COLLÈGE
DE
FRANCE

CHAIRE D'ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

Paris, le 11 décembre 86

Cher Fontaine,

Tu as dû recevoir (à Meylan) mon texte sur les représentations "modulaires " de G_Q . La version que tu as reçue n'est pas identique à celle qui sera (j'espère) publiée : j'ai modifié l'introduction pour mieux mettre en évidence le caractère incertain du §2 : détermination du poids k.

C'est de cette question que je voudrais te parler. On pourrait la reformuler ainsi : sachant qu'une représentation ρ provient d'une forme modulaire de $\Gamma_0(N)$, N premier à p, de poids indéterminé, quelle est la plus petite valeur de k possible ? C'est à cette question que mon §2 prétend répondre. En fait, une grande part de la réponse est forcée par tes résultats d'il y a quelques années (en admettant qu'ils vaillent aussi pour des niveaux $\neq 1$, ce qui est sûrement vrai). Mais il y a des cas essentiellement nouveaux, que je voudrais mettre en évidence :

Considère une représentation ρ dont la restriction au groupe d'inertie est :

soit $\begin{pmatrix} \chi^a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, soit $\begin{pmatrix} \chi^a & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

avec $1 \leq a \leq p-2$, disons (le 1er cas est celui d'une repr. modérée, le second d'une représentation sauvage). Les deux conduisent conjecturalement à un poids $k = a+1$, avec val.propre[*] de $T_p \neq 0$. En pratique, si l'on connaît la forme modulaire f , on n'a aucun moyen (sauf en poids 2) de distinguer entre le 1er cas et le second, j'y reviendrai.(Par exemple, si $f = \Delta$, et si $p = 13$, 1[illegible] 19, ... , dans quel cas se trouve-t-on ?) La conjecture te donne un moyen de trancher :

*je l'appelle λ

Opère une torsion d'ordre $p-1-a$ sur ta représentation ρ , i.e. remplace ρ par $\chi^{p-1-a} \otimes \rho$. Tu trouves une action triangulaire de l'inertie avec un 1 dans le coin en haut à gauche. Dans le 1er cas, ρ est semi-simple (en p) et tu peux considérer que ce " 1 " est dans le coin du bas; d'où une forme g de poids $k' = p-a = p+1-k$ qui correspond à cette tordue .

(Attention : g doit être fonction propre de U_p avec valeur propre $\mu \neq 0$. Et même on doit avoir $\lambda\mu = 1$.)

Dans le second cas, tu n'as pas le droit de mettre le " 1 " en bas, et le poids prévu est bien plus grand (avec valeur propre de U_p nulle, bien sûr).

En termes de l'opérateur de dérivation θ, tu arrives donc au critère suivant (pour $p \geqslant 5$,(*) disons) :

(*) pour que ρ soit <u>modérée</u>, il faut et il suffit qu'il existe une forme g de poids $p+1-k = p-a$ telle que

$$\theta^{p-a} g = \theta f \,,$$

et l'on doit alors pouvoir choisir g de telle sorte que $U_p g = \mu g$ avec $\lambda\mu = 1$ si $U_p f = \lambda f$.

(Le " il suffit " est sans doute démontrable sans idée nouvelle. C'est " il ~~suffit~~ faut " qui est intéressant.)

Il serait bien intéressant de prouver (*), mais je ne vois pas comment faire. C'est un critère très facile à mettre en pratique numériquement. Par exemple, si tu t'intéresses à $f = \Delta$, $a = 11$, $p = 19$, tu as $p-a = 8$, et comme il n'y a pas de forme parabolique en poids 8 (à part 0) g n'existe pas. Conclusion (? la représentation $\rho_{19} : G_Q \to GL_2(F_{19})$ associée à Δ est sauvagement ramifiée en 19. (Ceci peut se vérifier : si elle ne l'était pas, elle donnerait une extension galoisienne de Q mettan en défaut les bornes d'Odlyzko.) On pourrait s'amuser à programmer ceci pour $f = \Delta$, et p croissant (note le cas $p = 23$, où g existe et est égale à Δ); je ne l'ai pas fait. Je soupçonne que l'on trouverait <u>très peu</u> de p où g existe.

Il y a tout de même un certain nombre de cas particuliers où le calcul a été fait. Pars d'une courbe elliptique E ayant (par exemple) bonne réduction en p de hauteur 1, ce qui donne $a = 1$. La représentation ρ est modérée si et seulement si la courbe est congrue (mod p^2) au relèvement canonique de sa réduction (mod p) [quand la réduction a un j égal à 0 ou 1728, il faut interpréter ça intelligemment], ce que l'on peut parfaitement tester numériquement, par exemple au moyen des valeurs de j.

cela peut se dire aussi en termes du "q de Serre-Tate", comme dit Katz

---

(*) Pour $p = 3$, il y a des différences sérieuses entre les formes mod p au sens de Katz, ou au sens naïf que j'ai utilisé. Il se peut parfaitement qu'il faille utili. le poids au sens de Katz ; je n'ai pas suffisamment d'exemples.

<u>Exemple avec</u> $p = 3$

On cherche dans Anvers IV) des courbes ayant bonne réduction ordinai en 3, repr. irréductible mod 3 (i.e. pas d'isogénie de degré 3 rationnelle sur Q), et ρ modérée en 3 ce qui se traduit ici concrètement par $\Delta \equiv \pm 1 \pmod 9$. On en trouve :

a) Courbe 89A .

La tordue de ρ par χ doit être réalisable par une forme de poids $p + 1 - a = 2$ sur le même niveau 89. Or effectivement la forme associée à la courbe elliptique 89C répond à la questio (pour les nombres premiers assez petits, en tout cas):

	ℓ	2	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47
89A $\to$	a_ℓ	1	1	2	2	2	0	1	2	0	0	1	0	2	0
89C $\to$	a'_ℓ	2	2	2	1	2	0	1	1	0	0	1	0	2	0

(Vérifie que $a'_\ell \equiv (\frac{\ell}{3}) a_\ell \mod 3$!)

b) Courbe 118D.

Même chose avec la courbe 118E . J'ai la flemme de recopier les valeurs des a_ℓ et a'_ℓ .

<u>Exemple avec</u> $p = 5$

On part de la courbe 77A d'Anvers IV, avec $j \equiv j(2i) \pmod{5^2}$ ce qui entraîne (puisque $j(2i) = 2^3 3^3 11^3$ est le j canonique relevant $j \equiv 1 \pmod 5$) que ρ_5 est modérée en 5. La tordue $\chi^3 \otimes \rho$ doit donc être réalisable par une forme de poids 4 et de niveau 77. C'est effectivement ce qu'a vérifié Mestre, par calcul sur machine.

Bref, je suis convaincu que cette partie de la conjecture est vraie. Mais comment la démontrer ?

Bien à toi - et bonnes vacances

J-P. Serre

J-P.Serre