 1.16. — i) Le facteur d'Euler en p de $L(f,s)$ est

$$\frac{1}{1 - a_pp^{-s} + p^{2k-1}p^{-2s}} = \Big(\frac{1}{1-\alpha p^{-s}}\Big)\Big(\frac{1}{1-\beta p^{-s}}\Big).$$

On voit donc que le facteur d'Euler que l'on doit rajouter pour rendre les choses p-adiquement interpolables est le produit d'un morceau du facteur d'Euler en $i+1$ et d'un morceau de celui en $2k-i-1$ qui est le point correspondant à $i+1$ via l'équation fonctionnelle.

(ii) La théorie effleurée ci-dessus s'étend aux formes de niveau quelconque ([33] par exemple) et l'équation fonctionnelle est alors un peu plus compliquée.

2. LA FONCTION L p-ADIQUE D'UN MOTIF

2.1. Déterminants et discriminants

Rappelons que si K est un corps, on peut associer à un K-espace vectoriel V de dimension finie $d(V)$ son déterminant $\det_K V$ qui est une K-droite (i.e. un K-espace vectoriel de dimension 1).

Si ω est une famille de $d(V)$ vecteurs de V, on note $[\omega]$ son déterminant ; c'est un élément de $\det_K V$. Les K-droites forment un groupe sous le produit tensoriel dont l'élément neutre est K et l'inverse d'une droite D est la droite duale D^*. Si ω est une base d'un K-espace vectoriel de dimension finie V et ω^* est la base de V^* duale de ω, alors $[\omega][\omega^*]=1$. Si $0\to V_1\to V\to V_2\to 0$ est une suite exacte de K-espaces vectoriels de dimensions finies, alors $\det_K V$ s'identifie canoniquement (au signe près) à $(\det_K V_1)\otimes(\det_K V_2)$ (si ω, ω_1 et ω_2 sont respectivement des bases sur K de V, V_1 et V_2 et $\widehat{\omega}_2$ un relèvement de ω_2 dans V, le déterminant de la famille $(\omega_1,\widehat{\omega}_2)$ dans la base ω ne dépend pas du choix de $\widehat{\omega}_2$).

Soit A un anneau principal contenu dans K. Si T est un A-module de type fini et de torsion, notons $|T|$ le produit des diviseurs élémentaires de T ; c'est un élément de A bien défini à multiplication près par une unité de A. Si $A=\mathbf{Z}$, alors $|T|$ est le cardinal de T. Si T est un A-module de type fini et $V=K\otimes A$, alors $\det_A T$ est un sous-A-module de $\det_K V$ dont on note $[T]$ un générateur. Si T est de torsion, alors $V=0$, $\det_K V=K$ et $[T]=|T|^{-1}$. Dans le cas général, si ω est une famille d'éléments de T formant une base de V, alors $[T]\sim|T/\omega|^{-1}[\omega]$ (de manière générale, on note de la même manière une famille d'éléments d'un A-module et le sous-A-module qu'elle engendre).

Si $0\to V_1\to V_2\to\cdots\to V_n\to 0$ est une suite exacte de K-espaces vectoriels, $\otimes_{i=1}^n(\det_K V_i)^{(-1)^i}$ s'identifie canoniquement (au signe près) à K et si T_i est un A-module de type fini tel que l'on ait $K\otimes T_i=V_i$ pour $1\leq i\leq n$, la quantité $\prod_{i=1}^n[T_i]^{(-1)^i}\in K^*$ est un élément de K bien défini à multiplication près par une unité de A. Il faut quand même faire attention au fait que les flèches qui interviennent dans la suite exacte ont une grande influence sur le résultat, ce qui n'apparaît pas sur la notation. Si $n=2$, la quantité $[T_1][T_2]^{-1}$ sera parfois notée $[T_2:T_1]$ et appelée l'indice généralisé de T_1 dans T_2 (si $A=\mathbf{Z}$ et l'application de V_1 dans V_2 est induite par une application injective de T_1 dans T_2, on retombe bien sur l'indice de (l'image de) T_1 dans T_2).

Un accouplement parfait $\langle\ ,\ \rangle$ entre deux K-espaces vectoriels V_1 et V_2 de (même) dimension finie induit un isomorphisme de $(\det_K V_1)\otimes(\det_K V_2)$ sur K. Si T_1 et T_2 sont deux A-modules de type fini tels que l'on ait $V_i=K\otimes T_i$ pour $i=1,2$, on pose $\langle T_1,T_2\rangle=$

$[T_1] \otimes [T_2]$; c'est un élément de K bien défini à multiplication près par une unité de A et si ω_i est une famille d'éléments de T_i formant une base de V_i, alors $\langle T_1, T_2 \rangle$ est aussi le discriminant de $\langle\ ,\ \rangle$ dans les bases ω_1 et ω_2 multiplié par $|T_1/\omega_1|^{-1}|T_2/\omega_2|^{-1}$.

Finalement, si T est un A-module, on note $T^\vee = \mathrm{Hom}(T, \mathrm{Fr}(A)/A)$ le dual de Pontryagin de T et $T^* = \mathrm{Hom}(T, A)$.

2.2. **Motifs**

Si K est un corps, un motif (resp. un motif pur) défini sur K est un morceau de la cohomologie d'une variété algébrique (resp. variété projective lisse) définie sur K. Nous ne nous intéresserons qu'au cas où K est un corps de nombres et même, pour l'énoncé des conjectures, qu'au cas où $K = \mathbf{Q}$, le cas d'un corps de nombres quelconque pouvant s'y ramener par restriction des scalaires. On associe à un motif défini sur $\mathbf{Q}$ deux $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels M_B et M_{dR} de même dimension $d(M)$ appelés respectivement réalisation de Betti et réalisation de de Rham de M et l'entier $d(M)$ est appelé “dimension de M”. Ces deux espaces vectoriels sont munis de structures supplémentaires et d'isomorphismes de comparaison dont les propriétés sont rappelées ci-dessous (il faut faire attention au fait que certaines des propriétés énoncées ci-dessous ne sont en fait que partiellement connues).

(Mot 1) M_{dR} est muni d'une filtration décroissante par des sous-$\mathbf{Q}$-espaces vectoriels $(M^i_{\mathrm{dR}})_{i\in\mathbf{Z}}$ et on appelle espace tangent à M le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $t_M = M_{\mathrm{dR}}/M^0_{\mathrm{dR}}$.

(Mot 2) M_B est muni d'une action de $\mathscr{G}_{\mathbf{R}} = \mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$ et a donc une décomposition sous la forme $M_B = M_B^+ \oplus M_B^-$, où M_B^+ (resp. M_B^-) est le sous-espace propre de la conjugaison complexe associée à la valeur propre 1 (resp. -1). On note $d^+(M)$ et $d^-(M)$ les dimensions respectives de M_B^+ et M_B^-.

(Mot 3) On dispose d'un isomorphisme “de périodes complexes” $\iota_{M,\infty} : (\mathbf{C} \otimes M_B)^{\mathscr{G}_{\mathbf{R}}} \to \mathbf{R} \otimes M_{\mathrm{dR}}$ qui, composé avec l'injection de $\mathbf{R} \otimes M_B^+$ dans $(\mathbf{C} \otimes M_B)^{\mathscr{G}_{\mathbf{R}}}$ et la surjection de $\mathbf{R} \otimes M_{\mathrm{dR}}$ sur $\mathbf{R} \otimes t_M$, nous fournit une application $\alpha_M : \mathbf{R} \otimes M_B^+ \to \mathbf{R} \otimes t_M$ et une suite exacte dite “suite exacte tautologique”

$$0 \to \ker \alpha_M \to \mathbf{R} \otimes M_B^+ \to \mathbf{R} \otimes t_M \to \mathrm{coker}\alpha_M \to 0.$$

(Mot 4) Si p est un nombre premier, $M_{B,p} = \mathbf{Q}_p \otimes M_B$ est muni d'une action de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}}$ dont la restriction à $\mathscr{G}_{\mathbf{R}}$ est celle que l'on avait sur M_B. Les $M_{B,p}$ forment un système compatible de représentations, c'est-à-dire que si ℓ est un nombre premier, si I_ℓ désigne le sous-groupe d'inertie de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_\ell}$ et $\mathrm{Frob}_\ell \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_\ell}$ est un élément de Frobenius, alors le déterminant de $1 - X\mathrm{Frob}_\ell^{-1}$ agissant sur $(M_{B,p})^{I_\ell}$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbf{Q}$ indépendant de $p \neq \ell$; nous le noterons $E_\ell(M, X)$.

(Mot 5) Le motif M a une fonction L définie par le produit eulérien $L(M,s) = \prod_\ell E_\ell(M, \ell^{-s})^{-1}$ qui converge pour $\mathrm{Re}(s) \gg 0$.

On conjecture que $L(M,s)$ a un prolongement méromorphe à tout le plan complexe et les conjectures de Deligne, Beilinson, Scholl, Bloch et Kato, Fontaine et Perrin-Riou rappelées ci-dessous prédisent le comportement de $L(M,s)$ en $s=0$. Nous avons choisi une présentation proche de celle de Fontaine et Perrin-Riou [21, 19] ; une référence agréable pour l'historique de la conjecture de Beilinson est [37].

Si $n\in\mathbf{Z}$, on note $M(n)$ le tordu n fois (à la Tate) de M. En tant que $\mathbf{Q}$-espace vectoriel, on a $M(n)_{\mathrm{dR}}=M_{\mathrm{dR}}$, mais la filtration de Hodge est décalée : $M(n)^i_{\mathrm{dR}}=M^{n+i}_{\mathrm{dR}}$ si $i\in\mathbf{Z}$. On a aussi $M(n)_B=M_B$ en tant que $\mathbf{Q}$-espace vectoriel mais l'action de la conjugaison complexe est multipliée par $(-1)^n$ et $\iota_{M(n),\infty}=(2i\pi)^n\iota_{M,\infty}$; en particulier $M(n)^+_B=M_B^{(-1)^n}$. Finalement, l'action de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}}$ sur $M(n)_{B,p}$ est obtenue en multipliant celle sur $M_{B,p}$ par χ^n_{cycl} et la fonction L de $M(n)$ est reliée à celle de M par la formule $L(M(n),s)=L(M,s+n)$.

Soit M^* le dual de M. Les fonctions L de M et $M^*(1)$ sont conjecturalement reliées par une équation fonctionnelle du type $L(M,s)=*L(M^*(1),-s)$, où $*$ est un quotient de produit de fonctions Γ et d'exponentielles que l'on peut décrire explicitement en faisant intervenir la filtration de Hodge et certaines “constantes locales” généralisant les sommes de Gauss.

On note $H^0(M)$ le plus grand sous-motif de M somme directe de copies du motif trivial $\mathbf{Q}(0)$ et $H^1(M)$ le groupe des extensions[1] de $\mathbf{Q}(0)$ par M. Si $x\in H^1(M)$, soit $0\to M\to M_x\to\mathbf{Q}(0)\to 0$ l'extension correspondante. Il lui correspond, pour chaque nombre premier p, une extension $0\to M_{B,p}\to(M_x)_{B,p}\to\mathbf{Q}_p\to 0$ de représentations p-adiques. Si $e\in(M_x)_{B,p}$ est un relèvement de $1\in\mathbf{Q}_p$, le cocycle $\sigma\to(\sigma-1)e$ sur $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}}$ est à valeurs dans $M_{B,p}$ et la classe de ce cocycle dans $H^1(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}},M_{B,p})$ ne dépend pas des choix que l'on a faits ; elle sera notée $x_{B,p}$. Si ℓ est un nombre premier, on dit que x a bonne réduction en ℓ si, pour tout $p\neq\ell$, la restriction de $x_{B,p}$ au sous-groupe d'inertie I_ℓ de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_\ell}\subset\mathscr{G}_{\mathbf{Q}}$ est triviale. Si S est un ensemble fini de nombres premiers, on note $H^1_{f,S}$ le sous-groupe de $H^1(M)$ des extensions de $\mathbf{Q}(0)$ par M ayant bonne réduction en dehors de S et on note $H^1_f(M)$ le sous-groupe de $H^1(M)$ correspondant à $S=\emptyset$.

Si $x\in H^1(M)$, soit $e_{\mathrm{dR}}\in(M_x)^0_{\mathrm{dR}}$ relevant $1\in\mathbf{Q}(0)^0_{\mathrm{dR}}=\mathbf{Q}$ et $e_B\in(M_x)^+_B$ relevant $1\in\mathbf{Q}(0)^+_B=\mathbf{Q}$. L'élément $e_{\mathrm{dR}}-\iota_{M_x,\infty}(e_B)$ de $\mathbf{R}\otimes(M_x)_{\mathrm{dR}}$ appartient à $\mathbf{R}\otimes M_{\mathrm{dR}}$ et son image $x_{\mathrm{dR},\infty}$ dans $\mathrm{coker}\alpha_M$ ne dépend d'aucun des choix que l'on a fait ; on a donc défini de cette manière une application $v_M:\mathbf{R}\otimes H^1(M)\to\mathrm{coker}\,\alpha_M$.

Maintenant, dans la dualité $M_{\mathrm{dR}}\times M^*(1)_{\mathrm{dR}}\to\mathbf{Q}(1)_{\mathrm{dR}}=\mathbf{Q}$, les espaces M^0_{dR} et $M^*(1)^0_{\mathrm{dR}}$ sont orthogonaux, le dual de t_M s'identifie à $M^*(1)^0_{\mathrm{dR}}$, celui de $t_{M^*(1)}$ à M^0_{dR} et, après tensorisation par $\mathbf{R}$, le dual de $\mathrm{coker}\,\alpha_{M^*(1)}$ s'identifie à $\ker\alpha_M$. On en déduit donc par dualité une application naturelle $u^*_{M^*(1)}:\ker\alpha_M\to\mathbf{R}\otimes H^1(M)^*$.

[1]Nous avons choisi d'utiliser le point de vue des extensions de motifs plutôt que de donner une définition précise en termes de K-théorie, de groupes de Chow supérieurs ou de cohomologie motivique car la plupart des flèches dont nous aurons besoin ont une description plus agréable. Le prix à payer est qu'il est impossible de démontrer quoi que ce soit : par exemple, on ne sait pas démontrer qu'une extension de motifs de $\mathbf{Q}(0)$ par $\mathbf{Q}(1)$ est de type Kummer alors que l'énoncé correspondant en K-théorie est un théorème (facile).

Finalement, on définit via la théorie des biextensions, un accouplement “hauteur” $H^1_f(M) \times H^1_f(M^*(1)) \to \mathbf{R}$ et on conjecture que cet accouplement donne naissance à la suite exacte dite “suite exacte fondamentale de M”

$$0 \to H^0(M)_{\mathbf{R}} \to \ker \alpha_M \to H^1_f(M^*(1))^*_{\mathbf{R}} \to H^1_f(M)_{\mathbf{R}} \to \operatorname{coker} \alpha_M \to H^0(M^*(1))^*_{\mathbf{R}} \to 0.$$

Soient ω_{tg} une base de t_M, ω_B^+ une base de M_B^+, $\omega_{f,M}$ une base de $H^1_f(M)$, $\omega_{f,M^*(1)}$ une base de $H^1_f(M^*(1))$, ω_M^0 une base de $H^0(M)$ et $\omega^0_{M^*(1)}$ une base de $H^0(M^*(1))$. Le nombre

$$\frac{[\omega_B^+][\mathrm{coker}\alpha_M]}{[\omega_{\mathrm{tg}}][\ker \alpha_M]} \cdot \frac{[\ker \alpha_M][\omega_{f,M}][\omega_{f,M^*(1)}]}{[\omega^0_M][\omega^0_{M^*(1)}][\mathrm{coker}\alpha_M]}$$

ne dépend ni du choix des bases de $\ker \alpha_M$ et $\mathrm{coker}\alpha_M$ ni, à multiplication près par un élément de $\mathbf{Q}^*$, du choix des bases ω_{tg}, ω_B^+, $\omega_{f,M}$, $\omega_{f,M^*(1)}$, ω^0_M et $\omega^0_{M^*(1)}$; il sera noté $\Omega_\infty(M)$.

Conjecture 2.1 (Deligne-Beilinson). — *$L(M,s)$ a, en $s=0$, un zéro d'ordre $r_\infty(M) = \dim_{\mathbf{Q}} H^1_f(M^*(1)) - \dim_{\mathbf{Q}} H^0(M^*(1))$ et $L^*(M,0) = \lim_{s\to 0} s^{-r_\infty(M)} L(M,s)$ est égal, à multiplication près par un élément de $\mathbf{Q}^*$, à $\Omega_\infty(M)$.*

2.3. Les anneaux de Fontaine

Tate a montré [52] qu'il n'existait pas dans $\mathbf{C}_p$ d'analogue p-adique de $2i\pi$ et donc par conséquent que les périodes p-adiques des variétés algébriques ne pouvaient pas vivre dans $\mathbf{C}_p$. Ceci a conduit Fontaine [16, 17] à construire des anneaux $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \subset \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ un peu compliqués mais fort utiles.

$\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ est un corps contenant les périodes de toutes les variétés algébriques. C'est le corps des fractions d'un anneau $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ obtenu en complétant $\overline{\mathbf{Q}}_p$ pour une topologie plus fine que la topologie p-adique faisant intervenir “les dérivées successives des éléments de $\overline{\mathbf{Q}}_p$ vus comme fonctions algébriques de p”. Ceci fait de $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ un anneau topologique muni d'une action continue de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Il contient en particulier $\overline{\mathbf{Q}}_p$ et un analogue p-adique de $2i\pi$ que nous noterons t dans la suite et sur lequel $g \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ agit par $g(t) = \chi_{\mathrm{cycl}}(g)t$. D'autre part, $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ est un anneau de valuation discrète complet dont l'idéal maximal est engendré par t et le corps résiduel est $\mathbf{C}_p$ (ce qui explique que l'on ne voit pas t dans $\mathbf{C}_p$). On munit $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} = \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}[\frac{1}{t}]$ de la filtration définie par $\mathbf{B}^i_{\mathrm{dR}} = t^i \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ si $i \in \mathbf{Z}$. Finalement, on a $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}} = \mathbf{Q}_p$.

$\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ est un sous-anneau de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ stable par $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ qui contient les périodes des variétés algébriques ayant bonne réduction modulo p. C'est un anneau topologique muni d'une action d'un morphisme de Frobenius φ commutant à l'action de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. L'intersection de $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ avec $\overline{\mathbf{Q}}_p$ est l'extension maximale non ramifiée $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$ de $\mathbf{Q}_p$ et t est un élément de $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ sur lequel φ agit par multiplication par p. D'autre part, les anneaux $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ sont reliés par les suites exactes fondamentales

$$0 \to \mathbf{Q}_p \to \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1} \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \to 0, \tag{2}$$

$$0 \to \mathbf{Q}_p \to \mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \to \mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \oplus \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \to 0, \tag{3}$$

où, dans la seconde suite exacte, l'application de $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \oplus \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est celle qui à x associe $((1-\varphi)x, x)$.

2.4. Représentations p-adiques attachées aux motifs

2.4.1. *La hiérarchie des représentations p-adiques.* Si V est une représentation p-adique de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on pose $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V)^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}$ et $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \otimes V)^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}$. Ceci fait de $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel que l'on munit de la filtration décroissante définie par $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^i(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^i \otimes V)^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}$ et $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) \subset \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ est de plus muni d'une action de φ. On a $\dim_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) \le \dim_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) \le \dim_{\mathbf{Q}_p} V$ et on dit que V est cristalline si $\dim_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) = \dim_{\mathbf{Q}_p} V$ et de de Rham si $\dim_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) = \dim_{\mathbf{Q}_p} V$.

(Mot 6) Si M est un motif, la représentation $M_{B,p}$ est de de Rham et on dispose d'un isomorphisme "périodes p-adiques" $\iota_{M,p} : \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(M_{B,p}) \to M_{\mathrm{dR},p} = \mathbf{Q}_p \otimes M_{\mathrm{dR}}$ de $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels filtrés. De plus, le déterminant de $1 - X\varphi$ agissant sur $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(M_{B,p})$ est égal à $E_p(M, X)$; en particulier, si M a bonne réduction en p, alors $M_{B,p}$ est cristalline.

Réciproquement, on conjecture [20, 27] que $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ est juste assez fin pour faire le tri entre ce qui provient de la géométrie et ce qui n'en provient pas, ce qui se traduit par les conjectures 2.2 et 2.3 ci-dessous.

CONJECTURE 2.2 (Fontaine-Mazur). — *Si V est une représentation p-adique irréductible de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}}$ qui est non ramifiée en dehors d'un ensemble fini de places et dont la restriction à un groupe de décomposition en p est de de Rham, alors V est la représentation p-adique associée à un motif pur.*

2.4.2. *Extensions de motifs et de représentations p-adiques.* Bloch et Kato ont introduit [9] des sous-groupes $H^1_e(\mathbf{Q}_p, V) \subset H^1_f(\mathbf{Q}_p, V) \subset H^1_g(\mathbf{Q}_p, V)$ de $H^1(\mathbf{Q}_p, V)$. Ce sont les noyaux respectifs des applications naturelles de $H^1(\mathbf{Q}_p, V)$ dans $H^1(\mathbf{Q}_p, \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1} \otimes V)$, $H^1(\mathbf{Q}_p, \mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \otimes V)$ et $H^1(\mathbf{Q}_p, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V)$. La signification de ces sous-groupes est la suivante. Si $x \in H^1(\mathbf{Q}_p, V)$, l'extension V_x de $\mathbf{Q}_p$ par V qui lui est associée est cristalline (resp. de de Rham) si et seulement si V est cristalline (resp. de de Rham) et $x \in H^1_f(\mathbf{Q}_p, V)$ (resp. $x \in H^1_g(\mathbf{Q}_p, V)$). Rappelons d'autre part que le cup-produit fournit un accouplement parfait

$$H^1(\mathbf{Q}_p, V) \times H^1(\mathbf{Q}_p, V^*(1)) \longrightarrow H^2(\mathbf{Q}_p, \mathbf{Q}_p(1)) \cong \mathbf{Q}_p$$

qui permet en particulier de voir $H^1(\mathbf{Q}_p, V^*(1))$ comme le dual de $H^1(\mathbf{Q}_p, V)$ et que, dans cette dualité, les orthogonaux respectifs de $H^1_e(\mathbf{Q}_p, V)$, $H^1_f(\mathbf{Q}_p, V)$ et $H^1_g(\mathbf{Q}_p, V)$ sont $H^1_g(\mathbf{Q}_p, V^*(1))$, $H^1_f(\mathbf{Q}_p, V^*(1))$ et $H^1_e(\mathbf{Q}_p, V^*(1))$.

(Mot 7) Si $x \in H^1(M)$ a bonne réduction en p, alors $x_{B,p} \in H^1_f(\mathbf{Q}_p, M_{B,p})$.

Si $\ell \neq p$ et V est une représentation p-adique de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_\ell}$, notons $H^1_f(\mathbf{Q}_\ell, V)$ le sous-groupe des éléments de $H^1(\mathbf{Q}_\ell, V)$ dont la restriction au sous-groupe d'inertie I_ℓ est triviale.

Soit S un ensemble fini de nombres premiers et soit $\mathscr{G}_{\mathbf{Q},S}$ le groupe de Galois de l'extension maximale de $\mathbf{Q}$ non ramifiée en dehors de l'infini et de S. Si V est une représentation p-adique de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q},S}$ et $i \in \mathbf{N}$, notons $H^i(V)$ le groupe $H^i(\mathscr{G}_{\mathbf{Q},S}, V)$. Notons $H^1_g(V)$ le sous-groupe des éléments x de $H^1(V)$ dont la restriction à $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ appartient à $H^1_g(\mathbf{Q}_p, V)$. Si Σ est un sous-ensemble de S, notons $H^1_{f,\Sigma}(V)$ le sous-groupe des éléments x de $H^1_g(V)$ dont la restriction à $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_\ell}$ appartient à $H^1_f(\mathbf{Q}_\ell, V)$ si $\ell \notin \Sigma$ et $H^1_f(V)$ le groupe correspondant à $\Sigma = \emptyset$.

La conjecture suivante [27] est l'analogue pour les extensions de motifs de la conjecture de Fontaine-Mazur.

Conjecture 2.3 (Jannsen). — *Soit S un ensemble fini de nombres premiers contenant p. Si M est un motif ayant bonne réduction en dehors de S, les applications naturelles de $\mathbf{Q}_p \otimes H^1_f(M)$ et $\mathbf{Q}_p \otimes H^1_{f,S}(M)$ dans $H^1_f(M_{B,p})$ et $H^1_{f,S}(M_{B,p})$ respectivement sont des isomorphismes.*

Si M est le motif associé au H^1 d'une variété abélienne X, la conjecture ci-dessus est plus ou moins équivalente à la finitude de la p-partie du groupe de Chafarevitch-Tate de X. Finalement, on a la conjecture de Tate

Conjecture 2.4 (Tate). — *Si M est un motif ayant bonne réduction en dehors de S, l'application naturelle de $\mathbf{Q}_p \otimes H^0(M)$ dans $H^0(M_{B,p})$ est un isomorphisme.*

2.5. La conjecture de Bloch-Kato

2.5.1. *Le groupe de Chafarevitch-Tate.* Soient V une représentation p-adique de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q},S}$ et T un réseau de V stable par $\mathscr{G}_{\mathbf{Q},S}$. On définit les groupes $H^1_f(T)$, $H^1_{f,S}(T)$ et $H^1_f(\mathbf{Q}_\ell, T)$ comme les images inverses respectives de $H^1_f(V)$, $H^1_{f,S}(V)$ et $H^1_f(\mathbf{Q}_\ell, V)$ dans $H^1(T)$ et $H^1(\mathbf{Q}_\ell, T)$. Si ℓ est une place finie, on définit $H^1_f(\mathbf{Q}_\ell, V/T)$ comme l'image de $H^1_f(\mathbf{Q}_\ell, V)$ dans $H^1(\mathbf{Q}_\ell, V/T)$ et $H^1_f(V/T)$ comme l'ensemble des éléments de $H^1(V/T)$ dont l'image dans $H^1(\mathbf{Q}_\ell, V/T)$ appartient à $H^1_f(\mathbf{Q}_\ell, V/T)$ pour tout nombre premier ℓ et est nulle si $\ell = \infty$. Finalement, on définit le groupe $Ш(T)$ comme le quotient de $H^1_f(V/T)$ par $H^1_f(V)$; c'est un groupe fini (dans le cas d'une variété abélienne X, c'est le quotient de la p-partie du groupe de Chafarevitch-Tate usuel de X par sa partie divisible).

2.5.2. *Nombres de Tamagawa.* Soient V une représentation p-adique de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_\ell}$ et T un réseau de V stable par $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_\ell}$.

Si $\ell = \infty$, on pose $\mathrm{Tam}^0_\ell(T) = |H^1(\mathbf{R}, T)|$ et si ℓ est un nombre premier distinct de p, on définit $\mathrm{Tam}^0_\ell(T)$ comme le cardinal du sous-groupe de torsion de $H^1(I_\ell, T)^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_\ell}}$. En particulier, on a $\mathrm{Tam}^0_\ell(T) = 1$ si V n'est pas ramifiée en ℓ.

Si $\ell = p$, on dispose, en considérant la suite exacte de cohomologie obtenue en tensorisant la suite exacte fondamentale (3) par V, de la suite exacte

$$0 \to H^0(\mathbf{Q}_p, V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) \oplus t_V \to H^1_f(\mathbf{Q}_p, V) \to 0,$$

ce qui nous permet, si ω_{tg} est une base de t_V et D est un réseau de $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, de poser $\mathrm{Tam}^0_{p,\omega_{\mathrm{tg}}}(T) = \frac{[H^0(\mathbf{Q}_p,T)][D\oplus\omega_{\mathrm{tg}}]}{[D][H^1_f(\mathbf{Q}_p,T)]}$ et cette quantité ne dépend pas du choix de D (mais elle fait intervenir le déterminant de $1-\varphi$ sur $D/D^{\varphi=1}$).

Finalement, on pose

$$\mathrm{Tam}^0_{\omega_{\mathrm{tg}}}(T) = \mathrm{Tam}^0_{p,\omega_{\mathrm{tg}}}(T) \prod_{\ell\neq p} \mathrm{Tam}^0_\ell(T).$$

2.5.3. *Énoncé de la conjecture.* On reprend les notations de la conjecture de Deligne-Beilinson et on suppose que M a bonne réduction en dehors de S. Modulo la conjecture de Tate et celle de Jannsen, les $\mathbf{Z}_p$-modules engendrés par $\omega_{f,V}$, $\omega_{f,V^*(1)}$, ω^0_V et $\omega^0_{V^*(1)}$ sont des réseaux de $H^1_f(M_{B,p})$, $H^1_f(M^*(1)_{B,p})$, $H^0(M_{B,p})$ et $H^0(M^*(1)_{B,p})$ respectivement. Soit T un réseau de M_B tel que $T_p = \mathbf{Z}_p \otimes T$ soit un sous-réseau de $M_{B,p}$ stable par $\mathscr{G}_{\mathbf{Q},S}$ et prenons pour ω_B^+ une base de T^+.

Conjecture 2.5 (Bloch-Kato). — *Si $x \sim_p y$ signifie que x et y ont même valuation p-adique, alors*

$$\frac{L^*(M,0)}{\Omega_\infty(M)} \cdot \frac{[H^1_f(T_p):\omega_{f,V}][H^1_f(T_p^*(1)):\omega_{f,V^*(1)}]}{[H^0(T_p):\omega^0_V][H^0(T_p^*(1)):\omega^0_{V^*(1)}]} \sim_p \mathrm{Tam}^0_{\omega_{\mathrm{tg}}}(T_p)|\text{Ш}(T_p^*(1))|.$$

2.6. **L'exponentielle de Bloch-Kato et sa duale**

Si V est une représentation de de Rham de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, tensorisant la suite exacte fondamentale (2) avec V et prenant la suite exacte de cohomologie associée, on obtient la suite exacte

$$0 \to V^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}} \to \mathrm{D}^{\varphi=1}_{\mathrm{cris}}(V) \to t_V \to H^1_e(\mathbf{Q}_p, V) \to 0,$$

où l'on a posé $t_V = \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)/\mathrm{D}^0_{\mathrm{dR}}(V)$. On appelle exponentielle de Bloch-Kato l'application $\exp_V$ de connexion $t_V \to H^1_e(\mathbf{Q}_p, V)$ que l'on verra aussi souvent comme une application de $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ dans $H^1(\mathbf{Q}_p, V)$. Si $k \gg 0$, alors $\mathrm{D}^0_{\mathrm{dR}}(V(k)) = 0$ et $\exp_{V(k)}$ est un isomorphisme de $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V(k))$ sur $H^1(\mathbf{Q}_p, V(k))$.

Si V est une représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, l'accouplement $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{dR}}$ obtenu en composant les applications

$$\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) \times D_{\mathrm{dR}}(V^*(1)) \to \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V \otimes V^*(1)) \to \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(\mathbf{Q}_p(1)) = t^{-1}\mathbf{Q}_p \cong \mathbf{Q}_p$$

est non dégénéré, ce qui fait que $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V^*(1))$ s'identifie naturellement au dual de $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ et $\mathrm{D}^0_{\mathrm{dR}}(V)$ s'identifie au dual de $t_{V^*(1)}$. Ceci permet de voir l'application $\exp^*_{V^*(1)}$ transposée de l'application $\exp_{V^*(1)} : t_{V^*(1)} \to H^1(\mathbf{Q}_p, V^*(1))$ comme une application de $H^1(\mathbf{Q}_p, V)$ dans $\mathrm{D}^0_{\mathrm{dR}}(V)$. Si $k \gg 0$, l'application $\exp^*_{V^*(1+k)}$ est un isomorphisme de $H^1(\mathbf{Q}_p, V(-k))$

sur $D_{\mathrm{dR}}(V(-k))$. Cette définition de l'application exponentielle duale n'est pas très commode pour les calculs (il faut dualiser deux fois), mais on a la proposition suivante [28].

Proposition 2.6 (Kato). — *Si V est une représentation de de Rham, l'application qui à $x \in \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ associe le cocycle $\tau \to x \log_p \chi_{\mathrm{cycl}}(\tau) \in \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) \subset \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V$ induit un isomorphisme de $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ sur $H^1(\mathbf{Q}_p, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V)$ et l'application $\exp^*_{V^*(1)}$ est la composée de l'inverse de cet isomorphisme avec l'application naturelle $H^1(\mathbf{Q}_p, V) \to H^1(\mathbf{Q}_p, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V)$.*

2.7. **Hauteurs p-adiques**

La construction de l'accouplement “hauteur p-adique” décrit ci-dessous est tirée de [36, 39] et [41, Chap. III] ; c'est une adaptation de la construction de l'accouplement complexe via la théorie des biextensions [46, 47].

Si $\ell \neq p$ et $x \in \mathbf{Q}_\ell^*$, alors $|x|_\ell \in \mathbf{Q}^*$ et $\log_p |x|_\ell$ est un élément bien défini de $\mathbf{Q}_p$. D'autre part, d'après la théorie de Kummer, si K est un corps de caractéristique 0, alors $H^1(K, \mathbf{Z}_p(1))$ est le complété p-adique de K^*, ce qui permet de prolonger par continuité l'application $x \to -\log_p |x|_\ell$ en une application $\mathbf{Q}_p$-linéaire $\mathrm{inv}_\ell : H^1(\mathbf{Q}_\ell, \mathbf{Q}_p(1)) \to \mathbf{Q}_p$. On prolonge de même l'application $\log_p : \mathbf{Q}_p^* \to \mathbf{Q}_p$ en une application $\mathbf{Q}_p$-linéaire $\mathrm{inv}_p : H^1(\mathbf{Q}_p, \mathbf{Q}_p(1)) \to \mathbf{Q}_p$. Comme $\log_p p = 0$ par définition, la formule du produit pour les nombres rationnels montre que si $y \in H^1(\mathbf{Q}_p(1))$, alors $\sum \mathrm{inv}_v(y) = 0$.

Soit V une représentation p-adique de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q},S}$ dont la restriction à $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est de de Rham. On suppose de plus que $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1} = \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=p^{-1}} = 0$, ce qui implique en particulier que les applications $\exp_V : t_V \to H^1_f(\mathbf{Q}_p, V)$ et $\exp_{V^*(1)} : t_{V^*(1)} \to H^1_f(\mathbf{Q}_p, V^*(1))$ sont des isomorphismes. Leurs inverses respectifs seront notés $\log_V$ et $\log_{V^*(1)}$.

Soit $x \in H^1_f(V^*(1))$. Il lui correspond une extension V_x de V par $\mathbf{Q}_p(1)$ et comme nous avons supposé $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=p^{-1}} = 0$, la suite exacte $0 \to \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V^*(1)) \to \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_x^*(1)) \to \mathbf{Q}_p \to 0$ admet un unique scindage σ_x^* tel que $\sigma_x^*(\mathbf{Q}_p) = \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V_x^*(1))^{\varphi=1}$. Par dualité, cela nous fournit une application $\sigma_x : \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_x)$ scindant la suite exacte $0 \to \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(\mathbf{Q}_p(1)) \to \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_x) \to \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) \to 0$. Cette application permet, modulo le choix d'un scindage $s_{\mathrm{Hdg}} : t_V \to \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ de la filtration de Hodge de définir une section $s_{\mathbf{Q}_p,x}$ de l'application (surjective) de $H^1_f(\mathbf{Q}_p, V_x)$ sur $H^1_f(\mathbf{Q}_p, V)$ en composant les flèches passant par le bas du diagramme ci-dessous

$$\begin{array}{ccccc}
H^1_f(\mathbf{Q}_p, V) & & \xrightarrow{\quad s_{\mathbf{Q}_p,x} \quad} & & H^1_f(\mathbf{Q}_p, V_x) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \log_V} & & & & \Big\uparrow{\scriptstyle \exp_{V_x}} \\
t_V & \xrightarrow{s_{\mathrm{Hdg}}} & \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) & \xrightarrow{\sigma_x} & \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_x)
\end{array}$$

Soit maintenant $y \in H^1_f(V)$. Choisissons $s_{\mathbf{Q},x}(y) \in H^1(V_x)$ relevant y. Par construction, l'image de $s_{\mathbf{Q},x}(y) - s_{\mathbf{Q}_p,x}(y)$ dans $H^1(\mathbf{Q}_p, V)$ est nulle et donc $s_{\mathbf{Q},x}(y) - s_{\mathbf{Q}_p,x}(y) \in H^1(\mathbf{Q}_p, \mathbf{Q}_p(1))$. Si $\ell \neq p$, choisissons un relèvement $s_{\mathbf{Q}_\ell,x}(y)$ dans $H^1_f(\mathbf{Q}_\ell, V_x)$, ce qui fait que l'on a aussi $s_{\mathbf{Q},x}(y) - s_{\mathbf{Q}_\ell,x}(y) \in H^1(\mathbf{Q}_\ell, \mathbf{Q}_p(1))$. Comme on ne peut changer $s_{\mathbf{Q},x}(y)$

que par un élément de $H^1(\mathbf{Q}_p(1))$, la somme $\sum_\ell \mathrm{inv}_\ell(s_{\mathbf{Q},x}(y) - s_{\mathbf{Q}_\ell,x}(y))$ ne dépend que de x et y (et du choix de s_{Hdg}) et l'application "hauteur p-adique" $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{ht}} : H^1_f(V^*(1)) \times H^1_f(V)$ ainsi définie est bilinéaire. On étend $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{ht}}$ en un accouplement

$$\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{ht}} : \big(H^1_f(V^*(1)) \oplus t^*_V\big) \times \big(H^1_f(V) \oplus \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)\big) \to \mathbf{Q}_p$$

grâce à la formule

$$\langle (x,\omega),(y,v)\rangle_{\mathrm{ht}} = \langle x,y\rangle_{\mathrm{ht}} + \langle \omega, \overline{v} - \log_V(y)\rangle_{\mathrm{dR}} + \langle \log_{V^*(1)}(x), v - s_{\mathrm{Hdg}}(\overline{v})\rangle_{\mathrm{dR}},$$

où $\overline{v}$ désigne l'image de $v \in \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ dans t_V et $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{dR}}$ provient de la dualité entre $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V^*(1))$ et $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$.

Si $s : t_V \to \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ est un autre scindage de la filtration de Hodge, il existe une application $\mathbf{Q}_p$-linéaire $u : t_V \to \mathrm{D}^0_{\mathrm{dR}}(V)$ telle que l'on ait $s = s_{\mathrm{Hdg}} + u$. Par dualité, on obtient une application u^* de $\mathrm{D}^0_{\mathrm{dR}}(V)^* = t_{V^*(1)}$ dans t_V et on montre que l'accouplement $\langle\ ,\ \rangle_u$ obtenu à partir de s est relié à $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{ht}}$ par la formule

(4) $$\langle (x,\omega),(y,v)\rangle_u = \langle (x, \omega + u^*(\log_{V^*(1)}(x)),(y,v)\rangle_{\mathrm{ht}}.$$

2.8. **Conjecture de Beilinson p-adique**

Soit M un motif de dimension d défini sur $\mathbf{Q}$ et ayant bonne réduction en p. La fonction L p-adique de M va être "définie" par interpolation p-adique des valeurs $\frac{L^*(M,n)}{\Omega_\infty(M(n))}$ pour $n \in \mathbf{Z}$ (ne pas oublier que l'on a $L^*(M,n) = L^*(M(n),0)$). On pose $d^+ = d^+(M)$ et $d^- = d^-(M)$.

Si $x \in M_{\mathrm{dR},p}$, on notera $t^{-n}x$ son image dans $M(n)_{\mathrm{dR},p}$ par l'isomorphisme canonique. Cette notation est compatible avec les isomorphismes

$$M(n)_{\mathrm{dR},p} \cong \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(M(n)_{B,p}) = t^{-n}\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(M_{B,p}) \cong t^{-n}M_{\mathrm{dR},p}$$

et reflète le fait que l'action de φ sur $M(n)_{\mathrm{dR},p} = \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(M(n)_{B,p})$ se déduit de celle sur $M_{\mathrm{dR},p}$ en la multipliant par p^{-n}.

On n'a pas besoin de toutes les valeurs de n pour assurer l'unicité de la fonction L p-adique, aussi nous supposerons que ni 1 ni p^{-1} ne sont valeurs propres de φ sur $M(n)_{\mathrm{dR},p}$. En particulier cela implique que $H^0(\mathbf{Q}_p, M(n)_{B,p}) = H^0(\mathbf{Q}_p, M^*(1-n)_{B,p}) = 0$ et donc que $H^0(M(n)) = H^0(M^*(1-n)) = 0$.

Reprenons les bases $\omega_{\mathrm{tg},n}$ de $t_{M(n)}$, $\omega_{f,M(n)}$ de $H^1_f(M(n))$, et $\omega_{f,M^*(1-n)}$ de $H^1_f(M^*(1-n))$ qui nous ont servi à définir $\Omega_\infty(M(n))$. Si $v = (v_1,\dots,v_d)$ est une famille d'éléments de $M_{\mathrm{dR},p}$, soient $v^+ = (v_1,\dots,v_{d^+})$ et $v^- = (v_{d^++1},\dots,v_d)$. On définit alors la période p-adique de $M(n)$ par la formule

$$\Omega_p(M(n),v) = \big\langle \omega_{f,M^*(1-n)} \oplus \omega_{\mathrm{tg}}, \omega_{f,M(n)} \oplus v^{(-1)^n}\big\rangle_{\mathrm{ht}},$$

la formule (4) montrant que ce déterminant est indépendant du choix du scindage de la filtration de Hodge ayant permis de définir $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{ht}}$. Remarquons d'autre part que $\Omega_p(M(n),v)$ ne dépend, si n est pair (resp. impair), que de l'image de v dans $\wedge^{d^+(M(n))}\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ par l'application qui, à la famille $(v_1,\ldots,v_d)$, associe le produit extérieur de ses $d^+(M(n))$ premiers (resp. derniers) vecteurs et qu'elle n'en dépend que de manière linéaire.

Soit $\omega_B=(\omega_B^+,\omega_B^-)$, où ω_B^+ est une base de M_B^+ et ω_B^- est une base de M_B^-. Si $n\in\mathbf{N}$, prenons $\omega_B^{(-1)^n}$ pour base de $M(n)_B^+$ pour faire le calcul de $\Omega_\infty(M(n))$. Finalement, si $n\le 0$ (resp. $n\ge 1$), posons $\Gamma^*(n)=\lim_{s\to 0} s\Gamma(n+s)=\frac{(-1)^n}{n!}$ (resp. $\Gamma^*(n)=\Gamma(n)=(n-1)!$).

Conjecture 2.7 (Perrin-Riou). — *Si v est une famille de d éléments de $M_{\mathrm{dR},p}$, il existe une (unique) pseudo-distribution tempérée $\mu_{M,v}$ sur Γ telle que, si $L_p(M\otimes\chi_{\mathrm{cycl}}^n,v,s)=\int_\Gamma \chi_{\mathrm{cycl}}^n\langle\chi_{\mathrm{cycl}}\rangle^s\mu_{M,v}$ et si ni 1 ni p^{-1} ne sont valeurs propres de φ sur $M(n)_{\mathrm{dR},p}$, alors la fonction $L_p(M\otimes\chi_{\mathrm{cycl}}^n,v,s)$ a, en $s=0$, un zéro d'ordre au moins égal à*

$$r_p(M(n))=\begin{cases}\dim_{\mathbf{Q}} H^1_f(M^*(1-n)) & \textit{si } n\ge 1\\ \dim_{\mathbf{Q}} H^1_f(M^*(1-n))-d^+(M(n)) & \textit{si } n\le 0\end{cases}$$

et si on pose $L_p^*(M\otimes\chi_{\mathrm{cycl}}^n,v)=\lim_{s\to 0} s^{-r_p(M(n))}L_p(M\otimes\chi_{\mathrm{cycl}}^n,v,s)$, alors

$$L_p^*(M\otimes\chi_{\mathrm{cycl}}^n,v)=\frac{L^*(M,n)E_p(M,p^{-n})}{\Omega_\infty(M(n))}\Omega_p\Big(M(n),\frac{1-p^{-1}\varphi^{-1}}{1-\varphi}\Big(\frac{\Gamma^*(n)}{(-t)^n}v\Big)\Big).$$

Remarque 2.8. — (i) Sous cette forme, la conjecture semble totalement hors d'atteinte mais si on sait par ailleurs construire la fonction L p-adique de M, elle fournit un analogue p-adique de la conjecture de Beilinson.

(ii) La fonction L p-adique attachée à M (i.e. la fonction $\psi\to L_p(M\otimes\psi,v)=\int_\Gamma\psi\,\mu_{M,v}$) n'est bien définie, si elle existe, qu'à multiplication près par un élément de $\mathbf{Q}^*\times\mathbf{Q}^*$ (un facteur pour les caractères pairs et un autre pour les caractères impairs). D'autre part, elle dépend de manière linéaire de $([v^+],[v^-])$ et $v=(v^+,v^-)$ doit être considéré comme un paramètre supplémentaire jouant le rôle de (M_B^+,M_B^-).

(iii) On peut donner (cf. [41]) une formule pour $L_p(M\otimes\eta\chi_{\mathrm{cycl}}^n,v)$ pour tout caractère d'ordre fini η et pour tout entier n tel que ni 1 ni p^{-1} ne soit valeur propre de φ sur $M(n)_{\mathrm{dR},p}$.

(iv) L'opérateur $\frac{1-p^{-1}\varphi^{-1}}{1-\varphi}$ doit être interprété comme un facteur d'Euler en p que l'on doit rajouter pour rendre le terme de droite continu p-adiquement. En particulier, si v est vecteur propre de φ, la formule d'interpolation se simplifie et on voit apparaître un facteur d'Euler au sens usuel du terme. Plus exactement, comme on a déjà enlevé le facteur d'Euler au-dessus de p en multipliant par $E_p(M,p^{-n})$, le terme $(1-\varphi)^{-1}$ réintroduit une partie du facteur d'Euler de $M(n)$ alors que le terme $(1-p^{-1}\varphi^{-1})$ enlève une partie du facteur d'Euler de $M^*(1-n)$. Le cas de la fonction zêta de Riemann est assez éclairant pour comprendre l'effet de $\frac{1-p^{-1}\varphi^{-1}}{1-\varphi}$. Elle correspond au motif trivial $\mathbf{Q}(0)$ et on a $t_{\mathbf{Q}(n)}=\mathbf{Q}$ si $n\ge 1$ et $t_{\mathbf{Q}(n)}=0$ si $n\le 0$. On prend 1 comme base de $\mathbf{Q}(0)_{\mathrm{dR}}\subset\mathbf{Q}(0)_{\mathrm{dR},p}$ et $(1,0)$ pour ω_B. D'autre part, on a $d^+(\mathbf{Q}(n))=1$ si n est pair et $d^+(\mathbf{Q}(n))=0$ si n est impair. Finalement, si $n\ge 1$ est pair ou si $n\le 0$ est impair, on a $H^0(\mathbf{Q}(n))=H^0(\mathbf{Q}(1-n))=H^1(\mathbf{Q}(n))=H^1(\mathbf{Q}(1-n))=0$, ce qui fait que si $n\le 0$ est impair, tous les espaces vectoriels intervenant dans les définitions de $\Omega_\infty(\mathbf{Q}(n))$ et $\Omega_p(\mathbf{Q}(n),1)$ sont nuls et ces périodes valent donc 1 toutes les deux et la valeur que l'on doit interpoler est $\zeta(n)E_p(\mathbf{Q}(0),p^{-n}) = \zeta(n)(1-p^{-n})$. Dans le cas $n \geq 1$ pair, la période $\Omega_\infty(\mathbf{Q}(n))$ correspond à l'isomorphisme $\mathbf{Q}(n)_B^+ \otimes \mathbf{R} \to t_{\mathbf{Q}(n)} \otimes \mathbf{R}$ et vaut $(2i\pi)^n$. D'un autre côté, on a $\frac{1-p^{-1}\varphi^{-1}}{1-\varphi}\frac{\Gamma^*(n)}{(-t)^n} = \Gamma(n)\frac{1-p^{n-1}}{1-p^{-n}}(-t)^{-n}$, ce qui fait que la valeur que l'on interpole doit être, d'après la conjecture

$$\frac{\zeta(n)E_p(\mathbf{Q}(0),p^{-n})}{(2i\pi)^n} \cdot \frac{\Gamma(n)(1-p^{n-1})}{1-p^{-n}} = \frac{\Gamma(n)}{(2i\pi)^n}\zeta(n)(1-p^{n-1}),$$

ce qui correspond à ce que l'on peut trouver dans le théorème 1.8. De même, le facteur d'Euler prédit par la conjecture dans le cas d'une forme modulaire coïncide avec celui de la proposition 1.15.

(v) Les fonctions $L_p(M(n)\otimes\psi, v)$ et $L_p(M\otimes\chi_{\mathrm{cycl}}^n\psi, v)$ sont reliées de manière simple mais ne coïncident pas. C'est dû au fait que le facteur Γ que l'on a introduit pour faire l'interpolation p-adique n'est pas le bon. En particulier, il dépend uniquement de la dimension de M_B^+ et pas de la filtration de Hodge sur M_{dR}. C'est une des raisons pour lesquelles on est forcé d'introduire des pseudo-distributions ; si n est suffisamment négatif, $\mu_{M(n),v}$ est une vraie distribution. Le chapitre II de [41] est consacré à la manière de remédier à ce problème. Remarquons tout de même que la formule donnant l'ordre du zéro de la fonction L p-adique est consistante avec celle donnant l'ordre de la fonction L complexe, compte tenu des pôles de la fonction Γ. Insistons aussi sur le fait que même avec les bons facteurs Γ, la distribution que l'on obtient n'est pas une mesure sauf dans des cas très particuliers.

(vi) On trouvera dans la section 2.11 une conjecture encore plus optimiste qui explique les normalisations (facteurs Γ et opérateur $\frac{1-p^{-1}\varphi^{-1}}{1-\varphi}$) et dans le chapitre consacré aux fonctions L d'Iwasawa la construction d'une fonction analytique p-adique ayant le même comportement (à une unité près) que celui conjecturé pour la fonction L p-adique attachée à M.

(vii) Si 1 ou p^{-1} est valeur propre de φ sur $M(n)_{\mathrm{dR},p}$, des zéros triviaux n'ayant pas toujours d'analogue complexe apparaissent (cf. [33] par exemple). Il y a eu récemment un certain nombre de résultats frappants concernant ces zéros triviaux, mais nous n'en dirons rien ; ils mériteraient un exposé séparé.

2.9. Modules d'Iwasawa

Soit $\Lambda = \mathbf{Z}_p[[\Gamma]]$ l'algèbre des mesures sur Γ à valeurs dans $\mathbf{Z}_p$. On l'appelle "algèbre d'Iwasawa" et on a $\mathscr{D}_0(\Gamma) = \mathbf{Q}_p \otimes \Lambda$. Si $\gamma \in \Gamma$, notons δ_γ la masse de Dirac en γ.

Si X est un Λ-module de torsion et de type fini, il existe $\mu_1,\dots,\mu_r \in \Lambda$ et un morphisme de Λ-modules de X dans $\Lambda\mu_1 \oplus\cdots\oplus \Lambda\mu_r$ dont le noyau et le conoyau sont finis. Le produit (de convolution) $\mu_1\cdots\mu_r$ qui ne dépend, à multiplication près par une unité de Λ, que de X sera noté μ_X et appelé "la mesure caractéristique de X".

Les idempotents e^+ et e^- introduits dans le paragraphe 1.2 permettent de décomposer Λ sous la forme $\Lambda^+ \times \Lambda^-$, où l'on a posé $\Lambda^+ = e^+\Lambda$ et $\Lambda^- = e^-\Lambda$. De manière plus générale, on peut décomposer tout Λ-module X comme produit d'un Λ^+-module X^+ et d'un Λ^--module X^-.

Si A est un $\mathbf{Z}_p$-module topologique complet (pas nécessairement de type fini ; en particulier les $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels sont admis) muni d'une action continue de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q},S}$, on munit l'espace $\Lambda \otimes A$ des mesures sur Γ à valeurs dans A de l'action diagonale de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q},S}$: si $g \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q},S}$, $a \in A$ et $\mu \in \Lambda$, on a $g(\mu \otimes a) = (\delta_{\overline{g}}\mu) \otimes g(a)$, où $\overline{g}$ désigne l'image de g dans Γ. Si $i \in \mathbf{N}$, on note alors $H^i_{\mathrm{Iw}}(A)$ le module $H^i(\mathscr{G}_{\mathbf{Q},S}, \Lambda \otimes A)$. Remarquons que, Γ étant commutatif, l'action de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q},S}$ respecte la structure de Λ-module (i.e. $g(\lambda x) = \lambda g(x)$ si $g \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q},S}$, $\lambda \in \Lambda$ et $x \in \Lambda \otimes A$) et donc que les $H^i_{\mathrm{Iw}}(A)$ ont une structure naturelle de Λ-module. On peut donner, grâce au lemme de Shapiro, une autre description de ces modules (cf. proposition 2.9).

On vérifie facilement que l'application qui à μ associe $\chi^k_{\mathrm{cycl}}\mu$ induit un isomorphisme $\mathscr{G}_{\mathbf{Q},S}$-équivariant de $\Lambda \otimes A$ sur $\Lambda \otimes A(k)$. D'autre part, si $\mu \in H^i_{\mathrm{Iw}}(A)$ et $\mu_{g_1,\dots,g_i}$ est un i-cocycle continu sur $\mathscr{G}_{\mathbf{Q},S}$ représentant μ, alors $\int_{\Gamma_n} \chi^k_{\mathrm{cycl}}\mu_{g_1,\dots,g_i}$ est un i-cocycle sur $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}(\varepsilon_n),S}$ à valeurs dans $A(k)$ dont la classe $\int_{\Gamma_n} \chi^k_{\mathrm{cycl}}\mu$ dans $H^i(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}(\varepsilon_n),S}, A(k))$ ne dépend que de μ et pas du choix du cocycle le représentant.

Proposition 2.9. — *Si T est un $\mathbf{Z}_p$-module de type fini muni d'une action continue de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q},S}$ et $i \in \mathbf{N}$, alors l'application qui à $\mu \in H^i_{\mathrm{Iw}}(T)$ associe $(\dots, \int_{\Gamma_n} \chi^k_{\mathrm{cycl}}\mu, \dots)$ induit un isomorphisme de $H^i_{\mathrm{Iw}}(T)$ sur la limite projective des $H^i(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}(\varepsilon_n),S}, T(k))$ relativement aux applications de corestriction.*

Cette description est plus classique. Remarquons en particulier que l'on a, pour tout $k \in \mathbf{Z}$, une application $\mu \to \int_\Gamma \chi^k_{\mathrm{cycl}}\,\mu$ de $H^i_{\mathrm{Iw}}(T)$ dans $H^i(T(k))$, ce qui permet de voir $H^i_{\mathrm{Iw}}(T)$ comme une interpolation p-adique des modules $H^i(T(k))$. Le groupe $H^2_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Z}_p(1))^-$ se décrit classiquement comme la partie $-$ de la limite projective des p-sylow des groupes de classes d'idéaux des corps $\mathbf{Q}(\varepsilon_n)$ et la théorie de Kummer nous fournit une application de $\varprojlim \mathbf{Q}(\varepsilon_n)^*$ dans $H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Z}_p(1))$ et si on note μ_{cycl} l'image du système des unités cyclotomiques (i.e. l'élément $(\varepsilon_n - 1)_{n\geq 1}$ de $\varprojlim \mathbf{Q}(\varepsilon_n)^*$), l'élément $\int_\Gamma \chi^{k-1}_{\mathrm{cycl}}\,\mu_{\mathrm{cycl}}$ de $H^1(\mathbf{Z}_p(k))$ est, si $k \geq 1$, “l'élément cyclotomique en K-théorie” introduit par Soulé [51].

2.10. **L'exponentielle de Perrin-Riou**

Soit $\ell \in S$. Soit $\mathscr{H}_{\mathbf{Q}_\ell} \subset \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_\ell}$ le noyau du caractère cyclotomique de telle sorte que $\Gamma_{\mathbf{Q}_\ell} = \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_\ell}/\mathscr{H}_{\mathbf{Q}_\ell}$ est le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_\ell(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q}_\ell)$ et est un sous-groupe de Γ. Si A est un $\mathbf{Z}_p$-module topologique complet muni d'une action continue de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_\ell}$ et si $i \in \mathbf{N}$, on note $H^i_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_\ell, A)$ le Λ-module $H^i(\mathbf{Q}_\ell, \Lambda \otimes A)$.

Proposition 2.10. — *Soient V une représentation p-adique de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_\ell}$ et T un réseau de V stable par $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_\ell}$.*

(i) les modules $H^i_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_\ell, T)$ *sont nuls si* $i \notin \{1,2\}$.

(ii) $H^2_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, T)$ *est, à un groupe fini près, isomorphe à* $\mathrm{Ind}^{\Gamma}_{\Gamma_{\mathbf{Q}_\ell}} T(-1)^{\mathscr{H}_{\mathbf{Q}_\ell}}$ *en tant que* Λ*-module ; en particulier il est de torsion.*

(iii) $H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_\ell, T)$ *est de torsion si* $\ell \neq p$ *et de rang* $\dim_{\mathbf{Q}_p} V$ *sur* Λ *si* $\ell = p$*. De plus le sous-module de torsion* $H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_\ell, T)_{\mathrm{tors}}$ *de* $H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_\ell, T)$ *est isomorphe à* $\mathrm{Ind}^{\Gamma}_{\Gamma_{\mathbf{Q}_\ell}} T^{\mathscr{H}_{\mathbf{Q}_\ell}}$.

La proposition ci-dessus dont on peut trouver la démonstration dans [39, 40] montre que, pour $\ell \neq p$, les modules $H^i_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_\ell, T)$ sont relativement simples. Pour analyser plus en détail le module $H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, T)$, Perrin-Riou a introduit [40] une application exponentielle interpolant les applications exponentielles de Bloch-Kato pour les différents twists de V par les puissances du caractère cyclotomique. C'est dans la construction de cette application que l'opérateur $\frac{1-p^{-1}\varphi^{-1}}{1-\varphi}$ apparaît.

THÉORÈME 2.11. — *Si* V *est une représentation cristalline de* $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$*, alors il existe une (unique) application*

$$\mathrm{Exp}_V : \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) \longrightarrow \tilde{\mathscr{D}}(\Gamma) \otimes_\Lambda H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, V)$$

telle que si k *est un entier assez grand et* $v \in \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$*, alors*

$$\int_{\Gamma_K} \chi(x)^k \mathrm{Exp}_V(v) = \exp_{V(k)}\Big(\frac{1-p^{-1}\varphi^{-1}}{1-\varphi}\Big(\frac{\Gamma(k)}{(-t)^k}v\Big)\Big).$$

Le théorème suivant qui est l'une des formes équivalentes [42] de la loi de réciprocité conjecturée par Perrin-Riou (conjecture Réc(V) de [40]) montre que Exp_V interpole aussi les inverses des exponentielles duales $\exp^*_{V^*(1-k)}$ pour $k \ll 0$.

Rappelons que si $k \leq 0$, on a posé $\Gamma^*(k) = \lim_{s\to 0} s\Gamma(k+s) = \frac{(-1)^k}{k!}$

THÉORÈME 2.12. — *(i) Si* $k \ll 0$*, alors*

$$\int_\Gamma \chi^k_{\mathrm{cycl}} \mathrm{Exp}_V(v) = \big(\exp^*_{V^*(1-k)}\big)^{-1}\Big(\frac{1-p^{-1}\varphi^{-1}}{1-\varphi}\Big(\frac{\Gamma^*(k)}{(-t)^k}v\Big)\Big).$$

(ii) Si de plus, $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1} = \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=p^{-1}} = 0$*, alors*

$$\lim_{s\to 0} s \int_\Gamma \langle \chi_{\mathrm{cycl}}\rangle^s \mathrm{Exp}_V(v) = \exp_V\Big(\frac{1-p^{-1}\varphi^{-1}}{1-\varphi}v\Big)$$

et si $\frac{1-p^{-1}\varphi^{-1}}{1-\varphi}v \in \mathrm{D}^0_{\mathrm{cris}}(V)$*, alors* $\int_\Gamma \langle \chi_{\mathrm{cycl}}\rangle^s \mathrm{Exp}_V(v)$ *est analytique au voisinage de* $s = 0$ *et on a*

$$\frac{1-p^{-1}\varphi^{-1}}{1-\varphi}v = \exp_{V^*(1)}\Big(\int_\Gamma \mathrm{Exp}_V(v)\Big).$$

Ce théorème admet [40] comme corollaire le résultat suivant qui montre que si on étend Exp_V par linéarité à $\tilde{\mathscr{D}}(\Gamma) \otimes \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, alors Exp_V devient un isomorphisme de $\tilde{\mathscr{D}}(\Gamma) \otimes \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ sur $\tilde{\mathscr{D}}(\Gamma) \otimes H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, V)$. Son inverse sera noté Log_V.

Proposition 2.13. — *Si $x_1,\dots,x_d$ est une base sur $\mathscr{D}_0(\Gamma)=\mathbf{Q}_p\otimes\Lambda$ de $H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p,V)$ modulo torsion et si $v_1,\dots,v_d$ est une base de $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ sur $\mathbf{Q}_p$, le déterminant de Exp_V dans ces bases est donné, à multiplication près par une unité de $\mathscr{D}_0(\Gamma)$, par la formule*

$$\mu_{H^2_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p,T)}\mu_{H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p,T)_{\mathrm{tors}}}\frac{[\mathrm{Exp}_V(v_1),\dots\mathrm{Exp}_V(v_d)]}{[x_1,\dots,x_d]}=\prod_{i>0}\ell_i^{\dim\mathrm{D}^i_{\mathrm{cris}}(V)}\prod_{i\le 0}\ell_i^{-d+\dim\mathrm{D}^i_{\mathrm{cris}}(V)}.$$

Si $V=\mathbf{Q}_p(1)$ et $u\in\varprojlim\mathscr{O}^*_{\mathbf{Q}_p(\varepsilon_n)}$, on note $\delta(u)$ son image dans $H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p(1))$ donnée par la théorie de Kummer et $\mathrm{Log}_{\mathbf{Q}_p(1)}(\delta(u))$ est une distribution sur Γ à valeurs dans $t^{-1}\mathbf{Q}_p$ qui est celle obtenue en multipliant par t^{-1} la distribution sur Γ obtenue en tirant par $\chi_{\mathrm{cycl}}^{-1}$ la restriction à $\mathbf{Z}_p^*$ de la distribution λ_u fournie par Coleman, ce qui montre que Log_V est une vaste généralisation des séries de Coleman.

La démonstration initiale du théorème 2.11 se trouve dans [40]. Cette démonstration est décortiquée dans [14], où il est montré que l'exponentielle de Perrin-Riou s'exprime naturellement comme la composée de l'exponentielle de Bloch-Kato et d'une transformée de Fourier. Deux autres constructions se trouvent dans [5, 30]. Celle de Benois [5] repose sur la théorie des (φ,Γ)-modules introduite par Fontaine [18] pour classifier toutes les représentations p-adiques de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et celle de Kato, Kurihara et Tsuji [30] utilise la cohomologie syntomique et est assez semblable dans l'esprit à celle de Benois. D'autre part, [5, 14] et [30] contiennent aussi une démonstration de la loi de réciprocité de Perrin-Riou (sous une forme plus ou moins reconnaissable). En particulier, celle de [14] repose sur une construction directe de l'application Log_V qui s'étend d'ailleurs au cas des représentations de de Rham mais ne fournit pas de distribution tempérée dans ce cas (du moins pas de manière visible), ce qui rend problématique son utilisation pour la construction de fonctions L p-adiques. Elle utilise la proposition 2.6 alors que celles de [5] et [30] incluent la démonstration de cette proposition. Signalons aussi que l'application duale Exp_V^* de Exp_V se généralise [10] à toutes les représentations p-adiques de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ grâce à la théorie des (φ,Γ)-modules et qu'une manière d'exprimer la loi de réciprocité de Perrin-Riou est de dire que Log_V et Exp_V^* coïncident (à normalisation près). D'autre part, le (ii) du théorème 2.12 peut se réécrire sous la forme suivante.

Proposition 2.14. — *Si $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1}=\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=p^{-1}}=0$, alors*

$$\frac{1-p^{-1}\varphi^{-1}}{1-\varphi}\Big(\int_\Gamma\mathrm{Log}_V(\mu)\Big)=\exp^*_{V^*(1)}\Big(\int_\Gamma\mu\Big).$$

Si de plus, $\int_\Gamma\mu\in H^1_f(\mathbf{Q}_p,V)$, alors

$$\exp_V\Big(\frac{1-p^{-1}\varphi^{-1}}{1-\varphi}\Big(\lim_{s\to 0}s^{-1}\int_\Gamma\langle\chi_{\mathrm{cycl}}\rangle^s\mathrm{Log}_V(\mu)\Big)\Big)=\int_\Gamma\mu.$$

Finalement, on a le résultat suivant [41, Chap. III] qui permet de calculer une partie de l'accouplement "hauteur p-adique" via les applications Exp_V et Log_V.

Proposition 2.15. — *Si $x \in H^1_f(V^*(1))$ et $\mu \in H^1_{\mathrm{Iw}}(V)$ vérifie $\int_\Gamma \mu \in H^1_f(V)$, alors*

$$\langle x, \int_\Gamma \mu \rangle_{\mathrm{ht}} = \Big\langle s_{\mathrm{Hdg}}(\log_{V^*(1)}(y)), \frac{1-p^{-1}\varphi^{-1}}{1-\varphi}\Big(\lim_{s\to 0} s^{-1} \int_\Gamma \langle \chi_{\mathrm{cycl}}\rangle^s \mathrm{Log}_V(\mu)\Big)\Big\rangle_{\mathrm{dR}},$$

où $s_{\mathrm{Hdg}} : t_{V^*(1)} \to \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V^*(1))$ est le scindage de la filtration de Hodge de $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V^*(1))$ dual de celui de $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ utilisé pour la définition de $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{ht}}$.

2.11. **Éléments spéciaux**

Soient M un motif défini sur $\mathbf{Q}$ et $k \in \mathbf{Z}$. On dit qu'un élément $\mu \in H^1_{\mathrm{Iw}}(M_{B,p})$ est $M(k)$-motivique si $\int_{\Gamma_n} \chi_{\mathrm{cycl}}^k \mu$ appartient au sous-$\mathbf{Q}$-espace vectoriel $H^1(\mathbf{Q}(\varepsilon_n), M(k))$ de $H^1(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}(\varepsilon_n),S}, M_{B,p}(k))$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$. Un élément $\mu \in H^1_{\mathrm{Iw}}(M_{B,p})$ est dit motivique s'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que μ soit $M(k)$-motivique et fortement motivique s'il existe $k_0 \in \mathbf{Z}$ tel que μ soit $M(k)$-motivique quel que soit $k \geq k_0$. Le seul exemple d'élément fortement motivique dont on dispose à l'heure actuelle est celui des unités cyclotomiques qui, quand on les tord, donnent les éléments de Beilinson [7] (la démonstration consiste à comparer les éléments de Soulé et ceux de Beilinson et ne semble pas être de tout repos [8, 26, 25]). D'autre part, si f est une forme modulaire (pour un sous-groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$), Kato a construit[2] un élément motivique μ_{Kato} de $H^1_{\mathrm{Iw}}(M(f)_{B,p})$, où $M(f)$ est le motif associé à f. Il faut quand même bien voir que ces deux exemples sont un peu particuliers car on est en rang 1 (i.e $d^-(M) = 1$).

Conjecture 2.16. — *Soit M un motif défini sur $\mathbf{Q}$ vérifiant $d^- \neq 0$. Il existe une base ω_{dR} une base de M_{dR} (sur $\mathbf{Q}$) et une famille $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_{d^-})$ d'éléments motiviques de $H^1_{\mathrm{Iw}}(M_{B,p})$ tels que l'on ait*

$$L_p(M, v, s) = \Big(\prod_{i>0}(s+i)^{\dim M^i_{\mathrm{dR}}} \prod_{i\leq 0}(s+i)^{\dim M^i_{\mathrm{dR}}-d}\Big) \frac{\big[\int_\Gamma \langle\chi_{\mathrm{cycl}}\rangle^s \mathrm{Log}_{M_{B,p}}(\mu) \oplus v^+\big]}{[\omega_{\mathrm{dR}}]}$$

quelle que soit la famille $v = (v_1, \ldots, v_d)$ de $M_{\mathrm{dR},p}$.

On peut supprimer les termes parasites dans le membre de droite en introduisant des facteurs Γ convenables dans la définition de la fonction L p-adique. Cette conjecture est particulièrement optimiste et les seuls résultats que l'on ait à son sujet concernent d'une part, le motif $\mathbf{Q}(1)$ pour lequel on retombe sur la construction de Coleman de la fonction zêta de Kubota-Leopoldt et d'autre part, le motif d'une forme modulaire pour lequel Kato a vérifié que l'on retombe bien sur la fonction L p-adique de la forme modulaire à partir de μ_{Kato}. Remarquons qu'une telle construction de la fonction L p-adique d'un motif fournit, via la proposition 2.14, des renseignements extrêmement précis sur les valeurs aux entiers de la fonction L p-adique.

[2] La construction de Kato et les résultats qui en découlent n'ont malheureusement pas encore été publiés (voir toutefois [48]) ce qui est dommage car ils constituent, avec les travaux de Wiles sur la conjecture de Taniyama-Weil, le plus bel ensemble de résultats de la dernière décennie en théorie des nombres.

3. FONCTIONS L D'IWASAWA

3.1. La conjecture de Leopoldt faible

Rappelons que la conjecture de Leopoldt pour un corps de nombres F est équivalente à la nullité de $H^2(G_{F,S}, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)$ (c'est une des nombreuses reformulations de la conjecture de Leopoldt). La conjecture ci-dessous qui apparaît dans les travaux de Schneider [49] et Greenberg [22] en est une généralisation affaiblie et est connue sous le nom de conjecture de Leopoldt faible (pour la représentation V).

Conjecture 3.1. — *Si V est une représentation p-adique de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q},S}$ et T un réseau de V stable par $\mathscr{G}_{\mathbf{Q},S}$, alors il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $H^2(V(k)/T(k)) = 0$.*

La conjecture de Leopoldt faible est une conséquence de la plupart des conjectures raisonnables du sujet et on a un certain nombre de critères numériques permettant de la vérifier sur des cas particuliers. Par exemple, elle découle de la formule donnant l'ordre du zéro de la fonction L complexe dans la conjecture 2.1 et de la conjecture 2.3 ; on a donc intérêt à ce qu'elle soit vraie sinon le bel édifice présenté dans les sections précédentes s'écroule inexorablement. Elle sera absolument fondamentale dans la suite. Elle admet en particulier comme conséquence le résultat suivant [41, Chap. I].

Proposition 3.2. — *Si V vérifie la conjecture de Leopoldt faible, alors*
(i) $H^2_{\mathrm{Iw},S}(V)$ est de torsion,
(ii) $H^1_{\mathrm{Iw},S}(V)^+$ est de rang d^- sur Λ^+ et $H^1_{\mathrm{Iw}}(T)^-$ est de rang d^+ sur Λ^-.

3.2. La fonction L d'Iwasawa d'une représentation p-adique

Dans tout le reste du texte, on suppose que V et $V^*(1)$ vérifient la conjecture de Leopoldt faible et donc, en particulier, que $H^1_{\mathrm{Iw}}(T)^+$ est de rang d^- sur Λ^+ et $H^1_{\mathrm{Iw}}(T)^-$ est de rang d^+ sur Λ^-. Soit $x = (x_1, \dots, x_d)$ une famille d'éléments de $H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}, T)$ vérifiant les trois conditions suivantes
(i) $x_1, \dots, x_{d^-} \in H^1_{\mathrm{Iw}}(T)^+$
(ii) $x_{d^-+1}, \dots, x_d \in H^1_{\mathrm{Iw}}(T)^-$
(iii) $H(x) = H^1_{\mathrm{Iw}}(T)/(\Lambda x_1 + \cdots + \Lambda x_d)$ est un Λ-module de torsion.

Si $v = (v_1, \dots, v_d)$ est une famille de d vecteurs de $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, on définit la famille $y_v = (y_{v,1}, \dots, y_{v,d})$ d'éléments de $\tilde{\mathscr{D}}(\Gamma) \otimes H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, T)$ par la formule

$$y_{v,i} = \begin{cases} x_i + e^-(\mathrm{Exp}_V(v_{d^++i})) & \text{si } 1 \le i \le d^- \\ x_i + e^+(\mathrm{Exp}_V(v_{i-d^-})) & \text{si } d^- + 1 \le i \le d \end{cases}.$$

Comme tensoriser par $\tilde{\mathscr{D}}(\Gamma)$ tue le sous-Λ-module de torsion de $H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, T)$, on peut trouver une famille $z = (z_1, \dots, z_d)$ d'éléments de $H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, T)$ formant une base de $\tilde{\mathscr{D}}(\Gamma) \otimes$

$H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, T)$ sur $\tilde{\mathscr{D}}(\Gamma)$ et le Λ-module $H(z) = H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, T)/(\Lambda z_1 + \cdots \Lambda z_d)$ est alors de torsion. L'élément

$$\mu^1_{T,v} = \frac{[y_v]}{[z]} \frac{\mu_{H(x)}}{\mu_{H(z)}}$$

de $\tilde{\mathscr{D}}(\Gamma)$ ne dépend pas des choix des x_i ou des z_i. Soient finalement

$$\mu^2_T = \mu_{H^2_{\mathrm{Iw}}(T)} \prod_{\ell \in S} (\mu_{H^2_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_\ell, T)})^{-1} \quad \text{et} \quad \mu_{T,v} = \mu^1_{T,v} \mu^2_T \in \tilde{\mathscr{D}}(\Gamma).$$

On définit alors la fonction L d'Iwasawa attachée à V par les formules

$$L_{\mathrm{Iw}}(T \otimes \psi, v) = \int_\Gamma \psi \, \mu_{T,v} \quad \text{et} \quad L_{\mathrm{Iw}}(T, v, s) = \int_\Gamma \langle \chi_{\mathrm{cycl}} \rangle^s \mu_{T,v}.$$

Cette fonction L d'Iwasawa n'est bien définie qu'à multiplication près par une unité dans l'algèbre d'Iwasawa et dépend (un peu) de T et (beaucoup) de v.

3.3. **La conjecture de Bloch-Kato à une unité près**

On suppose dorénavant pour simplifier $p \geq 3$. Si M est un motif ayant bonne réduction en p, on dispose conjecturalement de deux fonctions-L p-adiques, à savoir la fonction $L_p(M \otimes \psi, v)$ construite en interpolant les valeurs de la fonction L complexe attachée à M et la fonction L d'Iwasawa $L_{\mathrm{Iw}}(M \otimes \psi, v)$ attachée à la représentation p-adique $M_{B,p}$.

CONJECTURE 3.3. — *Il existe une unité α de $\mathscr{D}_0(\Gamma)$ telle que, quels que soient le caractère continu ψ et la famille v, on ait*

$$L_p(M \otimes \psi, v) = \Big(\int_\Gamma \psi \, \alpha\Big) L_{\mathrm{Iw}}(T \otimes \psi, v).$$

Cette conjecture est connue sous le nom de “conjecture principale”. Elle est démontrée en particulier dans le cas des motifs attachés aux caractères de Dirichlet grâce aux travaux de Mazur et Wiles [34] ou de Kolyvagin et Rubin [31, 44] et dans le cas d'une forme modulaire, les résultats de Kato auxquels il a été fait allusion permettent de démontrer une relation de divisibilité entre les deux fonctions L. Le théorème ci-dessous est le résultat général le plus encourageant en direction de cette conjecture : il montre que la fonction L d'Iwasawa vérifie la conjecture de Bloch-Kato (à une unité p-adique près).

Choisissons une base ω_{tg} de t_V. Si v est une famille de d vecteurs de $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, définissons la période p-adique de T comme le discriminant

$$\Omega_p(T, v) = \big\langle H^1_f(T^*(1)) \oplus \omega^*_{\mathrm{tg}}, H^1_f(T) \oplus v^+ \big\rangle_{\mathrm{ht}}$$

relativement à l'accouplement “hauteur p-adique”.

THÉORÈME 3.4 (Perrin-Riou). — *Si $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1} = \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=p^{-1}} = 0$, alors $L_{\mathrm{Iw}}(T, v, s)$ a, en $s = 0$, un zéro d'ordre au moins $r_p(V) = \dim_{\mathbf{Q}_p} H^1_f(\mathbf{Q}, V^*(1)) - d^+(V)$ et*

$$\lim_{s \to 0} s^{-r_p(V)} L_{\mathrm{Iw}}(T, v, s) \sim_p E_p(V, 1) |Ш(T^*(1))| \, \mathrm{Tam}^0_{\omega_{\mathrm{tg}}}(T) \, \Omega_p\Big(T, \frac{1 - p^{-1}\varphi^{-1}}{1 - \varphi} v\Big).$$

La démonstration de ce théorème utilise un certain nombre de suites exactes fournies par la théorie d'Iwasawa ou la dualité de Poitou-Tate (voir plus loin). On sépare l'étude de la fonction $L_{\mathrm{Iw}}(T,v,s)$ en celles des fonctions $\int_\Gamma \langle\chi_{\mathrm{cycl}}\rangle^s \mu^1_{T,v}$ et $\int_\Gamma \langle\chi_{\mathrm{cycl}}\rangle^s \mu^2_T$ qui ont un sens prises séparément (on montre, en utilisant des suites exactes de localisation [41, Chap. I], que $H^1_{\mathrm{Iw}}(T)$ ne dépend pas du choix de l'ensemble fini S qui intervient dans sa définition et que le noyau de l'application de $H^2_{\mathrm{Iw}}(T)$ dans $\oplus_{\ell\in S} H^2_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_\ell,T)$ n'en dépend pas non plus). Les formules obtenues pour le comportement en $s=0$ de ces fonctions prises séparément sont assez compliquées et il y a un certain nombre de simplifications qui apparaissent quand on les réunit. De manière précise, soient $H^1_f(V^*(1))_0$, $H^1_f(T^*(1))_0$ et $H^1_f(T^\vee(1))_0$ respectivement les sous-groupes des éléments de $H^1_f(V^*(1))$, $H^1_f(T^*(1))$ et $H^1_f(T^\vee(1))$ dont la restriction à $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est triviale (le 0 en indice signifie “0 en p”). Introduisons aussi les images respectives $H^1(V)_u$ et $H^1(T)_u$ de $H^1_{\mathrm{Iw}}(V)_\Gamma$ et $H^1_{\mathrm{Iw}}(T)_\Gamma$ dans $H^1(V)$ et $H^1(T)$ et soient $H^1_f(V)_u = H^1(V)_u \cap H^1_f(V)$ et $H^1_f(T)_u = H^1(T)_u \cap H^1_f(T)$ (le u en indice signifie “universel” comme dans “norme universelle”). Si on introduit alors les constantes

$$
\begin{aligned}
C_p &= [H^1(\mathbf{Q}_p,T) : H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p,T)_\Gamma],\\
C_u &= \Big[\frac{H^1_{f,\{p\}}(T)}{H^1(T)_u} : \frac{H^1_f(T)}{H^1_f(T)_u}\Big],\\
C_{f,0} &= \langle (H^1_f(T^\vee(1))_0)^\vee, H^1_f(T^*(1))_0\rangle,\\
C_{f,1} &= \Big\langle \Big(\frac{H^1_f(T^\vee(1))}{H^1_f(T^\vee(1))_0}\Big)^\vee, \frac{H^1_f(T^*(1))}{H^1_f(T^*(1))_0}\Big\rangle,
\end{aligned}
$$

on a les résultats suivants.

Proposition 3.5. — *La fonction $s \to \int_\Gamma \langle\chi_{\mathrm{cycl}}\rangle^s \mu^2_T$ a un zéro en $s=0$ d'ordre au moins égal à $r_{p,2}(V) = \dim_{\mathbf{Q}_p} H^1_f(V^*(1))_0$ et, si l'injection naturelle de $H^1_f(V)/H^1_f(V)_u$ dans $H^1_{f,\{p\}}(V)/H^1(V)_u$ est une bijection, on a*

$$\lim_{s\to 0} s^{-r_{p,2}(V)} \int_\Gamma \langle\chi_{\mathrm{cycl}}\rangle^s \mu^2_T \sim_p C_p C_u^{-1} C_{f,0}^{-1} \frac{\prod_{\ell\in S-\{p\}} \mathrm{Tam}^0_\ell(T)}{|H^0(\mathbf{Q},T^\vee(1))|} \Big\langle H^1_f(T^*(1))_0, \frac{H^1_f(T)}{H^1_f(T)_u}\Big\rangle_{\mathrm{ht}}.$$

L'ingrédient principal pour démontrer cette proposition est une réinterprétation de l'accouplement “hauteur p-adique” en termes de théorie d'Iwasawa (cf. proposition 3.9 ci-après).

Proposition 3.6. — *(i) La fonction $s \to \int_\Gamma \langle\chi_{\mathrm{cycl}}\rangle^s \mu^1_{T,v}$ a, en $s=0$, un zéro d'ordre au moins $r_{p,1}(V) = -d^+ + \dim H^1_f(V^*(1)) - \dim H^1_f(V^*(1))_0$, cette inégalité étant stricte si l'injection naturelle de $H^1_f(V)/H^1_f(V)_u$ dans $H^1_{f,\{p\}}(V)/H^1(V)_u$ n'est pas une bijection.*

(ii) Si l'injection naturelle de $H^1_f(V)/H^1_f(V)_u$ dans $H^1_{f,\{p\}}(V)/H^1(V)_u$ est une bijection, alors $\lim_{s\to 0} s^{-r_{p,1}(V)} \int_\Gamma \langle\chi_{\mathrm{cycl}}\rangle^s \mu^1_{T,v}$ est égal (à une unité p-adique près) à

$$C_p^{-1} C_u C_{f,1}^{-1} E_p(V,1) \mathrm{Tam}^0_{p,\omega_{\mathrm{tg}}}(T) \Big\langle \omega^*_{\mathrm{tg}} \oplus \frac{H^1_f(T^*(1))}{H^1_f(T^*(1))_0}, H^1_f(T)_u \oplus \frac{1-p^{-1}\varphi^{-1}}{1-\varphi} v^+ \Big\rangle_{\mathrm{ht}}.$$

L'ingrédient principal dans la démonstration de cette proposition est la loi de réciprocité explicite et plus exactement sa conséquence énoncée dans la proposition 2.14.

Modulo le fait que $H^1_f(V^*(1))_0$ est orthogonal à $H^1_f(V)_u \oplus \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ (cf. proposition 3.9), ce qui est d'ailleurs implicite dans la formulation des deux propositions ci-dessus, le théorème est une conséquence immédiate de ces propositions une fois que l'on a remarqué que l'on a

$$C_{f,0}C_{f,1} = \Big\langle H^1_f(T^\vee(1))^\vee, H^1_f(T^*(1))\Big\rangle = |\text{Ш}(T^*(1))|^{-1}|H^0(T^\vee(1))|^{-1},$$

comme on le voit en utilisant les deux suites exactes

$$0 \longrightarrow \text{Ш}(T^*(1))^\vee \longrightarrow H^1_f(T^\vee(1))^\vee \longrightarrow H^1_f(T^*(1))^* \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow H^0(T^\vee(1)) \longrightarrow H^1_f(T^*(1)) \longrightarrow (H^1_f(T^*(1))^*)^* \longrightarrow 0.$$

3.4. **Outils de théorie d'Iwasawa**

Comme on a supposé $p \neq 2$, le groupe Γ est procyclique. Soit γ un de ses générateurs topologiques. Si X est un Λ-module, on note X^Γ le noyau de $\delta_\gamma - \delta_1$ et X_Γ le module $X/(\delta_\gamma - \delta_1)X$. Si $0 \to A \to B \to C \to 0$ est une suite exacte de Λ-module, le lemme du serpent fournit une suite exacte

$$0 \to A^\Gamma \to B^\Gamma \to C^\Gamma \to A_\Gamma \to B_\Gamma \to C_\Gamma \to 0$$

de $\mathbf{Z}_p$-modules (remarquons tout de même que l'application de connexion $C^\Gamma \to A_\Gamma$ dépend du choix de γ).

La proposition suivante qui découle très facilement du théorème de structure des Λ-modules de torsion (et de type fini) est extrêmement utile pour l'étude du comportement des fonctions L sortant de la théorie d'Iwasawa.

Proposition 3.7. — *Si X est un Λ-module de torsion (et de type fini), alors $s \to \int_\Gamma \langle\chi_{\mathrm{cycl}}\rangle^s \mu_X$ a un zéro d'ordre au moins $r_0(X) = \dim_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{Q}_p \otimes X^\Gamma = \dim_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{Q}_p \otimes X_\Gamma$ en $s = 0$, avec égalité si et seulement si l'application naturelle (induite par l'identité sur X) de $\mathbf{Q}_p \otimes X^\Gamma$ dans $\mathbf{Q}_p \otimes X_\Gamma$ est un isomorphisme auquel cas on a*

$$\lim_{s\to 0} s^{-r_0(X)} \int_\Gamma \langle\chi_{\mathrm{cycl}}\rangle^s \mu_X \sim_p (\log\chi(\gamma))^{r_0(X)}[X_\Gamma : X^\Gamma],$$

où $[X_\Gamma : X^\Gamma]$ est l'indice généralisé de X^Γ dans X_Γ c'est-à-dire le quotient du cardinal du conoyau par celui du noyau de l'application de X^Γ dans X_Γ induite par l'identité sur X.

Finalement, si A est un $\mathbf{Z}_p$-module, on dispose de suites exactes

$$0 \to \Lambda \otimes T \to \Lambda \otimes T \to T \to 0 \quad \text{et} \quad 0 \to T \to \mathscr{C}^0(\Gamma, T) \to \mathscr{C}^0(\Gamma, T) \to 0,$$

l'application de $\Lambda \otimes T$ dans $\Lambda \otimes T$ étant la mutiplication par $\delta_\gamma - \delta_1$, celle de $\Lambda \otimes T$ dans T étant l'intégration sur Γ, celle de T dans $\mathscr{C}^0(\Gamma, T)$ étant celle qui à v associe la fonction constante de valeur v et celle de $\mathscr{C}^0(\Gamma, T)$ dans $\mathscr{C}^0(\Gamma, T)$ étant l'application qui, à une fonction continue $x \to f(x)$ sur Γ associe la fonction $x \to f(\gamma x) - f(x)$; c'est la transposée de la multiplication par $\delta_\gamma - \delta_1$ si l'on voit les fonctions continues sur Γ comme le dual de Λ. Si A est muni d'une action continue de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q},S}$, les suites exactes ci-dessus sont $\mathscr{G}_{\mathbf{Q},S}$-équivariantes ce qui nous fournit des suites exactes longues de cohomologie reliant les $H^i_{\mathrm{Iw}}(A)$ aux $H^i(A)$. Les suites exactes courtes que l'on tire de ces suites exactes longues sont d'ailleurs équivalentes à celles que l'on obtient via les suites exactes d'inflation-restriction si on utilise la description des modules d'Iwasawa donnée dans la proposition 2.9.

3.5. **Suites exactes de Poitou-Tate**

Si A est un module topologique discret, les groupes de cohomologie $H^i(A)$ et $H^i(A^\vee(1))$ sont reliés par la suite exacte suivante [35] dite "suite exacte de Poitou-Tate" :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(A^\vee(1)) \arrow[r] & \oplus_{\ell \in S} H^0(\mathbf{Q}_\ell, A^\vee(1)) \arrow[r] & H^2(A)^\vee \arrow[dll] & \\
 & H^1(A^\vee(1)) \arrow[r] & \oplus_{\ell \in S} H^1(\mathbf{Q}_\ell, A^\vee(1)) \arrow[r] & H^1(A)^\vee \arrow[dll] & \\
 & H^2(A^\vee(1)) \arrow[r] & \oplus_{\ell \in S} H^2(\mathbf{Q}_\ell, A^\vee(1)) \arrow[r] & H^0(A)^\vee \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Si V est une représentation p-adique de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q},S}$ et T est un réseau de V, on peut appliquer ce qui précède à $T^\vee(1)$ ou à $\mathscr{C}^0(\Gamma, T^\vee(1))$ espace des fonctions continues de Γ dans $T^\vee(1)$. Le dual de Pontryagin de $\mathscr{C}^0(\Gamma, T^\vee(1))$ est $\Lambda \otimes T(-1)$ et le lemme de Shapiro permet de montrer que l'on a $H^i(\mathscr{G}_{\mathbf{Q},S}, \mathscr{C}^0(\Gamma, T^\vee(1))) = H^i(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}(\mu_{p^\infty}),S}, T^\vee(1))$. Si $i \in \mathbf{N}$, on note $X^i_{\mathrm{Iw}}(T)$ le dual de Pontryagin de $H^i(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}(\mu_{p^\infty}),S}, T^\vee(1))$. La conjecture de Leopoldt faible pour $V^*(1)$ implique que $X^2_{\mathrm{Iw}}(T) = 0$ car il est de torsion et d'autre part il s'injecte dans un Λ-module libre [41, Chap. I]. La suite exacte de Poitou-Tate pour $\mathscr{C}^0(\Gamma, T^\vee(1))$ devient donc

$$0 \to H^1_{\mathrm{Iw}}(T) \to \oplus_{\ell \in S} H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_\ell, T) \to X^1_{\mathrm{Iw}}(T) \to H^2_{\mathrm{Iw}}(T) \to \oplus_{\ell \in S} H^2_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_\ell, T) \to X^0_{\mathrm{Iw}}(T) \to 0.$$

On peut modifier la suite exacte de Poitou-Tate pour $T^\vee(1)$ en remplaçant le terme du milieu $\oplus_{\ell \in S} H^1(\mathbf{Q}_\ell, T)$ par un de ses sous-groupes H. Il faut alors remplacer $H^1(T)$ par l'image réciproque de H dans $H^1(T)$ et on tronque la suite obtenue en considérant le sous-groupe de $H^1(T^\vee(1))$ image réciproque du dual de T dans $\oplus_{\ell \in S} H^1(\mathbf{Q}_\ell, T^\vee(1))$. On obtient en particulier les suites exactes

$$\cdots \to H^1_f(T) \to \oplus_{\ell \in S} H^1_f(\mathbf{Q}_\ell, T) \to H^1(T^\vee(1))^\vee \to H^1_f(T^\vee(1))^\vee \to 0,$$

$$\begin{array}{l}
\cdots \to H^1_{f,\{p\}}(T) \to H^1(\mathbf{Q}_p, T) \oplus \left(\oplus_{\ell \in S-\{p\}} H^1_f(\mathbf{Q}_\ell, T)\right) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow \\
\qquad\qquad\qquad\qquad H^1(T^\vee(1))^\vee \to (H^1_f(T^\vee(1))_0)^\vee \to 0,
\end{array}$$

ainsi que la suite exacte

$$0 \to H^1_f(T) \to H^1_{f,\{p\}}(T) \to H^1(\mathbf{Q}_p, T)/H^1_f(\mathbf{Q}_p, T) \to H^1_f(T^\vee(1))^\vee \to (H^1_f(T^\vee(1))_0)^\vee \to 0$$

qui s'obtient en comparant les deux suites exactes précédentes.

3.6. Un diagramme récapitulatif

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[dr] & 0 \arrow[d] & & \\
 & 0 \arrow[dr] & H^0(T) \arrow[d] \arrow[dr] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[dr] & 0 \arrow[d] \arrow[dr] & \oplus_{\ell\in S} H^0(\mathbf{Q}_\ell, T) \arrow[d] \arrow[dr] & H^1_{\mathrm{Iw}}(T)^\Gamma \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[dll, dotted] & \\
0 \arrow[dr] & H^1_{\mathrm{Iw}}(T)_\Gamma \arrow[d] \arrow[dr] & H^2(T^\vee(1))^\vee \arrow[d] \arrow[dr] & \oplus_{\ell\in S} H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_\ell, T)^\Gamma \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[dll, dotted] & 0 \\
0 \arrow[dr] & \oplus_{\ell\in S} H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_\ell, T)_\Gamma \arrow[d] \arrow[dr] & H^1(T) \arrow[d] \arrow[dr] & X^1_{\mathrm{Iw}}(T)^\Gamma \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[dll, dotted] & 0 \\
0 \arrow[dr] & X^1_{\mathrm{Iw}}(T)_\Gamma \arrow[d] \arrow[dr] & \oplus_{\ell\in S} H^1(\mathbf{Q}_\ell, T) \arrow[d] \arrow[dr] & H^2_{\mathrm{Iw}}(T)^\Gamma \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[dll, dotted] & 0 \\
0 \arrow[dr] & H^2_{\mathrm{Iw}}(T)_\Gamma \arrow[d] \arrow[dr] & H^1(T^\vee(1))^\vee \arrow[d] \arrow[dr] & \oplus_{\ell\in S} H^2_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_\ell, T)^\Gamma \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[dll, dotted] & 0 \\
0 \arrow[dr] & \oplus_{\ell\in S} H^2_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_\ell, T)_\Gamma \arrow[d] \arrow[dr] & H^2(T) \arrow[d] \arrow[dr] & X^0_{\mathrm{Iw}}(T)^\Gamma \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[dll, dotted] & 0 \\
 & X^0_{\mathrm{Iw}}(T)_\Gamma \arrow[d] \arrow[dr] & \oplus_{\ell\in S} H^2(\mathbf{Q}_\ell, T) \arrow[d] \arrow[dr] & 0 & 0 \\
 & 0 & H^0(T^\vee(1))^\vee \arrow[d] \arrow[dr] & 0 & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Le diagramme précédent résume ce que nous avons dit dans les deux précédentes sections. La colonne du milieu est la suite exacte de Poitou-Tate associée à $T^\vee(1)$ et les deux autres colonnes proviennent de la suite exacte de Poitou-Tate associée à $\mathscr{C}^0(\Gamma, T^\vee(1))$; elles ne sont pas exactes mais forment des complexes de $\mathbf{Z}_p$-modules. Les diagonales (en trait plein) proviennent des suites exactes longues de cohomologie associées à la suite exacte $0 \to \Lambda \otimes T \to \Lambda \otimes T \to T \to 0$ et à sa duale. Elles sont exactes et montrent que la théorie d'Iwasawa sert à casser en deux les groupes $H^i(T)$. Finalement, la proposition 3.7 montre que pour démontrer le théorème 3.4, il s'agit d'étudier les flèches en pointillé.

3.7. Étude de $\mu^1_{T,v}$

Soient $a = \dim_{\mathbf{Q}_p} H^1_f(V)_u$ et $b = \dim_{\mathbf{Q}_p} H^1_f(\mathbf{Q}_p, V) = \dim_{\mathbf{Q}_p} t_V$. Choisissons les familles $x = (x_1, \ldots, x_d)$ et $z = (z_1, \ldots, z_d)$ utilisées pour la définition de $\mu^1_{T,v}$ de telle sorte que les conditions suivantes soient vérifiées :

(i) $\int_\Gamma x_1, \ldots, \int_\Gamma x_{d^-}$ est une base de $H^1(V)_u$ sur $\mathbf{Q}_p$,

(ii) $\int_\Gamma x_1, \ldots, \int_\Gamma x_a$ est une base de $H^1_f(V)_u$ sur $\mathbf{Q}_p$.

(iii) $\int_\Gamma z_1, \ldots, \int_\Gamma z_d$ est une base de $H^1(\mathbf{Q}_p, V)$ sur $\mathbf{Q}_p$,

(iv) $\int_\Gamma z_1, \ldots, \int_\Gamma z_b$ est une base de $H^1_f(\mathbf{Q}_p, V)$ sur $\mathbf{Q}_p$.

Maintenant, on a

$$\int_\Gamma \langle \chi_{\mathrm{cycl}} \rangle^s \frac{[y_v]}{[z]} = \int_\Gamma \langle \chi_{\mathrm{cycl}} \rangle^s \frac{[\mathrm{Log}_V(y_v)]}{[\mathrm{Log}_V(z)]} = \frac{\left[\int_\Gamma \langle \chi_{\mathrm{cycl}} \rangle^s \mathrm{Log}_V(y_v)\right]}{\left[\int_\Gamma \langle \chi_{\mathrm{cycl}} \rangle^s \mathrm{Log}_V(z)\right]}.$$

D'autre part, si on revient à la définition de $y_{v,i}$ et que l'on utilise le fait $x_i \in H^1_{\mathrm{Iw}}(T)^-$ si $i \geq d^- + 1$, on obtient

$$\int_\Gamma \langle \chi_{\mathrm{cycl}} \rangle^s \mathrm{Log}_V(y_{v,i}) = \begin{cases} \int_\Gamma \langle \chi_{\mathrm{cycl}} \rangle^s \mathrm{Log}_V(x_i) & \text{si } i \leq d^- \\ v_{i-d^-} & \text{si } i \geq d^- + 1 \end{cases}.$$

On peut alors utiliser la proposition 2.14 pour montrer que $\int_\Gamma \langle \chi_{\mathrm{cycl}} \rangle^s \frac{[y_v]}{[z]}$ a un zéro d'ordre au moins $a - b$ en $s = 0$ et obtenir une formule explicite pour $\lim_{s \to 0} s^{b-a} \int_\Gamma \langle \chi_{\mathrm{cycl}} \rangle^s \frac{[y_v]}{[z]}$ comme quotient de deux déterminants de familles de vecteurs de $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$. Pour passer de cette formule à celle de la proposition, on passe d'un quotient de déterminants dans $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ à un discrimant utilisant l'accouplement $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{dR}}$ sur $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V^*(1)) \times \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ en utilisant la formule

$$\langle \omega^*_{\mathrm{tg}}, \log_V(H^1_f(\mathbf{Q}_p, T)) \rangle^{-1} = E_p(V, 1) \mathrm{Tam}^0_{p,\omega_{\mathrm{tg}}}(T).$$

La suite exacte

$$0 \longrightarrow \frac{H^1_{f,\{p\}}(T)}{H^1_f(T)} \longrightarrow \frac{H^1(\mathbf{Q}_p, T)}{H^1_f(\mathbf{Q}_p, T)} \longrightarrow \left(\frac{H^1_f(T^\vee(1))}{H^1_f(T^\vee(1))_0}\right)^\vee \longrightarrow 0$$

qui est une suite exacte de Poitou-Tate un peu modifiée permet alors de casser ce discriminant en deux morceaux et de montrer que $a - b \geq \dim(H^1_f(V^*(1))/H^1_f(V^*(1))_0) - d^+$ avec égalité si et seulement si l'injection de $H^1_f(V)/H^1_f(V)_u$ dans $H^1_{f,\{p\}}(V)/H^1(V)_u$ est une bijection. L'un de ces morceaux s'évalue en utilisant la suite exacte

$$0 \longrightarrow \frac{H^1(T)_u}{H^1_f(T)_u} \longrightarrow \frac{H^1_{f,\{p\}}(T)}{H^1_f(T)} \longrightarrow \left(\frac{H^1_{f,\{p\}}(T)}{H^1(T)_u}\right) / \left(\frac{H^1_f(T)}{H^1_f(T)_u}\right) \longrightarrow 0$$

que l'on obtient via le lemme du serpent et l'autre est relié au discrimant de $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{ht}}$ grâce à la proposition 2.15.

Finalement, pour passer de $\Lambda x_1 + \cdots + \Lambda x_{d^-}$ à $H^1_{\mathrm{Iw}}(T)$ et de $\Lambda z_1 + \cdots + \Lambda z_{d^-}$ à $H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, T)$, on utilise le fait que le sous-$\mathbf{Z}_p$-module de $H^1(T)_u = H^1_{\mathrm{Iw}}(T)_\Gamma$ engendré par $\int_\Gamma x_1, \ldots, \int_\Gamma x_{d^-}$ est d'indice $\frac{|H(x)_\Gamma|}{|H(x)^\Gamma|} = \int_\Gamma \mu_{H(x)}$ dans $H^1(T)_u$ et le sous-$\mathbf{Z}_p$-module de $H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, T)_\Gamma$ engendré par $\int_\Gamma z_1, \ldots, \int_\Gamma z_{d^-}$ est d'indice $\frac{|H(z)_\Gamma|}{|H(z)^\Gamma|} = \int_\Gamma \mu_{H(z)}$.

3.8. Étude de μ_T^2

Pour démontrer la proposition 3.5, on introduit le noyau $Ш_{\mathrm{Iw}}(T)$ de l'application de $H^2_{\mathrm{Iw}}(T)$ dans $\oplus_{\ell \in S} H^2_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_\ell, T)$. On a alors $\mu_T^2 = \mu_{Ш_{\mathrm{Iw}}(T)} (\mu_{X^0_{\mathrm{Iw}}(T)})^{-1}$. D'autre part, d'après le lemme 3.7, la fonction $\int_\Gamma \langle \chi_{\mathrm{cycl}} \rangle^s \mu_{Ш_{\mathrm{Iw}}(T)}$ a un zéro d'ordre au moins égal à $r_{p,2}(V) = \dim Ш_{\mathrm{Iw}}(V)_\Gamma = \dim H^1_f(V^*(1))_0$ et on a

$$\lim_{s \to 0} s^{-r_{p,2}(V)} \int_\Gamma \langle \chi_{\mathrm{cycl}} \rangle^s \mu_{Ш_{\mathrm{Iw}}(T)} \sim_p \log \chi(\gamma)^{r_{p,2}(V)} [Ш_{\mathrm{Iw}}(T)_\Gamma : Ш_{\mathrm{Iw}}(T)^\Gamma].$$

Le problème est donc d'arriver à calculer $[Ш_{\mathrm{Iw}}(T)_\Gamma : Ш_{\mathrm{Iw}}(T)^\Gamma]$. Pour ce faire, considérons le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] & \oplus_{\ell \in S} H^0(\mathbf{Q}_\ell, V) \arrow[r] \arrow[d] & Y(V)^\Gamma \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & H^2(V^*(1))^* \arrow[r] \arrow[d] & X^1_{\mathrm{Iw}}(V)^\Gamma \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^1_{\mathrm{Iw}}(V)_\Gamma \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & H^1_{f,\{p\}}(V) \arrow[r, dotted] \arrow[d] & Ш_{\mathrm{Iw}}(V)^\Gamma \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^1_{\mathrm{Iw}}(V)_\Gamma \arrow[r] \arrow[d] & H^1(\mathbf{Q}_p, V) \oplus \left(\oplus_{\ell \in S-\{p\}} H^1_f(\mathbf{Q}_\ell, V)\right) \arrow[r] \arrow[d] & Y(V)_\Gamma \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & H^1(V^*(1))^* \arrow[l] \arrow[d] & X^1_{\mathrm{Iw}}(V)_\Gamma \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \\
 & 0 & (H^1_f(V^*(1))_0)^* \arrow[l] \arrow[d] & Ш_{\mathrm{Iw}}(V)_\Gamma \arrow[l, dotted] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, la colonne du milieu est obtenue en tronquant une suite exacte de Poitou-Tate modifiée et les lignes, dont les définitions sont données ci-dessous, sont exactes.

Les seconde et cinquième lignes proviennent du diagramme récapitulatif et elles sont exactes car on a supposé $X^2_{\mathrm{Iw}}(T) = 0$ (conjecture de Leopoldt faible) et $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=p^{-1}} = 0$, ce qui entraîne $H^0(\mathbf{Q}_p, V^*(1)) = 0$ et $X^0_{\mathrm{Iw}}(V)^\Gamma = 0$.

Les première et quatrième lignes proviennent de la suite exacte $0 \to H^1_{\mathrm{Iw}}(V) \to \oplus_{\ell\in S} H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_\ell, V) \to Y(V) \to 0$ via le lemme suivant [39] qui permet aussi de démontrer leur exactitude (si on utilise en plus le fait que $H^1_{\mathrm{Iw}}(V)^\Gamma = H^0(V) = 0$ à cause de l'hypothèse $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1} = 0$).

Lemme 3.8. — i) Si $\ell \neq p$, alors $H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_\ell, T)$ est d'indice fini égal à $\mathrm{Tam}^0_\ell(T)$ dans $H^1_f(\mathbf{Q}_\ell, T)$.

ii) $H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p, T)$ est d'indice fini dans $H^1(\mathbf{Q}_p, T)$.

iii) L'application naturelle de $H^1(T)_u$ dans $\oplus_{\ell\in S} H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_\ell, T)$ est injective.

Le diagramme formé des flèches continues étant commutatif et les colonnes étant exactes, il existe une unique flèche (pointillée) de $\text{Ш}_{\mathrm{Iw}}(V)_\Gamma$ dans $(H^1_f(V^*(1))_0)^*$ laissant le diagramme commutatif. Finalement, le lemme 3.8 montre que $H^1(V)_u$ est inclus dans $H^1_{f,\{p\}}(V)$ et, si on utilise le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \oplus_{\ell\in S} H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_\ell, V)_\Gamma & \longrightarrow & \oplus_{\ell\in S} H^1(\mathbf{Q}_\ell, V) & \longrightarrow & \oplus_{\ell\in S} H^2_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_\ell, V)^\Gamma & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H^1_{\mathrm{Iw}}(V)_\Gamma & \longrightarrow & H^1(V) & \longrightarrow & H^2_{\mathrm{Iw}}(V)^\Gamma & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

on montre que $H^1_{f,\{p\}}(V) \subset H^1(V)$ est l'image réciproque de $\text{Ш}_{\mathrm{Iw}}(V)^\Gamma \subset H^2_{\mathrm{Iw}}(V)^\Gamma$ par l'application naturelle de $H^1(V)$ dans $H^2_{\mathrm{Iw}}(V)^\Gamma$, ce qui permet de définir la flèche en pointillé de $H^1_{f,\{p\}}(V)$ dans $\text{Ш}_{\mathrm{Iw}}(V)^\Gamma$.

Proposition 3.9. — *Le diagramme ainsi obtenu est commutatif et l'application de* $H^1_f(V)$ *dans* $(H^1_f(V^*(1))_0)^*$ *obtenue en composant les applications*

$$H^1_f(V) \to \text{Ш}_{\mathrm{Iw}}(V)^\Gamma \to \text{Ш}_{\mathrm{Iw}}(V)_\Gamma \to (H^1_f(V^*(1))_0)^*,$$

coïncide avec celle induite par l'accouplement "hauteur p-adique" divisée par $\log\chi(\gamma)$.

Cette proposition se démontre [39] en revenant à la définition de la suite exacte de Poitou-Tate. On a d'autre part le diagramme ci-dessous qui est la version entière du diagramme permettant de définir les flèches $H^1_f(V) \to \text{Ш}_{\mathrm{Iw}}(V)^\Gamma$ et $\text{Ш}_{\mathrm{Iw}}(V)_\Gamma \to (H^1_f(V^*(1))_0)^*$ et dans lequel $Z = \frac{H^1(\mathbf{Q}_p,T)}{H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p,T)_\Gamma} \oplus \left(\oplus_{\ell\in S-\{p\}} \frac{H^1_f(\mathbf{Q}_\ell,T)}{H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_\ell,T)_\Gamma}\right)$ est un groupe fini ayant pour cardinal $|Z| = C_p \prod_{\ell\in S-\{p\}} \mathrm{Tam}^0_\ell(T)$ d'après le lemme 3.8. On déduit de la proposition 3.9 et du diagramme que $[\text{Ш}_{\mathrm{Iw}}(T)_\Gamma : \text{Ш}_{\mathrm{Iw}}(T)^\Gamma]$ est aussi égal à

$$\log(\chi(\gamma))^{-r_{p,2}(V)} \Big\langle (H^1_f(T^\vee(1))_0)^\vee, \frac{H^1_f(T)}{H^1_f(T)_u} \Big\rangle_{\mathrm{ht}} \Big[\frac{H^1_{f,\{p\}}(T)}{H^1(T)_u} : \frac{H^1_f(T)}{H^1_f(T)_u}\Big]^{-1} \frac{|Z|}{|X^0_{\mathrm{Iw}}(T)^\Gamma|},$$

ce qui, compte tenu des formules $\int_\Gamma \mu_{X^0_{\mathrm{Iw}}(T)} = \frac{|X^0_{\mathrm{Iw}}(T)_\Gamma|}{|X^0_{\mathrm{Iw}}(T)^\Gamma|}$ et $X^0_{\mathrm{Iw}}(T)_\Gamma = H^0(T^\vee(1))^\vee$ permet de terminer la démonstration de la proposition 3.5.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] & \oplus_{\ell\in S} H^0(\mathbf{Q}_\ell, T) \arrow[r] \arrow[d] & Y(T)^\Gamma \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & H^2(T^\vee(1))^\vee \arrow[r] \arrow[d] & X^1_{\mathrm{Iw}}(T)^\Gamma \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & H^1_{f,\{p\}}(T)/H^1(T)_u \arrow[r, dotted] \arrow[d] & Ш_{\mathrm{Iw}}(T)^\Gamma \arrow[d] & \\
0 & Z \arrow[l] & \frac{H^1(\mathbf{Q}_p,T)\oplus\left(\oplus_{\ell\in S-\{p\}} H^1_f(\mathbf{Q}_\ell,T)\right)}{H^1_{\mathrm{Iw}}(T)_\Gamma} \arrow[l] \arrow[d] & Y(T)_\Gamma \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \\
0 & X^0_{\mathrm{Iw}}(T)^\Gamma \arrow[l] & H^1(T^\vee(1))^\vee \arrow[l] \arrow[d] & X^1_{\mathrm{Iw}}(T)_\Gamma \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \\
 & & (H^1_f(T^\vee(1))_0)^\vee \arrow[d] & Ш_{\mathrm{Iw}}(T)_\Gamma \arrow[l, dotted] \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

RÉFÉRENCES

[1] Y. Amice, Interpolation p-adique, Bull. Soc. France **92**, 117-180, 1964

[2] Y. Amice, Duals. Proc. of a conf. on p-adic analysis (Nijmegen 1978), 1-15, Nijmegen, Math. Institut Katholische Univ., 1978

[3] Y. Amice et J. Vélu, Distributions p-adiques associées aux séries de Hecke, Astérisque **24-25**, Soc. Math. France, Paris 119–131, 1975

[4] D. Barsky, Fonctions k-lipschitziennes sur un anneau local et polynômes à valeurs entières, Bull. Soc. Math. France **101**, 397-411, 1973

[5] D. Benois, On Iwasawa theory of cristalline representations, preprint 1998

[6] A. Beilinson, Higher regulators and values of L-functions, J. Soviet Math. **30**, 2036-2070, 1985

[7] A. Beilinson, Polylogarithm and cyclotomic elements, preprint, 1989

[8] A. Beilinson et P. Deligne, Motivic polylogarithm and Zagier conjecture, preprint 1992

[9] S. Bloch et K. Kato, L functions and Tamagawa numbers of motives, dans The Grothendieck Festschrift, vol. 1, Prog. in Math. **86**, Birkhaüser, Boston, 333–400, 1990

[10] F. Cherbonnier, P. Colmez, Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques d'un corps local, J. Amer. Math. Soc **12**, 241-268, 1999

[11] J. Coates, p-adic L functions, Séminaire Bourbaki (1988), exposé 701, Astérisque **177-178**, 33-59, 1989

[12] J. Coates et A. Wiles, On p-adic L-functions and elliptic units, J. Australian Math. Soc., **A 26**, 1-25, 1978

[13] R. Coleman, Division values in local fields, Inv. Math. **53**, 91-116, 1979

[14] P. Colmez, Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local, Ann. Math. **148**, 485-571, 1998

[15] P. Deligne, Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales, dans Automorphic forms, representations and L-functions, Proc. Symp. Pure Math., American Math. Soc., **33**, 313-346, 1979

[16] J.-M. Fontaine, Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local ; construction d'un anneau de Barsotti-Tate, Ann. Math. **115**, 529-577, 1982

[17] J.-M. Fontaine, Le corps des périodes p-adiques. dans "*Périodes p-adiques*" exposé II, Astérisque **223**, 59-102, 1994

[18] J.-M. Fontaine, Représentations p-adiques des corps locaux, dans "*The Grothendieck Festschrift*", vol II, Birkhauser, Boston 249-309, 1991.

[19] J.-M. Fontaine, Valeurs spéciales de fonctions L des motifs, Séminaire Bourbaki, exposé **751**, Astérisque **206**, 205-249, 1992

[20] J.-M. Fontaine et B. Mazur, Geometric Galois representations, dans *Elliptic curves, modular forms and Fermat's last theorem (Hong-Kong, 1993)*, Ser. Number Theory **I**, Internat. Press, Cambridge MA, 41-78, 1995

[21] J.-M. Fontaine et B. Perrin-Riou, Autour des conjectures de Bloch et Kato : cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions L, dans *Motives (Seattle)*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. **55**, part 1, 599-706, 1994

[22] R. Greenberg, Iwasawa theory for p-adic representations, Adv. Stud. Pure Math. **17**, 97-137, 1989

[23] H. Hida, *Elementary theory of L-functions and Eisenstein series*, London Math. Soc. Stud. Texts **26**, Cambridge University Press, 1993

[24] H. Hida, On the search of genuine p-adic modular L-functions for $\mathrm{GL}(n)$, Mém. Soc. Math. Fr. **67**, 1996

[25] A. Huber et G. Kings, Degeneration of ℓ-adic Eisenstein classes and of the elliptic polylog. Invent. Math. **135**, 545–594, 1999

[26] A. Huber et J. Wildeshaus, Classical motivic polylogarithm according to Beilinson and Deligne, Doc. Math. **3**, 27-133 et 297-299, 1998

[27] U. Jannsen, On the l-adic cohomology of varieties over number fields and its Galois cohomology, *Galois groups over* $\mathbf{Q}$, Math. Sci. Res. Inst. Publ. **16**, 315-360, Springer, 1989

[28] K. Kato, Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil L-functions via B_{dR}, dans Arithmetic Algebraic Geometry, Lecture Notes in Math. **1553**, 1993.

[29] K. Kato, Euler systems, Iwasawa theory and Selmer groups, preprint 1995

[30] K. Kato, M. Kurihara and T. Tsuji, Local Iwasawa theory of Perrin-Riou and syntomic complexes, preprint 1996

[31] V. Kolyvagin, Euler systems, The Grothendieck Festschrift, vol. **2**, Prog. in Math. **87**, 436-483, Birkhaüser, Boston, 1990

[32] Y. Manin, Periods of cusp forms, and p-adic Hecke series, Math USSR-Sb. **92**, 371-393, 1973

[33] B. Mazur, J. Tate et J. Teitelbaum, On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer, Invent. Math. **84**, 1-48, 1986

[34] B. Mazur et A. Wiles, Class fields of abelian extensions of $\mathbf{Q}$, Invent. Math. **76**, 179-330, 1984

[35] J. Milne, *Arithmetic duality theorems,* Perspectives in Mathematics, vol. **1**, Academic Press, 1986.

[36] J. Nekovář, On p-adic height pairings, dans Séminaire de théorie des nombres 1990-1991, édité par S. David, 127-202, Birkhaüser Boston, 1993

[37] J. Nekovář, Beilinson's conjectures, dans *Motives (Seattle)*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. **55**, part 1, 537-570, 1994

[38] B. Perrin-Riou, Théorie d'Iwasawa p-adique locale et globale, Invent. Math. **99**, 247-292, 1990

[39] B. Perrin-Riou, Théorie d'Iwasawa et hauteurs p-adiques, Invent. Math. **109**, 137-185, 1992

[40] B. Perrin-Riou, Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local, Invent. Math. **115** 81-149, 1994

[41] B. Perrin-Riou, *Fonctions L p-adiques des représentations p-adiques*, Astérisque **229**, 1995

[42] B. Perrin-Riou, Fonctions L p-adiques, dans *Proc. Int. Congress Math. Zürich*, 400-410, Birkhäuser, 1995

[43] B. Perrin-Riou, Systèmes d'Euler et représentations p-adiques, Ann. Inst. Fourier **48**, 1231-1307, 1998

[44] K. Rubin, The main conjecture, Appendix to Cyclotomic fields (seconde édition) par S. Lang, Graduate Texts in Math. **121**, Springer-Verlag, 1990.

[45] K. Rubin, Euler systems, Hermann Weyl lecture, livre en préparation

[46] A. Scholl, Remarks on special values of L-functions, dans *L-functions and Arithmetic*, Proc. of the Durham Symp., London Math. Soc. L.N.S. 153, Cambridge University Press, 1991, 373-392

[47] A. Scholl, Height pairings and special values of L-functions, dans *Motives (Seattle)*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. **55**, part 1, 571-598, 1994

[48] A. Scholl, An introduction to Kato's Euler systems, dans *Galois representations in arithmetic algebraic geometry*, 379-460, Cambridge University Press, 1998

[49] P. Schneider, p-adic height pairings, II, Invent. Math. **79**, 329-374, 1985

[50] J.-P. Serre, Sur le résidu de la fonction zêta p-adique d'un corps de nombres, C. R. Acad. Sci. Paris **287** série A, 83-126, 1978

[51] C. Soulé, Eléments cyclotomiques en K-théorie, Astérisque **147-148**, 225-257, 1987

[52] J. Tate, p-divisible groups, Proc. of a conference on local fields, Nuffic Summer School at Driebergen, Springer, Berlin, 158-183, 1967

[53] M. Vishik, Non-archimedian measures connected with Dirichlet series, Math. USSR Sbornik **28**, 216-228, 1976

P. COLMEZ

École Normale supérieure
45 rue d'Ulm
75005 PARIS

Institut de mathématiques de Jussieu
4 place Jussieu
75005 PARIS
E-mail : colmez@ens.fr