COLLÈGE
DE
FRANCE

CHAIRE D'ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

Paris, le 17/9/86

Cher Fontaine,

Au téléphone, hier, nous avons parlé du " fait " que tout système de valeurs propres des opérateurs de Hecke se trouve réalisé(à torsion près) par une forme de poids $\leqslant p+1$. Comme je te l'ai dit, j'ai un schéma de démonstration (pas tout à fait complet, comme tu le verras) de ce " fait " , basé sur l'isomorphism de Eichler-Shimura. Voici comment on procède :

J'ai besoin tout d'abord d'un résultat sur les représentations irréductibles de $G = GL_2(\mathbb{F}_p)$ en caract. p , à savoir :

toute repr.irréductible de G est de la forme $d^i s_j$, où d^i est la puissance i-ème de la représentation de degré 1 donnée par le déterminant)($0 \leqslant i \leqslant p-2$), et s_j est Sym^j de la représentation évidente de degré 2 de G ($0 \leqslant j \leqslant p-1$). (Le produit est le produit tensoriel des représentations - ou, ce qui revéent au même, le produit des caractères modulaires correspondants. Note que $d^0 = 1 = s_0$.) Une façon de prouver ça consiste à " compter " : on obtient ainsi p(p-1) repr.irréductibles distinctes, et le nombre de classes p-régulières est égal au nombre des polynômes caractéristiques possibles $T^2 + a_1T + a_2$, qui est aussi $p(p-1)$.

Ce qui m'intéresse surtout ici, c'est le corollaire :

(*) <u>Si</u> $j \geqslant p$, <u>les</u> s_j <u>sont combinaisons linéaires</u> (à coef. entiers $\geqslant 0$) <u>des</u> $d^i s_m$, <u>avec</u> $0 \leqslant m \leqslant p-1$.

[Exemple : $p=3$. On a $s_3 = s_1+ds_1$; $s_4 = s_2+1+d$; $s_5 = s_1+2ds_1$; $s_6 = s_2+ds_2+1$; $s_7 = 2s_1+2ds_1$;$s_8 = s_2+ds_2+d+2$;...]

Tu peux aussi démontrer (*) directement, en utilisant les deux formules suivantes :

$$\begin{cases} s_1 s_j = s_{j+1} + ds_{j-1} & \text{si } j \geqslant 1 \text{ (cas particulier de Clebsch-Gordan)} \\ s_p = s_1 + ds_{p-2} . \end{cases}$$

Il y a de jolis cas particuliers, dont celui-ci (dû à Tate, dans un contexte différent, celui de la formule de Selberg, cf.Naomi,p.28

$$s_{j+p+1} = s_{j+2} + ds_j + d^{j+2}s_{p-j-3} \qquad (0 \leqslant j \leqslant p-3).$$

Comment appliquer ça aux formes modulaires ? Je vais considérer le groupe

$$G_{(p)} = GL_2(Z_{(p)}) ,$$

où $Z_{(p)}$ est le localisé de Z en (p), i.e. l'ensemble des fractions a/b avec $b \not\equiv 0 \pmod p$.

Par réduction (mod p), on a un homomorphisme surjectif

$$G_{(p)} \rightarrow G = GL_2(F_p).$$

Toute représentation linéaire de G en définit donc une de $G_{(p)}$; ceci s'applique en particulier aux représentations $d^i s_j$: nous pouvons les regarder comme des représentations de $G_{(p)}$.

Soit maintenant N un entier premier à p, et intéressons-nous à des formes modulaires de niveau N. L'isomorphisme de Eichler-Shimura (cf. for instance le livre de Shimura) fait correspondre à ces formes des classes de cohomologie dans $H^1(\Gamma, \mathrm{Sym}^{k-2})$, où Γ est le groupe considéré (disons $\Gamma_1(N)$, pour fixer les idées) et Sym^{k-2} est la puissance symétrique k-2 ième de la repr. évidente. De plus, et c'est là un fait essentiel, les opérateurs de Hecke T_ℓ $(\ell \nmid pN)$ ont également des définitions cohomologiques (par des transferts) utilisant <u>uniquement des éléments du groupe</u> $G_{(p)}$.

(Exemple : $N = 1$, $\Gamma = SL_2(Z)$. On obtient T_ℓ de la manière suivant si $x \in H^1(\Gamma, \mathrm{Sym}^{k-2})$, on restreint x au sous-groupe $\Gamma_0(\ell)$ de Γ puis on conjugue par $\begin{pmatrix} \ell & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ce qui transforme x en une classe de cohomologie sur $\Gamma'_0(\ell) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $b \equiv 0 \pmod \ell$, et on fait ensuite un transfert pour expédier ca dans une classe de cohomologie de Γ .)

(J'ai un peu triché - déjà ! : il faut prendre la cohomologie <u>parabolique</u> de Γ , i.e. la cohomologie <u>relative</u>, modulo les sous-groupes paraboliques, peu importe.)

Le point essentiel est que <u>tout se voit dans</u> $G_{(p)}$, autrement dit que des représentations isomorphes de $G_{(p)}$ vont donner les mêmes systèmes de valeurs propres.

Je vais maintenant tricher bien plus sérieusement, i.e. je vais procéder comme si $H^1(\Gamma, \ldots)$ était un <u>foncteur exact</u> en le $G_{(p)}$-module des coefficients. Je reviendrai un peu plus loin sur cette tricherie , que j'espère innocente.

Je m'intéresse aux systèmes de valeurs propres des op. de Hecke dans $H^1(\Gamma, Sym^{k-2})$, mais je m'y intéresse uniquement mod p. Vu l'exactitude supposée du foncteur H^1, cela rebient à dire que je m'intéresse à $H^1(\Gamma, Sym^{k-2}/pSym^{k-2})$, i.e. à $H^1(\Gamma, s_{k-2})$, avec les notations de la 1ère page. Mais d'après (*) ces H^1 se laissent dévisser en ceux relatifs à $k-2 \leqslant p-1$, i.e. $k \leqslant p+1$, cqfd. (Attention ! J'ai besoin du groupe GL_2 et pas seulement comme on pourrait naïvement le croire du groupe SL_2, qui pourtant contient mon groupe discret Γ. Cela provient de ce que les opérateurs de conjugaison utilisés dans la construction des opérateurs de Hecke T n'appartiennent pas à SL_2 : ils sont représentés par des matrices de déterminant ℓ. Mais heureusement ils sont dans ce grand sac que constitue mon groupe $G_{(p)}$.)

Bien sûr, il faut vérifier que les systèmes de valeurs propres donnés par ds_j sont bien les " Tate twists " de ceux donnés par s_j : je ne l'ai pas écrit en détail, mais ça ne peut qu'être trivial.

Reste maintenant à expliquer pourquoi mon hypothèse fausse que " H^1 (ou H^1_{par}) est un foncteur exact " n'est pas gênante. Autrement dit (vu les suites exactes de cohomologie) il faut expliquer pourquoi H^0 et H^2 n'ont pas d'importance. C'est que je m'intéresse uniquement aux systèmes de valeurs propres des T_ℓ qui conduisent à des <u>représentations galoisiennes irréductibles</u> les Eisenstein ne m'intéressent pas. Précisons ça en déclarant qu'un système de valeurs propres $a_\ell \in \overline{F}_p$ des T_ℓ est <u>banal</u> si a_ℓ <u>ne dépend que de la classe de</u> ℓ <u>modulo un certain entier</u> (en termes de représentations, ça voudra dire que la semi-simplifiée de la repr. correspondante est abélienne, donc réductible). Je prétends que :

(?) <u>tout système de valeurs propres des</u> T_ℓ <u>fourni par du</u> H^0 <u>ou du</u> H^2 (dans une repr. mod p de G) <u>est banal</u>.

Je n'ai pas vérifié complètement (?), mais je suis sûr que c'est essentiellement vrai. L'idée est que, pour H^0, comme l'image de Γ dans G est $SL_2(F_p)$, l'action de G sur un élément fixe se fait par une puissance du déterminant; la banalité doit en résulter. Pour H^2, la dualité de Poincaré doit permettre de se ramener à H^0. (Bref, c'est l'idée habituelle que, dans la cohomologie d'une courbe algébrique, les seules choses intéressantes se passent en dimension 1.)

Tel est mon schéma de démonstration; il est inspiré de remarques de Kuga (Proc.Boulder, ~~XXX~~ 1965, p.337, dernières lignes). Je suis sûr que Ribet et toi n'aurons pas de mal à le mettre au point.

Je n'ai pas avancé, hélas, dans la rédaction du texte sur LA conjecture. Il y a beaucoup de choses à dire. D'abord les nombreuses applications :

Taniyama-Weil;

Fermat, et plus généralement des équations du type $x^p + y^p = cz^p$, p premier, c impair, $1 \leq c \leq 15$ (pour $p \geqslant 5$, ces équations ne devraient pas avoir de solutions non banales);

schémas en groupes de type (p,p) sur Z : ce sont seulement les sommes directes $Z/pZ \oplus Z/pZ$, $Z/pZ \oplus \mu_p$ et $\mu_p \oplus \mu_p$, à la seule exception de $p = 2$ où il y a également une extension non triviale de $Z/2Z$ par μ_2, réalisable concrètement par les points de division par 2 de la courbe elliptique $y^2 = x^3 + x$;

motifs de rang 2 et de poids impair (par exemple le H^3 d'une
sur Q / var.projective lisse/, si ce H^3 est de dim.2) : cela utilise tes résultats.

Il faudra aussi que je donne une liste des exemples numériques qui appuient la conjecture :

représentations dans $GL_2(F_2) = S_3$, dans $SL_2(F_4) = A_5$, dans $GL_2(F_3) = S_4$, dans un certain sous-groupe de $GL_2(F_9)$ lié au fait que $PSL_2(F_9) = A_6$, dans un certain sous-groupe de $GL_2(F_{49})$ lié au groupe simple $PSL_2(F_7)$ d'ordre 168. Dans chaque cas, on part d'une représentation galoisienne qui n'est pas du tout construite modulairement, et on trouve une forme modulaire qui a l'air de l'expliquer. (Je dis " a l'air " car on se borne à vérifier qu'elle a une série de propriétés nécessaires; il serait très difficile de prouver ~~XXXXXXXX~~ qu'elle correspond vraiment à la représentation dont on est parti.)

Souhaite-moi du courage !

S.et f.

J-P.Serre