

P. Colmez

Jean-Marc Fontaine
I.H.E.S.
35 Route de Chartres
91440 Bures-sur-Yvette

Bures, nov 26, 1987

Dear Jannsen,

I really believe now that your conjecture about "p-adic monodromy" is "almost" true. Actually, I'm going to make a more precise conjecture and to prove it for semi-stable abelian varieties. This conjecture implies a modified version of yours (there is an equivalence between a suitable category of p-adic representations and a suitable category of φ -filtered modules with a nilpotent endomorphism N , but the underlying φ -filtered module need not to be weakly admissible (except for the cohomology of curves and abelian varieties, but as you explained to me, this case is very peculiar)).

Roughly speaking, the situation is as follow (where k is a perfect field of characteristic p , K_0 is the fraction field of Witt vectors with coefficients in k , and K , the basis, is a totally ramified finite extension of degree e of K_0): Let B_{cris} (resp. B_{DR}) the ring I have introduced to define cristalline (resp. de Rham's) representations. There is a well defined sub-ring B_J of B_{DR} , containing B_{cris} , stable under the action of Galois, which has the two following properties:

(1) It is not too big: meaning that it satisfies the two following properties:

Property 1: The natural map

$$K \otimes_{K_0} B_J \rightarrow B_{DR}$$

is injective.

Property 2: The ring B_J can be endowed with operators φ and N as you like; more precisely:

i) one can define an endomorphism φ of B_J , which commutes with the action of Galois and extends the Frobenius on B_{cris} (this φ is not uniquely defined: there is a natural one-to-one map between the set of the possible choices and the set of the different homomorphisms

$$\log: K_0^* \rightarrow K_0$$

which extend the usual p -adic logarithm on the group U_0 of the units of the ring of the integers of K_0),

ii) one can define a B_{cris} -derivation $N: B_J \rightarrow B_J$, which commutes with the action of Galois and has the property that the kernel of N is B_{cris} and that $N\varphi = p\varphi N$ (again, this N is not unique: there is a natural one-to-one map between the set of such N and the set of non zero homomorphisms

$$v: K_0^*/U_0 \rightarrow \mathbb{Q}_p$$

of course, a natural choice consists of taking the valuation).

[As an abstract B_{cris} -algebra, B_J is isomorphic to the ring of polynomials in one variable u with coefficients in B_{cris} and one can choose u , φ and N in such a way that $\varphi u = pu$ and $Nu = 1$].

2) It is big enough: The property 1 implies that if V is any p -adic representation (i.e. any finite dimensional \mathbb{Q}_p -vector space endowed with a linear and continuous action of Galois), then

$$\dim_{K_0} (B_J \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\text{Galois}} \leq \dim_{\mathbb{Q}_p} V.$$

Property 3: Let A be any semi-stable abelian variety over K and $m \in \mathbb{N}$. Then $\dim (B_J \otimes_{\mathbb{Q}_p} H_{\text{et}}^m(A \otimes \bar{K}, \mathbb{Q}_p))^{\text{Galois}} = \dim H_{\text{et}}^m(A \otimes \bar{K}, \mathbb{Q}_p)$.

Of course, if you define $H_J^m(A) = (B_J \otimes_{\mathbb{Q}_p} H_{\text{et}}^m(A \otimes \bar{K}, \mathbb{Q}_p))^{\text{Galois}}$, it is a finite dimensional K_0 -vector space endowed with a φ , a N and a

filtration of $K \otimes_{K_0} H^m(A)$ (actually - by my comparison's conjecture, which is a theorem in this case, with a written proof due to Le Stum ([LS], App. B), and an unwritten proof due to Bill Messing and myself - this last filtered K -vector space is canonically isomorphic to $H_{\text{DR}}^m(A)$). And one can recover the étale cohomology from those datas :

$$H_{\text{ét}}^m(A \otimes \bar{K}, \mathbb{Q}_p) = \{ v \in B_J \otimes_{K_0} H^m(A) \mid v \in \text{Fil}^0, \varphi v = v, Nv = 0 \}.$$

Now, I am going to be precise. But I have to apologize : I'm squipping to french !

S 1. - Le module de Tate des variétés abéliennes semi-stables

1.1. - Notations.

Soient p un nombre premier, k un corps parfait de caractéristique p , $W = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k , $K_0 = \text{Frac } W$, K une extension finie totalement ramifiée de K_0 de degré e , \bar{K} une clôture algébrique fixée de K , $\mathfrak{g} = \text{Gal}(\bar{K}/K)$.

1.2. - La catégorie $\text{Rep}_{\text{pF}}(\mathfrak{g})$.

Toute cette histoire repose sur une conséquence "facile" du théorème de réduction semi-stable, que je m'étonne de ne pas avoir réalisée plus tôt (et j'ai peine à croire que personne ne sache ça).

Je dis qu'une représentation p -adique V (de \mathfrak{g} bien sûr) provient d'un groupe p -divisible s'il existe un groupe de Barsotti-Tate Γ sur l'anneau des entiers de K tel que V soit isomorphe à $\mathbb{Q}_p \otimes T_p(\Gamma)$ (où $T_p(\Gamma)$ est le module de Tate de Γ).

Je choisis une représentation p -adique V_0 , extension de \mathbb{Q}_p par $\mathbb{Q}_p(1)$ (de sorte que j'ai une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathbb{Q}_p(1) \rightarrow V_0 \rightarrow \mathbb{Q}_p \rightarrow 0),$$

qui ne provient pas d'un groupe p-divisible (pour fixer les idées, on peut prendre, par exemple, l'extension correspondant au 1-motif

$$\mathbb{Z} \rightarrow G_m$$

où 1 s'envoie sur p ; on peut aussi prendre le module de Tate de n'importe quelle courbe elliptique sur K , avec réduction multiplicative à tangentes rationnelles).

Enfin, je note $\text{Rep}_{pF}(g)$ (PF = "presque fini") la plus petite sous-catégorie pleine de la catégorie des représentations p-adiques qui est stable par somme-directe, sous-objets et quotients et qui contient

- d'une part, toutes les représentations provenant des groupes p-divisibles,
- d'autre part, V_0 .

En fait, cette catégorie est indépendante du choix de V_0 (c'est ce que dit le lemme 1.9 ci-dessous).

1.3. - "Théorème". Soient A une variété abélienne semi-stable sur K , $T_p(A)$ son module de Tate et $V(A) = \mathbb{Q}_p \otimes T_p(A)$. Alors $V(A)$ est un objet de $\text{Rep}_{pF}(g)$.

La raison d'être des guillemets est que ce que je vais prouver dépend d'un résultat dont il n'existe de preuve écrite que pour $e \leq p-1$. Au paragraphe 5, je donnerai un théorème un peu plus technique, mais qui est valable sans restriction sur e .

1.4. - J'ai besoin de te rappeler quelques définitions sur les φ -modules filtrés (je sais bien que tu les connais, je pense à d'autres lecteurs éventuels) : un φ -module filtré (de dimension finie) consiste en la donnée d'un K_0 -espace vectoriel D de dimension finie, muni

- i) d'un \mathbb{Q}_p -endomorphisme $\varphi : D \rightarrow D$, semi-linéaire relativement au Frobenius absolu,

ii) d'une filtration décroissante, indexée par \mathbb{Z} , exhaustive et séparée, de $D_K = K \otimes_{K_0} D$ par des sous- K -espaces vectoriels $(\text{Fil}^i D_K)_{i \in \mathbb{Z}}$.

Les φ -modules filtrés forment, de manière évidente, une catégorie additive, en fait \mathbb{Q}_p -linéaire, pour laquelle on a une notion de suite exacte courte et donc aussi d'extensions.

Je vais noter $\underline{\text{MF}}_K^f$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des φ -modules filtrés dont les objets sont ceux qui sont faiblement admissibles ([F1], § 4) et, pour $a, b \in \mathbb{Z}$ vérifiant $a \leq b$, $\underline{\text{MF}}_K^{f,[a,b]}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\text{MF}}_K^f$ formée des D vérifiant $\text{Fil}^a D = D$ et $\text{Fil}^{b+1} D = 0$.

Peu importe la définition technique exacte. La chose importante, pour le moment, est de savoir que ce sont des catégories abéliennes, qu'une suite courte d'objets de $\underline{\text{MF}}_K^{f,[a,b]}$ est exacte dans cette catégorie si et seulement si elle est exacte dans celle des φ -modules filtrés; et qu'une extension, dans la catégorie des φ -modules filtrés, de deux objets de $\underline{\text{MF}}_K^{f,[a,b]}$ est encore un objet de $\underline{\text{MF}}_K^{f,[a,b]}$.

1.5.- Extensions panachées. (référence : ? probablement SGA VII ; j'ai eu la flemme de vérifier et je dois donc m'excuser pour la terminologie bizarre que je vais employer).

Soit $\underline{\mathcal{C}}$ une catégorie abélienne ; je vais appeler suite panachable de $\underline{\mathcal{C}}$ la donnée d'un diagramme de $\underline{\mathcal{C}}$ du type

$$D_1 \rightarrow D_2 \rightarrow D_3 \rightarrow D_4 \rightarrow D_5$$

tel que les suites

$$0 \rightarrow D_1 \rightarrow D_2 \rightarrow D_3 \rightarrow 0$$

et

$$0 \rightarrow D_3 \rightarrow D_4 \rightarrow D_5 \rightarrow 0$$

soient exactes.

Si $(D_1 \rightarrow \dots \rightarrow D_5)$ est une suite panachable de $\underline{\mathcal{C}}$, une extension

filtration) : on a

$$\text{Fil}^i D_{4,K} = (\text{Fil}^i D_{3,K} \oplus \{ (\alpha d, d) \mid d \in \text{Fil}^i D_{5,K} \})$$

On voit alors qu'il suffit de choisir une application K -linéaire

$$\bar{\alpha} : D_{5,K} \rightarrow D_{2,K}$$

qui, composée avec la projection de $D_{2,K}$ sur $D_{3,K}$, redonne α et de définir l'extension panachée D par

$$D = D_2 \oplus D_5$$

en tant que K_0 -espace vectoriel muni de φ , la filtration sur $D_K = D_{2,K} \oplus D_{5,K}$ étant définie par

$$\text{Fil}^i D_K = (\text{Fil}^i D_{2,K} \oplus \{ (\bar{\alpha} d, d) \mid d \in \text{Fil}^i D_{5,K} \})$$

1.7. - Proposition : Supposons $e \leq p-1$ et soit $(V_1 \rightarrow \dots \rightarrow V_5)$ une suite panachable de représentations p -adiques provenant de groupes p -divisibles. Alors il existe une représentation p -adique qui est extension panachée de $(V_1 \rightarrow \dots \rightarrow V_5)$ et provient d'un groupe p -divisible.

Démonstration : Cela résulte de la proposition précédente et de ce que la théorie de Dieudonné covariante fournit une équivalence entre groupes p -divisibles sur l'anneau des entiers \mathcal{O}_K de K et objets de $\underline{MF}_K^{f,[0,1]}$ (cf. [F2], n°5.3 et [L], n°2.1).

1.8. - Prouvons alors le théorème : Il est clair que l'on peut supposer k algébriquement clos. Si je pose $V = V(A)$, je sais (SGA VII, ??) qu'il existe des entiers r et s (bien sûr, ici $r = s$, mais je n'en aurai pas besoin), une suite panachable de représentations p -adiques $(V_1 \rightarrow \dots \rightarrow V_5)$ provenant de groupes p -divisibles, avec $V_1 \cong (\mathbb{Q}_p(1))^r$ et $V_2 \cong (\mathbb{Q}_p)^s$, tels que V soit une extension panachée de $(V_1 \rightarrow \dots \rightarrow V_5)$.

D'après la proposition précédente, je sais aussi qu'il existe une extension panachée V' de $(V_1 \rightarrow \dots \rightarrow V_5)$ qui provient d'un groupe

p -divisible. On a la suite exacte

$$\text{Ext}^1(V_5, V_1) \rightarrow \text{Ext}^1(V_5, V_2) \rightarrow \text{Ext}^1(V_5, V_3)$$

et, par hypothèse, les classes de V et V' dans $\text{Ext}^1(V_5, V_2)$ ont la même image dans $\text{Ext}^1(V_5, V_3)$. Elles diffèrent donc par un élément qui est l'image de la classe d'une extension V_6 de V_5 par V_1 . Mais, cela signifie que, si

V_7 désigne le noyau de l'application

$$V' \oplus V_6 \rightarrow V_5,$$

qui à (v', v'') associe $\text{Im}(v') - \text{Im}(v'')$, alors V s'identifie au conoyau de l'application de V_1 dans $V' \oplus V_6$ qui à v associe $(\text{Im}(v), -\text{Im}(v))$.

Il suffit donc de vérifier que V_6 est bien un objet de $\text{Rep}_{pF}(g)$. Mais il est immédiat que V_6 est isomorphe à un sous-quotient de la somme directe de rs extensions convenables de \mathbb{Q}_p par $\mathbb{Q}_p(1)$. Pour achever la démonstration, il suffit donc d'établir le lemme suivant :

1.9. - Lemme : Toute représentation p -adique qui est extension de \mathbb{Q}_p par $\mathbb{Q}_p(1)$ est un objet de $\text{Rep}_{pF}(g)$.

Preuve : La théorie de Kummer montre que $\text{Ext}^1(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Q}_p(1))$ s'identifie à $K^* \hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p := (\varprojlim K^*/(K^*)^{p^n}) \hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$.

Soient v_K la valuation de K normalisée par $v_K(K^*) = \mathbb{Z}$ et U_K le groupe des unités de K . Le logarithme p -adique définit un isomorphisme de $U_K \hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ sur K et la suite exacte

$$0 \rightarrow U_K \rightarrow K^* \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

induit une suite exacte

$$0 \rightarrow K \rightarrow \text{Ext}^1(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Q}_p(1)) \xrightarrow{v_K} \mathbb{Q}_p \rightarrow 0,$$

en notant encore v_K l'application induite.

On voit facilement qu'une extension de \mathbb{Q}_p par $\mathbb{Q}_p(1)$ provient d'un groupe p -divisible si et seulement si sa classe dans $\text{Ext}^1(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Q}_p(1))$ appartient au noyau de v_K .

Enfin, si W_1 et W_2 sont deux extensions de \mathbb{Q}_p par $\mathbb{Q}_p(1)$ et si, pour $i = 1, 2$, w_i désigne la classe de W_i dans $\text{Ext}^1(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Q}_p(1))$, on voit que W_1 et W_2 sont isomorphes, en tant que représentations p -adiques, s'il existe $\lambda \in \mathbb{Q}_p^*$ tel que $w_2 = \lambda w_1$.

Intéressons-nous alors au cas où W_1 est l'extension V_0 donnée et où W_2 est quelconque. Par hypothèse, $w_1 \notin \text{Ker } v_K$. Deux cas peuvent se présenter :

- ou bien $w_2 \in \text{Ker } v_K$; alors W_2 provient d'un groupe p -divisible et est un objet de $\text{Rep}_{pF}(\mathfrak{g})$;

- ou bien, quitte à multiplier w_2 par un scalaire non nul, je peux supposer que $v_K(w_2) = v_K(w_1)$; si W_3 est une extension de \mathbb{Q}_p par $\mathbb{Q}_p(1)$ dont la classe est $w_2 - w_1$, alors W_3 provient d'un groupe p -divisible et est donc un objet de $\text{Rep}_{pF}(\mathfrak{g})$; donc W_2 qui est isomorphe à un sous-quotient de $W_1 \oplus W_3 = V_0 \oplus W_3$ est aussi un objet de $\text{Rep}_{pF}(\mathfrak{g})$.

§ 2. - Construction de B_J .

2.1. - Les anneaux B_{cris} et B_{DR} .

Je te rappelle quelques constructions que l'on trouve plus ou moins explicitement dans certains de mes papiers ([F2], [F3]) : je note C le complété de \bar{K} pour la topologie p -adique et \mathcal{O}_C l'anneau de ses entiers. Je considère l'ensemble R des suites $x = (x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{O}_C

vérifiant $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$, pour tout n ; c'est un anneau commutatif (avec $(x^{(n)})(y^{(n)}) = (x^{(n)}y^{(n)})$ et $(x^{(n)})+(y^{(n)}) = z^{(n)}$, où $z^{(n)} = \lim (x^{(n+m)}+y^{(n+m)})p^m$)

et même une k -algèbre (si $\lambda \in k$, λ s'identifie à l'élément $([\lambda^{p^{-n}}])$, où $[y]$ désigne le représentant de Teichmüller de $y \in k$ dans $W \subset \mathcal{O}_C$).

Si $W(R)$ désigne l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans R , on dispose d'un homomorphisme (surjectif) de W -algèbres

$$\theta : W(R) \rightarrow \mathcal{O}_C ;$$

c'est celui qui à $(x_0, x_1, \dots, x_m, \dots)$ associe $\sum p^m x_m^{(m)}$.

Son noyau est un idéal principal, je note $W^{DP}(R)$ le séparé complété pour la topologie p -adique de l'enveloppe à puissances divisées de $W(R)$ relativement à l'idéal noyau de θ ; et $B_{\text{cris}}^+ = W^{DP}(R)[1/p] = K_0 \otimes_W W^{DP}(R)$. Je choisis $\varepsilon = (\varepsilon^{(n)}) \in R$ vérifiant $\varepsilon^{(0)} = 1$ et $\varepsilon^{(1)} \neq 1$, et je pose $t = \log([\varepsilon]) \in W^{DP}(R) \subset B_{\text{cris}}^+$ (c'est l'analogie p -adique de $2\pi i$, c'est un générateur de $\mathbb{Q}_p(1)$ vu comme sous-groupe additif de B_{cris}^+) et $B_{\text{cris}} = B_{\text{cris}}^+[t^{-1}]$.

Enfin, je pose $W_K(R) = K \otimes_W W(R)$, je note $\theta_K : W_K(R) \rightarrow C$, l'application déduite de θ par extension des scalaires,

$$B_{\text{DR}}^+ = \varprojlim W_K(R)/(\text{Ker } \theta_K)^i,$$

et B_{DR} le corps des fractions de cet anneau intègre.

Je te rappelle que l'application naturelle

$$K \otimes_{K_0} B_{\text{cris}} \rightarrow B_{\text{DR}}$$

est injective; je m'en sers pour identifier B_{cris} et $K \otimes B_{\text{cris}}$ à des sous-anneaux de B_{DR} . Alors B_{DR}^+ est un anneau de valuation discrète à corps résiduel C et t est une uniformisante de B_{DR}^+ .

Je te rappelle enfin qu'il y a une action naturelle de \mathfrak{g} sur B_{cris} et B_{DR} , que B_{cris} est muni d'un Frobenius φ et que B_{DR} est muni d'une

filtration (c'est celle que définit la valuation discrète).

2.2. - L'anneau B_J .

Je te rappelle que R est un anneau de valuation (si, pour fixer les idées, v_p est la valuation de C normalisée par $v_p(p) = 1$, l'application

$$x = (x^{(n)}) \rightarrow v_p(x^{(0)})$$

est une valuation de R , que je note v_R).

Il est clair que $\text{Frac } R$ s'identifie aux suites $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}$ d'éléments de C vérifiant $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$ pour tout n . Je vais noter S le sous-groupe du groupe multiplicatif de R formé des $(x^{(n)})$ tels que $x^{(0)} \in K$, et $S^+ = S \cap R$, $S^- = S - S^+$.

On dispose d'un homomorphisme naturel λ de S dans le groupe additif de B_{DR} (dont l'image aboutit, en fait, dans $\text{Fil}^1 B_{DR} = t.B_{DR}^+$): si $x = (x^{(n)}) \in S^+$, si $a = x^{(0)}$ et si $[x] = (x, 0, 0, \dots, 0, \dots) \in W(R)$, alors $a^{-1} \cdot [x] \in W_K(R)$ et vérifie $\theta_K(a^{-1} \cdot [x]) = 1$; on en déduit que la série

$$\log(a^{-1} \cdot [x]) = \sum (-1)^n (a^{-1} \cdot [x] - 1)^n / n$$

converge dans B_{DR}^+ ; on pose $\lambda(x) = \log(a^{-1} \cdot [x])$.

Enfin, si $x \in S^-$, $x^{-1} \in S^+$ et on pose $\lambda(x) = -\lambda(x^{-1})$.

C'est un exercice de vérifier que λ est un homomorphisme.

Ceci étant, je définis B_J comme étant la sous- B_{cris} -algèbre de B_{DR} engendrée par l'image de λ .

2.3. - Proposition: Avec les hypothèses et les notations ci-dessus,

i) le noyau de l'application λ est k^* (où k est plongé dans R comme au n°1.3);

ii) si $x \in S$, alors $\lambda(x) \in B_{\text{cris}}$ si et seulement si x est une unité de R (ou, ce qui revient au même, si $x^{(0)}$ est une unité de C);

iii) soit x_0 un élément de S qui n'est pas une unité de R ; alors tout élément de B_J s'écrit, d'une manière et d'une seule, comme un polynôme en $\lambda(x_0)$ à coefficients dans B_{cris} .

iv) l'application canonique $K \otimes_{K_0} B_J \rightarrow B_{\text{DR}}$ est injective.

2.4.- Lemme : Soit $\pi = (\pi^{(n)})$ un élément de R tel que $\pi^{(0)} = p$. Alors $u = \lambda(\pi)$ n'appartient pas au corps des fractions de B_{cris} (vu comme sous-anneau de B_{DR}).

La seule démonstration de ce lemme que je connaisse est un peu technique et je ne vais pas la faire ici (observez cependant que si l'on avait $u \in \text{Frac } B_{\text{cris}}$, la vie serait encore plus belle ; en particulier, on aurait un Frobenius canonique sur B_J ; cela suggère que l'on devrait pouvoir prouver ce théorème en montrant que sinon la vie serait trop belle, mais je n'y suis pas arrivé comme cela). J'espère aussi que, quand on aura vraiment compris ce qu'est B_J , cela devrait aller de soi (en particulier, si l'on savait a priori que φ et N peuvent s'étendre à B_J , cela impliquerait le résultat).

2.5. - Je vais prouver la proposition (en admettant le lemme) :

i) Considérons le groupe multiplicatif des éléments de B_{DR}^+ congrus à 1 mod Fil^1 ; le logarithme définit un isomorphisme de ce groupe sur $\text{Fil}^1 B_{\text{DR}}$. L'intersection du noyau de λ avec R est donc formé des $x \in R \cap S$ tels que $[x] = \theta([x]) = x^{(0)}$, autrement dit des $x \in W(k)$ qui sont des représentants de Teichmüller non nuls d'éléments de k , i.e. des éléments de k^* .

ii) Soit S_0 le sous-groupe de S formé de l'intersection de S avec le groupe des unités de R ; c'est aussi le noyau de la restriction de v_R à S ; comme $v_R(S) = \mathbb{Z}$, j'ai une suite exacte courte

$$0 \rightarrow S_0 \xrightarrow{13} S \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Si $x \in S_0$, et si $a = \theta([x])$, a est une unité de $W(k)$ et $c = a^{-1}[x] - 1$ est un élément de $W(R)$ qui appartient au noyau de θ . Donc

$$\lambda(x) = \sum (-1)^{(n+1)} c^n / n = \sum (-1)^{(n+1)} (n-1)! \gamma_n(c) \in W^{DP}(R) \subset B_{\text{cris}}$$

Si x est un élément quelconque de S et si u est comme dans le lemme, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x = yu^n$, avec $y \in S_0$; on a alors

$\lambda(x) = \lambda(y) + nu$; si $x \notin S_0$, $n \neq 0$ et $\lambda(x) \notin B_{\text{cris}}$ (sinon on aurait $u \in B_{\text{cris}}$, contrairement au lemme).

iii) Le même argument que ci-dessus montre que B_J est engendré, en tant que B_{cris} -algèbre, par $\lambda(x_0)$ et permet, pour prouver l'unicité, de se ramener au cas où, avec les notations du lemme, $x_0 = \pi$ donc $\lambda(x_0) = u$. Si ce n'était pas vrai, u serait algébrique sur $\text{Frac } B_{\text{cris}}$. Soit alors $P(X) = b_0 + b_1 X + \dots + b_{m-1} X^{m-1} + X^m$ le polynôme minimal de u sur $\text{Frac } B_{\text{cris}}$.

Il est immédiat sur la définition de u que, pour tout $g \in \mathfrak{g}_0 = \text{Gal}(\bar{K}/K_0)$, il existe $\alpha(g) \in \mathbb{Q}_p$ tel que $gu = u + \alpha(g)t$ (où t est comme au n°2.1). J'ai donc

$$g(b_0) + g(b_1)(u + \alpha(g)t) + \dots + g(b_{m-1})(u + \alpha(g)t)^{m-1} + (u + \alpha(g)t)^m = 0,$$

Par unicité du polynôme minimal, j'en déduis que, pour tout $g \in \mathfrak{g}_0$, $g(b_{m-1}) = b_{m-1} - m\alpha(g)t$, donc que $b_{m-1} + mu = c \in (\text{Frac } B_{\text{cris}})^{\mathfrak{g}_0} \subset (B_{\text{DR}})^{\mathfrak{g}_0} = K_0$. Mais alors $u = m^{-1}(c - b_{m-1}) \in \text{Frac } B_{\text{cris}}$, ce qui contredit le lemme.

iv) Comme l'application canonique de $K \otimes_{K_0} B_{\text{cris}}$ dans B_{DR} est injective ([F2], n°4.7.), si l'application canonique de $K_{K_0} B_{\text{cris}}[u]$ dans B_{DR} ne l'était pas, u serait algébrique sur $\text{Frac}(K \otimes_{K_0} B_{\text{cris}})$ qui est algébrique sur $\text{Frac } B_{\text{cris}}$ et u serait aussi algébrique sur $\text{Frac } B_{\text{cris}}$, contrairement à ce qu'on vient de voir.

2.6. - Proposition : Avec les hypothèses et les notations qui précèdent,

i) il existe un \mathbb{Q}_p -endomorphisme $\bar{\varphi}$ de l'anneau B_J qui prolonge φ et qui commute à l'action de \mathfrak{g} ;

ii) se donner un tel prolongement revient à se donner un homomorphisme

$$\overline{\text{Log}} : K_0^* \rightarrow K_0$$

qui prolonge le logarithme p -adique usuel ; la correspondance entre $\bar{\varphi}$ et $\overline{\text{Log}}$ est caractérisée par

$$\bar{\varphi}(\lambda(x) + \overline{\text{Log}}(\theta([x]))) = p.(\lambda(x) + \overline{\text{Log}}(\theta([x]))) , \text{ pour tout } x \in S^+$$

Démonstration : Je remarque d'abord que, si $x \in S_0$ s'écrit $x = cx'$, avec $c \in k^*$ et x' congru à 1 modulo l'idéal maximal, j'ai

$$\lambda(x) + \log(\theta([x])) = \log([x'])$$

(égalité qui a un sens dans $W^{DP}(R)$, car $[x']$ appartient au p -idéal engendré par le noyau de θ et p) et

$$\varphi(\lambda(x) + \log(\theta([x]))) = \varphi(\log([x']^p)) = \log([x']^p) = p.\log([x']) = p.(\lambda(x) + \log(\theta([x]))) .$$

Comme, avec les notations déjà utilisées plus haut, j'ai $B_J = B_{\text{cris}}[u]$, se donner $\bar{\varphi}$ revient à se donner $v = \bar{\varphi}(u)$ qui peut être n'importe quel élément de B_J tel que $gv = \bar{\varphi}(gu)$, pour tout $g \in \mathfrak{g}$. Mais, toujours avec les mêmes notations que plus haut, j'ai $gu = u + \alpha(g)t$, donc $\bar{\varphi}(gu) = v + \alpha(g).pt$. Il faut donc avoir $g(v-pu) = v-pu$, c'est-à-dire $v-pu = \beta \in (B_J)^{\mathfrak{g}} = K_0$

(on a)

$K_0 \subset (B_J)^{\mathfrak{g}} \subset (B_{DR})^{\mathfrak{g}} = K$, mais le fait que $K \otimes_{K_0} B_J \rightarrow B_{DR}$ est injective implique que $(B_J)^{\mathfrak{g}} = K_0$. On voit alors que $\bar{\varphi}(u) = pu + \beta$ convient et que la formule annoncée est vraie en prenant pour $\overline{\text{Log}}$ l'unique prolongement de \log tel que $\overline{\text{Log}}(p) = \beta$.

2.7.- Proposition : Avec toujours les mêmes hypothèses et notations,

i) il existe une B_{cris} -dérivation $N: B_J \rightarrow B_J$ qui commute à l'action de \mathfrak{g} et dont le noyau est B_{cris} ;

ii) se donner un tel N revient à se donner un homomorphisme

$$v: K_0^* \rightarrow K_0$$

dont le noyau est exactement le groupe des unités (par exemple, on peut prendre pour v la valuation v_p). De façon précise, la correspondance entre N et v est caractérisée par

$$N(\lambda(x)) = v(\theta([x])), \text{ pour tout } x \in S^+$$

Démonstration : C'est clair que N est déterminé par $c = Nu$ qui peut être n'importe quel élément non nul de B_J vérifiant $g(Nu) = N(gu)$, pour tout $g \in \mathfrak{g}$. Ou encore $g(Nu) = N(u + \alpha(g)t) = Nu$, i.e. $Nu = c \in (B_J)^{\mathfrak{g}} = K_0$.

On a alors $N(\lambda(x)) = v(\theta([x]))$ si v est l'unique homomorphisme, s'annulant sur le groupe des unités, qui vérifie $v(p) = c$.

2.8. - Proposition : Avec toujours les mêmes hypothèses et notations, si $\bar{\varphi}$, N et v sont comme ci-dessus, et si c est un élément non nul de l'image de v , on a $N\bar{\varphi} = p \cdot (\varphi c / c) \cdot \bar{\varphi} N$

Démonstration : il n'y a qu'à appliquer les formules !

§ 3. - La catégorie $\underline{MF}_{K,J}$

C'est celle qu'il faut mettre, du moins c'est ce qu'il me semble, à la place de la catégorie $\underline{MF}_K^{f,N}$ (définie dans [J], p.42.), pour rendre plausible ta conjecture (tes conditions ne marchent pas : il y a un problème de signe, cf. condition (J) ci-dessous, et surtout la condition d'admissibilité faible ne reste pas stable lorsque l'on change le choix de φ ; il faut l'affaiblir).

3.1 - Je vais d'abord appeler (φ, N) -module filtré la donnée d'un couple formé d'un φ -module filtré et d'un endomorphisme N du K_0 -espace

vectoriel sous-jacent vérifiant

$$(J) \quad N\varphi = p\varphi N$$

C'est clair que les (φ, N) -modules filtrés forment une catégorie additive, en fait \mathbb{Q}_p -linéaire.

3.2.- Il me faut maintenant dire ce que va être un (φ, N) -module filtré faiblement admissible. Il s'agit en fait de paraphraser ce que j'ai fait dans mon papier à Rennes ([F1], §4), en n'oubliant pas que, cette fois-ci, on a un N .

Je te rappelle que si D est un φ -module filtré, de dimension 1 sur K_0 , je note $t_N(D)$ sa pente (i.e., si d est un élément non nul de D et si $\varphi d = \lambda d$, la valuation p -adique de λ) et $t_H(D)$ le plus grand entier i tel que $\text{Fil}^i D_K \neq 0$.

Je te rappelle aussi que si D est un φ -module filtré, de dimension finie sur K_0 , et si D' est un sous- K_0 -espace vectoriel de D de dimension r , stable par φ , on munit D'_K de la filtration induite et on pose $t_N(D') = t_N(\wedge^r D')$ et $t_H(D') = t_H(\wedge^r D')$. Ceci étant, on dit que D est faiblement admissible si $t_H(D) = t_N(D)$ et si, pour tout sous- K_0 -espace vectoriel D' de D , stable par φ , $t_H(D') \leq t_N(D')$.

Bien sûr, je vais dire qu'un (φ, N) -module filtré D , de dimension finie sur K_0 , est faiblement admissible si $t_H(D) = t_N(D)$ et si, pour tout sous- K_0 -espace vectoriel D' de D , stable par φ et par N , $t_H(D') \leq t_N(D')$.

Je note $\underline{MF}_{K,J}$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des (φ, N) -modules filtrés dont les objets sont ceux qui sont faiblement admissibles.

La même démonstration que celle de la proposition 4.2.1 de [F1] montre que $\underline{MF}_{K,J}$ est abélienne et que le noyau (resp. le conoyau) d'un morphisme de $\underline{MF}_{K,J}$ est le noyau (resp. le conoyau) "naïf", i.e. celui qui

existe dans la catégorie (non abélienne) des (φ, N) -modules filtrés. On voit aussi que les sous-objets, dans $\underline{MF}_{K, J}$, d'un objet D de cette catégorie sont les sous- K_0 -espaces vectoriels D' de D , stables par φ et N , qui vérifient $t_H(D') = t_N(D')$.

3.3. - Proposition : Soit D un (φ, N) -module filtré, de dimension finie sur K_0 . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) le module D est faiblement admissible ;
- ii) pour tout sous- K_0 -espace vectoriel D' de D , stable par φ et N , le polygone de Hodge est en dessous de celui de Newton et les polygones de Hodge et Newton de D ont mêmes extrémités.

La même démonstration s'applique (la raison étant que si D' est un sous- K_0 -espace vectoriel de D stable par φ et N , la filtration croissante par les pentes sur D' donne des sous- K_0 -espaces vectoriels stables non seulement par φ mais aussi par N).

3.4. - On peut aussi définir, de manière évidente, le produit tensoriel $D_1 \otimes D_2$ de deux (φ, N) -modules filtrés (attention que $\varphi(d_1 \otimes d_2) = \varphi d_1 \otimes \varphi d_2$ tandis que $N(d_1 \otimes d_2) = d_1 \otimes N d_2 + N d_1 \otimes d_2$), la notion d'objet unité et de dual (attention que si D est un objet de la catégorie et si D^* est le K_0 -espace vectoriel dual, il faut prendre $(Nf)(d) = -f(Nd)$, pour $d \in D$ et $f \in D^*$).

L'objet unité est dans $\underline{MF}_{K, J}$ qui est stable par dual. En revanche, j'ignore si $\underline{MF}_{K, J}$ est stable par produit tensoriel (pour les modules filtrés faiblement admissibles, je conjecture que c'est vrai, et c'est un théorème dû à Laffaille ([L]) pour $e = 1$). Pour les (φ, N) -modules filtrés, je ne sais rien même pour $e = 1$ (et je ne conjecture rien). Si c'était vrai, la catégorie

$\underline{MF}_{K,J}$ serait tannakienne (lorsque $e = 1$, le résultat de Laffaille dit que tout φ -module filtré admet un "réseau fortement divisible"; autrement dit, il y a de jolies structures entières (qui se prêtent bien aux dévissages, ce qui est très utile pour les applications ([FL], [W], [FM]); cela n'a plus l'air d'être le cas lorsqu'il y a de la monodromie (i.e. un N); on peut quand même se demander si les résultats de Wintenberger ([W],) s'étendent, i.e. s'il y a un scindage canonique de la filtration de Hodge, une \mathbb{Q}_p -structure canonique, ...

§ 4. - La catégorie des représentations semi-stables.

Dans toute la suite, je choisis, une fois pour toutes, $\bar{\varphi}$ (que je noterai φ), $\overline{\log}$ (que je noterai \log), N et v comme au § 2; pour que l'écriture soit plus simple, je vais choisir v à valeurs dans \mathbb{Q}_p , afin d'avoir

$$N\varphi = p\varphi N.$$

Pour fixer les idées, on peut, si tu veux, faire les choix caractérisés par $\log(p) = 0$ et $v(p) = 1$.

4.1. - Les foncteurs \underline{D}_J et \underline{V}_J .

Si V est une représentation p -adique, je pose $\underline{D}_J(V) = (B_J \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\mathfrak{G}}$. On peut considérer \underline{D}_J comme un foncteur covariant additif de la catégorie des représentations p -adiques dans celle des (φ, N) -modules filtrés.

Si D est un (φ, N) -module filtré, de dimension finie en tant que K_0 -espace vectoriel, le produit tensoriel $B_J \otimes_{K_0} D$ a une structure naturelle de (φ, N) -module filtré (n°3.4) et je pose

$$\underline{V}_J(D) = \{ v \in B_J \otimes D \mid \varphi v = v, Nv = 0, 1 \otimes v \in \text{Fil}^0(B_J \otimes D)_K \};$$

On peut considérer \underline{V}_J comme un foncteur covariant additif de la

catégorie des (φ, N) -modules filtrés de dimension finie dans celle des \mathbb{Q}_p -espaces vectoriels topologiques (la topologie est induite par la topologie naturelle de $B_J \otimes D$), munis d'une action linéaire et continue de \mathfrak{g} . En particulier, si $\underline{V}_J(D)$ est de dimension finie sur \mathbb{Q}_p , c'est une représentation p -adique.

4.2. - Je te rappelle que, si V est une représentation p -adique et si $\underline{D}_{DR}(V) = (B_{DR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\mathfrak{g}}$, on a $\dim_{K_0} \underline{D}_{DR}(V) \leq \dim_{\mathbb{Q}_p} V$, et que l'on dit que V est de de Rham lorsque l'on a l'égalité.

4.3. - Proposition : Pour toute représentation p -adique V , on a

$$\dim_{K_0} \underline{D}_J(V) \leq \dim_{\mathbb{Q}_p} V,$$

avec l'égalité si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- i) la représentation V est de de Rham,
- ii) l'application naturelle de $K \otimes_{K_0} \underline{D}_J(V)$ dans $\underline{D}_{DR}(V)$ est un isomorphisme.

Preuve : On a $K \otimes_{K_0} \underline{D}_J(V) = K \otimes_{K_0} (B_J \otimes V)^{\mathfrak{g}} = (B_{J,K} \otimes V)^{\mathfrak{g}} \subset (B_{DR} \otimes V)^{\mathfrak{g}}$, puisque d'après la proposition 2.3, l'application naturelle $B_{J,K} \rightarrow B_{DR}$ est injective et la proposition en résulte.

4.3. - Définitions : Je dis qu'une représentation p -adique V est semi-stable si $\dim_{K_0} \underline{D}_J(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ et je note $\underline{Rep}_S(\mathfrak{g})$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des représentations p -adiques dont les objets sont les représentations qui sont semi-stables.

Je dis qu'un (φ, N) -module filtré D est semi-stable s'il existe une représentation p -adique semi-stable V telle que $D \simeq \underline{D}_J(V)$. Je note

$\underline{MF}_{K,S}$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des (φ, N) -modules filtrés dont les objets sont ceux qui sont semi-stables.

4.4. - Théorème : Avec les notations qui précèdent :

i) La catégorie $\text{Rep}_S(\mathfrak{g})$ est une sous-catégorie pleine de la catégorie des représentations p-adiques, stable par sous-objet, quotient, somme directe, produit tensoriel, contragrédiente.

ii) Tout objet de $\underline{MF}_{K,S}$ est dans $\underline{MF}_{K,J}$; en tant que sous-catégorie pleine de $\underline{MF}_{K,J}$, $\underline{MF}_{K,S}$ est stable par sous-objet, quotient, somme directe, dual ; le produit tensoriel (dans la catégorie des (φ, N) -modules filtrés) de deux objets de $\underline{MF}_{K,S}$ est dans $\underline{MF}_{K,S}$.

iii) Le foncteur D_J induit une \otimes -équivalence (i.e. une équivalence compatible avec produit tensoriel, objet-unité et dualité) entre $\text{Rep}_S(\mathfrak{g})$ et $\underline{MF}_{K,S}$ et V_J induit un quasi-inverse.

Preuve : Il n'y a qu'à recopier certaines des démonstrations qui figurent dans les § 3 et 4 de [F1]. Pas de problèmes.

4.5. - Remarques :

i) Bien sûr, les représentations cristallines forment une sous- \otimes -catégorie $\text{Rep}_{\text{cris}}(\mathfrak{g})$ de $\text{Rep}_S(\mathfrak{g})$; elles correspondent par le foncteur D_J à la sous- \otimes -catégorie pleine $\underline{MF}_{K,\text{cris}}$ de $\underline{MF}_{K,S}$ dont les objets sont ceux sur lesquels $N = 0$ (et qui sont les " φ -modules filtrés admissibles").

ii) Les représentations semi-stables de dimension 1 sont les représentations cristallines de dimension 1, i.e. les représentations sur lesquelles le groupe d'inertie agit comme une puissance entière du caractère cyclotomique ; cela résulte de ce que N est nilpotent.

iii) Conformément à ce que tu prévoyais, il existe des objets simples de $\underline{MF}_{K,J}$ sur lesquels N n'est pas nul. L'exemple le plus simple est le suivant : $K = \mathbb{Q}_p$, $D = \mathbb{Q}_p e_1 \oplus \mathbb{Q}_p e_2$, $\varphi e_1 = p e_1$, $\varphi e_2 = p^2 e_2$, $N e_1 = 0$, $N e_2 = e_1$, $\text{Fil}^0 D = D$, $\text{Fil}^1 D = \text{Fil}^3 D = \mathbb{Q}_p e_2$, $\text{Fil}^4 D = 0$; pour $p \neq 2, 3$, j'ai vérifié (mais cela m'a donné du mal) que D correspond effectivement à une représentation p -adique V de dimension 2 ; en outre l'image du groupe d'inertie, et donc a fortiori de \mathfrak{g} , est un sous groupe ouvert de $GL(V)$.

iv) Si V est une représentation semi-stable, on peut décrire la clôture Zariskienne de l'image de \mathfrak{g} et celle de l'image du groupe d'inertie, à torsion près, en termes du (φ, N) -module filtré $\underline{D}_J(V)$. En particulier, comme pour les représentations cristallines, la clôture Zariskienne de l'image de l'inertie est connexe.

§ 5. - La catégorie $\underline{Rep}_S^{[0,1]}(\mathfrak{g})$.

5.1. - Soit V une représentation p -adique semi-stable. Elle est en particulier de Hodge-Tate ; si $a, b \in \mathbb{Z}$, avec $a \leq b$, je dis qu'elle est à poids entre a et b si $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, C(i)) \neq 0$ implique $i \in [a, b]$. Si $D = \underline{D}_J(V)$, cela revient à dire que $\text{Fil}^{-b} D_K = D_K$ et $\text{Fil}^{-a+1} D_K = 0$.

Je note $\underline{Rep}_S^{[a,b]}(\mathfrak{g})$ (resp. $\underline{Rep}_{\text{cris}}^{[a,b]}(\mathfrak{g})$) la sous-catégorie pleine de $\underline{Rep}_S(\mathfrak{g})$ (resp. $\underline{Rep}_{\text{cris}}(\mathfrak{g})$) dont les objets sont ceux qui sont à poids entre a et b .

Il est clair que, en tant que sous-catégorie pleine de $\underline{Rep}_S(\mathfrak{g})$ (resp. $\underline{Rep}_{\text{cris}}(\mathfrak{g})$), $\underline{Rep}_S^{[a,b]}(\mathfrak{g})$ (resp. $\underline{Rep}_{\text{cris}}^{[a,b]}(\mathfrak{g})$) est stable par sous-objet, quotient, extension.

5.2.- Théorème : Soit V une représentation p -adique. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) La représentation V est un objet de $\text{Rep}_S^{[0,1]}(\mathfrak{g})$;

ii) il existe une suite panachable $(V_1 \rightarrow \dots \rightarrow V_5)$ de représentations cristallines à poids entre 0 et 1, avec $V_1(-1)$ et V_5 non ramifiées, telle que V soit isomorphe à une extension panachée de $(V_1 \rightarrow \dots \rightarrow V_5)$.

5.3. - Corollaire : Soit A une variété abélienne semi-stable sur K , $T_p(A)$ son module de Tate et $V(A) = \mathbb{Q}_p \otimes T_p(A)$. Alors $V(A)$ est un objet de $\text{Rep}_S^{[0,1]}(\mathfrak{g})$.

En effet, le théorème de réduction semi-stable implique que V est extension panachée d'une suite panachable $(V_1 \rightarrow \dots \rightarrow V_5)$ de représentations provenant de groupes p -divisibles, avec $V_1(-1)$ de type multiplicatif et V_5 non ramifiée et on sait ([F1], § 5) que toute représentation provenant d'un groupe p -divisible est cristalline à poids entre 0 et 1.

5.4. - Remarques : a) Je conjecture (et je pense savoir à peu près comment le démontrer) que, réciproquement, toute représentation cristalline à poids entre 0 et 1 provient d'un groupe p -divisible (c'est un théorème pour $e \leq p-1$). Il n'est pas difficile de vérifier (c'est presque fait au § 1) que $\text{Rep}_{pF}(\mathfrak{g})$ est la catégorie des représentations p -adiques qui sont extensions panachées d'une suite panachable $(V_1 \rightarrow \dots \rightarrow V_5)$ de représentations provenant de groupes p -divisibles, avec $V_1(-1)$ de type multiplicatif et V_5 non ramifiée. Ce qui fait que, conjecturalement si $e > p-1$ et sans restriction si $e \leq p-1$, $\text{Rep}_{pF}(\mathfrak{g})$ et $\text{Rep}_S^{[0,1]}(\mathfrak{g})$ sont les mêmes catégories et que ce corollaire dit moralement la même chose que le théorème 1.3.

b) Soient π une uniformisante de K , $e = v_p(\pi)$ et, pour tout $v \geq 0$, soit $\mathfrak{g}^{(v)} = \mathfrak{g}^{v-1}$, où \mathfrak{g}^w est le w -ième groupe de ramification en

numérotation supérieure (avec la numérotation des Corps Locaux de Serre).
On a le résultat suivant :

"Proposition" : Soient A une variété abélienne semi-stable sur K et n un entier ≥ 0 . Soit L le sous-corps de \bar{K} engendré sur K par les points de p^n -division de A . Alors,

$$\text{Gal}(\bar{K}/L) \supset \mathfrak{g}^{(v)} \cap \text{Gal}(\bar{K}/K((\pi)^{1/p^n})),$$

dès que $v > e(n + 1/(p-1))$.

Il s'agit d'une variante du résultat que j'ai donné dans [F5] dans le cas de bonne réduction (où l'on n'a alors pas besoin de rajouter les racines p^n -ièmes de π). Cela résulte d'une version plus précise du corollaire 5.3 (il faut travailler à isomorphisme près au lieu de travailler à isogénie près, cela se prouve essentiellement de la même façon) et du résultat de [F5] sur les schémas en groupes finis et plats.

La raison d'être des guillemets est que, bien sûr, si $e > p-1$, j'exagère puisque je ne sais plus que les représentations cristallines à poids entre 0 et 1 proviennent de groupes p -divisibles. Mais, pour les extensions panachées du type de celles que l'on considère, cela devrait pouvoir se voir directement (en outre, je pense savoir comment faire pour prouver directement ces majorations à l'aide des φ -modules filtrés).

5.5. - Preuve de ii) \Rightarrow i) : Il suffit essentiellement de recopier la démonstration du théorème 1.3, à ceci près qu'il faut travailler avec les modules filtrés admissibles au lieu de faiblement admissibles ; on ne sait plus que c'est la même chose, mais ce n'est pas grave à cause du lemme suivant :

5.6. - Lemme : Soit

$$0 \rightarrow D_2 \rightarrow D \rightarrow D_5 \rightarrow 0$$

une suite exacte de $\underline{\text{MF}}_K^f$; on suppose D_2 admissible et qu'il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que $\text{Fil}^i D_{5K} = D_{5K}$ et $\text{Fil}^{i+1} D_{5K} = 0$. Alors D est admissible.

Preuve : On se ramène facilement au cas où k est algébriquement clos ; à un twist à la Tate près, on peut supposer que $i = 0$; alors D_5 est, somme directe d'un certain nombre de copies de l'objet-unité K_0 de la catégorie et on peut supposer $D_5 = K_0$.

Admettons, pour un moment que, dans la catégorie $\underline{\text{MF}}$ des φ -modules filtrés, $\text{Ext}^1(K_0, B_{\text{cris}}) = 0$. Si je note D' (resp. D'_2) le dual de D (resp. D_2), j'ai une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\underline{\text{MF}}}(K_0, B_{\text{cris}}) \rightarrow \text{Hom}_{\underline{\text{MF}}}(D', B_{\text{cris}}) \rightarrow \text{Hom}_{\underline{\text{MF}}}(D'_2, B_{\text{cris}}) \rightarrow 0$$

qui se réécrit

$$0 \rightarrow \underline{V}_{\text{cris}}(D_2) \rightarrow \underline{V}_{\text{cris}}(D) \rightarrow \underline{V}_{\text{cris}}(K_0) \rightarrow 0$$

(avec une définition évidente du foncteur $\underline{V}_{\text{cris}}$) ; on en déduit que D s'identifie à $\underline{D}_{\text{cris}}(\underline{V}_{\text{cris}}(D))$ et est admissible.

Il reste à vérifier que $\text{Ext}^1(K_0, B_{\text{cris}}) = 0$. C'est un résultat que Messing et moi connaissons bien et qui peut se prouver ainsi : On vérifie que l'application $\varphi-1 : B_{\text{cris}} \rightarrow B_{\text{cris}}$ est surjective et on en déduit que toute extension de K_0 par B_{cris} en tant qu'extension de $K_0[\varphi]$ -modules est scindée ; on est alors ramené à vérifier que pour tout $b \in B_{\text{DR}}$, il existe $x \in B_{\text{cris}}$ vérifiant

$\varphi x = x$ et $x-b \in B_{\text{DR}}^+ = \text{Fil}^0 B_{\text{DR}}$. Comme $B_{\text{DR}}/B_{\text{DR}}^+ = B_{\text{cris}}/B_{\text{cris}}^+$, on peut supposer $b \in B_{\text{cris}}$. Il existe alors $r \in \mathbb{N}$ tel que $b = t^{-r}c$, avec $c \in B_{\text{cris}}^+$, et on est ramené à prouver l'existence de $y \in B_{\text{cris}}^+$ tel que $\varphi y = p^r y$ et $y-b \in \text{Fil}^r B_{\text{cris}}$.

Ceci peut se faire par récurrence sur r : c'est clair si $r = 0$; supposons donc $r > 0$.

Soit $U = \{ a \in B_{\text{cris}}^+ \mid \varphi a = pa \}$; alors U contient les éléments de la forme $a = p^{-s} \cdot \log([a^{(n)}])$, avec $s \in \mathbb{N}$ et $a^{(n)}$ un élément de R tel que $a^{(0)} - 1 \in p\mathcal{O}_C$, et j'ai alors $\theta(a) = p^{-s} \cdot \log(a^{(0)})$ (en fait, tous les éléments de U sont de cette forme, je ne m'en servirai pas) ; en particulier, pour tout $\alpha \in C$, il existe $a \in U$ tel que $\theta(a) = \alpha$.

Je choisis $a_0 \in U$ tel que $\theta(a_0) = 1$ et $y_0 \in U$ tel que $\theta(y_0) = \theta(b)$. Alors $a_0^{r-1} y_0 - b \in \text{Fil}^1 B_{\text{cris}}^+$ et il existe $b' \in B_{\text{cris}}^+$ tel que $a_0^{r-1} y_0 - b - tb' \in \text{Fil}^r B_{\text{cris}}^+$; par hypothèse de récurrence, il existe $y' \in B_{\text{cris}}^+$ tel que $\varphi y' = p^{r-1} y'$ et $y' - b' \in \text{Fil}^{r-1} B_{\text{cris}}^+$; il suffit alors de prendre $y = a_0^{r-1} y_0 - ty'$.

1.7. - Preuve de i) \Rightarrow ii). Soit V un objet de $\text{Rep}_S^{[0,1]}(\mathfrak{g})$. On a donc $V = \underline{V}_J(D)$, avec D objet de $\underline{\text{MF}}_{K,S}$ tel que $\text{Fil}^{-1} D_K = D_K$ et $\text{Fil}^1 D_K = 0$.

Le polygone de Newton de D est au dessus de celui de Hodge (n°3.3) qui a ses pentes $\subset [-1, 0]$ et les pentes de Newton sont donc comprises entre -1 et 0 . On a donc une filtration croissante (de K_0 -espaces vectoriels)

$$0 \subset D_1 \subset D_2 \subset D,$$

où D_1 est la partie de pente -1 et D_2 la partie de pente < 0 .

La condition $N\varphi = p\varphi N$ implique que $ND \subset D_1$ et que la restriction de N à D_1 et D_2 est nulle. Comme en outre les polygones de Hodge et Newton de D_1 (resp. D_2) ont même extrémités, D_1 et D_2 peuvent être considérés comme des sous-objets de D dans la catégorie $\underline{\text{MF}}_{K,J}$ (cf. n°3.2) donc aussi dans $\underline{\text{MF}}_{K,S}$ (cf. n°4.4). Si je pose $D_3 = D_2/D_1$, $D_4 = D/D_1$ et $D_5 = D/D_2$,

D est une extension panachée de la suite $(D_1 \rightarrow \dots \rightarrow D_5)$. Si, pour $i =$

1,2,3,4,5, je pose $V_i = \underline{V}_J(D_i)$, V est une extension panachée de la suite $(V_1 \rightarrow \dots \rightarrow V_5)$; comme $N = 0$ sur chaque D_i , les V_i sont des représentations cristallines; elles sont à poids entre 0 et 1 car les pentes de leurs polygones de Hodge $\in [-1,0]$; enfin, comme D_1 (resp. D_5) n'a que -1 (resp. 0) comme pente, $V_1(-1)$ (resp. V_5) est non ramifiée.

S 6. - Conjectures, questions et commentaires.

6.1. - Bien sûr, les choses se passent bien par changement du corps de base.

De façon précise, si L est un corps complet pour une valuation discrète, à corps résiduel parfait k_L , contenant K comme sous-corps fermé, et si $L_0 = \text{Frac } W(k_L)$, l'application

$$D \rightarrow L_0 \otimes_{K_0} D$$

induit un foncteur de la catégorie $\underline{MF}_{K,J}$ dans $\underline{MF}_{L,J}$.

Si \bar{L} est une clôture algébrique de L contenant \bar{K} et si $B_{J,L}$ (resp. $B_{J,\bar{L}}$) désigne l'anneau B_J correspondant à \bar{L}/L (resp. \bar{K}/K), alors $B_{J,L} \supset B_{J,K}$; si l'on a choisi φ et N sur $B_{J,K}$, ils admettent un unique prolongement à $B_{J,L}$. Avec un tel choix, le foncteur défini ci-dessus envoie $\underline{MF}_{K,S}$ dans $\underline{MF}_{L,S}$; si $\mathfrak{H} = \text{Gal}(\bar{L}/L)$, $\underline{V}_J(L_0 \otimes_{K_0} D)$ s'identifie à $\underline{V}_J(D)$ (où \mathfrak{H} opère à travers l'homomorphisme naturel $\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{g}$).

6.2. - Ceci permet en particulier de définir la catégorie $\underline{\text{Rep}}_{p_S}(\mathfrak{g})$ des représentations potentiellement semi-stables (si j'ose dire): Si V est une représentation p -adique de \mathfrak{g} , je dis que V est potentiellement semi-stable s'il existe une extension finie L de K contenue dans \bar{K} telle que V soit semi-stable en tant que représentation p -adique de $\mathfrak{H} =$

$\text{Gal}(\bar{K}/L)$.

On peut tenir sur ces représentations les mêmes discours que ceux que j'ai tenus dans [F1], §7 sur les représentations potentiellement cristallines (que j'appelais alors "potentiellement admissibles"). C'est ainsi que :

a) La catégorie $\text{Rep}_{pS}(\mathfrak{g})$ est une sous- \otimes -catégorie de la catégorie des représentations p -adiques de \mathfrak{g} .

b) Si on en a envie, on peut s'amuser (?) à définir la catégorie des (φ, N) -modules potentiellement filtrés : Soient K'_{nr} l'adhérence, dans C , de l'extension maximale non ramifiée de K_0 contenue dans \bar{K} et \bar{K}' la fermeture algébrique de K'_{nr} dans C . Les (φ, N) -modules potentiellement filtrés sont des K'_{nr} -espaces vectoriels (de dimension finie) D munis d'une action de φ , de N et aussi d'une action de \mathfrak{g} (semi-linéaire par rapport à l'action naturelle de \mathfrak{g} sur K'_{nr} , le sous-groupe d'inertie opérant à travers un quotient fini), vérifiant des conditions de compatibilité évidentes, et d'une filtration de $D_{\bar{K}'} = \bar{K}' \otimes_{K'_{nr}} D$, formée de sous- \bar{K}' -espaces vectoriels, stables par \mathfrak{g} . On peut définir comme au n°3.2 la sous-catégorie pleine $\underline{\text{MF}}_{K, pJ}$ de cette catégorie dont les objets qui sont "faiblement admissibles". C'est une catégorie abélienne, et on dispose de foncteurs, que je vais encore noter \underline{D}_J et \underline{V}_J , qui induisent des \otimes -équivalences inverses l'une de l'autre entre représentations p -adiques semi-stables et (φ, N) -modules potentiellement filtrés "admissibles" ou "semi-stables" (ces derniers formant une sous-catégorie pleine $\underline{\text{MF}}_{K, pS}$ de $\underline{\text{MF}}_{K, pJ}$ stable par tout ce qu'on peut imaginer de raisonnable ; on peut d'ailleurs se demander si ces deux catégories ne sont pas les mêmes).

c) Dire que V est potentiellement semi-stable revient à dire qu'il

existe une extension finie L de K sur laquelle V devient semi-stable, i.e. telle que, si $L_0 = \text{Frac } W(k_L)$, on ait $\dim_{L_0} (B_J \otimes V)^{\text{Gal}(\bar{K}/L)} = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$.

d) Il existe une plus petite extension galoisienne de K sur laquelle V devient semi-stable ; en outre si V devient semi-stable après une extension non ramifiée, alors V l'était déjà avant.

e) Pour une représentation potentiellement semi-stable, on peut définir des conducteurs de Swan et d'Artin qui mesurent le défaut de semi-stabilité : ce sont, mutatis mutandis, les invariants notés $\delta_p(V)$ et $\delta'_p(V)$ dans [F1], § 7.

6.3. - Il est facile de vérifier que l'application

$$\bar{K} \otimes_{K_0} B_J \rightarrow B_{\text{DR}},$$

définie par extension des scalaires (je te rappelle que B_{DR} est une \bar{K} -algèbre) est injective (même démonstration que pour $K \otimes_{K_0} B_J \rightarrow B_{\text{DR}}$, cf. n°2.3). On voit alors qu'une représentation p -adique V

- est semi-stable si et seulement si elle est de de Rham (n°4.2) et si $((K \otimes_{K_0} B_J) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\mathfrak{G}} \rightarrow (B_{\text{DR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\mathfrak{G}}$ est un isomorphisme ;

- est potentiellement semi-stable si elle est de de Rham et si $((\bar{K} \otimes_{K_0} B_J) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\mathfrak{G}} \rightarrow (B_{\text{DR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\mathfrak{G}}$ est un isomorphisme.

6.4. - J'en viens aux conjectures qui nous intéressent.

Je te rappelle que, si X est une variété algébrique propre et lisse sur K , je conjecture

(C_{DR}) pour tout $m \in \mathbb{N}$, $H^m(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)$ est de de Rham et $(B_{\text{DR}} \otimes H^m(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p))^{\mathfrak{G}}$ s'identifie (canoniquement et fonctoriellement) à $H_{\text{DR}}^m(X)$.

Ta conjecture, convenablement arrangée et précisée revient alors à dire que les périodes p -adiques, censées vivre dans B_{DR} sont déjà dans le

sous-anneau $\bar{K} \otimes_{B_J} \bar{K} \otimes_{D_J} (\dots)$, ou encore, plus précisément :

(C_{PS}) pour tout $m \in \mathbb{N}$, $H^m(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)$ s'identifie à $H_{DR}^m(X)$

Bien sûr, cette conjecture équivaut à la conjonction de (C_{DR}) et de (C'_{PS}) pour tout $m \in \mathbb{N}$, la représentation $H^m(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p)$ est potentiellement semi-stable.

6.5. - Pour les variété abéliennes, (C_{PS}) est vraie ; il suffit en effet de le vérifier pour les variétés abéliennes semi-stables et alors (C_{DR}) est vraie ([LS?],?) et (C'_{PS}) aussi (cor.5.3 ci-dessus).

En outre un résultat de Raynaud prouvé que la cohomologie étale p-adique de la variété abélienne est semi-stable si et seulement si la variété abélienne l'est aussi.

6.6. - Bien sûr, dans le cas de bonne réduction, il y a la conjecture (C_{cris}) qui est plus précise que (C_{PS}) et qui a été démontrée dans de nombreux cas (Kato, Fontaine-Messing, Faltings, ...).

6.7. - Disons qu'une variété algébrique propre et lisse X sur K est arithmétiquement semi-stable si la cohomologie étale p-adique de $X_{\bar{K}}$ est semi-stable. On aurait envie de savoir définir une notion géométrique de semi-stabilité pour X (existence de modèles entiers ayant certaines propriétés), de montrer que si X est semi-stable, elle est aussi arithmétiquement semi-stable ... et que, pour toute variété propre et lisse X sur K , il existe une extension finie L de K sur laquelle X devient semi-stable.

6.8. - La conjecture (C_{PS}) devrait être vraie en fait pour la cohomologie étale p-adique d'à peu près n'importe quel motif.

En tout cas elle est vraie pour la réalisation p -adique des 1-motifs lisses sur K de Deligne. Une fois que l'on a (C_{DR}) , la démonstration est essentiellement la même que pour les variétés abéliennes. Et la démonstration de (C_{DR}) pour les 1-motifs est une généralisation de la méthode élémentaire que nous avons suivis, Bill Messing et moi, pour prouver le théorème de Le Stum ([LS], App.B, notre rédaction est en cours, c'est dans le même style que ma démonstration de Hodge-Tate pour les variétés abéliennes, [F4]) L'ingrédient supplémentaire est un jeu avec les différentielles logarithmiques.

6.9. - Ces conjectures disent que l'on a un analogue de la cohomologie cristalline, même dans le cas de mauvaise réduction, analogue muni d'un Frobenius et d'un opérateur de monodromie, dès que l'on a fait les choix nécessaires. On voudrait bien comprendre "géométriquement" tout cela.

En particulier, pour reprendre une question de Barry Mazur, la formule $N\phi = p\phi N$ peut elle se comprendre comme un théorème de transversalité de Griffiths ?

6.10. - Je ne serais pas du tout surpris qu'il existe des faisceaux pour la topologie syntomique qui sont un peu plus grand que les \mathcal{O}_n^{cris} de [FM] et dont la cohomologie, quand on les restreint à un modèle entier "raisonnable" d'une variété propre et lisse sur K , est cette mystérieuse fausse cohomologie cristalline. Ces faisceaux semblent donner, quand on les projette sur le site Zariskien, des complexes qui semblent liés aux "modifications à la Kato" ([K],) des complexes qui sont les projections des \mathcal{O}_n^{cris} . Il y a là une façon d'aborder la conjecture (C_{PS}) .

On peut aussi l'aborder "à la Faltings", i.e. tenter de remplacer C_p par B_J dans sa démonstration de Hodge-Tate (pour autant que j'ai compris, quand Faltings démontre (C_{cris}) c'est en remplaçant C_p par B_{cris}).

Il me semble que, par une méthode comme par l'autre, on devrait arriver à prouver la conjecture dans quelques cas particuliers intéressants. Pour le cas général, la difficulté la plus sérieuse devrait être de prouver l'existence de modèles entiers raisonnables.

6.11. - Comme tu l'avais prévu, cette construction fournit toute sorte d'exemples de \otimes -catégories strictement contenues les unes dans les autres.

Par exemple, si V est une représentation p -adique semi-simple, qui est potentiellement semi-stable mais n'est pas potentiellement cristalline, elle n'est pas dans la \otimes -catégorie engendrée par les réalisations p -adiques des 1-motifs.

6.12. - En conclusion, j'ai peur d'avoir été un peu long et de m'être quelque fois noyé soit dans des détails techniques, soit dans des fourbis un peu trop formels. Mais il y a matière à rêver dans tout cela et aussi, semble-t'il matière à travailler.

Et pas seulement autour de ces conjectures générales. Un problème très intéressant est de tenter de comprendre comment tout ceci s'applique aux représentations associées aux formes modulaires. Comme le point de départ de cette histoire, ce sont les exemples de Barry Mazur de telles représentations dans le cas de mauvaise réduction, c'est un juste retour des choses. Et il y a une telle cohérence entre ces conjectures et les résultats de Barry que cela donne envie de se fatiguer un peu.

Il me reste à te remercier d'avoir dépensé de l'énergie à tenter de me persuader que des choses comme cela devaient être vraies. J'espère avoir réussi à te convaincre que tu n'avais pas totalement perdu ton temps.

Bien à toi

Jean-Pierre Fontaine

Références :

- [F1] J.-M. Fontaine : Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate, Journées de géométrie algébrique de Rennes, Astérisque 65, Paris 1979, pp.3-80
- [F2] J.-M. Fontaine : Sur certains types de représentation p -adique du groupe de Galois d'un corps local ; construction d'un Anneau de Barsotti-Tate, Ann. of Maths 115 (1982), pp.529-577.
- [F3] J.-M. Fontaine : Cohomologie de de Rham, cohomologie cristalline et représentations p -adiques, Algebraic Geometry Tokyo-Kyoto, Lecture Notes in Maths 1016, Springer 1983, pp.??
- [F4] J.-M. Fontaine : Formes différentielles et modules de Tate des variétés abéliennes sur les corps locaux, Inv. Math. 65 (1982), pp.379-409.
- [F5] J.-M. Fontaine : Il n'y a pas de variété abélienne sur \mathbb{Z} , Inv. Math. 81 (1985), pp.515-538.
- [FL] J.-M. Fontaine et G. Laffaille : Construction de représentations p -adiques, Annales Scient. E.N.S. 15 (1982), pp.547-608.
- [FM] J.-M. Fontaine and W. Messing : p -adic Periods and p -adic étale Cohomology, Current Trends in Arithmetical Algebraic Geometry, Cont. Math. 67, A.M.S. (1987), pp. 179-207.
- [J] Uwe Jannsen : On the μ -adic cohomology of varieties over number fields and its Galois cohomology, Preprint, Regensburg, 1987.
- [K] K. Kato : Explicit reciprocity laws and the cohomology of Fontaine-Messing (I forgot the exact title), preprint, Tokyo 1986 or 87.
- [L] G. Laffaille, Groupes p -divisibles et modules filtrés : le cas peu ramifié, Bull. S.M.F., 108 (1980), pp. 187-206.
- [LS] B. Le Stum : Cohomologie rigide et variétés abéliennes, thèse de 3^e cycle, Université de Rennes I (1985).
- [W] J.-P. Wintenberger : Un scindage de la filtration de Hodge sur certaines variétés algébriques sur les corps locaux, Annals of maths., 119 (1984) pp.511-548.

(lettre finie le 6 décembre 1987).