Jean-Marc Fontaine
I.H.E.S.
35 route de Chartres
91440 Bures-sur-Yvette

Le 14 février 1988

Chère Marie-France,

Voici, enfin, la description promise d'une grande partie de ce que je crois et de ce que je sais sur l'action des groupes de décomposition dans les représentations (ℓ-adiques ou mod ℓ) associées aux formes modulaires. Au moins pour les représentations mod ℓ, et si l'on se restreint au groupe d'inertie pour $p = \ell$, tu peux voir ça comme une réciproque partielle du §2 de l'article de Serre à Duke en l'honneur de Manin.

Je pars de $f = \sum a_n q^n$ une forme modulaire parabolique sur $\Gamma_0(N)$, de poids $k \geqslant 2$ et, comme dit Serre, de "type d'à côté" $\varepsilon : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}^*$. Je choisis une fois pour toutes un nombre premier ℓ et un homomorphisme de $\mathbb{Z}[(a_n), \text{image de } \varepsilon]$ dans l'anneau des entiers A d'une extension finie E de $\mathbb{Q}_\ell$ et je note F le corps résiduel de A. Je vais me permettre de noter encore a_n l'image de a_n dans A et $\varepsilon : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \to A^*$ le caractère évident ainsi que $\tilde{a}_n$ l'image de a_n dans F et $\tilde{\varepsilon}$ le caractère évident.

Je vais noter V un E-espace vectoriel de dimension 2, muni d'une action semi-simple

$$\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{Aut}_E(V) \simeq GL_2(E),$$

qui réalise la représentation associée à la forme modulaire f et W un F-espace vectoriel de dimension 2, muni d'une action semi-simple

$$\tilde{\rho} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{Aut}_F(W) \simeq GL_2(F),$$

qui réalise la représentation associée à l'image $\tilde{f}$ de f dans F (si $\mathcal{V}$ est un réseau de V stable par Galois, je peux prendre pour W le semi-simplifié de la réduction de $\mathcal{V}$ modulo l'idéal maximal de A).

Pour tout nombre premier p, je choisis un plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ et je note $G_p \subset \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ le groupe de décomposition correspondant. Le problème est de décrire l'action de G_p sur V et sur W. Je vais me restreindre aux p de bonne réduction i.e. qui ne divisent pas le niveau N. Je vais aussi noter V_p (resp. W_p) le semi-simplifié de V (resp. W) pour l'action de G_p. Apparemment, ce qui se passe c'est que V_p est déterminé, à isomorphisme près, par le facteur eulérien en p (autrement dit par le triplet $(a_p,k,\varepsilon(p))$) ; et W_p est déterminé par $(\tilde{a}_p,k,\tilde{\varepsilon}(p))$ (au moins si $p \neq \ell$ ou si $k \leqslant p$, il est probable que $k = p+1$ marche encore) ;

A - La représentation ℓ-adique V.

1° Si $p \neq \ell$: Alors, en quelque sorte par définition, la représentation est non ramifiée et V_p est donc déterminée à isomorphisme près par le polynôme caractéristique de Frobenius qui est $X^2 - a_pX + \varepsilon(p).p^{k-1}$ (pour fixer les idées, disons que je prends la représentation dans l'homologie, et le Frobenius dont je parle est alors le Frobenius arithmétique).

2° Si $p = \ell$: Alors, c'est plus ou moins la même chose, sauf que ce n'est plus par définition (et, du coup, ce n'est vraiment un théorème que pour $k = 2$; dans le cas général il reste des trous dans la démonstration) et que V_p est ramifiée en général, ce qui fait que $X^2 - a_pX + \varepsilon(p).p^{k-1}$ est en fait le polynôme caractéristique de Frobenius agissant sur la réalisation de de Rham du motif correspondant à f. Pour la description de l'action de G_p, il est commode de distinguer deux cas :

i) la forme est ordinaire, i.e. a_p est une unité p-adique : alors, si λ et $\mu.p^{k-1}$ sont les deux racines du polynôme $X^2 - a_pX + \varepsilon(p).p^{k-1}$, avec λ et μ des unités, on a une suite exacte de $E[G_p]$-modules

$$O \to V' \to V \to V'' \to O,$$

où l'action de G_p sur V' (resp. V'') est donnée par le caractère $\xi_\mu.\chi^{k-1}$ (resp. ξ_λ) (où χ est le caractère cyclotomique habituel et où, pour toute unité ν de A, ξ_ν est l'unique caractère non ramifié tel que $\xi_\nu(\mathrm{Frob}_p) = \nu$).

Je ne sais pas dire si V muni de l'action de G_p est ou non semi-simple mais $V_p \simeq V' \oplus V''$ est bien déterminé par $(a_p, \varepsilon(p), k)$.

ii) La forme est supersingulière, i.e. a_p n'est pas une unité p-adique : alors V est toujours semi-simple et je sais la décrire "explicitement", mais c'est un peu technique : dans mon monde à moi, il y a une $\mathbb{Q}_p$-algèbre qui s'appelle B^+_{cris} (qui se définit en terme de cohomologie cristalline et se construit à l'aide de vecteurs de Witt et de puissances divisées) qui est muni d'une action de G_p, d'une filtration décroissante, indexée par $\mathbb{N}$, par des sous-$\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels et d'un endomorphisme $\mathbb{Q}_p$-linéaire φ, que je peux étendre à $E \otimes_{\mathbb{Q}_p} B^+_{cris}$ par linéarité. Alors V est G_p-isomorphe au sous-E-espace vectoriel de $E \otimes \mathrm{Fil}^{k-1} B^+_{cris}$ formé des b vérifiant

$$\varphi^2(b) = a_p \varphi(b) - \varepsilon(p).p^{k-1} b$$

Je suis d'accord que ce n'est pas très appétissant, mais si $a_p \neq 0$, l'image de l'inertie est ouverte dans GL_2 et on ne peut donc pas espérer que la représentation soit trop simple à décrire.

B - **La représentation modulo ℓ, W.**

1° Si $p \neq \ell$: Bien sûr, de nouveau W est non ramifiée en p et le polynôme caractéristique de Frob_p agissant sur W est $X^2 - \tilde{a}_p X + \tilde{\varepsilon}(p).p^{k-1}$. Comme tu le sais, si ce polynôme a une racine double, il n'y a aucune raison pour que l'action de Frob_p soit semi-simple (c'est faux en général) et c'est vraiment W_p qui est déterminé à isomorphisme près.

2° J'en viens enfin au cas qui t'intéresse vraiment, si j'ai bien compris, i.e. au cas où $p = \ell$. C'est, en principe, un exercice de décrire W_p, à partir de la description de V_p que je t'ai donnée ci-dessus. Je ne l'ai fait que dans deux

14/2/88

cas particuliers : le cas ordinaire et le cas supersingulier avec $k \leqslant p$ (je n'ai pas regardé si je sais vraiment le faire en général).

Les énoncés qui suivent sont vraiment des théorèmes lorsque $k \leqslant p$; des gens techniquement plus solides que moi devraient pouvoir se débarasser de cette restriction dans le cas ordinaire.

i) <u>la forme est ordinaire</u> : c'est clair ce qui se passe : on a une suite exacte courte de $F[G_p]$-modules

$$0 \to W' \to W \to W'' \to 0,$$

avec W' et W'' de dimension 1 sur F, l'action de G_p sur W' (resp. W'') étant donnée par le caractère réduction du caractère qui donnait l'action sur V' (resp. V'') ; en particulier $W_p \simeq W' \oplus W''$ ne dépend que du triplet $(\tilde{a}_p, \tilde{\varepsilon}(p), k)$.

ii) <u>la forme est supersingulière et</u> $k \leqslant p$: alors l'action de G_p sur W est semi-simple (je ne m'attend pas à ce que ceci reste vrai pour $k > p+1$). On peut la caractériser ainsi : je vais appeler χ_2 et χ'_2 les deux caractères fondamentaux de niveau 2 , comme dit Serre, i.e. les deux caractères du groupe d'inertie I_p , à valeurs dans $F^*_{p^2}$ définis par

$$g \to \text{image de } g\pi/\pi \text{ dans le corps résiduel},$$

(où $\pi \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ vérifie $\pi^{p^2-1} = p$; il y a deux caractères car il y a deux façons d'identifier F_{p^2} à un sous-corps du corps résiduel de $\overline{\mathbb{Q}}_p$).

Alors, comme représentation de G_p , W est caractérisée (à isomorphisme près) par les deux propriétés suivantes :

(1) la restriction à I_p est donnée (après extension des scalaires si nécessaire) par les caractères χ_2^{k-1} et $(\chi'_2)^{k-1}$.

(2) le déterminant de la représentation est donné par l'image du caractère $\varepsilon.\chi^{k-1}$.

Si tu préfères, et quitte éventuellement à remplacer F par une extension quadratique, tu peux décrire la représentation ainsi : si j'appelle $\mathbb{Q}_{p^2}$ l'unique extension non ramifiée de degré 2 de $\mathbb{Q}_p$ contenue dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$, on peut considérer, de façon évidente χ_2 comme un caractère de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_{p^2})$; si je note λ une racine carrée, dans F, de $\tilde{\varepsilon}(p)$ et ξ_λ l'unique caractère non ramifié de G_p tel que $\xi_\lambda(\mathrm{Frob}_p) = \lambda$, alors W est la représentation induite de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_{p^2})$ à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ de la représentation de dimension 1 définie par le caractère χ_2, tordue par le caractère ξ_λ.

Ici encore la représentation ne dépend que du triplet $(\tilde{a}_p, \tilde{\varepsilon}(p), k) = (0, \tilde{\varepsilon}(p), k)$.

Voilà ! J'espère que tout cela pourra t'être utile (et j'aimerais bien que tu m'expliques à quoi, quand tu rentreras).

Bien à toi

Jean Marc