Séminaire BOURBAKI Novembre 2001
54ème année, 2001-02, n° 897

LES CONJECTURES DE MONODROMIE p-ADIQUES

par **Pierre COLMEZ**

0. INTRODUCTION

0.1. Survol des résultats

Le théorème local de monodromie ℓ-adique de Grothendieck peut s'énoncer de la manière suivante.

Théorème 0.1. — *Soit* K *un corps complet pour une valuation discrète de corps résiduel* k *fini et de caractéristique* p. *Soient* $\ell \neq p$ *un nombre premier et* V *un* $\mathbf{Q}_\ell$*-espace vectoriel de dimension finie sur lequel le groupe de Galois absolu* $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$ *de* K *agit continûment ; alors l'action de l'inertie est quasi-unipotente : il existe un sous-groupe ouvert du sous-groupe d'inertie* I_{K} *de* $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$ *dont les éléments agissent de manière unipotente.*

Ce théorème [46], bien que « quasi-trivial » (c'est une conséquence facile de l'existence d'une « structure de Frobenius » : le pro-ℓ-quotient de I_{K} est isomorphe à $\mathbf{Z}_\ell$ et, si $q = \operatorname{card} k$, un Frobenius $\sigma \in \mathscr{G}_{\mathrm{K}}$ opérant par conjugaison intérieure, agit sur ce pro-ℓ-quotient par multiplication par q), a des implications globales intéressantes concernant la cohomologie étale ℓ-adique des variétés algébriques (voir [51] pour une discussion et des variations sur ce thème).

L'énoncé correspondant étant complètement faux pour $\ell = p$ (le pro-p-quotient de I_{K} étant nettement plus compliqué que le pro-ℓ-quotient), il n'est pas très facile d'imaginer ce que peut en être un analogue p-adique et, de fait, il a fallu un certain temps, ne serait-ce que pour définir les objets à considérer. Il y a deux cas suivant que le corps K est de caractéristique 0 ou de caractéristique p. Dans le cas où K est de caractéristique 0, la difficulté pour arriver à formuler cette conjecture vient de ce que $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$ possède beaucoup trop de $\mathbf{Q}_p$-représentations et qu'il faut commencer par comprendre lesquelles on veut garder (représentations « de de Rham »). Le théorème de monodromie locale prend alors la forme suivante :

Théorème 0.2. — *Toute $\mathbf{Q}_p$-représentation de de Rham de $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$ est potentiellement semi-stable.*

Si K est de caractéristique p, le groupe $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$ a « encore plus » de $\mathbf{Q}_p$-représentations et il faut remplacer ces dernières par des modules différentiels sur une couronne « infiniment fine » de rayon 1. Dans ce cadre, l'analogue du théorème de Grothendieck est l'énoncé suivant :

Théorème 0.3. — *Tout module différentiel sur l'anneau de Robba, muni d'une structure de Frobenius, est quasi-unipotent.*

L'intérêt de l'énoncé du théorème 0.3 « conjecture de monodromie p-adique de Crew[1] » a été mis en évidence par Crew [31]. Cet énoncé permet, en particulier, d'obtenir des résultats de finitude [31] pour la cohomologie rigide. Ces résultats de finitude ont entretemps été démontrés par Mebkhout [63] et Berthelot [7] (dans le cas des coefficients constants), le premier en utilisant ses résultats obtenus en collaboration avec Christol (cf. [17], [18], [19], [20] et [21]) et le second en utilisant les altérations de de Jong [52]. Pour d'autres applications, voir [55, 56, 76].

La conjecture de Crew vient d'être démontrée de manière quasi-simultanée par André [2], par Mebkhout [64] et par Kedlaya [54], par des méthodes très différentes. D'autre part, Berger [6] avait, peu auparavant, montré comment déduire le théorème 0.2 « conjecture de monodromie p-adique de Fontaine [41][2] » de la conjecture de Crew.

0.2. Modules différentiels sur l'anneau de Robba

0.2.1. *La conjecture de Crew.* Soit L un corps complet pour une valuation p-adique de corps résiduel k. Soit $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$ (resp. $\mathscr{E}_{\mathrm{L}}^{\dagger}$) l'anneau des fonctions à coefficients dans L qui sont analytiques (resp. analytiques bornées) sur une couronne $0 < v_p(\mathrm{T}) \leq r$, où $r > 0$ dépend de la fonction que l'on considère. L'anneau $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$ est souvent appelé *anneau de Robba.* L'anneau $\mathscr{E}_{\mathrm{L}}^{\dagger}$ est un anneau valué non complet d'anneau résiduel $k((\mathrm{T}))$.

Un Frobenius φ sur ces anneaux est un morphisme d'anneaux de $\mathscr{E}_{\mathrm{L}}^{\dagger}$ respectant la valuation et induisant le morphisme $x \mapsto x^p$ sur $k((\mathrm{T}))$ (ou, plus généralement $x \mapsto x^q$, où q est une puissance de p) ; un tel morphisme s'étend par continuité à $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$. Des exemples agréables de Frobenius sont $\mathrm{T} \mapsto \mathrm{T}^p$ et $\mathrm{T} \mapsto (1+\mathrm{T})^p - 1$. Un φ-module $\mathscr{D}$ sur un de ces anneaux est un module libre de rang fini muni d'un endomorphisme φ-semi-linéaire $\varphi_{\mathscr{D}}$ dont la matrice dans une base est *inversible.*

Choisissons une dérivation continue ∂ de l'anneau $\mathscr{E}_{\mathrm{K}}^{\dagger}$ (comme $\frac{d}{d\mathrm{T}}$, $\mathrm{T}\frac{d}{d\mathrm{T}}$ ou $(1+\mathrm{T})\frac{d}{d\mathrm{T}}$). Un ∂-module sur un de ces anneaux est un module libre de rang fini muni d'une connexion

[1]Ou de Crew-Tsuzuki. Crew [31] est très prudent, et se cantonne aux modules différentiels provenant de la géométrie, et Tsuzuki [76] est nettement plus optimiste, mais ni Crew, ni Tsuzuki n'ont, formellement, présenté cet énoncé comme une conjecture.

[2]Cet énoncé n'est, lui non plus, pas formellement présenté comme une conjecture dans [41].

$\partial_{\mathscr{D}}$ au-dessus de ∂, c'est-à-dire vérifiant

$$\partial_{\mathscr{D}}(f\cdot x)=\partial f\cdot x+f\cdot\partial_{\mathscr{D}}x \quad \text{si } f\in\mathscr{E}_{\mathrm{K}}^{\dagger} \text{ (resp. } \mathscr{R}_{\mathrm{K}}) \text{ et } x\in\mathscr{D}.$$

Un (φ,∂)-module $\mathscr{D}$ est un module qui est à la fois un φ-module et un ∂-module de telle sorte que $\varphi_{\mathscr{D}}$ et $\partial_{\mathscr{D}}$ vérifient la relation de commutation

$$\partial_{\mathscr{D}}\circ\varphi_{\mathscr{D}}=\frac{\partial(\varphi(\mathrm{T}))}{\varphi(\partial\mathrm{T})}\cdot\varphi_{\mathscr{D}}\circ\partial_{\mathscr{D}}.$$

Dans le cas particulier $\partial=(1+\mathrm{T})\frac{d}{d\mathrm{T}}$ et $\varphi(\mathrm{T})=(1+\mathrm{T})^p-1$, on a $\frac{\partial(\varphi(\mathrm{T}))}{\varphi(\partial\mathrm{T})}=p$. Si on fixe une base de $\mathscr{D}$ et si A (resp. B) est la matrice de $\varphi_{\mathscr{D}}$ (resp. $\partial_{\mathscr{D}}$) dans cette base, cette relation de commutation se traduit par

$$\mathrm{BA}+\partial\mathrm{A}=\frac{\partial(\varphi(\mathrm{T}))}{\varphi(\partial\mathrm{T})}\mathrm{A}\varphi(\mathrm{B}).$$

Si E est une extension finie séparable de $k((\mathrm{T}))$, il lui correspond des extensions $\mathscr{E}_{\mathrm{L}}^{\dagger}(\mathrm{E})$ et $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}(\mathrm{E})$ de $\mathscr{E}_{\mathrm{L}}^{\dagger}$ et $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$ respectivement auxquelles les actions de φ et ∂ s'étendent canoniquement. La conjecture de Crew peut alors s'énoncer de façon précise sous la forme :

Conjecture 0.4. — *Si $\mathscr{D}$ est un (φ,∂)-module de rang d sur $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$, alors il existe une extension finie séparable* E *de* $k((\mathrm{T}))$ *telle que l'équation différentielle* $\partial_{\mathscr{D}}\mathrm{X}=0$ *admette d solutions linéairement indépendantes dans* $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}(\mathrm{E})[\log\mathrm{T}]\otimes\mathscr{D}$.

Cette conjecture a une « reformulation filtrée », faisant disparaître $\log\mathrm{T}$, sous la forme : « si $\mathscr{D}$ est un (φ,∂)-module sur $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$, alors il existe une extension finie séparable E de $k((\mathrm{T}))$ et une filtration croissante de $\mathscr{D}$ par des sous-∂-modules $\mathscr{D}_i$ telles que, pour tout i, l'équation différentielle $\partial_{\mathscr{D}_i/\mathscr{D}_{i-1}}\mathrm{X}=0$ admette $d_i=\mathrm{rang}(\mathscr{D}_i/\mathscr{D}_{i-1})$ solutions linéairement indépendantes dans $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}(\mathrm{E})\otimes(\mathscr{D}_i/\mathscr{D}_{i-1})$ ».

Remarque 0.5. — Il y a une subtilité cachée dans cette conjecture : la géométrie algébrique fournit naturellement des (φ,∂)-modules sur $\mathscr{E}_{\mathrm{L}}^{\dagger}$, mais, en rang ≥ 2, il faut vraiment étendre les coefficients à $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}(\mathrm{E})$ [et pas seulement à $\mathscr{E}_{\mathrm{L}}^{\dagger}(\mathrm{E})$]. Christol et Mebkhout se sont retrouvés confrontés au même problème (rem. 1.6). (On trouvera une explication de ce phénomène au n° 2.3 : les ensembles des $\mathscr{E}$-pentes et $\mathscr{R}$-pentes d'un (φ,∂)-module sur $\mathscr{E}_{\mathrm{L}}^{\dagger}$ ne sont pas toujours égaux.)

0.2.2. *Les démonstrations.* Crew [30] avait établi la conjecture en rang 1, et avant cet été, les seuls résultats un peu généraux concernant cette conjecture étaient, d'une part, un théorème de Tsuzuki [77] montrant qu'un (φ,∂)-module sur $\mathscr{E}^{\dagger}$ isocline (i.e. n'ayant qu'une φ-pente [3]) devient trivial après une extension finie séparable de $k((\mathrm{T}))$ et, d'autre

[3] Les φ-modules et les ∂-modules ont chacun une notion de pente. Ces deux notions n'ont rien à voir ; en particulier elles se comportent de manières très différentes par produit tensoriel.

part, un théorème de Christol et Mebkhout [18] montrant qu'un (φ, ∂)-module de ∂-pente 0 devient unipotent sur une extension modérée de $k((\mathrm{T}))$ (i.e. une extension de la forme $k((\mathrm{T}^{1/d}))$ avec $(d,p)=1$).

Malgré ces résultats encourageants, les experts étaient plutôt sceptiques en ce qui concerne la conjecture de Crew. L'exemple [20, Ex. 3.0-11] du ∂-module associé, en 2-adique, à l'opérateur différentiel $9\mathrm{T}^3\frac{d^2}{d\mathrm{T}^2}+9\mathrm{T}^2\frac{d}{d\mathrm{T}}+\frac{4}{3}-\mathrm{T}$ constituant un contre-exemple potentiel sérieux. La situation a radicalement changé avec l'article [1] dans lequel André montre que ce contre-exemple n'en est pas un. Sa démonstration dans le cas général [2] est une généralisation de celle qu'il a utilisée dans [1] ; elle est purement existentielle et ne fournit aucun renseignement sur l'extension à faire[4] pour rendre le module unipotent. Elle s'appuie de manière essentielle sur les résultats de Christol-Mebkhout et mêle adroitement la théorie de Galois différentielle et les contraintes combinatoires résultant de la théorie de Christol-Mebkhout.

La démonstration de Mebkhout [64] utilise aussi à fond les résultats de Christol-Mebkhout mais, contrairement à celle d'André, est constructive : elle fournit un algorithme (pour courageux) explicitant pas à pas les extensions séparables de $k((\mathrm{T}))$ qu'il faut faire pour aboutir à la ∂-pente 0.

Ces deux démonstrations n'utilisent la structure de Frobenius que de manière anecdotique et permettent de démontrer un résultat plus fort que la conjecture de Crew. La démonstration de Kedlaya [54] est totalement orthogonale. Il fait une étude poussée des φ-modules sur l'anneau de Robba (et ses généralisations) obtenant en particulier un analogue du théorème de Dieudonné-Manin. Ceci lui permet de munir un tel module d'une filtration stable par Frobenius telle que chaque morceau du gradué soit isocline. D'autre part, si on est parti d'un (φ, ∂)-module, la filtration est stable par ∂, ce qui permet d'utiliser le théorème de Tsuzuki pour conclure.

0.2.3. *Compléments.* On peut réinterpréter la conjecture de Crew « à la Fontaine ». Supposons k algébriquement clos (cela évitera d'avoir à faire des extensions du corps des coefficients dans ce qui suit). Si E est une extension finie galoisienne de $k((\mathrm{T}))$, l'anneau $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}(\mathrm{E})$ est muni d'actions de $\mathscr{G}_{k((\mathrm{T}))}=\mathrm{Gal}(k((\mathrm{T}))^{\mathrm{sep}}/k((\mathrm{T})))$ et de la dérivation $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}(\mathrm{E})$-linéaire N normalisée par $\mathrm{N}(\log \mathrm{T})=1$; ces deux actions commutent entre elles et commutent aussi à ∂.

Soit $\overline{\mathscr{R}}_{\log}=\bigcup_{\mathrm{E}\subset k((\mathrm{T}))^{\mathrm{sep}}}\mathscr{R}_{\mathrm{L}}(\mathrm{E})[\log \mathrm{T}]$; c'est un anneau muni des dérivations N et ∂ et d'une action discrète de $\mathscr{G}_{k((\mathrm{T}))}$, ces actions commutant deux à deux. Si $\mathscr{D}$ est un (φ, ∂)-module de rang d, l'espace $\mathrm{V}(\mathscr{D})$ des solutions de l'équation différentielle $\partial_{\mathscr{D}}\mathrm{X}=0$ dans $\overline{\mathscr{R}}_{\log}\otimes\mathscr{D}$ est un L-espace vectoriel de dimension d (d'après la conjecture de Crew) muni d'actions de N et $\mathscr{G}_{k((\mathrm{T}))}$ commutant entre elles, l'action de $\mathscr{G}_{k((\mathrm{T}))}$ se faisant à travers un quotient fini. Un tel objet sera appelé *un* $(\mathscr{G}_{k((\mathrm{T}))}, \mathrm{N})$*-module sur* L.

[4]Dans [1], André, après avoir prouvé l'existence d'une extension trivialisant le module, détermine explicitement cette extension par une méthode qu'il semble difficile de généraliser.

Réciproquement, si V est un $(\mathscr{G}_{k((\mathrm{T}))}, \mathrm{N})$-module sur L, le $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$-module $\mathscr{D}(\mathrm{V})$ des points fixes de $\overline{\mathscr{R}}_{\log} \otimes_{\mathrm{L}} \mathrm{V}$ sous les actions de N et $\mathscr{G}_{k((\mathrm{T}))}$ est un (φ, ∂)-module de rang d sur $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$.

Il n'est pas difficile de montrer que les foncteurs $\mathrm{V} \mapsto \mathscr{D}(\mathrm{V})$ et $\mathscr{D} \mapsto \mathrm{V}(\mathscr{D})$ que l'on vient d'introduire sont inverses l'un de l'autre et donc que la catégorie des (φ, ∂)-modules sur $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$ est équivalente à celle des $(\mathscr{G}_{k((\mathrm{T}))}, \mathrm{N})$-modules sur L, ce qui en fournit une description particulièrement simple. (Pour une description conjecturale de cette catégorie en termes purement différentiels, voir [20, p. 671-672].)

D'autre part, à une représentation V de $\mathscr{G}_{k((\mathrm{T}))}$ d'image finie (resp. à un (φ, ∂)-module $\mathscr{D}$, plus généralement à un ∂-module *soluble*), on sait associer un entier, à savoir son conducteur de Swan Sw(V) (resp. son irrégularité $\mathrm{Irr}(\mathscr{D})$) et Tsuzuki a montré [75] (voir [32, 62] pour d'autres démonstrations) que l'on a

$$\mathrm{Irr}(\mathscr{D}(\mathrm{V})) = \mathrm{Sw}(\mathrm{V}).$$

0.3. Anneaux de Fontaine et représentations p-adiques

0.3.1. *Notations.* On se fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}_p$ de $\mathbf{Q}_p$ et un système $(\varepsilon^{(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $\overline{\mathbf{Q}}_p$ vérifiant $\varepsilon^{(0)} = 1$, $\varepsilon^{(1)} \neq 1$ et $(\varepsilon^{(n+1)})^p = \varepsilon^{(n)}$ si $n \in \mathbf{N}$. Ceci fait de $\varepsilon^{(n)}$ une racine primitive p^n-ième de l'unité et on note F_n le corps $\mathbf{Q}_p(\varepsilon^{(n)})$ et F_∞ l'extension cyclotomique de $\mathbf{Q}_p$ réunion des F_n. Soit $\mathbf{C}_p$ le complété de $\overline{\mathbf{Q}}_p$ pour la valuation v_p.

On note $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ et $\chi : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathbf{Z}_p^*$ le caractère cyclotomique. Soit aussi $\mathscr{H}_{\mathbf{Q}_p}$ le noyau de la restriction de χ à $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de telle sorte que $\mathscr{H}_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathrm{F}_\infty)$ et soit $\Gamma_{\mathbf{Q}_p} = \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}/\mathscr{H}_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\mathrm{F}_\infty/\mathbf{Q}_p)$.

(On peut remplacer $\mathbf{Q}_p$ par un corps complet pour la valuation v_p, de corps résiduel parfait, et c'est ce qui est fait dans le texte principal, mais travailler avec $\mathbf{Q}_p$ a l'avantage de simplifier certaines formules.)

0.3.2. *Le programme de Fontaine.* Soit G un groupe topologique (comme $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ ou $\mathscr{H}_{\mathbf{Q}_p}$). Pour mettre un peu d'ordre dans les $\mathbf{Q}_p$-représentations de G, la stratégie de Fontaine est de construire des anneaux topologiques munis d'une action de G et de structures additionnelles respectées par l'action de G. Chacun de ces anneaux permet de découper dans l'ensemble des $\mathbf{Q}_p$-représentations de G celles qui sont B-*admissibles* (une représentation V de dimension d est dite B-admissible si $\mathrm{B} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{V}$ est isomorphe à B^d en tant que G-module). Si V est une représentation B-admissible de $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$, le B^{G}-module $\mathbf{D}_{\mathrm{B}}(\mathrm{V}) = (\mathrm{B} \otimes \mathrm{V})^{\mathrm{G}}$ est libre de rang $\dim_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{V}$ et est muni de toutes les structures additionnelles de B respectées par l'action de G. Ceci permet d'associer aux représentations de G des invariants plus maniables (en général des objets provenant de l'algèbre linéaire) et, si l'anneau B est assez fin (i.e. si on peut retrouver $\mathbf{Q}_p$ à l'intérieur de B en utilisant les structures respectées par G), de classifier les représentations B-admissibles en termes de ces invariants. Cette approche a l'avantage de ramener l'étude de toutes les représentations B-admissibles à celle de l'anneau B ; tout l'art résidant dans la construction d'anneaux intéressants. Si V est

B-admissible, la matrice permettant de passer d'une base de $\mathbf{D}_{\mathrm{B}}(\mathrm{G})$ sur B^{G} à une base de V sur $\mathbf{Q}_p$ appartient à $\mathrm{GL}_d(\mathrm{B})$; ses coefficients sont *les* B-*périodes* de la représentation V.

0.3.3. *Quelques anneaux de Fontaine.* La théorie du corps des normes de Fontaine et Wintenberger [45] et [80] permet d'associer à toute extension finie K de $\mathbf{Q}_p$ un corps $\mathbf{E}_{\mathrm{K}}$ de caractéristique p, complet pour une valuation discrète. Elle permet de munir la clôture séparable $\mathbf{F}_p((\mathrm{T}))^{\mathrm{sep}}$ de $\mathbf{F}_p((\mathrm{T}))$ d'une action naturelle de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ identifiant $\mathscr{H}_{\mathbf{Q}_p}$ à $\mathscr{G}_{\mathbf{F}_p((\mathrm{T}))}$; le groupe $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ agit alors sur $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p} = \mathbf{F}_p((\mathrm{T}))$ à travers $\Gamma_{\mathbf{Q}_p}$ par $\sigma(\mathrm{T}) = (1+\mathrm{T})^{\chi(\sigma)} - 1$.

On peut relever cette action en caractéristique 0 à $\mathbf{Z}_p[[\mathrm{T}]]$ par la même formule et, si on fait agir le Frobenius φ par $\mathrm{T} \mapsto (1+\mathrm{T})^p - 1$, les actions de φ et $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ sur $\mathbf{Z}_p[[\mathrm{T}]]$ commutent. Ces actions s'étendent par continuité à $\mathscr{E}^{\dagger}_{\mathbf{Q}_p}$, $\mathscr{R}_{\mathbf{Q}_p}$ et $\mathscr{R}_{\mathbf{Q}_p}[\log \mathrm{T}]$. On dispose d'autre part de « flèches de localisation en $\varepsilon^{(n)} - 1$ » commutant à l'action de Galois, $\mathscr{R}_{\mathbf{Q}_p}[\log \mathrm{T}] \dashrightarrow \mathrm{F}_n[[\mathrm{T}]]$; cette flèche est en pointillés car elle n'est définie, par la formule

$$f \mapsto \varphi^{-n}(f) = f\big(\varepsilon^{(n)}(1+\mathrm{T})^{p^{-n}} - 1\big) = f\Big(\varepsilon^{(n)} - 1 + \varepsilon^{(n)}\Big(\sum_{k=1}^{+\infty} \binom{p^{-n}}{k} \mathrm{T}^k\Big)\Big),$$

que sur le sous-anneau des $f \in \mathscr{R}_{\mathbf{Q}_p}[\log \mathrm{T}]$ qui convergent en $\varepsilon^{(n)} - 1$. On obtient le diagramme d'anneaux

$$\mathscr{E}^{\dagger}_{\mathbf{Q}_p} \longrightarrow \mathscr{R}_{\mathbf{Q}_p} \longrightarrow \mathscr{R}_{\mathbf{Q}_p}[\log \mathrm{T}] \dashrightarrow \mathrm{F}_n[[\mathrm{T}]] \longrightarrow \mathrm{F}_n \ .$$

La procédure[5] permettant de construire $\mathscr{E}^{\dagger}_{\mathbf{Q}_p}$, $\mathscr{R}_{\mathbf{Q}_p}$, ... à partir de $\mathbf{F}_p((\mathrm{T}))$, permet, en partant de $\mathbf{F}_p((\mathrm{T}))^{\mathrm{sep}}$ d'obtenir le diagramme d'anneaux

$$\mathbf{B}^{\dagger} \longrightarrow \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}} \longrightarrow \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log} \dashrightarrow \mathbf{B}^{+}_{\mathrm{dR}} \longrightarrow \mathbf{C}_p \ .$$

et comme on a muni $\mathbf{F}_p((\mathrm{T}))^{\mathrm{sep}}$ d'une action de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ grâce à la théorie du corps des normes, tous ces anneaux sont munis d'une action continue de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ commutant à celle de φ sur $\mathbf{B}^{\dagger}$, $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log}$.

0.3.4. *La hiérarchie* [41] *des représentations galoisiennes.* Une représentation de $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$ qui est $\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{dR}}[\frac{1}{\log(1+\mathrm{T})}]$-admissible est *de de Rham* ; elle est *cristalline* si elle est $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}[\frac{1}{\log(1+\mathrm{T})}]$-admissible, *semi-stable* si elle est $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log}[\frac{1}{\log(1+\mathrm{T})}]$-admissible[6], et potentiellement semi-stable

---

[5]Pour construire $\mathscr{E}^{\dagger}_{\mathbf{Q}_p}$ à partir de $\mathbf{F}_p((\mathrm{T}))$, il y a un choix : le choix d'un relèvement de T ou, ce qui revient au même, d'un Frobenius sur $\mathscr{E}^{\dagger}_{\mathbf{Q}_p}$; une fois ce choix fait, la construction s'étend canoniquement à $\mathbf{F}_p((\mathrm{T}))^{\mathrm{sep}}$. Notre choix de T en fait un analogue p-adique de $e^{2i\pi} - 1$ et $\log(1+\mathrm{T})$ devient un analogue p-adique de $2i\pi$.

[6]La définition habituelle fait intervenir des anneaux $\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{cris}}$ et $\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{st}}$ qui sont étroitement reliés à $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log}$; en particulier les seuls éléments intéressants pour ces histoires de classification des représentations vivent dans des sous-F-espaces vectoriels de dimension finie stables par φ, et ceux-ci sont dans l'intersection $\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\mathrm{rig}} = \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}} \cap \mathbf{B}^{+}_{\mathrm{cris}}$ (resp. $\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\log} = \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log} \cap \mathbf{B}^{+}_{\mathrm{st}}$). Passer de $\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{cris}}$ à $\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\mathrm{rig}}$ revient à considérer la cohomologie rigide au lieu de la cohomologie cristalline : $\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{cris}}$ peut s'interpréter [38] comme le H^0 cristallin de l'anneau des entiers de $\overline{\mathrm{F}}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\mathrm{rig}}$ comme son H^0 rigide.

si ses périodes de de Rham appartiennent au sous-anneau de $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}[\frac{1}{\log(1+\mathrm{T})}]$ engendré par $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\log}[\frac{1}{\log(1+\mathrm{T})}]$ et $\overline{\mathbf{Q}}_p$.

Les implications « cristalline ⇒ semi-stable ⇒ potentiellement semi-stable ⇒ de Rham » sont immédiates ; les deux premières sont strictes et la conjecture de monodromie p-adique de Fontaine est que la dernière implication est en fait une équivalence. Cette conjecture était connue en dimension 1 depuis longtemps ; Fontaine [42] l'avait récemment démontrée en dimension 2 et Hyodo [50] l'avait vérifiée pour les extensions de représentations semi-stables. D'autre part, Tsuji [73, 74] et Faltings [35] avaient démontré (à la suite de travaux de nombreuses personnes dont Tate, Bloch, Kato, Fontaine, Messing, Faltings, Hyodo etc.) la conjecture C_{st} de Fontaine, prouvant ainsi que les représentations provenant de la géométrie (du moins une bonne partie d'entre elles) sont potentiellement semi-stables (il faut en outre utiliser les altérations de de Jong).

0.3.5. *La théorie des* (φ,Γ)*-modules.* La théorie des (φ,Γ)-modules de Fontaine ([39]+[12]) établit une équivalence de catégories entre, d'une part, les $\mathbf{Q}_p$-représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ (i.e. les $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action continue de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$) et, d'autre part, les (φ,Γ)-modules étales sur $\mathscr{E}^\dagger_{\mathbf{Q}_p}$ (i.e. les $\mathscr{E}^\dagger_{\mathbf{Q}_p}$-espaces vectoriels de dimension finie munis d'actions semi-linéaires de φ et $\Gamma_{\mathbf{Q}_p}$ commutant entre elles tels que φ soit étale, c'est-à-dire de φ-pente 0). Cette équivalence de catégorie est obtenue par la procédure décrite plus haut pour le groupe $\mathscr{H}_{\mathbf{Q}_p}$, en utilisant l'anneau $\mathbf{B}^\dagger$: elle associe à V le $\mathscr{E}^\dagger_{\mathbf{Q}_p} = (\mathbf{B}^\dagger)^{\mathscr{H}_{\mathbf{Q}_p}}$-espace vectoriel $\mathbf{D}^\dagger(\mathrm{V}) = (\mathbf{B}^\dagger\otimes\mathrm{V})^{\mathscr{H}_{\mathbf{Q}_p}}$.

Comme $\Gamma_{\mathbf{Q}_p}\cong\mathbf{Z}_p^*$ est essentiellement procyclique, on peut retraduire l'équivalence de catégories ci-dessus en disant qu'une $\mathbf{Q}_p$-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de dimension d peut se décrire entièrement à l'aide de deux matrices A et B de $\mathrm{GL}_d(\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{E},\mathbf{Q}_p})$ (où $\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{E},\mathbf{Q}_p}$ désigne l'anneau des entiers de $\mathscr{E}^\dagger_{\mathbf{Q}_p}$) vérifiant la relation de commutation $\mathrm{A}\varphi(\mathrm{B})=\mathrm{B}\gamma(\mathrm{A})$, ce qui semble plus simple *a priori* que de décrire la représentation directement.

0.3.6. *Le* (φ,∇)*-module attaché à une représentation galoisienne.* On peut transformer un (φ,Γ)-module en un φ-module avec connexion en considérant l'action ∇_{V} de l'algèbre de Lie de $\Gamma_{\mathbf{Q}_p}$ (i.e. l'action infinitésimale de $\Gamma_{\mathbf{Q}_p}$). Le passage à l'algèbre de Lie introduit des dénominateurs (la série définissant le logarithme n'est pas à coefficients entiers), et on doit étendre les coefficients de $\mathscr{E}^\dagger_{\mathbf{Q}_p}$ à $\mathscr{R}_{\mathbf{Q}_p}$. L'étude du φ-module à connexion ainsi obtenu a été menée à bien par Berger [6], ce qui lui permet d'obtenir un certain nombre de résultats concernant la classification des représentations p-adiques.

Ce module différentiel ne rentre pas tout à fait dans le cadre du paragraphe précédent car, sur les coefficients, la dérivation est $\nabla=(1+\mathrm{T})\log(1+\mathrm{T})\frac{d}{d\mathrm{T}}$ et $\log(1+\mathrm{T})\notin\mathscr{E}^\dagger_{\mathbf{Q}_p}$, ce qui fait que la connexion a une infinité de singularités régulières en les zéros de $\log(1+\mathrm{T})$, c'est-à-dire les $\zeta-1$, $\zeta\in\boldsymbol{\mu}_{p^\infty}$. Le résidu en chacune de ces singularités est l'opérateur de Sen (cf. [70, 23, 43]) dont les valeurs propres sont les « poids de Hodge-Tate généralisés » de V ; en particulier, ce résidu est nul si et seulement si V est $\mathbf{C}_p$-admissible.

D'autre part, utilisant la flèche $\mathscr{E}^{\dagger}_{\mathbf{Q}_p} \dashrightarrow \mathrm{F}_n[[t]]$, on montre [43] que la représentation V est de de Rham si et seulement si les singularités ne sont qu'apparentes. Pour ramener la conjecture de Fontaine à celle de Crew, Berger résout simultanément toutes ces singularités en construisant un $\mathscr{R}_{\mathbf{Q}_p}$-réseau de $\mathscr{R}_{\mathbf{Q}_p}[\frac{1}{\log(1+\mathrm{T})}] \otimes_{\mathscr{E}^{\dagger}_{\mathbf{Q}_p}} \mathbf{D}^{\dagger}(\mathrm{V})$ stable par $\partial_{\mathrm{V}} = \frac{1}{\log(1+\mathrm{T})}\nabla_{\mathrm{V}}$ et par φ, et montre que le (φ, ∂)-module ainsi obtenu est quasi-unipotent si et seulement si V est potentiellement semi-stable.

1. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES p-ADIQUES

1.1. Anneaux de séries de Laurent

Soit L un corps de caractéristique 0 complet pour la valuation p-adique v_p supposée discrète (on pourrait remplacer cette hypothèse par maximalement complet). On suppose, pour se simplifier la vie, que le corps résiduel k de L est algébriquement clos (ça évitera d'avoir à étendre les scalaires à certains endroits). Remarquons que cette restriction n'est pas très sérieuse car, pour résoudre une équation différentielle, on peut toujours étendre les scalaires puis utiliser le théorème d'Ax-Sen-Tate (prop. 2.1) pour revenir au corps de base.

Soit $\mathscr{E}_{\mathrm{L}}$ l'ensemble des séries de Laurent $\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k\mathrm{T}^k$ telle que la suite $(v_p(a_k))_{k\in\mathbf{Z}}$ soit minorée et vérifie $\lim_{k\to-\infty} v_p(a_k) = +\infty$.

Si $r > 0$, soit $\mathscr{E}^{]0,r]}_{\mathrm{L}}$ (resp. $\mathscr{E}^{(0,r]}_{\mathrm{L}}$) l'anneau des fonctions analytiques (resp. analytiques bornées) sur la couronne $0 < v_p(\mathrm{T}) \leq r$. C'est aussi l'ensemble des séries de Laurent $\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k\mathrm{T}^k$ vérifiant $\lim_{k\to-\infty} v_p(a_k) + kr = +\infty$ et $\lim_{k\to+\infty} v_p(a_k) + ks = +\infty$ quel que soit $0 < s \leq r$ (resp. la suite $(v_p(a_k))_{k\in\mathbf{Z}}$ est minorée). On peut aussi obtenir $\mathscr{E}^{]0,r]}_{\mathrm{L}}$ en complétant $\mathscr{E}^{(0,r]}_{\mathrm{L}}$ pour la topologie de Fréchet induite par la famille de valuations w_s, $0 < s \leq r$ définies par $w_s(\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k\mathrm{T}^k) = \inf_{k\in\mathbf{Z}}(v_p(a_k) + sr)$.

On obtient alors $\mathscr{E}^{\dagger}_{\mathrm{L}}$ (resp. $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$) comme limite inductive des espaces vectoriels topologiques $\mathscr{E}^{(0,r]}_{\mathrm{L}}$ (resp. $\mathscr{E}^{]0,r]}_{\mathrm{L}}$). Finalement, soient $\mathscr{E}^{+}_{\mathrm{L}}$ et $\mathscr{R}^{+}_{\mathrm{L}}$ les intersections respectives de $\mathscr{E}_{\mathrm{L}}$ et $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$ avec $\mathrm{L}[[\mathrm{T}]]$; ceci fait de $\mathscr{R}^{+}_{\mathrm{L}}$ (resp. $\mathscr{E}^{+}_{\mathrm{L}}$) l'anneau des fonctions analytiques (res. analytiques bornées) sur le disque $0 < v_p(\mathrm{T})$. Tout élément de $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$ peut alors s'écrire comme la somme d'un élément de $\mathscr{E}^{\dagger}_{\mathrm{L}}$ et d'un élément de $\mathscr{R}^{+}_{\mathrm{L}}$ et on a $\mathscr{R}^{+}_{\mathrm{L}} \cap \mathscr{E}^{\dagger}_{\mathrm{L}} = \mathscr{E}^{+}_{\mathrm{L}}$.

De manière imagée, $\mathscr{E}_{\mathrm{L}}$ est l'anneau des fonctions analytiques sur une couronne vide de rayon 1 et $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$ (resp. $\mathscr{E}^{\dagger}_{\mathrm{L}}$) est l'anneau des fonctions analytiques (resp. analytiques bornées) sur une couronne infiniment fine de rayon 1.

Proposition 1.1. — (i) *$\mathscr{E}^{+}_{\mathrm{L}}$ et $\mathscr{E}^{(0,r]}$, $r > 0$, sont des anneaux principaux ;*

(ii) *$\mathscr{E}_{\mathrm{L}}$ et $\mathscr{E}^{\dagger}_{\mathrm{L}}$ sont des corps ;*

(iii) *$\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$, $\mathscr{R}^{+}_{\mathrm{L}}$ et $\mathscr{E}^{]0,r]}_{\mathrm{L}}$, $r > 0$, sont des anneaux de Bézout ;*

(iv) *tout sous-module fermé d'un module libre* M *de rang fini sur* $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$, $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}^{+}$ *ou* $\mathscr{E}_{\mathrm{L}}^{(0,r]}$, $r > 0$, *est libre de rang* $\leq \mathrm{rang}(\mathrm{M})$.

Démonstration. — Les (i) et (ii) sont des conséquences de la théorie des polygones de Newton (cf. [34], par exemple) pour les séries de Laurent (et du fait que l'on a supposé L de valuation discrète). Le (iii) est un résultat de Lazard [59] ; rappelons qu'un anneau de Bézout est un anneau dans lequel tout idéal de type fini est principal. Pour le (iv), voir [6] ; ce résultat joue un grand rôle dans la réduction de la conjecture de Fontaine à celle de Crew.

On se fixe une dérivation ∂ et un Frobenius φ de $\mathscr{E}_{\mathrm{L}}^{\dagger}$. Si E est une extension finie séparable de $k((\mathrm{T}))$, il lui correspond des extensions $\mathscr{E}_{\mathrm{L}}^{\dagger}(\mathrm{E})$ et $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}(\mathrm{E})$ de $\mathscr{E}_{\mathrm{L}}^{\dagger}$ et $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$ respectivement auxquelles les actions de φ et ∂ s'étendent canoniquement. Voir le nº 2.2 pour un point de vue plus général. Une propriété que nous aurons à utiliser est l'existence (cf. prop 2.3) d'un isomorphisme d'anneaux topologiques de $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$ sur $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}(\mathrm{E})$ [E est topologiquement isomorphe à $k((\mathrm{T}))$] ; en particulier, après extension séparable finie de $k((\mathrm{T}))$, on se retrouve avec la même théorie.

1.2. Les résultats de Christol et Mebkhout

Les travaux de Christol et Mebkhout ont déjà fait l'objet d'un exposé à ce séminaire [60] ; nous nous contenterons donc d'un résumé rapide. Pour une présentation détaillée de la théorie, nous renvoyons à [21].

1.2.1. *Valuation de convergence d'un module différentiel.* Rappelons que, si $0 < s \leq r$, on définit sur $\mathscr{E}_{\mathrm{L}}^{]0,r]}$ une valuation w_s par la formule $w_s(\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k\mathrm{T}^k) = \inf_{k\in\mathbf{Z}} v_p(a_k) + ks$. Si $f \in \mathscr{R}_{\mathrm{L}}$, la fonction $s \mapsto w_s(f)$ est définie sur un intervalle de la forme $]0,r]$, $r > 0$ et est une fonction concave de s, affine par morceaux. Une manière commode de voir w_s est d'introduire « le »*point générique* t_s *de valuation* s ; il vit dans une extension transcendante algébriquement close L_s de L, complète pour une valuation étendant v_p (et encore notée v_p), et est caractérisé (à automorphisme de corps valué près) par $v_p(t_s - a) = s$ quel que soit $a \in \mathrm{L}$ de valuation s. On a alors $w_s(f) = v_p(f(t_s))$ si $f \in \mathscr{E}_{\mathrm{L}}^{]0,r]}$ et $r \geq s$. (Pour construire L_s, on munit $\mathrm{L}[\mathrm{X},\mathrm{X}^{-1}]$ de la valuation $v_p(\sum_{k=k_0}^{k_1} a_k\mathrm{X}^k) = \inf_{k\in\mathbf{Z}} v_p(a_k) + ks$; cette valuation est multiplicative et donc passe au corps des fractions ; on peut alors compléter ce dernier, prendre une clôture algébrique et recompléter (maximalement si besoin est) pour obtenir L_s et prendre $t_s = \mathrm{X}$.)

Si $\mathrm{G} = (g_{i,j}) \in \mathrm{M}_d(\mathscr{R}_{\mathrm{L}})$, on définit $w_s(\mathrm{G})$ comme le minimum des $w_s(g_{i,j})$, $1 \leq i,j \leq d$.

Soient $\mathscr{D}$ un ∂-module de rang d sur $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$, $e_1, \ldots, e_d$ une base de $\mathscr{D}$ sur $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$ et, si $n \in \mathbf{N}$, soit $\mathrm{G}_n = (g_{i,j})$ la matrice définie par $\partial_{\mathscr{D}}^n e_j = \sum_{i=1}^d g_{i,j}e_i$. Si $s > 0$, la suite de terme général $\frac{1}{n}w_s(\mathrm{G}_n)$ a une limite (quand elle est définie) quand n tend vers $+\infty$ (norme spectrale d'un opérateur). Ceci permet d'introduire la fonction

$$\mathrm{Val}(\mathscr{D}, s) = \sup\Big(s, \lim_{n\to+\infty} \frac{v_p(n!) - w_s(\mathrm{G}_n)}{n}\Big) = \sup\Big(s, \frac{1}{p-1} - \lim_{n\to+\infty} \frac{w_s(\mathrm{G}_n)}{n}\Big).$$

La quantité $\mathrm{Val}(\mathscr{D}, s)$ s'interprète comme la valuation de convergence des solutions de l'équation différentielle $\partial_{\mathscr{D}}\mathrm{X} = 0$ autour en t_s. (Une base des solutions autour d'un point x_0 est donnée par les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \partial_{\mathscr{D}}^n e_i \cdot \frac{(x_0-\mathrm{T})^n}{n!}$, $1 \leq i \leq d$.)

Pour calculer cette fonction, on peut, dans les cas favorables, utiliser un résultat de Young [81] :

Proposition 1.2. — *Soient* $\mathscr{L} = \partial^d + a_{d-1}(\mathrm{T})\partial^{d-1} + \cdots + a_0(\mathrm{T})$, *où* $a_0(\mathrm{T}), \ldots, a_{d-1}(\mathrm{T}) \in \mathscr{R}_{\mathrm{L}}$ (et $\partial = \frac{d}{d\mathrm{T}}$), $\mathrm{P} = \mathrm{X}^d + a_{d-1}(t_s)\mathrm{X}^{d-1} + \cdots + a_0(t_s)$ *et* $u_1, \ldots, u_d$ *les valuations des racines de* P (ces valuations se lisent sur le polygone de Newton de P), *alors* $\mathscr{L}\mathrm{X} = 0$ *admet une base de solutions* $f_1, \ldots, f_d$ *autour de* t_s *dont les valuations de convergence vérifient :*

(i) *si* $u_i < s$, *la valuation de convergence de* f_i *est exactement* $\frac{1}{p-1} + u_i$ *;*

(ii) *si* $u_i \geq s$, *la valuation de convergence de* f_i *est* $\leq \frac{1}{p-1} + s$.

Passer d'un module différentiel à un opérateur différentiel demande de trouver un *vecteur cyclique* (i.e. un vecteur X tel que $\mathrm{X}, \partial_{\mathscr{D}}\mathrm{X}, \ldots, \partial_{\mathscr{D}}^{d-1}\mathrm{X}$ forment une base de $\mathscr{D}$ sur $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$). Cela ne peut, en général, se faire sans passer au corps des fractions de $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$, ce qui introduit quelques petits problèmes techniques pour se débarasser des singularités apparentes que l'on récupère ainsi.

Un ingrédient technique très utile est *l'antécédent de Frobenius*. Soit φ un Frobenius sur $\mathscr{E}_{\mathrm{L}}^{\dagger}$. Si $\mathscr{D}$ est un ∂-module sur $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$, on note $\varphi^*\mathscr{D}$ le transformé de $\mathscr{D}$ par φ : si la matrice de $\partial_{\mathscr{D}}$ dans une base est G, la matrice de $\partial_{\varphi^*\mathscr{D}}$ est $\partial(\varphi(\mathrm{T}))\varphi(\mathrm{G})$. On appelle antécédent de Frobenius de $\mathscr{D}$ un ∂-module $\mathscr{N}$ tel que l'on ait $\varphi^*\mathscr{N} = \mathscr{D}$. Il ne faut pas confondre cette notion avec celle de structure de Frobenius ; un ∂-module admet une structure de Frobenius (i.e. de (φ, ∂)-module) si $\varphi^*\mathscr{D} \cong \mathscr{D}$. L'existence d'antécédents de Frobenius est garantie sous des conditions assez larges par un théorème de Christol et Dwork [16] :

Proposition 1.3. — *Soit* $\mathscr{D}$ *un* ∂*-module sur l'anneau* $\mathscr{E}_{\mathrm{L}}^{]r_1,r_2[}$ *des fonctions analytiques sur la couronne* $0 < r_1 < v_p(\mathrm{T}) < r_2$ *tel que* $\mathrm{Val}(\mathscr{D}, s) < \frac{1}{p} + s$ *si* $s \in]r_1, r_2[$. *Il existe alors un* (unique) φ*-module* $\mathscr{N}$ *sur* $\mathscr{E}_{\mathrm{L}}^{]pr_1,pr_2[}$ *tel que* $\mathscr{D} = \varphi^*\mathscr{N}$. *De plus, on a* $\mathrm{Val}(\mathscr{N}, ps) = p\mathrm{Val}(\mathscr{D}, s)$.

On remarquera que, si la valuation de convergence de $\mathscr{D}$ est assez petite (ce qui sera le cas pour les modules solubles, cf. ci-dessous), on peut réitérer le procédé pour se ramener en un point où le théorème de Young peut être utilisé de manière efficace. Une application de ces techniques est la très utile proposition :

Proposition 1.4 ([19]). — *La fonction* $s \mapsto \mathrm{Val}(\mathscr{D}, s)$ *est convexe, affine par morceaux, et sa dérivée ne prend pour valeurs que des nombres rationnels de dénominateurs* $\leq d$.

1.2.2. *La théorie des ∂-pentes.* Par convexité, la limite $\lim_{s\to 0^+}\mathrm{Val}(\mathscr{D},s)$ existe (elle peut être infinie) et le module $\mathscr{D}$ est dit *soluble* si $\lim_{s\to 0^+}\mathrm{Val}(\mathscr{D},s)=0$. Il existe alors un nombre rationnel $\beta\geq 0$, de dénominateur $\leq d$, tel que $\mathrm{Val}(\mathscr{D},s)=(1+\beta)s$, si s est assez petit. Ce nombre rationnel β est appelé *la plus grande pente* de $\mathscr{D}$. On dit que $\mathscr{D}$ est *purement de pente* β si *toutes* les solutions de l'équation $\partial_{\mathscr{D}}\mathrm{X}=0$ (et pas seulement une solution générale) ont, en t_s (s proche de 0), une valuation de convergence égale à $(1+\beta)s$.

THÉORÈME 1.5 (« de décomposition » [19, 20]). — *Un ∂-module soluble $\mathscr{D}$ sur $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$ possède une décomposition canonique $\mathscr{D}=\oplus_{\gamma\geq 0}\mathscr{D}_\gamma$, où $\mathscr{D}_\gamma$ est purement de pente γ.*

REMARQUE 1.6. — Si on part d'un ∂-module sur $\mathscr{E}_{\mathrm{L}}^{\dagger}$, on pourrait espérer obtenir une décomposition sur $\mathscr{E}_{\mathrm{L}}^{\dagger}$, mais l'exemple du ∂-module associé à l'opérateur $\mathscr{L}=\mathrm{T}^2\frac{d}{d\mathrm{T}}+(3\mathrm{T}-\pi)\frac{d}{d\mathrm{T}}+1$ (où $\pi^{p-1}=-p$) montre qu'il n'en est rien ; un calcul montre qu'il possède deux pentes distinctes sur $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$ et que la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\pi^{-n}n!\mathrm{T}^n$ est une solution de $\mathscr{L}f=0$ appartenant à $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$ mais pas à $\mathscr{E}_{\mathrm{L}}^{\dagger}$, ce qui exclut une décomposition sur $\mathscr{E}_{\mathrm{L}}^{\dagger}$.

THÉORÈME 1.7 (« de Hasse-Arf » [19]). — *Si $\mathscr{D}$ est un ∂-module soluble, alors la quantité $\mathrm{Irr}(\mathscr{D})=\sum_{\gamma\geq 0}\gamma\cdot\mathrm{rang}\,\mathscr{D}_\gamma$ est un entier.*

REMARQUE 1.8. — Ce théorème est une étape dans la démonstration du *théorème de l'indice* qui était une des motivations de Christol et Mebkhout (généraliser en rang quelconque les résultats de Robba [65, 66, 67, 68, 22] en rang 1). L'irrégularité $\mathrm{Irr}(\mathscr{D})$ de $\mathscr{D}$ est définie comme l'indice d'un certain opérateur ; c'est donc un entier par définition et le théorème ci-dessus donne une formule permettant de la calculer.

COROLLAIRE 1.9. — *Un ∂-module soluble irréductible, de rang fini sur $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$, n'a qu'une seule pente, et le dénominateur de cette pente divise le rang du module.*

Ce qui précède s'applique en particulier aux (φ,∂)-modules : l'existence d'un Frobenius permet de montrer que l'on a $\mathrm{Val}(\mathscr{D},s)\leq\frac{1}{p}\mathrm{Val}(\mathscr{D},ps)$ si s est assez petit, avec égalité si $\mathrm{Val}(\mathscr{D},ps)<\frac{p}{p-1}+ps$.

1.2.3. *∂-modules de pente* 0. Si $\mathscr{D}$ est un module différentiel de rang d sur une couronne non vide A du corps des nombres complexes et si $x_0\in\mathrm{A}$, les solutions locales de l'équation $\partial_{\mathscr{D}}\mathrm{X}=0$ autour de x_0 forment un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension d. On peut prolonger analytiquement une solution le long d'un chemin et, au bout d'un tour, on récupère une nouvelle solution autour de x_0 ; d'où un opérateur « de monodromie » N. Les valeurs propres de $\frac{1}{2i\pi}\log\mathrm{N}$ s'appellent les *exposants* de $\mathscr{D}$; ce sont des éléments de $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$ bien définis à l'ordre près.

En p-adique, on ne dispose pas du prolongement analytique, mais Frobenius sous toutes ses coutures constitue un substitut efficace. En utilisant les antécédents de Frobenius, Christol et Mebkhout [18] (voir aussi [33]) ont réussi à définir les exposants p-adiques pour un ∂-module $\mathscr{D}$ sur $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$ purement de ∂-pente 0 (on dit aussi parfois que $\mathscr{D}$ vérifie *la condition de Robba*). Ces exposants appartiennent à $(\mathbf{Z}_p/\mathbf{Z})^d$ modulo une certaine relation d'équivalence assez compliquée, mais si les différences de ces exposants sont toutes non Liouville (un nombre p-adique α est non Liouville si $\lim_{n\to\pm\infty}\frac{1}{n}v_p(\alpha-n)=0$, i.e. si α est entier ou pas trop proche de $\mathbf{Z}$), alors ces exposants sont des éléments de $\mathbf{Z}_p/\mathbf{Z}$ bien définis à l'ordre près.

Théorème 1.10 (« de la monodromie p-adique » [18]). — *Si $\mathscr{D}$ est un ∂-module de rang d sur $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$ de ∂-pente 0, et si les différences de ses exposants sont non Liouville, alors l'équation différentielle $\partial_{\mathscr{D}}\mathrm{X}=0$ admet d solutions linéairement indépendantes dans $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}[\mathrm{T}^{\alpha_1},\dots,\mathrm{T}^{\alpha_d},\log\mathrm{T}]\otimes_{\mathscr{R}_{\mathrm{L}}}\mathscr{D}$, où $\alpha_1,\dots,\alpha_d$ sont les exposants de $\mathscr{D}$.*

Corollaire 1.11. — *Un (φ,∂)-module sur $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$ de ∂-pente 0 devient unipotent sur une extension de $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$ associée à une extension modérément ramifiée de $k((\mathrm{T}))$.*

Démonstration. — Comme $\mathscr{D}$ est muni d'une structure de Frobenius, l'ensemble des exposants de $\mathscr{D}$ est stable par $\alpha\mapsto p\alpha$ et les exposants de $\mathscr{D}$ sont des nombres rationnels de dénominateur premier à p.

1.3. Théorie de Galois différentielle

Ce n° est consacré à la démonstration d'André [2]. Celui-ci se place dans un cadre abstrait s'appliquant à d'autres situations que celles des ∂-modules solubles sur l'anneau de Robba, et nous avons choisi de nous restreindre à ce cadre pour nous concentrer sur la construction qui est au cœur de la démonstration (il s'agit du module $\mathscr{M}_\ell^{\otimes}$ ci-dessous, obtenu par induction tensorielle) et son utilisation.

1.3.1. *Filtration des groupes de Galois différentiels.* On peut associer [8] à un ∂-module $\mathscr{D}$ de rang d sur $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$ un groupe de Galois différentiel $\mathrm{G}_{\mathscr{D}}$; c'est un sous-groupe algébrique de GL_d défini sur une extension finie L' de L ; ses représentations algébriques sont en correspondance avec les ∂-modules de rang fini sur $\mathscr{R}_{\mathrm{L}'}$ que l'on obtient à partir de $\mathscr{D}$ et de son dual par produit tensoriel, sous-objet et quotient. Réciproquement, si $\mathscr{D}'$ est un tel ∂-module, son groupe de Galois différentiel est un quotient de $\mathrm{G}_{\mathscr{D}}$. Nous utiliserons cette correspondance pour passer du langage des représentations à celui des ∂-modules sans plus de commentaire.

Si $\gamma\geq 0$, on note $\mathrm{G}_{\mathscr{D}}^{\gamma}$ le plus grand sous-groupe distingué de $\mathrm{G}_{\mathscr{D}}$ tel que les représentations de $\mathrm{G}_{\mathscr{D}}/\mathrm{G}_{\mathscr{D}}^{\gamma}$ n'aient que des ∂-pentes $\leq\gamma$. Comme $\mathrm{G}_{\mathscr{D}}$ est algébrique, toute suite strictement décroissante de sous-groupes algébriques est de longueur finie. En particulier, la filtration de $\mathrm{G}_{\mathscr{D}}$ par les ∂-pentes n'a qu'un nombre fini de sauts (un saut est un réel $\gamma>0$ tel $\mathrm{G}_{\mathscr{D}}^{\gamma-\varepsilon}\neq\mathrm{G}_{\mathscr{D}}^{\gamma}$ si $\varepsilon>0$) $\gamma_1,\dots,\gamma_r$ et on appelle $\gamma_0=0,\gamma_1,\dots,\gamma_r$ les *∂-pentes* de $\mathrm{G}_{\mathscr{D}}$.

Remarque 1.12. — (i) Si $\mathscr{D}'$ est un sous-∂-module ou un quotient de $\mathscr{D}$, le théorème de décomposition montre que les ∂-pentes de $\mathscr{D}'$ sont incluses dans celles de $\mathscr{D}$; en particulier, elles sont inférieures ou égales à la plus grande pente de $\mathscr{D}$.

(ii) Si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont deux ∂-modules sur $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$, les pentes de $\mathscr{D}_1 \otimes \mathscr{D}_2$ sont inférieures ou égales à la plus grande des plus grandes ∂-pentes de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$: la valuation de convergence du produit de deux séries entières est inférieure ou égale au maximum des valuations de convergence de ces séries.

On déduit de cette remarque que les ∂-pentes d'une représentation de $\mathrm{G}_{\mathscr{D}}$ sont incluses dans celles de $\mathrm{G}_{\mathscr{D}}$ et qu'elles sont $\leq \gamma$ si et seulement si $\mathrm{G}_{\mathscr{D}}$ agit à travers $\mathrm{G}_{\mathscr{D}}/\mathrm{G}_{\mathscr{D}}^{\gamma}$.

1.3.2. *La conjecture de Crew.* Si $\mathscr{D}$ est un ∂-module sur $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$ et E est une extension finie séparable de $k((\mathrm{T}))$, le $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}(\mathrm{E})$-module $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}(\mathrm{E}) \otimes_{\mathscr{R}_{\mathrm{L}}} \mathscr{D}$ est un ∂-module sur $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}(\mathrm{E})$ dont le groupe de Galois différentiel $\mathrm{G}_{\mathscr{D}}(\mathrm{E})$ est un sous-groupe de $\mathrm{G}_{\mathscr{D}}$. La conjecture de Crew (sous sa forme filtrée) peut se reformuler sous la forme : « si $\mathscr{D}$ est un (φ, ∂)-module *irréductible* sur $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$, il existe une extension finie séparable E de $k((\mathrm{T}))$ telle que $\mathrm{G}_{\mathscr{D}}(\mathrm{E}) = \{1\}$ ». Le cas de rang 1 permet de démontrer que cet énoncé est vrai si $\mathrm{G}_{\mathscr{D}}$ est résoluble et, plus généralement, il permet de prouver qu'il existe une extension finie séparable E de $k((\mathrm{T}))$ telle que $\mathrm{G}_{\mathscr{D}}(\mathrm{E})$ n'ait pas de quotient abélien non trivial. Quitte à faire une extension séparable finie de $k((\mathrm{T}))$, on est donc ramené à vérifier le résultat suivant.

Proposition 1.13. — *Si $\mathscr{D}$ est un (φ, ∂)-module irréductible sur $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$, alors tout quotient simple de $\mathrm{G}_{\mathscr{D}}$ est abélien.*

Démonstration. — La démonstration se fait par l'absurde. Le principe est de faire apparaître des dénominateurs dans les pentes en induisant à partir d'une extension modérée de $k((\mathrm{T}))$ pour obtenir une contradiction avec le théorème de Hasse-Arf.

Soit H un quotient simple non abélien de $\mathrm{G}_{\mathscr{D}}$. Comme H est simple, il a exactement une ∂-pente γ, et celle-ci est non nulle d'après le corollaire 1.9. Soit $\mathscr{M}$ une représentation irréductible de H de dimension $d > 1$; alors $\mathscr{M}$ est de pente γ. Soit $\ell \neq p$ un nombre premier ne divisant ni d, ni le numérateur de γ, ni l'ordre du groupe Out(H), et soit ζ une racine primitive ℓ-ième de l'unité. Si $0 \leq i \leq \ell - 1$, soit $\mathscr{M}^{(i)}$ le $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}(\mathrm{T}^{1/\ell})$-$\partial$-module obtenu à partir de $\mathscr{M}$ via le changement de variable $\mathrm{T} \mapsto \zeta^i \mathrm{T}^{1/\ell}$; si $x \in \mathscr{M}^{(0)}$, on note $x^{(i)}$ son image dans $\mathscr{M}^{(i)}$ via le changement de variable $\mathrm{T}^{1/\ell} \mapsto \zeta^i \mathrm{T}^{1/\ell}$ (et donc $x^{(0)} = x$). Considérons les ∂-modules $\mathscr{M}_\ell$ et $\mathscr{M}_\ell^{\otimes}$ définis par :

$$\mathscr{M}_\ell = \{(x^{(0)}, \ldots, x^{(\ell-1)},\ x \in \mathscr{M}^{(0)}\}\ ,$$

et $\mathscr{M}_\ell^{\otimes}$ est le sous-$\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$-module de

$$\mathscr{M}^{(0)} \otimes_{\mathscr{R}_{\mathrm{L}}(\mathrm{T}^{1/\ell})} \cdots \otimes_{\mathscr{R}_{\mathrm{L}}(\mathrm{T}^{1/\ell})} \mathscr{M}^{(\ell-1)}$$

engendré par les $x^{(0)} \otimes \cdots \otimes x^{(\ell-1)}$, $x \in \mathscr{M}^{(0)}$. L'intérêt du passage de $\mathscr{M}$ à $\mathscr{M}_\ell$ est que la pente a été divisée par ℓ (comme la dimension a été multipliée par ℓ, cela ne fournit pas de contradiction au théorème de Hasse-Arf). Quand on étend les scalaires de $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}(\mathrm{T})$ à $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}(\mathrm{T}^{1/\ell})$, le module $\mathscr{M}_\ell$ devient isomorphe à la somme des $\mathscr{M}^{(i)}$; comme le groupe de Galois différentiel de chacun des $\mathscr{M}^{(i)}$ est isomorphe à H, le groupe de Galois différentiel

H_ℓ de $\mathscr{M}_\ell$ est un sous-groupe du produit en couronne de H par le groupe cyclique C_ℓ (ce produit en couronne U est un produit semi-direct $1 \to H^\ell \to U \to C_\ell \to 1$, où C_ℓ agit par permutation circulaire des facteurs). Comme H est simple, il y a a priori 3 cas :

(I) H_ℓ est le produit direct de C_ℓ et H ;

(II) H_ℓ est un produit semi-direct de C_ℓ et H ;

(III) H_ℓ est égal au produit en couronne.

Dans tous les cas, une suite de sous-groupes distingués de H_ℓ est au plus de longueur 3 et H_ℓ a au plus 3 pentes. Deux de ces pentes sont nulles [une par définition et l'autre car le quotient C_ℓ de H_ℓ correspond à l'extension modérée $\mathscr{R}_L(T^{1/\ell})$ de $\mathscr{R}_L(T)$], et la troisième est la pente de $\mathscr{M}_\ell$, c'est-à-dire γ/ℓ. Pour conclure, il suffit de montrer que ces trois cas sont exclus par notre choix de ℓ.

Dans le premier cas, l'action de C_ℓ découpe $\mathscr{M}_\ell$ en ℓ morceaux de rang d et ∂-pente γ/ℓ, et comme $d\gamma/\ell$ n'est pas entier, cela contredit le théorème de Hasse-Arf. Le second cas est exclu par la condition « ℓ ne divise pas l'ordre de Out(H) ». Dans le troisième cas, le module $\mathscr{M}_\ell^{\otimes}$ est une représentation irréductible de H_ℓ de dimension d^ℓ ; comme l'action de H_ℓ ne se factorise pas à travers C_ℓ (car $\mathscr{M}$ est irréductible, de dimension > 1), la ∂-pente de ce module est γ/ℓ, ce qui contredit le théorème de Hasse-Arf puisque $d^\ell\gamma/\ell$ n'est pas entier.

1.4. **Le théorème de Turrittin p-adique**

Dans ce n° , nous esquissons la démonstration du « théorème de Turritin p-adique » de Mebkhout [64], la conjecture de Crew en étant un cas particulier. Pour simplifier les calculs, on utilise la dérivation $\partial = T\frac{d}{dT}$ et on note π le « π de Dwork » (i.e. une racine $(p-1)$-ième de $-p$).

1.4.1. *Construction de ∂-modules solubles de rang* 1. Si P est un polynôme sans terme constant, on note $\chi(P)$ le module de rang 1 dont $\exp(\pi P(T^{-1}))$ est une base des sections horizontales.

Proposition 1.14. — *Soient $a \in L$ vérifiant $v_p(a) = 0$ et $\beta \in \mathbf{N} - \{0\}$. Si $v_p(\beta) = n$, il existe un polynôme*

$$P_{\beta,a}(X) = \frac{a}{\beta}X^\beta + \frac{pb_1}{\beta}X^{\beta/p} + \cdots + \frac{p^n b_n}{\beta}X^{\beta/p^n},$$

où les b_i sont des entiers d'une extension convenable de K, *tel que le module $\chi(P_{\beta,a})$ soit soluble. De plus, ce module*

(i) *est de ∂-pente β ;*

(ii) *peut être muni d'une structure de Frobenius.*

L'existence de $P_{\beta,a}$ est due à Robba [66]. Pour Robba, l'extension convenable dont il est question dans la proposition est assez imposante (c'est un corps algébriquement clos maximalement complet), mais Matsuda [61] a montré que l'on peut prendre les β_i dans une extension finie de L, du moins si $p \neq 2$. Le (i) se démontre alors par un calcul direct et le (ii) est dû à Chiarellotto et Christol [14].

1.4.2. *Modules de ∂-pente entière.* Pour rester dans le cadre « valuation discrète », nous supposons désormais $p \neq 2$. La démonstration du théorème de Turritin p-adique repose sur l'énoncé suivant

Proposition 1.15 ([64]). — (i) *Si $\mathscr{D}$ est un ∂-module irréductible soluble sur $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$ de ∂-pente entière $\beta > 0$, alors il existe $h \in \mathbf{N}$, une extension finie L' de L et $a \in \mathrm{L}'$ de valuation 0 tel que le module $\mathscr{D} \otimes \chi(\mathrm{P}_{\beta,a})$ soit de pente $< \beta$.*

(ii) *Si $\mathscr{D}$ est un ∂-module soluble de rang premier à p n'ayant qu'une seule ∂-pente $\beta \in \mathbf{N}$, alors $\mathscr{D}$ peut se casser en deux.*

La démonstration de cette proposition est assez technique ; ce qui suit n'en est qu'une esquisse. Soit $\mathrm{I} =]\frac{1}{(p-1)\beta}, \frac{p}{(p-1)\beta}[$. On commence par prendre un antécédent de Frobenius $\mathscr{D}_h$ d'ordre h suffisamment grand pour que l'on soit dans les conditions d'utilisation du théorème de Young (prop. 1.2) et que l'on ait $\mathrm{Val}(\mathscr{D}_h, s) = (1+\beta)s$ si $s \in \mathrm{I}$; puis on choisit un vecteur cyclique de telle sorte que $\mathscr{D}_h$ soit associé à un opérateur différentiel $\mathrm{Q}(\partial) = \partial^d + a_{d-1}(\mathrm{T})\partial^{d-1} + \cdots + a_0(\mathrm{T})$, où les a_i appartiennent au corps des fractions des fonctions holomorphes sur la couronne $v_p(\mathrm{T}) \in \mathrm{I}$.

Tordre $\mathscr{D}_h$ par $\chi(a\mathrm{X}^\beta)$ revient à remplacer $\mathrm{Q}(\partial)$ par $\mathrm{Q}(\partial - \frac{\pi\beta a}{\mathrm{T}^\beta}) = \partial^d + \cdots + b_0(\mathrm{T})$. Comme $\mathscr{D}_h$ est purement de ∂-pente β, on a

$$w_s(a_0(\mathrm{T})) = d\Big(\frac{1}{p-1} - \beta s\Big) \text{ et } w_s(a_i(\mathrm{T})) \geq (d-i)\Big(\frac{1}{p-1} - \beta s\Big) \quad \text{si } s \in \mathrm{I},$$

et on montre que l'on peut trouver a dans une extension finie de L de telle sorte qu'il existe $s_0 \in \mathrm{I}$ tel que l'on ait $w_{s_0}(b_0(\mathrm{T})) > d(\frac{1}{p-1} - \beta s_0)$. Un petit calcul montre alors que, si

$$\mathrm{Q}_1(\partial) = \mathrm{Q}(\partial - \pi\partial(\mathrm{P}_{\beta,a}(\mathrm{T}^{-1}))) = \partial^d + c_{d-1}(\mathrm{T})\partial^{d-1} + \cdots + c_0(\mathrm{T})$$

est l'opérateur différentiel correspondant au module tordu $\mathscr{D}_h \otimes \chi(\mathrm{P}_{\beta,a})$, alors

(i) $w_s(c_i(\mathrm{T})) \geq (d-i)(\frac{1}{p-1} - \beta s)$ si $0 \leq i \leq d-1$ et $s \in \mathrm{I}$;

(ii) $w_{s_0}(c_0(\mathrm{T})) > d(\frac{1}{p-1} - \beta s)$;

(iii) $w_s(c_{d-1}(\mathrm{T})) = \frac{1}{p-1} - \beta s$ si $(d,p) = 1$ et $s \in \mathrm{I}$.

Le (i) assure que $\mathscr{D}_h \otimes \chi(\mathrm{P}_{\beta,a})$ est de plus grande ∂-pente $\leq \beta$ et le (iii) implique que l'on a égalité si $(d,p) = 1$. Le (ii), quant à lui, montre que $\mathscr{D}_h \otimes \chi(\mathrm{P}_{\beta,a})$ n'est pas purement de ∂-pente β (cf. th. 1.2). Il n'y a plus qu'à utiliser le théorème de décomposition et appliquer h fois Frobenius pour revenir au module initial et conclure.

Remarque 1.16. — La proposition 1.15 admet (cf. [47, prop. 3.3]) un analogue pour les représentations galoisiennes d'un corps local (à corps résiduel fini).

1.4.3. *Énoncé et démonstration du théorème.* Si $\mathscr{D}$ est un ∂-module soluble de rang d sur $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$, nous dirons de façon informelle « si on ne rencontre pas de nombre de Liouville en cours de route » pour signifier « si la catégorie tannakienne engendrée par $\mathscr{D}$ et les $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}(\mathrm{E})$, où E parcourt l'ensemble des extensions séparables de $k((\mathrm{T}))$, n'admet que des objets dont les exposants et leurs différences sont non Liouville ».

Théorème 1.17 ([64]). — *Si $\mathscr{D}$ est un ∂-module soluble de rang d sur $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$, et si on ne rencontre pas de nombre de Liouville en cours de route, alors il existe une extension séparable finie* E *de* $k((\mathrm{T}))$ *et des entiers p-adiques non Liouville $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ tels que l'équation différentielle $\partial_{\mathscr{D}}\mathrm{X} = 0$ admette d solutions linéairement indépendantes dans* $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}(\mathrm{E})[\mathrm{T}^{\alpha_1}, \ldots, \mathrm{T}^{\alpha_d}, \log \mathrm{T}]$.

Remarque 1.18. — On ne rencontre pas de nombre de Liouville en cours de route, si on part d'un (φ, ∂)-module, et le théorème ci-dessus admet comme conséquence la conjecture de Crew. D'un autre coté, bien qu'a priori il faille le faire exprès pour tomber sur un nombre de Liouville, on n'a aucun critère satisfaisant permettant de garantir que cela ne va pas arriver. En particulier, on ne sait pas démontrer que les exposants d'un module différentiel défini sur $\overline{\mathbf{Q}}(\mathrm{T})$ sont non Liouville.

Remarque 1.19. — Le théorème ci-dessus donne une description tout à fait satisfaisante des ∂-modules solubles ; le cas non soluble reste, quant à lui, totalement mystérieux.

Pour démontrer le théorème (sous sa forme filtrée faisant disparaître $\log \mathrm{T}$), il suffit de traiter le cas d'un module irréductible.

Si $\mathscr{D}$ est de rang 1, sa ∂-pente est entière et les propositions 1.14 et 1.15 montrent que l'on peut faire baisser cette ∂-pente en tordant par un module de rang 1 avec structure de Frobenius. Une récurrence immédiate montre que $\mathscr{D}$ est de la forme $\mathscr{D}_0 \otimes \mathscr{D}_f$, où $\mathscr{D}_0$ est de ∂-pente 0 et $\mathscr{D}_f$ admet une structure de Frobenius ; il n'y a plus qu'à utiliser le théorème de Crew (i.e. la conjecture de Crew en rang 1) pour trivialiser $\mathscr{D}_f$ et le théorème 1.10 pour conclure.

Si $\mathscr{D}$ est de rang premier à p, sa ∂-pente a un dénominateur premier à p et donc devient entière après une extension modérée de $k((\mathrm{T}))$. Une récurrence immédiate, utilisant le (ii) de la proposition 1.15 (et le fait que si $d = d_1 + d_2$ est premier à p, alors d_1 ou d_2 est premier à p), permet de montrer que $\mathscr{D}$ acquiert un constituant de rang 1 après une suite d'extensions modérées de $k((\mathrm{T}))$.

Si $\mathscr{D}$ est de rang divisible par p, le module $\mathrm{End}^0\mathscr{D}$ des éléments de trace nulle est de rang premier à p. D'après ce qui précède, après une extension séparable finie E de $k((\mathrm{T}))$, le module $\mathrm{End}^0(\mathscr{D})$ acquiert un constituant de rang 1 et de ∂-pente 0 ; il existe alors $\alpha \in \mathbf{Z}_p$ et un morphisme non trivial de $\mathscr{D}$ dans $\mathscr{D} \otimes \mathrm{T}^\alpha$. Quitte à faire une extension modérée, on se retrouve dans l'un des deux cas suivants :

(i) le module $\mathrm{End}^0(\mathscr{D})$ a une section horizontale, et la dimension des endomorphismes de $\mathscr{D}$ commutant à la connexion est ≥ 2 ; $\mathscr{D}$ n'est donc pas irréductible ;

(ii) il existe $\alpha \in \mathbf{Z}_p$ irrationnel et un morphisme non trivial de $\mathscr{D}$ dans $\mathscr{D} \otimes \mathrm{T}^{\alpha}$, et comme $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D} \otimes \mathrm{T}^{\alpha}$ ne sont pas isomorphes (considérer les déterminants), cela implique que $\mathscr{D}$ n'est pas irréductible.

En conclusion, après une extension finie séparable, $\mathscr{D}$ acquiert une composante irréductible de rang strictement inférieur à celui de $\mathscr{D}$. Le théorème s'en déduit par récurrence sur le rang de $\mathscr{D}$.

2. φ-MODULES

Soit L un corps complet pour une valuation discrète étendant v_p, et dont le corps résiduel est algébriquement clos.

2.1. La stratégie de Kedlaya

Si E est une extension finie galoisienne de $k((\mathrm{T}))$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Gal}(\mathrm{E}/k((\mathrm{T})))$, l'anneau $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}(\mathrm{E})[\log \mathrm{T}]$ est muni d'actions de φ, ∂, G et N (où $\mathrm{N} = \frac{d}{d \log \mathrm{T}}$ est la dérivation $\mathscr{R}(\mathrm{E})$-linéaire normalisée par $\mathrm{N}(\log \mathrm{T}) = 1$). L'action de G commute aux autres ; celle de N commute à ∂, et on a $\mathrm{N}\varphi = p\,\varphi\mathrm{N}$.

Maintenant, si $\mathscr{D}$ est un (φ, ∂)-module sur $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$, alors (modulo la conjecture de Crew), il existe une extension finie galoisienne de $k((\mathrm{T}))$ telle que le L-espace vectoriel $\mathrm{V}(\mathscr{D}) = (\mathscr{R}_{\mathrm{L}}(\mathrm{E})[\log \mathrm{T}] \otimes_{\mathscr{R}_{\mathrm{L}}} \mathscr{D})^{\partial=0}$ soit de dimension d (cf. n$^{\mathrm{o}}$ 0.2.3). Le L-espace vectoriel $\mathrm{V}(\mathscr{D})$ est muni d'actions de G, φ et N, et G commute à φ et N, tandis que φ et N vérifient la relation $\mathrm{N}\varphi = p\,\varphi\mathrm{N}$.

D'après le théorème de Dieudonné-Manin, $\mathrm{V}(\mathscr{D})$ admet une décomposition suivant les pentes de φ (i.e. les valuations de valeurs propres de φ) ; à cette décomposition est associée une (unique) filtration $0 = \mathrm{V}_0 \subset \mathrm{V}_1 \subset \cdots \subset \mathrm{V}_\ell = \mathrm{V}(\mathscr{D})$ telle que V_i soit stable par φ, que φ n'ait qu'une seule pente r_i sur $\mathrm{V}_i/\mathrm{V}_{i-1}$, et que l'on ait $r_1 < \cdots < r_\ell$. La relation $\mathrm{N}\varphi = p\,\varphi\mathrm{N}$ montre que $\mathrm{N}(\mathrm{V}_i) \subset \mathrm{V}_{i-1}$ et donc que cette filtration est stable par N, et que N agit trivialement sur le gradué associé.

On en déduit l'existence d'une filtration $0 = \mathscr{D}_0 \subset \mathscr{D}_1 \subset \cdots \subset \mathscr{D}_\ell = \mathscr{D}$ de $\mathscr{D}$ par des sous-φ-modules sur $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$, vérifiant les conditions suivantes :

(i) il existe un sous-φ-module Δ^i sur $\mathscr{E}_{\mathrm{L}}^{\dagger}$ de $\mathscr{D}_i/\mathscr{D}_{i-1}$ tel que $\mathscr{D}_i/\mathscr{D}_{i-1} = \mathscr{R}_{\mathrm{L}} \otimes_{\mathscr{E}_{\mathrm{L}}^{\dagger}} \Delta^i$;

(ii) il existe un φ-module W_i sur L tel que

$$\mathscr{R}_{\mathrm{L}}(\mathrm{E}) \otimes_{\mathrm{L}} \mathrm{W}_i = \mathscr{R}_{\mathrm{L}}(\mathrm{E}) \otimes_{\mathscr{R}_{\mathrm{L}}} (\mathscr{D}_i/\mathscr{D}_{i-1}) \quad \text{et} \quad \mathscr{E}_{\mathrm{L}}^{\dagger}(\mathrm{E}) \otimes_{\mathrm{L}} \mathrm{W}_i = \mathscr{E}_{\mathrm{L}}^{\dagger}(\mathrm{E}) \otimes_{\mathscr{E}_{\mathrm{L}}^{\dagger}} \Delta^i.$$

(On a $\mathrm{W}_i = \mathrm{V}_i/\mathrm{V}_{i-1}$ et $\Delta^i = \Delta_i/\Delta_{i-1}$ avec $\Delta_i = (\mathscr{E}_{\mathrm{L}}^{\dagger}(\mathrm{E})[\log \mathrm{T}] \otimes_{\mathrm{L}} \mathrm{V}_i)^{\mathrm{N}=0,\mathrm{G}=1}$; pour vérifier que tout marche bien, il faut utiliser le fait que $\mathscr{E}_{\mathrm{L}}^{\dagger}(\mathrm{E})[\log \mathrm{T}]$ est un sous-anneau de $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}(\mathrm{E})[\log \mathrm{T}]$ stable par ∂, φ, G et N.)

Maintenant, si on part d'un φ-module sur $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$ (sans ∂-structure), on peut se demander ce qui reste vrai. Le (ii) est manifestement trop fort (il est plus ou moins équivalent à l'existence d'une ∂-structure pour laquelle W_i est le L-espace vectoriel des sections horizontales). Ceci amène Kedlaya à introduire deux notions de φ-pentes, les $\mathscr{E}$-pentes et les $\mathscr{R}$-pentes (« pentes génériques » et « pentes spéciales » chez Kedlaya) ; il remplace alors (ii) par « (ii′) les $\mathscr{E}$-pentes et les $\mathscr{R}$-pentes de Δ^i sont les mêmes » (c'est trivialement le cas si W_i existe), et montre qu'*un φ-module quelconque sur $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$ a une filtration vérifiant* (i) et (ii′). D'autre part, il montre que, si on est parti d'un (φ, ∂)-module, alors la filtration est stable par ∂, ce qui permet de ramener la conjecture de Crew à un cas traité par Tsuzuki [77].

Si on essaie de faire en sens inverse le chemin ci-dessus, on tombe sur un os : on ne sait pas quelle extension galoisienne E de $k((\mathrm{T}))$ va marcher. Cela oblige à les considérer toutes et donc à construire un anneau $\mathscr{R}(k((\mathrm{T}))^{\mathrm{sep}})$ (cf. n° 2.2) ; malheureusement cet anneau est beaucoup trop gros et il faut ensuite « décompléter » pour redescendre à une extension finie de $k((\mathrm{T}))$. Toutes ces étapes sont assez techniques ...

2.2. Les « foncteurs » $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}^\dagger$ et $\mathscr{R}$

Soit E_0 un corps de caractéristique p complet pour une valuation discrète v_{E} de corps résiduel k parfait. Notre but dans ce n° est d'associer[7] à une extension algébrique E de E_0 ou au complété d'une telle extension, des anneaux $\mathscr{E}(\mathrm{E})$, $\mathscr{E}^\dagger(\mathrm{E})$ et $\mathscr{R}(\mathrm{E})$. Si E est parfait, ces anneaux sont canoniques, mais, dans le cas général, la construction dépend du choix d'un Frobenius sur $\mathscr{E}^\dagger(\mathrm{T})$ et d'un isomorphisme de $k((\mathrm{T}))$ sur E_0 ou, ce qui revient au même, d'une uniformisante de E_0. Si $\mathrm{E}_0 = k((\mathrm{T}))$, on retombe sur les anneaux $\mathscr{E} = \mathscr{E}(\mathrm{T})$, $\mathscr{E}^\dagger = \mathscr{E}^\dagger(\mathrm{T})$ et $\mathscr{R} = \mathscr{R}(\mathrm{T})$ définis précédemment.

2.2.1. *Généralités sur les corps valués complets.*

PROPOSITION 2.1. — (i) *Si* K *est un corps complet pour une valuation* $v : \mathrm{K} \to \mathbf{R}\cup\{+\infty\}$*, et si* $\overline{\mathrm{K}}$ *est une clôture algébrique de* K*, alors* v *s'étend de manière unique à* $\overline{\mathrm{K}}$*.*

(ii) *Le complété* $\widehat{\overline{\mathrm{K}}}$ *de* $\overline{\mathrm{K}}$ *pour cette valuation est un corps algébriquement clos.*

(iii) *La clôture séparable* $\mathrm{K}^{\mathrm{sep}}$ *de* K *dans* $\overline{\mathrm{K}}$ *est dense dans* $\widehat{\overline{\mathrm{K}}}$*.*

(iv) $\mathrm{Gal}(\mathrm{K}^{\mathrm{sep}}/\mathrm{K})$ *s'identifie au groupe des automorphismes continus de* $\widehat{\overline{\mathrm{K}}}$ *laissant* K *fixe et, si* H *est un sous-groupe de* $\mathrm{Gal}(\mathrm{K}^{\mathrm{sep}}/\mathrm{K})$*, le sous-corps de* $\widehat{\overline{\mathrm{K}}}$ *fixé par* H *est le complété de la clôture radicielle de* $(\mathrm{K}^{\mathrm{sep}})^{\mathrm{H}}$*.*

REMARQUE 2.2. — Le (iii) n'a, bien évidemment, d'intérêt qu'en caractéristique p et le (iv) est le théorème d'Ax-Sen-Tate ([3], [72]) ; contrairement aux apparences, ce n'est pas une conséquence formelle de la théorie de Galois.

---

[7] C'est une extension de la théorie des anneaux de Cohen [9] développée dans [54] ; les anneaux $\mathscr{E}(\mathrm{E})$, $\mathscr{E}^\dagger(\mathrm{E})$ et $\mathscr{R}(\mathrm{E})$ correspondent respectivement aux anneaux $\Gamma^{\mathrm{E}}[\frac{1}{p}]$, $\Gamma^{\mathrm{E}}_{\mathrm{con}}[\frac{1}{p}]$ et $\Gamma^{\mathrm{E}}_{\mathrm{an,con}}$ de Kedlaya.

2.2.2. *Le cas* E *parfait.* Soit $\mathrm{F} = \mathrm{W}(k)[\frac{1}{p}]$ le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k, ce qui fait de F un corps complet pour la valuation v_p, d'anneau des entiers $\mathscr{O}_{\mathrm{F}} = \mathrm{W}(k)$ et de corps résiduel k_{F}.

Si E est un corps valué de caractéristique p, on note E^+ l'anneau de ses entiers.

Soit maintenant $\widetilde{\mathrm{E}}$ un corps parfait de caractéristique p muni d'une valuation v_{E}. Soient $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\widetilde{\mathrm{E}}) = \mathrm{W}(\widetilde{\mathrm{E}})$ et $\mathscr{O}^+_{\mathscr{E}}(\widetilde{\mathrm{E}}) = \mathrm{W}(\widetilde{\mathrm{E}}^+)$. Soient $\mathscr{E}(\widetilde{\mathrm{E}}) = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\widetilde{\mathrm{E}})[\frac{1}{p}]$ et $\mathscr{E}^+(\widetilde{\mathrm{E}}) = \mathscr{O}^+_{\mathscr{E}}(\widetilde{\mathrm{E}})[\frac{1}{p}]$. Les anneaux $\mathscr{O}^+_{\mathscr{E}}(\widetilde{\mathrm{E}}) \subset \mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\widetilde{\mathrm{E}})$ sont, par construction, séparés et complets pour la topologie p-adique (*topologie forte*) et on a $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\widetilde{\mathrm{E}})/p\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\widetilde{\mathrm{E}}) = \widetilde{\mathrm{E}}$ et $\mathscr{O}^+_{\mathscr{E}}(\widetilde{\mathrm{E}})/p\mathscr{O}^+_{\mathscr{E}}(\widetilde{\mathrm{E}}) = \widetilde{\mathrm{E}}^+$. Par ailleurs, $\mathscr{E}(\widetilde{\mathrm{E}})$ est un corps complet pour la valuation p-adique (la topologie associée est la *topologie forte*), d'anneau de valuation $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\widetilde{\mathrm{E}})$ et de corps résiduel $\widetilde{\mathrm{E}}$.

Si $x \in \widetilde{\mathrm{E}}$, on note $[x]$ son représentant de Teichmüller dans $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\widetilde{\mathrm{E}})$; rappelons que c'est l'unique élément de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\widetilde{\mathrm{E}})$ ayant x pour réduction modulo p et possédant une racine p^n-ième dans $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\widetilde{\mathrm{E}})$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$. Tout élément x de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\widetilde{\mathrm{E}})$ (resp. $\mathscr{O}^+_{\mathscr{E}}(\widetilde{\mathrm{E}})$) s'écrit donc de manière unique sous la forme $\sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k]$, où $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\widetilde{\mathrm{E}}$ (resp. $\widetilde{\mathrm{E}}^+$) et tout élément de $\mathscr{E}(\widetilde{\mathrm{E}})$ ou $\mathscr{E}^+(\widetilde{\mathrm{E}})$ sous la forme $\sum_{k\gg-\infty}^{+\infty} p^k[x_k]$.

La *topologie faible* sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\widetilde{\mathrm{E}})$ (resp. $\mathscr{O}^+_{\mathscr{E}}(\widetilde{\mathrm{E}})$) est, par définition, la topologie qui fait de l'application $x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k] \to (x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ un homéomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\widetilde{\mathrm{E}})$ [resp. $\mathscr{O}^+_{\mathscr{E}}(\widetilde{\mathrm{E}})$] sur $\widetilde{\mathrm{E}}^{\mathbf{N}}$ [resp. $(\widetilde{\mathrm{E}}^+)^{\mathbf{N}}$] muni de la topologie produit ($\widetilde{\mathrm{E}}$ et $\widetilde{\mathrm{E}}^+$ étant muni de la topologie définie par la valuation $v_{\mathbf{E}}$) ; si $\overline{\pi} \in \widetilde{\mathrm{E}}$ vérifie $v_{\mathrm{E}}(\overline{\pi}) > 0$, la topologie faible est aussi obtenue en prenant les $[\overline{\pi}]^k\mathscr{O}^+_{\mathscr{E}}(\widetilde{\mathrm{E}}) + p^{n+1}\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\widetilde{\mathrm{E}})$ [resp. les $[\overline{\pi}]^k\mathscr{O}^+_{\mathscr{E}}(\widetilde{\mathrm{E}}) + p^{n+1}\mathscr{O}^+_{\mathscr{E}}(\widetilde{\mathrm{E}})$, pour $k, n \in \mathbf{N}$], comme base de voisinages de 0. On munit $\mathscr{E}(\widetilde{\mathrm{E}}) = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} p^{-n}\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\widetilde{\mathrm{E}})$ et $\mathscr{E}^+(\widetilde{\mathrm{E}})$ de la topologie de la limite inductive.

Si $r > 0$, soit $\mathscr{O}^{(0,r]}_{\mathscr{E}}(\widetilde{\mathrm{E}})$ le sous-anneau des $x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k] \in \mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\widetilde{\mathrm{E}})$ tels que $rv_{\mathrm{E}}(x_k)+k$ tend vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$. On munit $\mathscr{O}^{(0,r]}_{\mathscr{E}}(\widetilde{\mathrm{E}})$ de la topologie définie par la valuation w_r, avec $w_r(x) = \inf_{k\in\mathbf{Z}} rv_{\mathrm{E}}(x_k) + k$, topologie pour laquelle il est complet. On munit $\mathscr{E}^{(0,r]}(\widetilde{\mathrm{E}}) = \mathscr{O}^{(0,r]}_{\mathscr{E}}(\widetilde{\mathrm{E}})[\frac{1}{p}]$ et $\mathscr{E}^{\dagger}(\widetilde{\mathrm{E}}) = \bigcup_{r>0} \mathscr{E}^{(0,r]}(\widetilde{\mathrm{E}})$ de la topologie de la limite inductive.

Les w_r, $r > 0$, forment une famille de valuations sur $\mathscr{E}^+(\widetilde{\mathrm{E}})$ et on définit $\mathscr{R}^+(\widetilde{\mathrm{E}})$ comme le complété de $\mathscr{E}^+(\widetilde{\mathrm{E}})$ pour la topologie de Fréchet définie par cette famille (une suite u_n tend vers u dans $\mathscr{R}^+(\widetilde{\mathrm{E}})$ si et seulement si, quel que soit $r > 0$, $w_r(u_n - u) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$).

De même, si $r > 0$, soit $\mathscr{E}^{]0,r]}(\widetilde{\mathrm{E}})$ le complété de $\mathscr{E}^{(0,r]}(\widetilde{\mathrm{E}})$ pour la topologie de Fréchet définie par la famille de valuations w_s, $r \geq s > 0$. Finalement, soit $\mathscr{R}(\widetilde{\mathrm{E}}) = \bigcup_{r>0} \mathscr{E}^{]0,r]}(\widetilde{\mathrm{E}})$ muni de la topologie de la limite inductive.

L'anneau $\mathscr{E}^{\dagger}(\widetilde{\mathrm{E}})$ est un sous-corps de $\mathscr{E}(\widetilde{\mathrm{E}})$; ses éléments sont dits *surconvergents*. Les anneaux $\mathscr{E}^{\dagger}(\widetilde{\mathrm{E}})$ et $\mathscr{R}^+(\widetilde{\mathrm{E}})$ sont des sous-anneaux de $\mathscr{R}(\widetilde{\mathrm{E}})$, tout élément de $\mathscr{R}(\widetilde{\mathrm{E}})$ peut s'écrire comme la somme d'un élément de $\mathscr{E}^{\dagger}(\widetilde{\mathrm{E}})$ et d'un élément de $\mathscr{R}^+(\widetilde{\mathrm{E}})$ et $\mathscr{R}^+(\widetilde{\mathrm{E}}) \cap \mathscr{E}^{\dagger}(\widetilde{\mathrm{E}}) = \mathscr{E}^+(\widetilde{\mathrm{E}})$.

L'action de φ sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\widetilde{\mathrm{E}})$ s'étend par continuité aux anneaux $\mathscr{E}^{\dagger}(\widetilde{\mathrm{E}})$, $\mathscr{R}(\widetilde{\mathrm{E}})$ et $\mathscr{R}^{+}(\widetilde{\mathrm{E}})$. L'action de φ est est bijective sur $\mathscr{E}^{\dagger}(\widetilde{\mathrm{E}})$, $\mathscr{R}(\widetilde{\mathrm{E}})$ et $\mathscr{R}^{+}(\widetilde{\mathrm{E}})$ et induit un isomorphisme de $\mathscr{E}^{(0,r]}(\widetilde{\mathrm{E}})$ sur $\mathscr{E}(\widetilde{\mathrm{E}})^{(0,\frac{r}{p}]}$ et de $\mathscr{E}^{]0,r]}(\widetilde{\mathrm{E}})$ sur $\mathscr{E}(\widetilde{\mathrm{E}})^{]0,\frac{r}{p}]}$.

2.2.3. *Le cas général.* Si E est une extension algébrique de E_0 ou le complété d'une telle extension, notons $\widetilde{\mathrm{E}}$ le complété de sa clôture radicielle.

Choisissons un Frobenius φ sur $\mathscr{E}_{\mathrm{L}}^{\dagger}$ et une uniformisante $\overline{\pi}$ de E_0. On a alors $\varphi(\mathrm{T}) = \mathrm{T}^p + p\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k \mathrm{T}^k$, où les a_k sont des éléments de $\mathscr{O}_{\mathrm{L}}$ vérifiant une condition de décroissance convenable, et il existe dans $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\dagger}(\widetilde{\mathrm{E}})$ un unique élément π dont la réduction modulo p est $\overline{\pi}$ et tel que l'on ait $\varphi(\pi) = \pi^p + p\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k \pi^k$. On note $\mathscr{E}(\mathrm{E}_0)$ l'image de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}(\widetilde{\mathrm{E}})$ par l'application $f \mapsto f(\pi)$. Par construction, $\mathscr{E}(\mathrm{E}_0)$ est un sous-corps de $\mathscr{E}(\widetilde{\mathrm{E}})$ stable par φ, complet pour la topologie forte, de corps résiduel E_0.

Maintenant, si E est une extension finie de E_0, alors $\mathscr{E}(\widetilde{\mathrm{E}})$ contient une unique extension algébrique $\mathscr{E}(\mathrm{E})$ de $\mathscr{E}(\mathrm{E}_0)$ dont le corps résiduel est E.

Si E est une extension algébrique de E_0 (resp. le complété d'une extension algébrique de E_0), on note $\mathscr{E}(\mathrm{E})$ l'adhérence dans $\mathscr{E}(\widetilde{\mathrm{E}})$ de $\bigcup_{\mathrm{E}'\subset\mathrm{E}} \mathscr{E}(\mathrm{E}')$ pour la topologie forte (resp. faible), où E' parcourt les extensions finies de E_0 contenues dans E. On note $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\mathrm{E}) = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\widetilde{\mathrm{E}}) \cap \mathscr{E}(\mathrm{E})$ l'anneau des entiers de $\mathscr{E}(\mathrm{E})$ et on a, dans tous les cas, $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\mathrm{E})/p\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\mathrm{E}) = \mathrm{E}$.

Soit $\mathscr{E}^{\dagger}(\mathrm{E}) = \mathscr{E}^{\dagger}(\widetilde{\mathrm{E}}) \cap \mathscr{E}(\mathrm{E})$ le sous-corps des éléments surconvergents de $\mathscr{E}(\mathrm{E})$. Plus généralement, si $r > 0$, soit $\mathscr{E}^{(0,r]}(\mathrm{E}) = \mathscr{E}^{(0,r]}(\widetilde{\mathrm{E}}) \cap \mathscr{E}(\mathrm{E})$. On note $\mathscr{E}^{]0,r]}(\mathrm{E})$ l'adhérence de $\mathscr{E}^{(0,r]}(\mathrm{E})$ dans $\mathscr{E}^{]0,r]}(\widetilde{\mathrm{E}})$ et $\mathscr{R}(\mathrm{E})$ l'adhérence de $\mathscr{E}^{\dagger}(\mathrm{E})$ dans $\mathscr{R}(\widetilde{\mathrm{E}})$. On a $\mathscr{R}(\widehat{\mathrm{E}}) = \mathscr{R}(\mathrm{E})$, si $\widehat{\mathrm{E}}$ est le complété de E pour la valuation v_{E}.

Si H est un sous-groupe fermé du groupe $\mathrm{Aut}_{\mathrm{E}_0}\mathrm{E}$ des automorphismes continus de E laissant E_0 fixe, et X est l'un des foncteurs $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}^{\dagger}$, $\mathscr{E}^{]0,r]}$ ... ci-dessus, alors H opère continûment sur X(E), mais il faut faire un peu attention quand on prend les points fixes sous l'action de H. Par exemple, on a $\mathscr{E}(\mathrm{E})^{\mathrm{H}} = \mathscr{E}(\mathrm{E}^{\mathrm{H}})$ et $\mathscr{E}^{\dagger}(\mathrm{E})^{\mathrm{H}} = \mathscr{E}^{\dagger}(\mathrm{E}^{\mathrm{H}})$, mais $\mathscr{R}(\mathrm{E})^{\mathrm{H}} = \mathscr{R}(\widehat{\mathrm{E}})^{\mathrm{H}} = \mathscr{R}(\widehat{\mathrm{E}}^{\mathrm{H}})$ n'est pas, en général, égal à $\mathscr{R}(\mathrm{E}^{\mathrm{H}})$.

Plus généralement, si L est une extension finie totalement ramifiée de F, munie d'une extension de φ, on peut tensoriser tous les anneaux précédents par $\mathscr{O}_{\mathrm{L}}$ au-dessus de $\mathscr{O}_{\mathrm{F}} = \mathrm{W}(k)$; on dénote cette opération en rajoutant un L en indice.

Si E est une extension finie E_0 de corps résiduel k', soient $\mathrm{E}_0' = k'\cdot\mathrm{E}_0$ et $\mathrm{L}' = \mathrm{W}(k')\otimes_{\mathrm{W}(k)} \mathrm{L}$. Si $\overline{\pi}_{\mathrm{E}}$ est une uniformisante de E, si $\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^d + \overline{a}_{d-1}\mathrm{X}^{d-1} + \cdots + \overline{a}_0 \in (\mathrm{E}_0')^+[\mathrm{X}]$ est le polynôme minimal de $\overline{\pi}_{\mathrm{E}}$ et si $a_i \in \mathscr{O}_{\mathscr{E},\mathrm{L}}^{\dagger}(\mathrm{E}_0')$ est un relèvement surconvergent de $\overline{a}_i$, alors $\mathrm{P} = \mathrm{X}^d + a_{d-1}\mathrm{X}^{d-1} + \cdots + a_0$ (resp. $\varphi(\mathrm{P})$) a une unique racine π_{E} (resp. $\varphi(\pi_{\mathrm{E}})$) dans $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\widetilde{\mathrm{E}})$ dont l'image dans E est $\overline{\pi}_{\mathrm{E}}$ (resp. $\overline{\pi}_{\mathrm{E}}^p$) et on a $\pi_{\mathrm{E}} \in \mathscr{E}^{\dagger}(\mathrm{E})$. (Lemme de Hensel si E/E_0 est séparable ; le cas général s'en déduit en appliquant φ le nombre de fois qu'il faut.) Ceci permet de montrer que φ s'étend de manière unique à tous les anneaux construits ci-dessus ; son action commute à celle de $\mathrm{Aut}_{\mathrm{E}_0}\mathrm{E}$.

La dérivation ∂ s'étend de manière unique à $\mathscr{E}_{\mathrm{L}}^{\dagger}(\mathrm{E})$ et $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}(\mathrm{E})$; on a par exemple

$$\partial\pi_{\mathrm{E}} = -\frac{\partial a_{d-1}\pi_{\mathrm{E}}^{d-1} + \cdots + \partial a_0}{d\pi_{\mathrm{E}}^{d-1} + (d-1)a_{d-1} + \cdots + a_1}.$$

Elle s'étend par continuité à $\mathscr{E}_{\mathrm{L}}(\mathrm{E})$ si E est une extension *séparable* quelconque de E_0. Par contre, *elle ne s'étend pas par continuité à* $\mathscr{E}_{\mathrm{L}}^{\dagger}(\mathrm{E})$ *ou* $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}(\mathrm{E})$ si E est une extension infinie « trop ramifiée » de E_0.

PROPOSITION 2.3. — *L'application* $f(\mathrm{T}) \mapsto f(\pi_{\mathrm{E}})$ *induit un isomorphisme de*

(i) $\mathscr{E}_{\mathrm{L}'}(\mathrm{T})$ *sur* $\mathscr{E}_{\mathrm{L}}(\mathrm{E})$ *;*

(ii) $\mathscr{E}_{\mathrm{L}'}^{\dagger}(\mathrm{T})$ *sur* $\mathscr{E}_{\mathrm{L}}^{\dagger}(\mathrm{E})$ *;*

(iii) $\mathscr{R}_{\mathrm{L}'}(\mathrm{T})$ *sur* $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}(\mathrm{E})$.

D'autre part, on a le résultat suivant généralisant le théorème de Lazard.

PROPOSITION 2.4 ([54]). — *Si* E *est une extension algébrique de* E_0 *ou le complété d'une telle extension, et si* L *est une extension finie de* F*, alors* $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}(\mathrm{E})$ *est un anneau de Bézout.*

2.3. φ-Modules sur l'anneau de Robba

Si A est un anneau muni d'un endomorphisme φ, *un* φ*-module sur* A est un A-module libre de rang fini muni d'une action semi-linéaire de φ telle que la matrice de φ dans une base soit inversible.

2.3.1. *Le théorème de Dieudonné-Manin.* Soit κ un corps algébriquement clos de caractéristique p et M une extension finie du corps des fractions $\mathrm{W}(\kappa)[\frac{1}{p}]$ de l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans κ. On suppose que l'action de φ sur $\mathrm{W}(\kappa)$ s'étend à M. Le sous-corps de M fixe par φ est une extension finie totalement ramifiée de $\mathbf{Q}_p$. ayant même groupe de valuation que M ; il contient donc une uniformisante π de M.

Soit D un φ-module de rang d sur M. Soit v un vecteur cyclique (tel que v, $\varphi(v), \ldots,$ $\varphi^{d-1}(v)$ forment une base de D sur M) et soit $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^d + a_{d-1}\mathrm{X}^{d-1} + \cdots + a_0$ le polynôme défini par $\varphi^d(v) + a_{d-1}\varphi^{d-1}(v) + \cdots + a_0 v = 0$. Soient $r_1, \ldots, r_d$ les valuations des racines de p dans une extension de M (ces valuations se lisent directement sur le polygone de Newton de P).

PROPOSITION 2.5. — *Les* r_i *ne dépendent, à l'ordre près, que de* D *et pas du choix de* v *et si, pour* $1 \leq i \leq d$*, il existe* $\alpha_i \in \mathrm{M}$ *avec* $v_p(\alpha_i) = r_i$*, alors* D *admet une base* $(e_1, \ldots, e_d)$ *telle que l'on ait* $\varphi(e_i) = \alpha_i e_i$ *pour* $1 \leq i \leq d$.

La proposition ci-dessus est une version du théorème de Dieudonné-Manin. Remarquons que l'on peut assurer l'existence des α_i en adjoignant à M une racine d'ordre convenable de π. Les r_i s'appellent les φ-*pentes* de D.

Notons, pour le reste de cette partie, $\widetilde{\mathrm{E}}$ le complété de la clôture algébrique de $k((\mathrm{T}))$, où k est algébriquement clos de caractéristique p. On note $\widetilde{\mathscr{R}}$, $\widetilde{\mathscr{E}}^{\dagger}$ et $\widetilde{\mathscr{E}}$ respectivement les anneaux $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}(\widetilde{\mathrm{E}})$, $\mathscr{E}_{\mathrm{L}}^{\dagger}(\widetilde{\mathrm{E}})$ et $\mathscr{E}_{\mathrm{L}}(\widetilde{\mathrm{E}})$.

La proposition 2.5 ci-dessus s'applique en particulier à un φ-module sur $\widetilde{\mathscr{E}}$. Si $\mathrm{E} \subset \widetilde{\mathrm{E}}$ et si D est un φ-module sur $\mathscr{E}^{\dagger}(\mathrm{E})$, on appelle *$\mathscr{E}$-pentes de* D les φ-pentes de $\widetilde{\mathscr{E}} \otimes_{\mathscr{E}_{\mathrm{L}}^{\dagger}(\mathrm{E})} \mathrm{D}$. On dit que D est *isocline* s'il n'a qu'une $\mathscr{E}$-pente et *étale* si cette pente est nulle.

2.3.2. *Un analogue du théorème de Dieudonné-Manin sur l'anneau de Robba.*

Théorème 2.6 ([54]). — *Si* D *est un φ-module de rang d sur $\widetilde{\mathscr{R}}$, alors* D *possède une base de vecteurs propres sur $\mathscr{R}_{\mathrm{L}'}(\widetilde{\mathrm{E}})$, où* L' *est une extension finie de* L *; de plus, les valuations des valeurs propres correspondantes ne dépendent, à l'ordre près, que de* D *; ces valuations s'appellent* les $\mathscr{R}$-pentes *de* D.

Remarque 2.7. — En rang 1, un φ-module sur $\widetilde{\mathscr{R}}$ est défini sur $\widetilde{\mathscr{E}}^{\dagger}$, et les $\mathscr{E}$-pente et $\mathscr{R}$-pente coïncident.

La démonstration de ce théorème s'apparente à un numéro de funambulisme. On commence par montrer que, si $v_p(\lambda)$ est assez grand, il existe $v \in \mathrm{D}$ vérifiant $\varphi(v) = \lambda v$ (c'est loin d'être trivial). On utilise alors le théorème de Lazard généralisé (prop. 2.4) pour montrer que ce vecteur est multiple d'un vecteur propre w [pour une valeur propre de valuation $\leq v_p(\lambda)$] primitif (i.e. que l'on peut compléter en une base de D sur $\widetilde{\mathscr{R}}$). Appliquant ceci au module $\mathrm{D}/\langle w\rangle$, on fabrique une base de D dans laquelle la matrice de φ est triangulaire. La somme des valuations des termes diagonaux est égale à la $\mathscr{E}$-pente de $\det \mathrm{D}$; en particulier, elle ne dépend pas de la base choisie.

Passer d'une matrice triangulaire à une matrice diagonale n'est pas une mince affaire. Par exemple, en dimension 2, si on part d'une base v_1, v_2 dans laquelle l'action de φ est donnée par $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1$ et $\varphi(v_2) = \lambda_2 v_2 + a v_1$, il y a deux cas suivant que $v_{\mathrm{L}}(\lambda_2) - v_{\mathrm{L}}(\lambda_1) \geq 0$ ou $v_{\mathrm{L}}(\lambda_2) - v_{\mathrm{L}}(\lambda_1) < 0$ (où v_{L} désigne la valuation normalisée de L). Dans le premier cas, l'équation $\varphi(b) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} b = \frac{a}{\lambda_1}$ a une solution dans $\widetilde{\mathscr{R}}$ et $(v_1, v_2 + b v_1)$ est une base constituée de vecteurs propres ; dans le second cas, l'équation précédente n'a, en général, pas de solution et il faut procéder autrement. Kedlaya montre (et c'est là le point le plus délicat) que, si $v_{\mathrm{L}}(\lambda_2) - v_{\mathrm{L}}(\lambda_1) \leq -2$, alors D contient un vecteur propre primitif pour une valeur propre λ_1' avec $v_{\mathrm{L}}(\lambda_1') < v_{\mathrm{L}}(\lambda_1)$. Si $v_{\mathrm{L}}(\lambda_2) - v_{\mathrm{L}}(\lambda_1)$ est pair (et on peut toujours se ramener à ce cas en remplaçant L par une extension quadratique), après un nombre fini d'étapes, on se ramène au cas $v_{\mathrm{L}}(\lambda_2) - v_{\mathrm{L}}(\lambda_1) \geq 0$.

Le cas général ne peut pas se ramener au cas de la dimension 2 car la construction précédente ne fera jamais apparaître que des pentes dont le dénominateur est une puissance de 2, et la démonstration dans le cas général est franchement technique.

2.3.3. *Filtration par les pentes.*

THÉORÈME 2.8 ([54]). — *Si* D *est un* φ*-module sur* $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$*, alors* D *admet une unique filtration* $0 = \mathrm{D}_0 \subset \mathrm{D}_1 \subset \cdots \subset \mathrm{D}_\ell = \mathrm{D}$ *par des sous-*φ*-modules sur* $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$ *vérifiant les conditions suivantes* :

(i) $\mathrm{D}_i/\mathrm{D}_{i-1}$ *est un* φ*-module sur* $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$ *n'ayant qu'une seule* $\mathscr{R}$*-pente* s_i ;

(ii) $s_1 < s_2 < \cdots < s_\ell$;

(iii) $\mathrm{D}_i/\mathrm{D}_{i-1}$ *contient un sous-*φ*-module* Δ_i *sur* $\mathscr{E}^\dagger$ *isocline de* $\mathscr{E}$*-pente* s_i *tel que l'on ait* $\mathrm{D}_i/\mathrm{D}_{i-1} = \mathscr{R}_{\mathrm{L}} \otimes_{\mathscr{E}_{\mathrm{L}}^\dagger} \Delta_i$.

La démonstration de ce théorème est presque aussi acrobatique que celle du précédent. Soient $e_1, \ldots, e_d$ une base de D sur $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$ et A la matrice de φ dans cette base. D'après le théorème 2.6, il existe une matrice $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathscr{R}})$ telle que $\mathrm{M}^{-1}\mathrm{A}\varphi(\mathrm{M})$ soit diagonale. Approximant M par une matrice à coefficients dans $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}(\mathrm{E})$, où E est une extension finie de $k((\mathrm{T}))$, on construit un sous-φ-module Δ sur $\mathscr{E}_{\mathrm{L}}^\dagger(\mathrm{E})$ tel que $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}(\mathrm{E}) \otimes_{\mathscr{E}_{\mathrm{L}}^\dagger(\mathrm{E})} \Delta = \mathscr{R}_{\mathrm{L}}(\mathrm{E}) \otimes_{\mathscr{R}_{\mathrm{L}}} \mathrm{D}$ et ayant les mêmes ensembles de $\mathscr{R}$-pentes et $\mathscr{E}$-pentes. C'est cette dernière condition qui demande le plus de travail ; en effet, si D est un φ-module de rang d sur $\mathscr{E}_{\mathrm{L}}^\dagger$, et si $r_1 \leq \cdots \leq r_d$ (resp. $s_1 \geq \cdots \geq s_d$) sont les $\mathscr{E}$-pentes (resp. les $\mathscr{R}$-pentes) de D, les seules relations que l'on ait en général entre ces ensembles sont l'égalité $s_1 + \cdots + s_d = r_1 + \cdots + r_d$ et les inégalité $s_1 + \cdots + s_i \geq r_1 + \cdots + r_i$, si $i < d$. Cette condition permet de montrer que la filtration croissante de Δ par les $\mathscr{E}$-pentes, qui n'est a priori définie que sur $\mathscr{E}_{\mathrm{L}}(\mathrm{E}) \otimes_{\mathscr{E}_{\mathrm{L}}^\dagger(\mathrm{E})} \Delta$, se descend en une filtration sur Δ. Pour terminer, on étend cette filtration à $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}(\mathrm{E}) \otimes_{\mathscr{R}_{\mathrm{L}}} \mathrm{D}$ et un peu de descente galoisienne permet de conclure.

2.3.4. *Application aux* (φ, ∂)*-modules.* Soit ∂ une dérivation sur $\mathscr{E}_{\mathrm{L}}^\dagger$. Tsuzuki [77] (voir aussi [15]) a démontré le résultat suivant.

THÉORÈME 2.9 ([77]). — *Si* D *est un* (φ, ∂)*-module isocline sur* $\mathscr{E}_{\mathrm{L}}^\dagger$*, il existe une extension finie séparable* E *de* $k((\mathrm{T}))$ *telle que* $\mathscr{E}_{\mathrm{L}}^\dagger(\mathrm{E}) \otimes_{\mathscr{E}_{\mathrm{L}}^\dagger} \mathrm{D}$ *possède une base* $e_1, \ldots, e_d$ *sur* $\mathscr{E}_{\mathrm{L}}^\dagger(\mathrm{E})$ *vérifiant* $\varphi(e_i) = e_i$ *et* $\partial e_i = 0$ *si* $1 \leq i \leq d$.

Les deux conditions $\varphi(x) = x$ et $\partial x = 0$ ne sont pas loin d'être équivalentes : les L-espaces vectoriels engendrés par les solutions sont les mêmes dans les deux cas. Notons que, en rang 1, cet énoncé est équivalent à la conjecture de Crew car un élément inversible de $\mathscr{R}_{\mathrm{L}}$ appartient à $\mathscr{E}_{\mathrm{L}}^\dagger$ et que, par force, un φ-module de rang 1 est isocline. Ceci nous fournit donc une autre démonstration du théorème de Crew.

Le théorème 2.8 permet de déduire la conjecture de Crew de cet énoncé. En effet, une récurrence immédiate montre qu'il suffit de prouver que le $\mathscr{E}^\dagger$-module isocline D_1 est stable par ∂, ce qui suit, avec quelque effort, de ce que ∂ diminue les φ-pentes.

2.3.5. *Compléments.* Le résultat de Tsuzuki peut se réinterpréter en termes galoisiens en anticipant un peu sur les résultats des §§ suivants (cf. remarque 5.2). La dérivation ∂ s'étend par continuité à $\mathscr{E}$ et à $\mathscr{E}(k((\mathrm{T}))^{\mathrm{sep}})$. D'autre part, les foncteurs

$$\mathrm{V} \mapsto \mathrm{D}(\mathrm{V}) = \Big(\mathscr{E}\big(k((\mathrm{T}))^{\mathrm{sep}}\big) \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{V}\Big)^{\mathscr{G}_{k((\mathrm{T}))}} \quad \text{et} \quad \mathrm{D} \mapsto \mathrm{V}(\mathrm{D}) = \Big(\mathscr{E}\big(k((\mathrm{T}))^{\mathrm{sep}}\big) \otimes_{\mathscr{E}} \mathrm{D}\Big)^{\varphi=1}$$

sont inverses l'un de l'autre, et établissent une équivalence de catégories entre la catégorie des $\mathbf{Q}_p$-représentations de $\mathscr{G}_{k((\mathrm{T}))}$ et celle des φ-modules étales sur $\mathscr{E}$. On en déduit l'existence sur tout φ-module étale D sur $\mathscr{E}$ d'une unique connexion ∂_{D} au-dessus de ∂ vérifiant la relation $\partial_{\mathrm{D}} \circ \varphi = \frac{\partial(\varphi(\mathrm{T}))}{\varphi(\partial(\mathrm{T}))} \varphi \circ \partial_{\mathrm{D}}$: en effet, une telle connexion s'étend de manière unique à $\mathscr{E}(k((\mathrm{T}))^{\mathrm{sep}}) \otimes_{\mathscr{E}} \mathrm{D} = \mathscr{E}(k((\mathrm{T}))^{\mathrm{sep}}) \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{V}(\mathrm{D})$ et le fait que φ est étale et vérifie la relation de commutation ci-dessus implique que ∂_{D} est nul sur V(D). En résumé, *tout φ-module étale* D *sur $\mathscr{E}$ peut être muni d'une unique structure de (φ, ∂)-module.*

Corollaire 2.10 ([77]). — *Si* D *est un (φ, ∂)-module étale sur $\mathscr{E}$ les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *∂ est surconvergente* (il existe une base de D sur $\mathscr{E}$ dans laquelle la matrice de ∂ est à coefficients dans $\mathscr{E}^{\dagger}$) ;

(ii) (l'inertie de) $\mathscr{G}_{k((\mathrm{T}))}$ *agit à travers un quotient fini sur* V(D).

3. REPRÉSENTATIONS p-ADIQUES ET COHOMOLOGIE GALOISIENNE

3.1. Généralités

Dans toute cette partie, G est un groupe profini ; en particulier, G est compact. Un G-*anneau* est un anneau topologique muni d'une action continue de G respectant sa structure d'anneau (on demande que $(\sigma, x) \to \sigma(x)$ soit continue).

Si B est un G-anneau, une B-*représentation* de G est un B-module libre W de rang fini muni d'une action semi-linéaire continue de G.

Si on choisit une base $e_1, \dots, e_d$ de W sur B et que l'on note $\mathrm{U}_\sigma = (u_{i,j}^\sigma)$ la matrice des vecteurs $\sigma(e_1), \dots, \sigma(e_d)$ dans la base $e_1, \dots, e_d$ (i.e. $\sigma(e_j) = \sum_{i=1}^d u_{i,j}^\sigma e_i$), la semi-linéarité de l'action de G se traduit par la relation de cocycle $\mathrm{U}_{\sigma\tau} = \mathrm{U}_\sigma \sigma(\mathrm{U}_\tau)$ quels que soient $\sigma, \tau \in \mathrm{G}$. En particulier, en prenant $\tau = \sigma^{-1}$, on en déduit le fait que U_σ est inversible et que $\sigma \to \mathrm{U}_\sigma$ est un cocycle continu à valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\mathrm{B})$. D'autre part, si on choisit une autre base $f_1, \dots, f_d$ de W sur B et que l'on note $\mathrm{M} = (m_{i,j})$ la matrice de passage et U'_σ la matrice de $\sigma(f_1), \dots, \sigma(f_d)$ dans la base $f_1, \dots, f_d$, on a $\mathrm{U}'_\sigma = \mathrm{M}^{-1}\mathrm{U}_\sigma \sigma(\mathrm{M})$, ce qui montre que les cocycles associés à deux bases différentes sont cohomologues. Ceci permet d'associer à toute B-représentation de G de rang d un élément de l'ensemble de cohomologie continue $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}, \mathrm{GL}_d(\mathrm{B}))$.

Si V est une $\mathbf{Q}_p$-représentation de G, alors $\mathrm{B} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{V}$, muni de l'action diagonale de G, est une B-représentation de G ; on dit que V est B-*admissible* si la classe de cohomologie de $\mathrm{B} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{V}$ dans $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}, \mathrm{GL}_d(\mathrm{B}))$ qui lui est associée est triviale ou, autrement dit, si $\mathrm{B} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{V} \cong \mathrm{B}^d$ en tant que G-module. On remarquera que le groupe de cohomologie continue $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}, \mathrm{GL}_d(\mathrm{B}))$ dépend fortement de la topologie que l'on a mise sur B mais que la B-admissibilité d'une $\mathbf{Q}_p$-représentation n'en dépend pas (tant que l'injection de $\mathbf{Q}_p$ dans B est continue).

REMARQUE 3.1. — Si V est une $\mathbf{Q}_p$-représentation B-admissible, $\mathbf{D}_{\mathrm{B}}(\mathrm{V}) = (\mathrm{B} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{V})^{\mathrm{G}}$ est un B^{G}-module libre de rang d et l'application naturelle $\alpha_{\mathrm{B}} : \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{B}^{\mathrm{G}}} \mathbf{D}_{\mathrm{B}}(\mathrm{V}) \to \mathrm{B} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{V}$ est un isomorphisme commutant à l'action de G. En particulier, si $\mathrm{B}^{\text{structure}} = \mathbf{Q}_p$, on peut retrouver V en tant que $\mathbf{Q}_p$-représentation de G à partir de $\mathbf{D}_{\mathrm{B}}(\mathrm{V})$ en prenant les éléments de $\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{B}^{\mathrm{G}}} \mathbf{D}_{\mathrm{B}}(\mathrm{V})$ fixés par les structures.

3.2. Le théorème de Hilbert 90 et ses variantes

La discussion précédente montre que l'on a intérêt à étudier les ensembles $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}, \mathrm{GL}_d(\mathrm{B}))$. En particulier, si cet ensemble est trivial, toutes les $\mathbf{Q}_p$-représentations de G sont B-admissibles et le module $\mathbf{D}_{\mathrm{B}}(\mathrm{V})$ est un invariant non trivial de V pour tout V.

Pour ce faire, on dispose de deux outils classiques. D'une part la suite exacte « d'inflation-restriction » : si Λ est un G-anneau et si H est un sous-groupe fermé distingué de G, alors la suite d'ensembles pointés

$$1 \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathrm{G}/\mathrm{H}, \mathrm{GL}_d(\Lambda^{\mathrm{H}})) \xrightarrow{\text{inf}} \mathrm{H}^1(\mathrm{G}, \mathrm{GL}_d(\Lambda)) \xrightarrow{\text{res}} \mathrm{H}^1(\mathrm{H}, \mathrm{GL}_d(\Lambda))$$

est exacte. D'autre part, du théorème de Hilbert 90 (et des techniques entrant dans sa démonstration : « séries de Poincaré », cf. [71] par exemple).

PROPOSITION 3.2 (Hilbert 90). — *Si* L/F *est une extension galoisienne de groupe de Galois* G *et si on munit* L *de la topologie discrète, alors*

(i) $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}, \mathrm{GL}_d(\mathrm{L})) = \{1\}$ *si* $d \geq 1$;

(ii) $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}, \mathrm{L}) = \{0\}$.

Le résultat suivant se déduit du théorème de Hilbert 90 par approximations successives.

PROPOSITION 3.3. — *Soit* Λ *un* G*-anneau et soit* $\pi \in \Lambda$ *tel que l'idéal engendré par* π *soit stable par* G *et* Λ *soit séparé et complet pour la topologie* π*-adique supposée plus forte que la topologie de* Λ. *Si* $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}, \mathrm{GL}_d(\Lambda/\pi\Lambda)) = \{1\}$ *quel que soit* $d \geq 1$ ($\Lambda/\pi\Lambda$ étant muni de la topologie quotient), *alors*

(i) $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}, \mathrm{GL}_d(\Lambda)) = \{1\}$ *si* $d \geq 1$;

(ii) $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}, \Lambda) = \{0\}$.

PROPOSITION 3.4. — *Soient* Λ *un* G*-anneau principal et* $\omega \in \Lambda$ *tel que l'idéal* (ω) *soit stable par* G. *Si* $\Lambda' = \Lambda[\frac{1}{\omega}] = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \omega^{-n}\Lambda$ *est muni de la topologie de la limite inductive alors l'application naturelle* $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}, \mathrm{GL}_d(\Lambda)) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{G}, \mathrm{GL}_d(\Lambda'))$ *est surjective.*

Démonstration. — A un cocycle à valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\Lambda')$ correspond une Λ'-représentation de G et la compacité de G implique l'existence d'un sous-Λ-réseau stable.

3.3. La méthode de Sen

La méthode de Sen [70] permet, sous certaines *conditions de Tate-Sen*, de réduire beaucoup la complexité apparente des ensembles de cohomologie que l'on considère.

Soit G_0 un groupe profini muni d'un caractère continu $\chi : G_0 \to \mathbf{Z}_p^*$ dont l'image est ouverte. Si $g \in G_0$, on note $n(g)$ l'entier défini par $n(g) = v_p(\chi(g)^{p-1} - 1)$.

Soit $\widetilde{\Lambda}$ une $\mathbf{Z}_p$-algèbre munie de $v : \widetilde{\Lambda} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ vérifiant les conditions :

(i) $v(x) = +\infty \Leftrightarrow x = 0$;

(ii) $v(xy) \geq v(x) + v(y)$;

(iii) $v(x+y) \geq \inf(v(x), v(y))$;

(iv) $v(p) > 0$ et $v(px) = v(p) + v(x)$ si $x \in \widetilde{\Lambda}$.

La condition (iii) permet d'utiliser v pour munir $\widetilde{\Lambda}$ d'une topologie et la condition (i) montre que cette topologie est séparée. On suppose de plus que $\widetilde{\Lambda}$ est complet pour cette topologie et que $\widetilde{\Lambda}$ est muni d'une action continue de G_0 telle que l'on ait $v(g(x)) = v(x)$ si $g \in G_0$ et $x \in \widetilde{\Lambda}$.

Considérons les propriétés suivantes :

(TS1) Il existe $c_1 > 0$ tel que, quels que soient les sous-groupes ouverts $H_1 \subset H_2$ du noyau H_0 de χ, il existe $\alpha \in \widetilde{\Lambda}^{H_1}$ vérifiant $v(\alpha) > -c_1$ et $\sum_{\tau \in H_2/H_1} \tau(\alpha) = 1$.

(TS2) Il existe $c_2 > 0$ et, pour tout sous-groupe ouvert H de H_0, un entier $n(H) \in \mathbf{N}$, une suite croissante $(\Lambda_{H,n})_{n \in \mathbf{N}}$ de sous-$\mathbf{Z}_p$-algèbres fermées de $\widetilde{\Lambda}^H$ et, pour $n \geq n(H)$, une application $\mathbf{Z}_p$-linéaire $R_{H,n} : \widetilde{\Lambda}^H \to \Lambda_{H,n}$ vérifiant :

a) si $H_1 \subset H_2$, alors $\Lambda_{H_2,n} = (\Lambda_{H_1,n})^{H_2}$ et $R_{H_1,n} = R_{H_2,n}$ sur $\widetilde{\Lambda}^{H_2}$;

b) $g(\Lambda_{H,n}) = \Lambda_{gHg^{-1},n}$ et $g(R_{H,n}(x)) = R_{gHg^{-1},n}(gx)$ si $g \in G_0$;

c) $R_{H,n}$ est $\Lambda_{H,n}$-linéaire et $R_{H,n}(x) = x$ si $x \in \Lambda_{H,n}$;

d) si $n \geq n(H)$ et si $x \in \widetilde{\Lambda}^H$, alors $v(R_{H,n}(x)) \geq v(x) - c_2$;

e) si $x \in \widetilde{\Lambda}^H$, alors $\lim_{n \to +\infty} R_{H,n}(x) = x$.

(TS3) Il existe $c_3 > 0$ et, pour tout sous-groupe ouvert G de G_0, un entier $n(G) \geq n(H)$, où $H = G \cap H_0$, tel que, si $n \geq n(G)$, si $\gamma \in G/H$ vérifie $n(\gamma) \leq n$, alors $\gamma - 1$ est inversible sur $X_{H,n} = (1 - R_{H,n})(\widetilde{\Lambda}^H)$ et on a $v((\gamma-1)^{-1}(x)) \geq v(x) - c_3$ si $x \in X_{H,n}$.

Les propriétés (TS1) et (TS3) sont les plus délicates à vérifier. Dans les situations arithmétiques, on peut en général prendre $c_1 > 0$ quelconque, et la théorie de la ramification supérieure est un ingrédient essentiel (on est dans le cadre de la théorie des extensions « presque étales » dans la terminologie de Faltings). Les applications $R_{H,n}$ sont souvent appelées des *traces de Tate normalisées*.

Proposition 3.5. — *Soit $\widetilde{\Lambda}$ vérifiant les conditions de Tate-Sen* (TS1), (TS2) *et* (TS3) *et soit $\sigma \mapsto U_\sigma$ un cocycle continu sur G_0 à valeurs dans $\mathbf{GL}_d(\widetilde{\Lambda})$. Si G est un sous-groupe ouvert distingué de G_0 tel que $v(U_\sigma - 1) > c_1 + 2c_2 + 2c_3$ quel que soit $\sigma \in G$ et si*

$\mathrm{H} = \mathrm{G} \cap \mathrm{H}_0$, *alors il existe* $\mathrm{M} \in \mathbf{GL}_d(\widetilde{\Lambda})$ *vérifiant* $v(\mathrm{M}-1) > c_2 + c_3$ *tel que le cocycle* $\sigma \mapsto \mathrm{V}_\sigma = \mathrm{M}^{-1}\mathrm{U}_\sigma\sigma(\mathrm{M})$ *soit trivial sur* H *et à valeurs dans* $\mathbf{GL}_d(\Lambda_{\mathrm{H},n(\mathrm{G})})$.

On peut retraduire ce résultat en l'existence d'invariants attachés aux $\mathbf{Q}_p$-représentations de G_0. Si V est une telle représentation de dimension d, la compacité de G_0 assure l'existence d'un réseau T de V stable par G_0, et la continuité de l'action de G_0 se traduit par l'existence, pour tout $k \in \mathbf{N}$, d'un sous-groupe ouvert distingué de G_0 agissant trivialement sur $\mathrm{T}/p^k\mathrm{T}$. On a alors le résultat suivant :

Proposition 3.6. — *Si* k *est un entier tel que* $v(p^k) > c_1 + 2c_2 + 2c_3$ *et si* G *est un sous-groupe distingué de* G_0 *agissant trivialement sur* $\mathrm{T}/p^k\mathrm{T}$, *soit* $\mathrm{H} = \mathrm{G} \cap \mathrm{H}_0$ *et soit* $n \geq n(\mathrm{H})$. *Alors* $\widetilde{\Lambda} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathrm{T}$ *contient un unique sous-*$\Lambda_{\mathrm{H},n}$*-module* $\mathrm{D}_{\mathrm{H},n}(\mathrm{T})$ *libre de rang* d *vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) $\mathrm{D}_{\mathrm{H},n}(\mathrm{T})$ *est fixe par* H *et stable par* G_0 *;*

(ii) *l'application naturelle* $\widetilde{\Lambda} \otimes_{\Lambda_{\mathrm{H},n}} \mathrm{D}_{\mathrm{H},n}(\mathrm{T}) \to \widetilde{\Lambda} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathrm{T}$ *est un isomorphisme ;*

(iii) $\mathrm{D}_{\mathrm{H},n}(\mathrm{T})$ *possède une base sur* $\Lambda_{\mathrm{H},n}$ *dans laquelle la matrice* U_γ *de* $\gamma \in \mathrm{G}/\mathrm{H}$, *vérifie* $v(\mathrm{U}_\gamma - 1) > c_3$.

Remarque 3.7. — Le groupe G_0 agit sur $\mathrm{D}_{\mathrm{H},n}(\mathrm{T})$ à travers G_0/H. On peut encore diminuer le quotient agissant (sans tuer l'invariant que l'on vient de construire) en prenant les points fixes de $\mathrm{D}_{\mathrm{H},n}(\mathrm{T})$ sous H_0 (qui agit à travers le groupe fini H_0/H), mais le $\Lambda_{\mathrm{H}_0,n}$-module ainsi obtenu n'est plus forcément libre (cela dépend beaucoup des propriétés algébriques des $\Lambda_{\mathrm{H},n}$).

4. LES ANNEAUX DE FONTAINE

4.1. Cartographie

4.1.1. *Notations.* Soit k_F un corps parfait de caractéristique p, $\mathscr{O}_\mathrm{F} = \mathrm{W}(\mathrm{F})$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k_F et $\mathrm{F} = \mathscr{O}_\mathrm{F}[\frac{1}{p}]$ ce qui fait de F un corps complet pour la valuation p-adique v_p, de corps résiduel k_F.

Soit $\overline{\mathrm{F}}$ une clôture algébrique de F ; la valuation v_p s'étend de manière unique à $\overline{\mathrm{F}}$. Choisissons un système $\varepsilon = (1, \varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(n)}, \dots)$, où les $\varepsilon^{(n)} \in \overline{\mathrm{F}}$ vérifient $\varepsilon^{(1)} \neq 1$ et $(\varepsilon^{(n+1)})^p = \varepsilon^{(n)}$; en particulier, $\varepsilon^{(n)}$ est une racine primitive p^n-ième de l'unité.

Si $\mathrm{K} \subset \overline{\mathrm{F}}$ est une extension finie totalement ramifiée de F, soient $\mathrm{K}_n = \mathrm{K}(\varepsilon^{(n)})$ si $n \in \mathbf{N}$ et $\mathrm{K}_\infty = \cup_{n \in \mathbf{N}} \mathrm{K}_n$ l'extension cyclotomique de K ; on note F' l'extension maximale non ramifiée de F contenue dans K_∞. Soient $\mathscr{G}_\mathrm{K} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{F}}/\mathrm{K})$, $\mathscr{H}_\mathrm{K} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{F}}/\mathrm{K}_\infty)$ et $\Gamma_\mathrm{K} = \mathscr{G}_\mathrm{K}/\mathscr{H}_\mathrm{K} = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\infty/\mathrm{K})$. Soit aussi $\chi : \mathscr{G}_\mathrm{K} \to \mathbf{Z}_p^*$ le caractère cyclotomique ; il induit un isomorphisme de Γ_K sur un sous-groupe ouvert de $\mathbf{Z}_p^*$.

4.1.2. *Navigation dans le monde des anneaux.* La plupart des anneaux construits par Fontaine s'obtiennent à partir d'un anneau[8] $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ en localisant et en complétant. Comme l'anneau $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ est de dimension 2, les anneaux que l'on obtient de cette manière forment naturellement un tableau en deux dimensions (et même en quatre si on rajoute les actions de Frobenius et Galois) ; il est donc quasi-impossible de les présenter de manière satisfaisante dans un texte qui, par nature, est de dimension 1. Le lecteur aura intérêt à se reporter au tableau ci-dessous pour s'orienter.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \arrow[ddddr, "\theta"] & & \\
 & \widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger} \arrow[ur, dotted] & \widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{+} \arrow[l] \arrow[u] \arrow[rr] & & \mathbf{B}_{\mathrm{st}}^+ \arrow[ull] \\
 & \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger} \arrow[u] & \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{+} \arrow[l] \arrow[u] \arrow[rr] & & \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^+ \arrow[u] \\
\widetilde{\mathbf{B}} & \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger} \arrow[l] \arrow[u] & \widetilde{\mathbf{B}}^{+} \arrow[l] \arrow[u] \arrow[r, "\theta"] & \mathrm{C} & \\
\widetilde{\mathbf{A}} \arrow[u] \arrow[d] & \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger} \arrow[l] \arrow[u] \arrow[d] & \widetilde{\mathbf{A}}^{+} \arrow[l] \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r, "\theta"] & \mathscr{O}_{\mathrm{C}} \arrow[u] \arrow[d] & \\
\widetilde{\mathbf{E}} \arrow[r, equal] & \widetilde{\mathbf{E}} & \widetilde{\mathbf{E}}^{+} \arrow[l] \arrow[r, "\theta"] & \mathscr{O}_{\mathrm{C}}/p\mathscr{O}_{\mathrm{C}} &
\end{tikzcd}$$

(i) Plus on monte et plus p est inversible : la ligne du bas vit en caractéristique p ; c'est la réduction modulo p de la ligne du dessus et on passe de l'avant-dernière ligne à la précédente en rendant p-inversible. Plus on va vers la gauche (en ne tenant pas compte de la dernière colonne qui n'est là que pour mémoire), et plus $\pi = [\varepsilon] - 1$ est inversible : π est nul dans la quatrième colonne, et l'application $\theta : \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \to \mathrm{C}$ est la réduction modulo π.

(ii) Toutes les flèches de ce diagramme sont injectives à l'exception de la réduction modulo p et de θ.

(iii) $\mathscr{G}_{\mathrm{F}}$ opère continûment sur tout le diagramme.

(iv) φ opère sur les trois premières colonnes de manière bijective (et sur la dernière, mais pas bijectivement), et son action commute à celle de $\mathscr{G}_{\mathrm{F}}$.

(v) Les anneaux des trois premières colonnes (sauf $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+$) ont un petit frère sans $\widetilde{\ }$ sur lequel l'action de φ n'est qu'injective. On passe d'un anneau sans $\widetilde{\ }$ à un anneau avec en rendant φ inversible et en complétant. Par exemple, $\widetilde{\mathbf{E}}$ est le complété de la clôture radicielle de $\mathbf{E}$.

[8]L'anneau $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ en question est souvent noté $\mathrm{W(R)}$ et quelquefois $\mathrm{A}_{\mathrm{inf}}$ dans la littérature.

(vi) La flèche en pointillés de $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log}$ vers $\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{dR}}$ est une famille de morphismes $(\iota_n)_{n\in\mathbf{N}}$, où ι_n est défini sur le sous-anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,p^{-n}]}[\log[\tilde{p}]]$ de $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log}$ des éléments « convergeant sur la couronne $0 < v_p(\mathrm{T}) \leq p^{-n}$ » ; la réunion de ces anneaux est $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\log}$ et on a $\iota_n(x) = \iota_{n-1}(\varphi^{-1}(x))$ si tout est défini.

(vii) La théorie des (φ, Γ)-modules utilise les anneaux $\mathbf{E}$, $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ de la première colonne, alors que la théorie de Hodge p-adique utilise les anneaux $\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\mathrm{rig}}$, $\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\log}$, $\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{dR}}$ et C. Le lecteur remarquera que la plupart des flèches allant de la théorie des (φ, Γ)-modules à la théorie de Hodge p-adique sont dans le mauvais sens ; il faut donc à chaque fois démontrer que l'on peut effectivement remonter.

(viii) Si K est une extension finie de F, un K en indice indique le sous-anneau fixé par $\mathscr{H}_{\mathrm{K}}$. Les anneaux sans $\widetilde{\ }$ avec un K en indice sont des anneaux de séries en une variable π_{K}. Dans le cas $\mathrm{K} = \mathrm{F}$, on a $\pi_{\mathrm{F}} = \pi = [\varepsilon] - 1$; les actions de $\mathscr{G}_{\mathrm{F}}$ et φ sont données par les formules $g(\pi) = (1+\pi)^{\chi(g)} - 1$ et $\varphi(\pi) = (1+\pi)^p - 1$, et on obtient le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathscr{R}_{\mathrm{F}}[\log \pi] \arrow[rr, dotted] & & \varinjlim \mathrm{F}_n((\pi)) \arrow[dd] \\
 & \mathscr{R}_{\mathrm{F}} \arrow[u] & \mathscr{R}^{+}_{\mathrm{F}} \arrow[l] & \\
\mathscr{E}_{\mathrm{F}} & \mathscr{E}^{\dagger}_{\mathrm{F}} \arrow[l] \arrow[u] & \mathscr{O}_{\mathrm{F}}[[\pi]][\frac{1}{p}] \arrow[l] \arrow[u] & \mathrm{F}_\infty = \varinjlim \mathrm{F}_n \\
\mathscr{O}_{\mathscr{E},\mathrm{F}} \arrow[u] \arrow[d] & \mathscr{O}^{\dagger}_{\mathscr{E},\mathrm{F}} \arrow[l] \arrow[u] \arrow[d] & \mathscr{O}_{\mathrm{F}}[[\pi]] \arrow[l] \arrow[u] \arrow[d] & \\
k_{\mathrm{F}}((\overline{\pi})) \arrow[r, equal] & k_{\mathrm{F}}((\overline{\pi})) & k_{\mathrm{F}}[[\overline{\pi}]] \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

(ix) $[\varepsilon] = 1 + \pi$ est un analogue p-adique de $e^{2i\pi}$, et l'application $\mu \mapsto \int_{\mathbf{Z}_p} (1+\pi)^x \mu(x)$ qui, à une distribution (resp. une mesure) μ sur $\mathbf{Z}_p$ à valeurs dans F (resp. $\mathscr{O}_{\mathrm{F}}$) associe sa transformée de Fourier, induit un isomorphisme de l'algèbre des distributions (resp. des mesures) sur $\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{rig},\mathrm{F}} \cong \mathscr{R}^{+}_{\mathrm{F}}$ (resp. sur $\mathbf{A}^{+}_{\mathrm{F}} = \mathscr{O}_{\mathrm{F}}[[\pi]]$). (On rappelle qu'une mesure est une application linéaire continue sur l'espace des fonctions continues et qu'une distribution est une application linéaire continue sur l'espace des fonctions localement analytiques.) Cette remarque n'est pas utilisée dans ce texte, mais on pourra consulter [26] pour un survol des questions dans lesquelles elle joue un rôle.

4.2. C et ses sous-corps

4.2.1. *Le corps* C *et l'action de* $\mathscr{G}_{\mathrm{F}}$. Soit C le complété de $\overline{\mathrm{F}}$ pour la valuation v_p. C'est un corps algébriquement clos muni d'une action continue de $\mathscr{G}_{\mathrm{F}}$. Si L est une extension finie de K, alors $\mathrm{C}^{\mathscr{H}_\mathrm{L}}$ est le complété $\widehat{\mathrm{L}}_\infty$ de L_∞ pour v_p. Par ailleurs, si $n \in \mathbf{N}$ et si $x \in \mathrm{L}_\infty$, alors $\frac{1}{[\mathrm{L}_{n+k}:\mathrm{L}_n]}\mathrm{Tr}_{\mathrm{L}_{n+k}/\mathrm{L}_n}(x)$ ne dépend pas du choix de l'entier k tel que $x \in \mathrm{L}_{n+k}$. L'application de L_∞ dans L_n ainsi définie se prolonge par continuité en une application $\mathrm{R}_{\mathrm{L},n} : \widehat{\mathrm{L}}_\infty \to \mathrm{L}_n$.

Proposition 4.1 ([72]). — *L'anneau* $\widetilde{\Lambda} = \mathrm{C}$ *vérifie les conditions* (TS1), (TS2) *et* (TS3), *avec* $v = v_p$, $\widetilde{\Lambda}^{\mathscr{H}_\mathrm{L}} = \widehat{\mathrm{L}}_\infty$, $\Lambda_{\mathscr{H}_\mathrm{L},n} = \mathrm{L}_n$, $\mathrm{R}_{\mathscr{H}_\mathrm{L},n} = \mathrm{R}_{\mathrm{L},n}$, *les constantes* $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ *et* $c_3 > \frac{1}{p-1}$ *pouvant être choisies arbitrairement.*

La démonstration de Tate repose sur la théorie de la ramification qui permet en particulier de montrer que $v_p(\mathfrak{d}_{\mathrm{K}_n/\mathrm{F}_n})$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ (si $\mathrm{K} \subset \mathrm{L}$ sont deux extensions finies de F, on note $\mathfrak{d}_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}$ la différente de l'extension K/L) ; dans la terminologie de Faltings cela se traduit par : « l'extension $\mathrm{K}_\infty/\mathrm{F}_\infty$ est presque étale ».

On déduit de la proposition 4.1 [en fait on a juste besoin de $\mathrm{C}^{\mathscr{H}_\mathrm{K}} = \widehat{\mathrm{K}}_\infty$ et de la propriété (TS2)] et de ce que Γ_K agit sur K_n à travers un quotient fini, le fait que C ne contient ni d'analogue p-adique de $\log 2i\pi$ ni d'analogue p-adique de $2i\pi$. De manière précise, on a

Proposition 4.2 ([72]). — (i) C *ne contient aucun élément* y *tel que l'on ait* $g(y) = y + \log\chi(g)$ *quel que soit* $g \in \mathscr{G}_\mathrm{K}$.

(ii) *Si* $k \in \mathbf{Z} - \{0\}$ *et si* $x \in \mathrm{C}$ *vérifie* $g(x) = \chi(g)^k x$ *pour tout* $g \in \mathscr{G}_\mathrm{K}$, *alors* $x = 0$.

4.2.2. *L'anneau* $\mathbf{B}_\mathrm{HT}$. Soit $\mathbf{B}_\mathrm{HT} = \mathrm{C}[t, t^{-1}]$. On munit $\mathbf{B}_\mathrm{HT}$ d'une action continue de $\mathscr{G}_\mathrm{F}$ en faisant agir $g \in \mathscr{G}_\mathrm{F}$ sur t par la formule $g(t) = \chi(g)t$. On a alors $\mathbf{B}_\mathrm{HT}^{\mathscr{G}_\mathrm{K}} = \mathrm{K}$ d'après la proposition 4.2 et le théorème d'Ax-Sen-Tate. On munit $\mathbf{B}_\mathrm{HT}$ d'une graduation indexée par les entiers en posant $\mathrm{Gr}^i\mathbf{B}_\mathrm{HT} = \mathrm{C}\cdot t^i$ si $i \in \mathbf{Z}$. Cette graduation est stable sous l'action de $\mathscr{G}_\mathrm{F}$.

4.3. Les anneaux de caractéristique p

Soit $\mathfrak{a} = \{x,\ v_p(x) \geq \frac{1}{p}\}$ et soit

$$\widetilde{\mathbf{E}}^+ = \{(x_n)_{n\in\mathbf{N}}, x_n \in \mathscr{O}_\mathrm{C}/\mathfrak{a} \text{ et } x_{n+1}^p = x_n \text{ si } n \in \mathbf{N}\}.$$

L'anneau $\mathscr{O}_\mathrm{C}/\mathfrak{a}$ étant de caractéristique p, l'application $x \mapsto x^p$ en est un morphisme et $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ est un anneau[9] de caractéristique p sur lequel $\mathscr{G}_\mathrm{F}$ agit naturellement (composante par composante). D'autre part, si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$ et si $\hat{x}_n$ est un relèvement quelconque de x_n dans $\mathscr{O}_\mathrm{C}$, la suite de terme général $\hat{x}_{n+k}^{p^k}$ converge dans $\mathscr{O}_\mathrm{C}$ vers une limite $x^{(n)}$ qui ne dépend pas du choix des $\hat{x}_n$. Ceci permet de décrire $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ comme l'ensemble des suites $x = (x^{(0)}, \dots, x^{(n)}, \dots)$ d'éléments de $\mathscr{O}_\mathrm{C}$ vérifiant $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$. Soit $v_\mathrm{E} : \widetilde{\mathbf{E}} \to \mathbf{R}$ l'application définie par $v_\mathrm{E}(x) = v_p(x^{(0)})$.

On peut voir $\varepsilon = (1, \varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(n)}, \dots)$ comme un élément de $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ et, si on pose $\overline{\pi} = \varepsilon - 1$, on a $v_\mathbf{E}(\overline{\pi}) = \frac{p}{p-1}$.

[9] L'anneau $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ et le corps $\widetilde{\mathbf{E}}$ sont très souvent notés R et Fr R respectivement.

Si K est une extension finie de F, soient

$$\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathrm{K}}^{+} = \{(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \widetilde{\mathbf{E}}^{+},\ x_n \in \mathscr{O}_{\mathrm{K}_\infty}/\mathfrak{a} \text{ si } n \in \mathbf{N}\},$$

$$\mathbf{E}_{\mathrm{K}}^{+} = \{(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \widetilde{\mathbf{E}}^{+},\ x_n \in \mathscr{O}_{\mathrm{K}_n}/\mathfrak{a} \text{ si } n \text{ est assez grand}\}.$$

$\mathbf{E}_{\mathrm{K}}^{+}$ contient ε et $\overline{\pi}$, ce qui nous permet de poser $\widetilde{\mathbf{E}} = \widetilde{\mathbf{E}}^{+}[\overline{\pi}^{-1}]$, $\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathrm{K}} = \widetilde{\mathbf{E}}_{\mathrm{K}}^{+}[\overline{\pi}^{-1}]$ et $\mathbf{E}_{\mathrm{K}} = \mathbf{E}_{\mathrm{K}}^{+}[\overline{\pi}^{-1}]$ si K est une extension finie de F.

Théorème 4.3 ([45, 80]). — (i) $\widetilde{\mathbf{E}}$ *est un corps dont* $v_{\mathbf{E}}$ *est une valuation pour lequel il est complet et dont le corps résiduel est* $\overline{k}_{\mathrm{F}}$. *De plus l'action naturelle de* $\mathscr{G}_{\mathrm{F}}$ *sur* $\widetilde{\mathbf{E}}$ *est continue.*

(ii) $\mathbf{E}_{\mathrm{F}} = k_{\mathrm{F}}((\overline{\pi}))$ *et, plus généralement, si* K *est une extension finie de* F, *alors* $\mathbf{E}_{\mathrm{K}}$ *muni de* $v_{\mathbf{E}}$ *est un corps complet pour une valuation discrète de corps résiduel* $k_{\mathrm{F}'}$.

(iii) *Le sous-corps* $\mathbf{E} = \cup_{\mathrm{K}\subset\overline{\mathrm{F}}}\mathbf{E}_{\mathrm{K}}$ *est une clôture séparable de* $\mathbf{E}_{\mathrm{F}}$ *stable par* $\mathscr{G}_{\mathrm{F}}$ *et, si* K *est une extension finie de* F, *alors* $\mathrm{Gal}(\mathbf{E}/\mathbf{E}_{\mathrm{K}}) = \mathscr{H}_{\mathrm{K}}$ *; en particulier,* $\mathscr{H}_{\mathrm{K}}$ *agit continûment sur* $\mathbf{E}$ *muni de la topologie discrète.*

(iv) $\widetilde{\mathbf{E}}$ (*resp.* $\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathrm{K}}$) *est le complété de* $\mathbf{E}$ (*resp. de la clôture radicielle de* $\mathbf{E}_{\mathrm{K}}$) *pour la valuation* $v_{\mathbf{E}}$ *; en particulier,* $\widetilde{\mathbf{E}}$ *est algébriquement clos et* $\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathrm{K}} = \widetilde{\mathbf{E}}^{\mathscr{H}_{\mathrm{K}}}$.

Remarque 4.4. — (i) Ce théorème permet de relier la théorie de Galois des corps locaux de caractéristique 0 à celle des corps locaux de caractéristique p ; c'est le point de départ de beaucoup des constructions de Fontaine.

(ii) Le corps $\mathbf{E}_{\mathrm{K}}$ peut naturellement être mis en bijection avec la limite projective des K_n relativement aux applications $\mathrm{N}_{\mathrm{K}_{n+1}/\mathrm{K}_n}$; c'est ce qui lui vaut l'appellation de « corps des normes ».

(iii) La théorie du corps des normes a été développée par Fontaine et Wintenberger [45, 80], dans un cadre beaucoup plus général que celui de l'extension cyclotomique (celui des extensions « arithmétiquement profinies »). En particulier, le cas où on remplace l'extension cyclotomique par l'extension obtenue en rajoutant un système compatible de racines p^n-ièmes de p a l'air prometteur (cf. [10]).

(iv) Les (ii) et (iii) du théorème sont loin d'être évidents, mais les ingrédients utilisés pour leur démonstration se résument à

— le lemme de Hensel ;

— l'extension $\mathrm{K}_\infty/\mathrm{F}_\infty$ est presque étale ;

— si $x \in \mathscr{O}_{\mathrm{F}_{n+1}}$ et $\sigma \in \mathscr{G}_{\mathrm{F}_n}$, alors $v_p(\sigma(x) - x) \geq \frac{1}{p-1}$;

les deux derniers points permettant, en particulier, de montrer que l'on a $x^p \equiv \mathrm{N}_{\mathrm{K}_{n+1}/\mathrm{K}_n}(x)$ mod. $\mathfrak{a}$, si n est assez grand et $x \in \mathscr{O}_{\mathrm{K}_{n+1}}$.

4.4. De la caractéristique p à la caractéristique 0

4.4.1. *Notations.* On peut utiliser les foncteurs $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}^{\dagger}$, $\mathscr{R}$, ... du n° 2.2 pour remonter les anneaux précédents en caractéristique 0. Pour cela, on doit choisir une uniformisante de $\mathbf{E}_{\mathrm{F}}$ et un Frobenius sur $\mathscr{E}(\mathrm{T})$ et un choix judicieux, pour des raisons qui apparaîtront bientôt, consiste à prendre $\overline{\pi}$ comme uniformisante de $\mathbf{E}_{\mathrm{F}}$ et $\mathrm{T} \mapsto (1+\mathrm{T})^p - 1$ pour φ. La grande nouveauté par rapport au n° 2.2 est que tous ces anneaux se retrouvent munis d'une action de $\mathscr{G}_{\mathrm{F}}$ plutôt que d'une action de $\mathscr{G}_{k((\mathrm{T}))}$. On introduit donc de nouvelles notations mettant l'accent sur les extensions de F plutôt que sur celles de $k((\mathrm{T}))$. On pose

$$\widetilde{\mathbf{B}} = \mathscr{E}(\widetilde{\mathbf{E}}), \qquad \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{K}} = \mathscr{E}(\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathrm{K}}), \qquad \mathbf{B} = \mathscr{E}(\mathbf{E}), \qquad \mathbf{B}_{\mathrm{K}} = \mathscr{E}(\mathbf{E}_{\mathrm{K}})$$

$$\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger} = \mathscr{E}^{\dagger}(\widetilde{\mathbf{E}}), \qquad \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{K}} = \mathscr{E}^{\dagger}(\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathrm{K}}), \qquad \mathbf{B}^{\dagger} = \mathscr{E}^{\dagger}(\mathbf{E}), \qquad \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{K}} = \mathscr{E}^{\dagger}(\mathbf{E}_{\mathrm{K}})$$

$$\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}} = \mathscr{R}(\widetilde{\mathbf{E}}), \qquad \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig,K}} = \mathscr{R}(\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathrm{K}}), \qquad \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig,K}} = \mathscr{R}(\mathbf{E}_{\mathrm{K}})$$

Les anneaux ci-dessus et $\widetilde{\mathbf{A}}^+ = \mathscr{O}^+_{\mathscr{E}}(\widetilde{\mathbf{E}}) = \mathrm{W}(\widetilde{\mathbf{E}}^+)$, $\widetilde{\mathbf{B}}^+ = \mathscr{E}^+(\widetilde{\mathbf{E}})$, $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}} = \mathscr{R}^+(\widetilde{\mathbf{E}})$ sont plus ou moins suffisants pour les énoncés, mais pour travailler, on a aussi besoin des anneaux intermédiaires

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\widetilde{\mathbf{E}}) = \mathrm{W}(\widetilde{\mathbf{E}}), \qquad \widetilde{\mathbf{A}}_{\mathrm{K}} = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathrm{K}}), \qquad \mathbf{A} = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\mathbf{E}), \qquad \mathbf{A}_{\mathrm{K}} = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\mathbf{E}_{\mathrm{K}})$$

$$\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]} = \mathscr{O}^{(0,r]}_{\mathscr{E}}(\widetilde{\mathbf{E}}), \qquad \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_{\mathrm{K}} = \mathscr{O}^{(0,r]}_{\mathscr{E}}(\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathrm{K}}), \qquad \mathbf{A}^{(0,r]} = \mathscr{O}^{(0,r]}_{\mathscr{E}}(\mathbf{E}), \qquad \mathbf{A}^{(0,r]}_{\mathrm{K}} = \mathscr{O}^{(0,r]}_{\mathscr{E}}(\mathbf{E}_{\mathrm{K}})$$

$$\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]} = \mathscr{E}^{(0,r]}(\widetilde{\mathbf{E}}), \qquad \widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}_{\mathrm{K}} = \mathscr{E}^{(0,r]}(\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathrm{K}}), \qquad \mathbf{B}^{(0,r]} = \mathscr{E}^{(0,r]}(\mathbf{E}), \qquad \mathbf{B}^{(0,r]}_{\mathrm{K}} = \mathscr{E}^{(0,r]}(\mathbf{E}_{\mathrm{K}})$$

$$\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]} = \mathscr{E}^{]0,r]}(\widetilde{\mathbf{E}}), \qquad \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}_{\mathrm{K}} = \mathscr{E}^{]0,r]}(\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathrm{K}}), \qquad \mathbf{B}^{]0,r]}_{\mathrm{K}} = \mathscr{E}^{]0,r]}(\mathbf{E}_{\mathrm{K}})$$

Notons que les anneaux $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$ et $\mathbf{B}^{]0,r]}$ sont absents des listes ci-dessus (comme $\mathbf{E}$ est dense dans $\widetilde{\mathbf{E}}$, on a $\mathscr{R}(\mathbf{E}) = \mathscr{R}(\widetilde{\mathbf{E}})$ et $\mathbf{B}^{]0,r]}(\mathbf{E}) = \mathbf{B}^{]0,r]}(\widetilde{\mathbf{E}})$ ce qui nous empêche de prendre la définition évidente). On les définit comme étant les sous-anneaux $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig,K}} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{K}}} \mathbf{B}^{\dagger}$ (ceci ne dépend pas du choix de K) et $\mathbf{B}^{]0,r]}_{\mathrm{F}} \otimes_{\mathbf{B}^{(0,r]}_{\mathrm{F}}} \mathbf{B}^{(0,r]}$ de $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$ respectivement.

On peut aussi décrire les anneaux ci-dessus de manière plus algébrique (cette description étant d'ailleurs fort utile [6] pour étudier leur lien avec $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$). Par exemple, si $\widetilde{\mathbf{A}}^+\{\mathrm{X}\}$ désigne l'ensemble des séries $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathrm{X}^k$, où $a_k \to 0$ quand $k \to +\infty$, et si $\omega \in \widetilde{\mathbf{A}}^+$ n'est pas une unité de $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ (i.e. si $v_{\mathbf{E}}(\overline{\omega}) > 0$), alors :

$$\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger} = \bigcup_{k\geq 1}\Big(\widetilde{\mathbf{A}}^{+}\Big\{\frac{p}{\omega^k}\Big\}\Big[\frac{1}{p}\Big]\Big)$$

$$\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\mathrm{rig}} = \bigcap_{n\geq 1}\Big(\widetilde{\mathbf{A}}^{+}\Big\{\frac{\omega^n}{p}\Big\}\Big[\frac{1}{p}\Big]\Big)$$

$$\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}} = \bigcup_{k\geq 1}\Big(\bigcap_{n\geq k}\Big(\widetilde{\mathbf{A}}^{+}\Big\{\frac{p}{\omega^k},\frac{\omega^n}{p}\Big\}\Big[\frac{1}{p}\Big]\Big)\Big)$$

4.4.2. *Action de $\mathscr{G}_{\mathrm{F}}$ et de φ.* L'action de $\mathscr{G}_{\mathrm{F}}$ sur $\widetilde{\mathbf{E}}$ se prolonge en une action continue (pour la topologie faible) sur $\widetilde{\mathbf{A}}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}$ qui commute à celle du morphisme de Frobenius φ. De manière explicite, on a

$$\varphi\Big(\sum_{k\gg-\infty}^{+\infty} p^k[x_k]\Big) = \sum_{k\gg-\infty}^{+\infty} p^k[x_k^p] \quad \text{et} \quad \sigma\Big(\sum_{k\gg-\infty}^{+\infty} p^k[x_k]\Big) = \sum_{k\gg-\infty}^{+\infty} p^k[\sigma(x_k)] \text{ si } \sigma\in\mathscr{G}_{\mathrm{F}}.$$

Ces actions s'étendent par continuité aux anneaux $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}$, $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$, $\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\mathrm{rig}}$, $\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$. L'action de φ est bijective sur $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}$, $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^{+}_{\mathrm{rig}}$ et induit un isomorphisme de $\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$ sur $\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,p^{-1}r]}$ et de $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$ sur $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,p^{-1}r]}$

Soit $\pi = [\varepsilon]-1 \in \widetilde{\mathbf{A}}^{+}$. Les choix que l'on a faits identifient $\mathbf{B}_{\mathrm{F}}$ au sous-corps $\mathscr{E}_{\mathrm{F}}(\pi)$ de $\widetilde{\mathbf{B}}$. La formule $g(\pi) = (1+\pi)^{\chi(g)}-1$ montre que $\mathbf{B}_{\mathrm{F}}$ est stable sous l'action de $\mathscr{G}_{\mathrm{F}}$ et que l'action de $\mathscr{G}_{\mathrm{F}}$ commute à celle de φ (c'est ce qui justifie les choix en question). Cette stabilité entraine la stabilité de $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et par suite, celle de $\mathbf{B}^{\dagger}$, $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}$, $\mathbf{B}^{+}_{\mathrm{rig}}$, $\mathbf{B}^{(0,r]}$ et $\mathbf{B}^{]0,r]}$ sous l'action de $\mathscr{G}_{\mathrm{F}}$.

Comme $\mathbf{E}^{\mathscr{H}_{\mathrm{K}}} = \mathbf{E}_{\mathrm{K}}$ et $\widetilde{\mathbf{E}}^{\mathscr{H}_{\mathrm{K}}} = \widetilde{\mathbf{E}}_{\mathrm{K}}$, les points fixes de l'un des anneaux ci-dessus sous l'action de $\mathscr{H}_{\mathrm{K}}$ est l'anneau ayant le même nom mais avec un K en indice ; par exemple $\mathbf{B}^{\mathscr{H}_{\mathrm{K}}} = \mathbf{B}_{\mathrm{K}}$, $(\mathbf{B}^{\dagger})^{\mathscr{H}_{\mathrm{K}}} = \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{K}}$ ou $(\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig}})^{\mathscr{H}_{\mathrm{K}}} = \mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig,K}}$. D'autre part, l'action de $\mathscr{H}_{\mathrm{K}}$ sur $\mathbf{E}$ étant continue pour la topologie discrète, $\mathscr{H}_{\mathrm{K}}$ agit continûment sur $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ pour la topologie forte.

4.4.3. *Éléments surconvergents et propriétés de Tate-Sen.* L'action de φ sur les anneaux avec $\widetilde{\ }$ est bijective, mais pas sur les anneaux sans $\widetilde{\ }$, et on rajoute un n en indice pour indiquer que l'on a appliqué φ^{-n}. Par exemple,

$$\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{K},n} = \varphi^{-n}(\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{K}}) \subset \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{\mathrm{K}}, \quad \mathbf{A}^{(0,r]}_{\mathrm{K},n} = \varphi^{-n}(\mathbf{A}^{(0,p^{-n}r]}_{\mathrm{K}}) \subset \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_{\mathrm{K}}.$$

Le corps $\mathbf{B}$ est une extension de degré p de $\varphi(\mathbf{B})$, et on définit un opérateur $\psi:\mathbf{B}\to\mathbf{B}$ par la formule $\psi(x) = p^{-1}\varphi^{-1}(\mathrm{Tr}_{\mathbf{B}/\varphi(\mathbf{B})}(x))$. L'opérateur ψ est un inverse à gauche de φ qui commute à l'action de $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$. Par ailleurs, si L est une extension finie de F, et r est assez petit, alors $\psi(\mathbf{A}^{(0,r]}_{\mathrm{L}}) \subset \mathbf{A}^{(0,r]}_{\mathrm{L}}$. Ceci permet, si $r>0$ et si n est assez grand ($n \geq n(r,\mathrm{L})$) et $k\in\mathbf{N}$, de définir une application $\mathrm{R}_{\mathrm{L},n} = \varphi^{-n}\circ\psi^k\circ\varphi^{n+k} : \mathbf{A}^{(0,r]}_{\mathrm{L},n+k} \to \mathbf{A}^{(0,r]}_{\mathrm{L},n}$, et on montre que la réunion des $\mathbf{A}^{(0,r]}_{\mathrm{L},n}$, $n\in\mathbf{N}$ est dense dans $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_{\mathrm{L}}$ et que $\mathrm{R}_{\mathrm{L},n}$ se prolonge par continuité à $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}_{\mathrm{L}}$.

PROPOSITION 4.5 ([12]). — *L'anneau* $\widetilde{\Lambda} = \widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ *vérifie les conditions* (TS1), (TS2) *et* (TS3), *avec* $v = w_r$, $\widetilde{\Lambda}^{\mathscr{H}_{\mathrm{L}}} = \widetilde{\mathbf{A}}_{\mathrm{L}}^{(0,r]}$, $\Lambda_{\mathscr{H}_{\mathrm{L}},n} = \mathbf{A}_{\mathrm{L},n}^{(0,r]}$, $\mathrm{R}_{\mathscr{H}_{\mathrm{L}},n} = \mathrm{R}_{\mathrm{L},n}$, *les constantes* $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ *et* $c_3 > \frac{r}{p-1}$ *pouvant être choisies arbitrairement.*

4.5. Le logarithme et l'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger}$

Si $x \in \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}$ vérifie $v_{\mathbf{E}}(\overline{x} - 1) > 0$, la série $\log x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$ converge dans $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger}$. Par exemple, $t = \log[\varepsilon]$ est un élément de $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{+}$ sur lequel $\mathscr{G}_{\mathrm{F}}$ agit par multiplication par le caractère cyclotomique et qui peut être vu comme un analogue p-adique de $2i\pi$. On aimerait bien étendre cette application à $(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger})^*$, mais pour cela, on est forcé d'étendre un peu l'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger}$ en rajoutant un analogue p-adique u de $\log p$.

Soit $\widetilde{p} = (p, p^{1/p}, \dots) \in \widetilde{\mathbf{E}}^{+}$. Si $\sigma \in \mathscr{G}_{\mathrm{F}}$, il existe $c(\sigma) \in \mathbf{Z}_p$ tel que l'on ait $\sigma(\widetilde{p}) = \widetilde{p}\varepsilon^{c(\sigma)}$ ($\sigma \mapsto c(\sigma)$ est le cocycle à valeurs dans $\mathbf{Z}_p(1)$ associé à p par la théorie de Kummer).

Soit $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger} = \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger}[u]$. On munit $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger}$ d'un opérateur « de monodromie » $\mathrm{N} = -\frac{d}{du}$ et d'une action de φ (resp. $\mathscr{G}_{\mathrm{F}}$), compatible avec celle existant sur $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger}$, en posant $\varphi(u) = pu$ (resp. $\sigma(u) = u + c(\tau)t$). Les actions de φ et N commutent à celle de $\mathscr{G}_{\mathrm{F}}$ et on a $\mathrm{N}\varphi = p\varphi\mathrm{N}$.

PROPOSITION 4.6. — *Il existe une unique application* $\log : (\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger})^* \to \widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger}$ *vérifiant les propriétés suivantes* :

(i) $\log xy = \log x + \log y$;

(ii) $\log x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$ *si la série converge*;

(iii) $\log[a] = 0$ *si* $a \in \overline{k}_{\mathrm{F}}$;

(iv) $\log p = 0$ *et* $\log[\widetilde{p}] = u$.

De plus, on a $\varphi(\log x) = \log \varphi(x)$ *et* $\sigma(\log x) = \log \sigma(x)$ *si* $\sigma \in \mathscr{G}_{\mathrm{F}}$.

On note $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{+}$ le sous-anneau $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{+}[u]$ de $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger}$; il est stable par N, φ et $\mathscr{G}_{\mathrm{F}}$. Si K est une extension finie de F, on note $\mathbf{B}_{\log,\mathrm{K}}^{\dagger}$ le sous-anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},\mathrm{K}}^{\dagger}[\log \pi_{\mathrm{K}}]$ de $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger}$; il est stable par N, φ et $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$ (qui agit à travers Γ_{K}).

4.6. L'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$

4.6.1. *Construction de* $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$.

PROPOSITION 4.7 ([37]). — *L'application* $\theta : \widetilde{\mathbf{A}}^{+} \to \mathscr{O}_{\mathrm{C}}$, *donnée par* $\sum_{n=0}^{+\infty} p^n[x_n] \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} p^n x_n^{(0)}$, *est un morphisme surjectif d'anneaux dont le noyau est un idéal principal engendré par* $\omega = \frac{\pi}{\varphi^{-1}(\pi)} = 1 + [\varepsilon^{1/p}] + \cdots + [\varepsilon^{1/p}]^{p-1}$ *ou par* $\xi = [\widetilde{p}] - p$.

REMARQUE 4.8. — $(\widetilde{\mathbf{A}}^{+}, \theta)$ est l'épaississement p-adique universel[10] de $\mathscr{O}_{\mathrm{C}}$ (cf. [40]).

On prolonge θ en un morphisme de $\widetilde{\mathbf{B}}^{+}$ sur C, on note $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ l'anneau $\varprojlim \widetilde{\mathbf{B}}^{+}/(\ker\theta)^n$. Ceci fait de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ un anneau de valuation discrète d'idéal maximal $\ker\theta$ et de corps résiduel C. En particulier, la clôture séparable de F dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ s'identifie à $\overline{\mathrm{F}}$.

[10]L'anneau $\widetilde{\mathbf{A}}^{+}$ est très souvent noté W(R) et parfois $\mathrm{A}_{\mathrm{inf}}$.

On munit $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ de la topologie pour laquelle les $p^k\widetilde{\mathbf{A}}^{+}+(\ker\theta)^n$, avec $n,k\in\mathbf{N}$, forment une base de voisinages de 0. L'action de $\mathscr{G}_{\mathrm{F}}$ sur $\widetilde{\mathbf{B}}^{+}$ s'etend par continuité en une action continue de $\mathscr{G}_{\mathrm{F}}$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$. La série définissant $t=\log[\varepsilon]=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\pi^n$ converge dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ et t est un générateur de $\ker\theta$ (ce qui explique pourquoi on a mis autant de temps à comprendre ce qu'était l'analogue p-adique de $2i\pi$).

On pose $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}=\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}[t^{-1}]$, ce qui fait de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ un corps et on munit $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ de la filtration décroissante définie par $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{i}=t^i\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$. Cette filtration est stable par l'action de $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$.

4.6.2. $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ *et le reste du monde.* Il n'existe pas de morphisme continu de $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ car, bien que ces anneaux soient obtenus en localisant et complétant $\widetilde{\mathbf{A}}^{+}$, les topologies sont trop différentes. Toutefois, $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger}$ est une limite inductive d'anneaux qui se plongent dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$, mais il faut changer de plongement pour chacun de ces sous-anneaux. De manière précise,

(i) $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{+}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ sont deux complétés de $\widetilde{\mathbf{B}}^{+}$ et l'identité $\widetilde{\mathbf{B}}^{+}\to\widetilde{\mathbf{B}}^{+}$ se prolonge en une injection continue de $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{+}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$.

(ii) La série $\log\frac{[\tilde{p}]}{p}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\big(\frac{[\tilde{p}]}{p}-1\big)^n$ converge dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$, ce qui nous fournit une injection naturelle de $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{+}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ qui commute à l'action de $\mathscr{G}_{\mathrm{F}}$. Les anneaux $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{+}$, $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{+}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ sont alors reliés par les *suites exactes fondamentales* [40, 27]

$$0\longrightarrow\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{+}[\tfrac{1}{t}]\longrightarrow\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{+}[\tfrac{1}{t}]\xrightarrow{\ \mathrm{N}\ }\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{+}[\tfrac{1}{t}]\longrightarrow 0$$

$$0\longrightarrow\big(\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{+}[\tfrac{1}{t}]\big)^{\varphi=1}\longrightarrow\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{+}[\tfrac{1}{t}]\xrightarrow{1-\varphi}\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{+}[\tfrac{1}{t}]\longrightarrow 0$$

$$0\longrightarrow\mathbf{Q}_p\longrightarrow\big(\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{+}[\tfrac{1}{t}]\big)^{\varphi=1}\longrightarrow\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}\longrightarrow 0$$

D'autre part, on a $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathscr{G}_{\mathrm{K}}}=\mathrm{K}$ et $(\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{+}[\frac{1}{t}])^{\mathscr{G}_{\mathrm{K}}}=\mathrm{F}$, et l'application naturelle $\mathrm{K}\otimes_{\mathrm{F}}\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{+}[\frac{1}{t}]\to\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ est injective [37, 40, 27].

(iii) Si $x=\sum_{k=0}^{+\infty}p^k[x_k]\in\widetilde{\mathbf{A}}$, la série converge dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ si et seulement si la série $\theta(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}p^kx_k^{(0)}$ converge dans C, c'est-à-dire si et seulement si $k+v_{\mathbf{E}}(x_k)$ tend vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$. On en déduit une application naturelle $\iota_0:\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,1]}\to\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ qui s'avère être injective.

(iv) Comme $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,1]}=\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{+}+\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,1]}$ et comme φ^{-n} induit une bijection continue de $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,p^{-n}]}[u]$ sur $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,1]}[u]$, on obtient [6], quel que soit $n\in\mathbf{N}$, une injection $\iota_n=\iota_0\circ\varphi^{-n}$ de $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,p^{-n}]}[u]$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$. Cette injection peut être vue comme la « localisation en $\varepsilon^{(n)}-1$ ». Si K est une extension finie de F, il existe $n(\mathrm{K})$ tel que, pour tout $n\geq n(\mathrm{K})$, on ait

$$\iota_n\Big(\mathbf{B}_{\mathrm{K}}^{]0,p^{-n}]}[\log\pi_{\mathrm{K}}]\Big)\subset\mathrm{K}_n[[t]].$$

5. CLASSIFICATION DES REPRÉSENTATIONS p-ADIQUES

5.1. Le (φ, Γ)-module associé à une représentation de $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$

Si V est une $\mathbf{Q}_p$-représentation de $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$, le $\mathbf{B}_{\mathrm{K}}$-espace vectoriel $\mathbf{D}(\mathrm{V}) = (\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{V})^{\mathscr{H}_{\mathrm{K}}}$ est muni d'une action semi-linéaire de φ provenant de l'action de φ sur $\mathbf{B}$ (et qui est donc *étale*, c'est-à-dire de φ-pente 0) et d'une action résiduelle de $\Gamma_{\mathrm{K}} = \mathscr{G}_{\mathrm{K}}/\mathscr{H}_{\mathrm{K}}$. Pour des raisons évidentes, un tel objet s'appelle *un* (φ, Γ)*-module étale sur* $\mathbf{B}_{\mathrm{K}}$.

Si D est un (φ, Γ)-module sur $\mathbf{B}_{\mathrm{K}}$, alors $\mathbf{V}(\mathrm{D}) = (\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{K}}} \mathrm{D})^{\varphi=1}$ est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel muni d'une action continue de $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$.

Théorème 5.1 ([39]). — *La catégorie des $\mathbf{Q}_p$-représentations de $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$ est équivalente à celle des (φ, Γ)-modules étales sur $\mathbf{B}_{\mathrm{K}}$. Plus précisément, si* V *est une $\mathbf{Q}_p$-représentation de $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$, alors $\mathbf{D}(\mathrm{V})$ est un (φ, Γ)-module étale sur $\mathbf{B}_{\mathrm{K}}$ et $\mathbf{V}(\mathbf{D}(\mathrm{V})) = \mathrm{V}$ et, réciproquement, si* D *est un (φ, Γ)-module étale sur $\mathbf{B}_{\mathrm{K}}$, alors $\mathbf{V}(\mathrm{D})$ est une $\mathbf{Q}_p$-représentation de $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$ et $\mathbf{D}(\mathbf{V}(\mathrm{D})) = \mathrm{D}$.*

La démonstration de ce théorème repose sur les faits suivants :

— si on munit $\mathbf{E}$ de la topologie discrète, alors $\mathrm{H}^1(\mathscr{H}_{\mathrm{K}}, \mathrm{GL}_d(\mathbf{E})) = 1$ d'après le théorème de Hilbert 90 et donc, si on munit $\mathbf{B}$ de la topologie forte, alors $\mathrm{H}^1(\mathscr{H}_{\mathrm{K}}, \mathrm{GL}_d(\mathbf{B})) = 1$ (cf. prop. 3.3 et 3.4). Autrement dit, toute représentation de $\mathscr{H}_{\mathrm{K}}$ est $\mathbf{B}$-admissible et $\mathrm{V} \mapsto \mathbf{D}(\mathrm{V})$ a de bonnes propriétés.

— $\mathbf{B}^{\varphi=1} = \mathbf{Q}_p$, et donc $\mathbf{V}(\mathbf{D}(\mathrm{V})) = \mathrm{V}$ si V est une $\mathbf{Q}_p$-représentation de $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$.

— si $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq d} \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{E})$, alors le système d'équations $x_i^p = \sum_{j=1}^d a_{i,j} x_j$, $1 \leq j \leq d$ admet p^d solutions dans $\mathbf{E}^d$ et ces solutions forment un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel de dimension d engendrant $\mathbf{E}^d$. Un (φ, Γ)-module est étale si et seulement si il existe une base dans laquelle la matrice de φ appartient à $\mathrm{GL}_d(\mathbf{A}_{\mathrm{K}})$ et le résultat précédent permet de montrer que, si Δ est le $\mathbf{A}_{\mathrm{K}}$ réseau de D engendré par cette base, alors $(\mathbf{E} \otimes_{\mathbf{A}_{\mathrm{K}}} \Delta)^{\varphi=1}$ est un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel de dimension d engendrant $\mathbf{E} \otimes_{\mathbf{A}_{\mathrm{K}}} \Delta$; autrement dit, « $\mathbf{V}(\mathrm{D})$ mod p » a la bonne dimension. Le résultat cherché s'en déduit « par dévissage et passage à la limite ».

Remarque 5.2. — (i) Nous n'avons pas utilisé Γ_{K} pour montrer que les foncteurs $\mathrm{V} \mapsto \mathbf{D}(\mathrm{V})$ et $\mathrm{D} \mapsto \mathbf{V}(\mathrm{D})$ sont inverses l'un de l'autre. Ceci permet de montrer que la catégorie des $\mathbf{Q}_p$-représentations de $\mathscr{H}_{\mathrm{K}} \cong \mathscr{G}_{k_{\mathrm{F}}((\mathrm{T}))}$ est équivalente à celle des φ-modules étales sur $\mathbf{B}_{\mathrm{K}} \cong \mathscr{E}_{\mathrm{F}}$. Ce résultat est une version locale de résultats généraux de Katz [53, chap. 4].

(ii) Nous avons privilégié dans ce texte les $\mathbf{Q}_p$-représentations, mais la théorie des (φ, Γ)-modules donne d'aussi bons résultats, en tensorisant par $\mathbf{A}$ au lieu de $\mathbf{B}$, si on considère des $\mathbf{Z}_p$-modules de type fini (pas nécessairement libres) munis d'une action continue de $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$ (ou $\mathscr{H}_{\mathrm{K}}$).

Comme application, on a par exemple le résultat suivant qui entre dans la démonstration du théorème 2.9 : si D est un φ-module étale sur $\mathbf{B}_{\mathrm{K}}$, il existe une extension finie L de K et une base de $\mathbf{B}_{\mathrm{L}} \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{K}}} \mathrm{D}$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{L}}$ dans laquelle la matrice de φ appartient à $1+p^n\mathrm{M}_d(\mathbf{A}_{\mathrm{L}})$; en effet, ce n'est qu'une traduction de ce que, si V est une $\mathbf{Q}_p$-représentation de $\mathscr{H}_{\mathrm{K}}$, il existe un $\mathbf{Z}_p$-réseau T de V stable par $\mathscr{H}_{\mathrm{K}}$ et une extension finie L de K telle que $\mathscr{H}_{\mathrm{L}}$ agisse trivialement sur $\mathrm{T}/p^n\mathrm{T}$.

(iii) On peut utiliser l'équivalence de catégories ci-dessus pour étudier la cohomologie galoisienne et la théorie d'Iwasawa des représentations de $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$; nous renvoyons à [24] pour un résumé des résultats et à [48, 49, 4, 13] pour les détails.

(iv) Le théorème ci-dessus n'est pas assez fin pour vraiment étudier les problèmes de classification des représentations p-adiques ; le problème est que le corps $\mathbf{B}_{\mathrm{K}}$ est un objet un peu grossier et aller plus loin demande de descendre les coefficients à $\mathbf{B}_{\mathrm{K}}^{\dagger}$.

La méthode de Sen permet, utilisant la proposition 4.5, de prouver le résultat suivant :

Proposition 5.3 ([12]). — *Si* K *est une extension finie de* F *et* d *un entier* ≥ 1, *les applications naturelles*

$$\varinjlim \mathrm{H}^1(\Gamma_{\mathrm{K}}, \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}_{\mathrm{K},n}^{\dagger})) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\Gamma_{\mathrm{K}}, \mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{K}}^{\dagger})) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathscr{G}_{\mathrm{K}}, \mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger})),$$

induites par l'inflation de Γ_{K} *à* $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$ *et les inclusions* $\mathbf{B}_{\mathrm{K},n}^{\dagger} \subset \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{K}}^{\dagger} \subset \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}$, *sont des bijections.*

En particulier, comme le cocycle correspondant à une $\mathbf{Q}_p$-représentation de $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$ est fixe par φ^n pour tout n, il est dans l'image de $\mathrm{H}^1(\Gamma_{\mathrm{K}}, \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}_{\mathrm{K}}^{\dagger}))$; on en déduit la $\mathbf{B}^{\dagger}$-admissibilité des représentations de $\mathscr{H}_{\mathrm{K}}$ obtenues par restriction d'une représentation de $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$. Ceci permet, en définissant $\mathbf{D}^{\dagger}(\mathrm{V}) = (\mathbf{B}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{V})^{\mathscr{H}_{\mathrm{K}}}$ pour une $\mathbf{Q}_p$-représentation de $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$ et $\mathbf{V}^{\dagger}(\mathrm{D}) = (\mathbf{B}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{K}}^{\dagger}} \mathrm{D})^{\varphi=1}$ pour un (φ, Γ)-module sur $\mathbf{B}_{\mathrm{K}}^{\dagger}$, de raffiner le théorème 5.1 sous la forme

Théorème 5.4 ([12]). — *La catégorie des* $\mathbf{Q}_p$*-représentations de* $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$ *est équivalente à celle des* (φ, Γ)*-modules étales sur* $\mathbf{B}_{\mathrm{K}}^{\dagger}$. *Plus précisément, si* V *est une* $\mathbf{Q}_p$*-représentation de* $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$, *alors* $\mathbf{D}^{\dagger}(\mathrm{V})$ *est un* (φ, Γ)*-module étale sur* $\mathbf{B}_{\mathrm{K}}$ *et* $\mathbf{V}^{\dagger}(\mathbf{D}^{\dagger}(\mathrm{V})) = \mathrm{V}$ *et, réciproquement, si* D *est un* (φ, Γ)*-module étale sur* $\mathbf{B}_{\mathrm{K}}^{\dagger}$, *alors* $\mathbf{V}^{\dagger}(\mathrm{D})$ *est une* $\mathbf{Q}_p$*-représentation de* $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$ *et* $\mathbf{D}^{\dagger}(\mathbf{V}^{\dagger}(\mathrm{D})) = \mathrm{D}$.

D'autre part, on montre [11] que tout sous-$\mathbf{B}_{\mathrm{K}}^{\dagger}$-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbf{D}(\mathrm{V})$ stable par φ est inclus dans $\mathbf{D}^{\dagger}(\mathrm{V})$; ceci nous fournit le « résultat de descente » suivant dans lequel les représentations galoisiennes ont disparu.

Corollaire 5.5. — *Si* D *est un* (φ, Γ)*-module étale sur* $\mathbf{B}_{\mathrm{K}}$, *alors l'ensemble des sous-*$\mathbf{B}_{\mathrm{K}}^{\dagger}$*-espaces vectoriels de dimension finie stables par* φ *admet un plus grand élément* $\mathrm{D}^{\dagger}$ *et on a* $\mathrm{D} = \mathbf{B}_{\mathrm{K}} \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{K}}^{\dagger}} \mathrm{D}^{\dagger}$. [On a $\mathrm{D}^{\dagger} = \mathbf{D}^{\dagger}(\mathbf{V}(\mathrm{D}))$.]

5.2. **La hiérarchie des représentations galoisiennes** [41]

5.2.1. *Représentations de Hodge-Tate.* Si V est une $\mathbf{Q}_p$-représentation de $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$, le K-espace vectoriel $\mathbf{D}_{\mathrm{HT}}(\mathrm{V}) = (\mathbf{B}_{\mathrm{HT}} \otimes \mathrm{V})^{\mathscr{G}_{\mathrm{K}}}$ est muni d'une graduation indexée par les entiers et un entier i tel que $\mathrm{Gr}^{-i}\mathbf{D}_{\mathrm{HT}}(\mathrm{V}) \neq 0$ est un *poids de Hodge-Tate* de V. Une représentation $\mathbf{B}_{\mathrm{HT}}$-admissible est dite *de Hodge-Tate.* Une représentation C-admissible est clairement de Hodge-Tate et, réciproquement, une représentation de Hodge-Tate est C-admissible si 0 est son seul poids de Hodge-Tate.

5.2.2. *Représentations de de Rham.* Si V est une $\mathbf{Q}_p$-représentation de $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$, le K-espace vectoriel $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\mathrm{V}) = (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes \mathrm{V})^{\mathscr{G}_{\mathrm{K}}}$ est muni d'une filtration par des sous-K-espaces vectoriels $\mathbf{D}^i_{\mathrm{dR}}(\mathrm{V})$ pour $i \in \mathbf{Z}$ qui est décroissante (i.e. $\mathbf{D}^{i+1}_{\mathrm{dR}}(\mathrm{V}) \subset \mathbf{D}^i_{\mathrm{dR}}(\mathrm{V})$) exhaustive (i.e. $\mathbf{D}^i_{\mathrm{dR}}(\mathrm{V}) = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\mathrm{V})$ si $i \ll 0$) et séparée (i.e $\mathbf{D}^i_{\mathrm{dR}}(\mathrm{V}) = \{0\}$ si $i \gg 0$). Une représentation $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$-admissible est dite *de de Rham.* Si V est de de Rham, alors V est de Hodge-Tate et $\mathbf{D}_{\mathrm{HT}}(\mathrm{V})$ est le gradué associé à $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\mathrm{V})$.

Utilisant l'injection $\iota_n : \widetilde{\mathbf{B}}^{(0,p^{-n}]} \to \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$, on peut retrouver $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\mathrm{V})$ et sa filtration à partir de $\mathbf{D}^\dagger(\mathrm{V})$. (Si $r > 0$, on note $\mathbf{D}^{(0,r]}(\mathrm{V})$ le $\mathbf{B}^{(0,r]}_{\mathrm{K}}$-module $(\mathbf{B}^{(0,r]} \otimes \mathrm{V})^{\mathscr{H}_{\mathrm{K}}}$; c'est [11] le plus grand sous-$\mathbf{B}^{(0,r]}_{\mathrm{K}}$-module D de type fini de $\mathbf{D}(\mathrm{V})$ tel que l'on ait $\varphi(\mathrm{D}) \subset \mathbf{B}^{(0,p^{-1}r]}_{\mathrm{K}} \otimes_{\mathbf{B}^{(0,r]}_{\mathrm{K}}} \mathrm{D}$.)

Proposition 5.6 ([6]+[43]). — *Si* V *est une* $\mathbf{Q}_p$*-représentation de* $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$*, il existe* $n(\mathrm{V})$ *tel que si* $n \geq n(\mathrm{V})$ *et* $i \in \mathbf{Z}$*, alors*

$$\mathbf{D}^i_{\mathrm{dR}}(\mathrm{V}) = \Big(t^i\mathrm{K}_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}^{(0,p^{-n}]}_{\mathrm{K}}} \mathbf{D}^{(0,p^{-n}]}(\mathrm{V})\Big)^{\Gamma_{\mathrm{K}}},$$

où $t^i\mathrm{K}_n[[t]]$ *est considéré comme un* $\mathbf{B}^{(0,p^{-n}]}_{\mathrm{K}}$*-module via l'injection* $\iota_n : \mathbf{B}^{(0,p^{-n}]}_{\mathrm{K}} \to \mathrm{K}_n[[t]]$.

5.2.3. *Représentations semi-stables.* Une $\mathbf{Q}_p$-représentation de $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$ qui est $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}[\frac{1}{t}]$-admissible (resp. $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}[\frac{1}{t}]$-admissible) est dite *semi-stable* (resp. *cristalline*). Une $\mathbf{Q}_p$-représentation V de $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$ est dite *potentiellement semi-stable* s'il existe une extension finie L de K telle que la restriction de V à $\mathscr{G}_{\mathrm{L}}$ soit semi-stable (en tant que représentation de $\mathscr{G}_{\mathrm{L}}$). On a les implications suivantes :

(i) « V cristalline » ⇒ « V semi-stable » ;

(ii) « V semi-stable » ⇒ « V potentiellement semi-stable » ;

(iii) « V potentiellement semi-stable » ⇒ « V de de Rham » ;

(iv) « V de de Rham » ⇒ « V de Hodge-Tate ».

La première implication vient de l'inclusion $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}[\frac{1}{t}] \subset \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\log}[\frac{1}{t}]$, la seconde est une évidence, la troisième vient de ce que $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ contient $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\log}[\frac{1}{t}]$ et $\overline{\mathrm{F}}$, et la dernière de ce que $\mathbf{B}_{\mathrm{HT}}$ est l'algèbre graduée associée à $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$.

En ce qui concerne les implications en sens inverse, on a

(o) il existe des représentations cristallines non triviales ; par exemple, si $k \in \mathbf{Z}$ le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel $\mathbf{Q}_p(k)$ de dimension 1 sur lequel $\sigma \in \mathscr{G}_{\mathrm{K}}$ agit par multiplication par la puissance k-ième $\chi(\sigma)^k$ du caractère cyclotomique ; plus généralement, et ça a été la motivation [37] pour l'introduction de toutes ces notions, si X est une variété propre et lisse sur K possédant un modèle sur $\mathscr{O}_{\mathrm{K}}$ ayant bonne réduction, alors les $\mathbf{Q}_p$-représentations $\mathrm{H}^i_{\mathrm{et}}(\mathrm{X}_{\overline{\mathrm{K}}}, \mathbf{Q}_p)$ de $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$ fournies par la cohomologie étale de X, sont cristallines ;

(i) la représentation $\sigma \mapsto \begin{pmatrix} \chi(\sigma) & c(\sigma) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ associée à $\log p$ est semi-stable mais pas cristalline ;

(ii) une représentation sur laquelle l'inertie de $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$ agit à travers un quotient fini non trivial est potentiellement semi-stable (et même potentiellement cristalline), mais pas semi-stable ;

(iii) l'implication « V de Rham » $\Rightarrow$ « V potentiellement semi-stable » est la conjecture de monodromie p-adique de Fontaine ;

(iv) une extension non triviale $0 \to \mathbf{Q}_p \to \mathrm{V} \to \mathbf{Q}_p(k) \to 0$ est de Hodge-Tate mais pas de de Rham si $k > 0$;

(v) la représentation $\sigma \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \log \chi(\sigma) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ associée à $\log 2i\pi$ n'est pas de Hodge-Tate.

5.2.4. (φ, N)-*modules filtrés.* Si V est une $\mathbf{Q}_p$-représentation de $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$, le F-espace vectoriel $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(\mathrm{V}) = (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}[\frac{1}{t}] \otimes \mathrm{V})^{\mathscr{G}_{\mathrm{K}}}$ est muni d'une action semi-linéaire de φ et d'une action linéaire de N vérifiant la relation $\mathrm{N}\varphi = p\varphi\mathrm{N}$. D'autre part, $\mathrm{K} \otimes_{\mathrm{F}} \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(\mathrm{V})$ s'injecte dans $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\mathrm{V})$ et est muni d'une filtration par des sous-K-espaces vectoriels qui est décroissante, exhaustive et séparée. Un tel objet est appelé *un* (φ, N)*-module filtré sur* K. Le sous-F-espace vectoriel $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(\mathrm{V}) = \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(\mathrm{V})^{\mathrm{N}=0}$ de $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(\mathrm{V})$ s'identifie à $(\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}[\frac{1}{t}] \otimes \mathrm{V})^{\mathscr{G}_{\mathrm{K}}}$; c'est *un* φ*-module filtré sur* K.

Si D est un (φ, N)-module filtré sur K et $\mathrm{D}_{\mathrm{K}} = \mathrm{K} \otimes_{\mathrm{F}} \mathrm{D}$, l'injection de $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}[\frac{1}{t}]$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ induit une application

$$\Big(\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}[\frac{1}{t}] \otimes_{\mathrm{F}} \mathrm{D}\Big)^{\mathrm{N}=0, \varphi=1} \longrightarrow \Big(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathrm{K}} \mathrm{D}_{\mathrm{K}}\Big) / \Big(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathrm{K}} \mathrm{D}_{\mathrm{K}}\Big)^0$$

dont le noyau $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(\mathrm{D})$ est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel (pas forcément de dimension finie) muni d'une action de $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$. (Les actions de φ, N et la filtration sur un produit tensoriel étant données par les formules naturelles $\mathrm{N}(a \otimes d) = \mathrm{N}(a) \otimes d + a \otimes \mathrm{N}(d)$, $\varphi(a \otimes d) = \varphi(a) \otimes \varphi(d)$ $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathrm{K}} \mathrm{D}_{\mathrm{K}})^i = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \mathbf{B}^{i-j}_{\mathrm{dR}} \otimes \mathrm{D}^j_{\mathrm{K}}$.)

Si D est un (φ, N)-module filtré sur K, on peut lui associer deux invariants numériques $t_{\mathrm{N}}(\mathrm{D})$ et $t_{\mathrm{H}}(\mathrm{D})$ définis par

$$t_{\mathrm{N}}(\mathrm{D}) = v_p(\det \varphi) \quad \text{et} \quad t_{\mathrm{H}}(\mathrm{D}) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} i \cdot \dim_{\mathrm{K}}(\mathrm{D}^i_{\mathrm{K}} / \mathrm{D}^{i+1}_{\mathrm{K}}).$$

(Comme φ n'est que semi-linéaire, son déterminant dépend de la base dans laquelle il est calculé, mais sa valuation p-adique n'en dépend pas.) On dit que D est *admissible* si on a $t_{\mathrm{H}}(\mathrm{D}) = t_{\mathrm{N}}(\mathrm{D})$ et $t_{\mathrm{H}}(\mathrm{D}') \leq t_{\mathrm{N}}(\mathrm{D}')$ pour tout sous-F-espace vectoriel D′ de D stable par φ et N (D'_{K} étant muni de la filtration induite).

5.2.5. *Construction des représentations semi-stables.* Le théorème suivant fournit une description concrète des représentations semi-stables et donc (modulo la conjecture de monodromie de Fontaine) des représentations de de Rham.

Théorème 5.7 ([29, 27]). — *La catégorie des représentations semi-stables de $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$ est équivalente à celle des (φ, N)-modules filtrés admissibles sur* K. *Plus précisément, si* V *est une représentation semi-stable, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(\mathrm{V})$ est un (φ, N)-module filtré admissible sur* K *et $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(\mathrm{V})) = \mathrm{V}$ et, réciproquement, si* D *est un (φ, N)-module filtré admissible sur* K*, alors $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(\mathrm{D})$ est une représentation semi-stable de $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(\mathrm{D})) = \mathrm{D}$.*

De plus, cette équivalence de catégories induit une équivalence entre la catégorie des représentations cristallines et celle des φ-modules filtrés admissibles sur K.

On dispose de deux descriptions des représentations semi-stables : l'une, donnée par le théorème ci-dessus, en termes de (φ, N)-modules filtrés admissibles sur K et l'autre en termes de (φ, Γ)-modules étales sur $\mathbf{B}_{\mathrm{K}}^{\dagger}$. Une question naturelle qui se pose est : « comment passe-t-on de l'une à l'autre ? ». Dans un sens, en utilisant le fait que $(\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig,K}}^{\dagger}, (\mathbf{B}_{\mathrm{rig,K},n}^{\dagger})_{n\in\mathbf{N}})$ vérifie la propriété de Tate-Sen (TS2), on obtient le résultat suivant qui montre comment retrouver les actions de φ et N sur $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(\mathrm{V})$ à partir de $\mathbf{D}^{\dagger}(\mathrm{V})$; couplé avec la proposition 5.6, il fournit une description du (φ, N)-module filtré $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(\mathbf{V}^{\dagger}(\mathrm{D}))$ si D est un (φ, Γ)-module étale sur $\mathbf{B}_{\mathrm{K}}^{\dagger}$.

Proposition 5.8 ([6]). — *Si* V *est une $\mathbf{Q}_p$-représentation de $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$, alors*

$$\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(\mathrm{V}) = \Big(\mathbf{B}_{\mathrm{rig,K}}^{\dagger}[\frac{1}{t}] \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{K}}^{\dagger}} \mathbf{D}^{\dagger}(\mathrm{V})\Big)^{\Gamma_{\mathrm{K}}} \quad \text{et} \quad \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(\mathrm{V}) = \Big(\mathbf{B}_{\mathrm{log,K}}^{\dagger}[\frac{1}{t}] \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{K}}^{\dagger}} \mathbf{D}^{\dagger}(\mathrm{V})\Big)^{\Gamma_{\mathrm{K}}}.$$

Voir [78] pour des résultats de nature similaire. Le vrai problème est d'aller dans l'autre sens car il est nettement plus facile de construire à la main un (φ, N)-module filtré admissible qu'un (φ, Γ)-module. En d'autre termes, comment décrire les matrices de φ et γ sur $\mathbf{D}^{\dagger}(\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(\mathrm{D}))$ à partir de D, si D est un (φ, N)-module filtré admissible sur K. Ce n'est pas une question complètement gratuite car on peut lire sur un (φ, Γ)-module des propriétés de la représentation modulo p qui sont fort mystérieuses sur le (φ, N)-module filtré. Une réponse « raisonnable » à cette question aurait des applications à la théorie des déformations des représentations galoisiennes.

Le seul cas où l'on ait une réponse satisfaisante est le cas [79] où $\mathrm{K} = \mathrm{F}$ est non ramifié, et où $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(\mathrm{D})$ est une représentation cristalline à poids de Hodge-Tate compris entre 0 et $p - 1$. (Il s'agit d'une démonstration des résultats de Fontaine et Laffaille [44] via la théorie des (φ, Γ)-modules.) D'autre part, dans le cas où $\mathrm{K} = \mathrm{F}$ est non ramifié, et où $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(\mathrm{D})$ est une représentation cristalline (sans hypothèse sur les poids de Hodge-Tate), on sait [25] que l'on peut se débrouiller pour que les matrices de φ et γ soient à coefficients dans $\mathscr{O}_{\mathrm{F}}[[\pi]]$.

5.3. **Représentations galoisiennes et équations différentielles**

5.3.1. *L'opérateur de Sen.* Si on utilise la méthode de Sen et la proposition 4.1, on obtient le résultat suivant qui est précisément le cas qu'avait considéré Sen [70].

THÉORÈME 5.9 ([70]). — *Si $d \geq 1$, les applications naturelles*

$$\varinjlim \mathrm{H}^1(\Gamma_\mathrm{K}, \mathrm{GL}_d(\mathrm{K}_n)) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\Gamma_\mathrm{K}, \mathrm{GL}_d(\widehat{\mathrm{K}}_\infty)) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathscr{G}_\mathrm{K}, \mathrm{GL}_d(\mathrm{C})),$$

induites par l'inflation de Γ_K à $\mathscr{G}_\mathrm{K}$ et les inclusions $\mathrm{K}_n \subset \widehat{\mathrm{K}}_\infty \subset \mathrm{C}$, sont des bijections.

Ce résultat permet de montrer que, si V est une représentation p-adique de $\mathscr{G}_\mathrm{K}$ et n est assez grand, alors $\mathrm{C} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{V}$ possède un sous-K_n-espace vectoriel fixe par $\mathscr{H}_\mathrm{K}$, stable par $\mathscr{G}_\mathrm{K}$, de dimension $\dim_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{V}$ et engendrant $\mathrm{C} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{V}$. Il peut exister plusieurs sous-K_n-espaces vectoriels de $\mathrm{C} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{V}$ vérifiant ces propriétés, mais la proposition 3.6 et la remarque 3.7 nous en fournissent un privilégié noté $\mathbf{D}_{\mathrm{Sen},n}(\mathrm{V})$; de plus, il existe k indépendant de n tel que, si D' est un autre sous-K_n-espace vectoriel de $\mathrm{C} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{V}$ vérifiant ces propriétés, alors $\mathrm{K}_{n+k} \otimes_{\mathrm{K}_n} \mathrm{D}' = \mathrm{K}_{n+k} \otimes_{\mathrm{K}_n} \mathbf{D}_{\mathrm{Sen},n}(\mathrm{V})$. On montre alors facilement que $\frac{\gamma-1}{\chi(\gamma)-1}$ vu comme opérateur $\mathbf{Q}_p$-linéaire de $\mathbf{D}_{\mathrm{Sen},n}(\mathrm{V})$ tend vers une limite quand $\gamma \in \Gamma_\mathrm{K}$ tend vers 1. On obtient de la sorte [70] un opérateur Θ_V qui est K_n-linéaire et peut être vu comme un « poids de Hodge-Tate généralisé » :

PROPOSITION 5.10. — *Si* V *est une représentation de Hodge-Tate de $\mathscr{G}_\mathrm{K}$, alors Θ_V est diagonalisable et ses valeurs propres sont les poids de Hodge-Tate de* V (avec multiplicité). *Réciproquement, si Θ_V est diagonalisable et ses valeurs propres sont des entiers, alors* V *est de Hodge-Tate. En particulier,* V *est* C*-admissible si et seulement si $\Theta_\mathrm{V} = 0$.*

D'autre part, Θ_V peut être vu comme un élément de $\mathrm{C} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{End}(\mathrm{V})$ et Sen a démontré le résultat suivant :

THÉORÈME 5.11 ([69, 70]). — *La sous-algèbre de Lie de* End(V) *engendrée par les logarithmes des éléments du sous-groupe d'inertie de $\mathscr{G}_\mathrm{K}$ est la plus petite sous-algèbre de Lie de* End(V) *définie sur $\mathbf{Q}_p$ dont les* C*-points contiennent Θ_V. En particulier, $\Theta_\mathrm{V} = 0$* (i.e. V est C-admissible) *si et seulement si le sous-groupe d'inertie de $\mathscr{G}_\mathrm{K}$ agit à travers un quotient fini.*

5.3.2. *Le (φ, ∇)-module associé à une représentation galoisienne.* On note ∂ la dérivation $(1+\pi)\frac{d}{d\pi}$ de $\mathbf{B}_\mathrm{F}^\dagger$. Cette dérivation s'étend de manière unique à $\mathbf{B}_\mathrm{K}^\dagger$ pour toute extension finie K de F et on a $\partial \circ \varphi = p\,\varphi \circ \partial$.

PROPOSITION 5.12 ([6]). — *Si $x \in \mathbf{B}_{\mathrm{rig,K}}^\dagger$, alors $\lim_{\gamma\to 1,\ \gamma \in \Gamma_\mathrm{K}} \frac{\gamma-1}{\chi(\gamma)-1} x = \nabla x$, où $\nabla = t\partial = t\frac{d}{dt}$ est une dérivation de $\mathbf{B}_{\mathrm{rig,K}}^\dagger$.*

L'existence de la limite résulte d'une étude directe de l'action de Γ_K ; le reste est un calcul immédiat.

Ce qui précède correspond au cas de la représentation triviale ; dans le cas général, on a le résultat suivant :

Proposition 5.13 ([6]). — *Si* V *est une* $\mathbf{Q}_p$*-représentation de* $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$*, la famille d'opérateurs* $\frac{\gamma-1}{\chi(\gamma)-1}$ *tend, quand* $\gamma \in \Gamma_{\mathrm{K}}$ *tend vers* 1*, vers une connexion* ∇_{V} *au-dessus de* ∇ *sur* $\mathbf{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(\mathrm{V})$*. De plus, si* n *est assez grand, cette connexion laisse stable le sous-*$\mathbf{B}_{\mathrm{K}}^{]0,p^{-n}]}$*-module* $\mathbf{D}^{]0,p^{-n}]}(\mathrm{V}) = \mathbf{B}_{\mathrm{K}}^{]0,p^{-n}]} \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{K}}^{(0,p^{-n}]}} \mathbf{D}^{(0,p^{-n}]}(\mathrm{V})$ *de* $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig,K}} \otimes_{\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{K}}} \mathbf{D}^{\dagger}(\mathrm{V})$*.*

On a donc associé à toute $\mathbf{Q}_p$-représentation V de $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$ un module avec connexion et structure de Frobenius sur l'anneau de Robba $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig,K}}$. Ce n'est malheureusement pas suffisant pour pouvoir utiliser les résultats généraux sur les équations différentielles p-adiques car t n'est pas inversible dans $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig,K}}$, ce qui se traduit par l'existence potentielle d'une infinité de singularités dans toute couronne du type $0 < v_p(\mathrm{T}) \leq r$. Comme t n'a que des pôles simples, ces singularités sont régulières et on peut « localiser en $\varepsilon^{(n)} - 1$ » pour les étudier.

5.3.3. *Localisation.* La proposition 3.3 permet de déduire du théorème 5.9 le résultat suivant :

Proposition 5.14. — *Si* $d \geq 1$*, les applications naturelles*

$$\varinjlim \mathrm{H}^1(\Gamma_{\mathrm{K}}, \mathrm{GL}_d(\mathrm{K}_n[[t]])) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\Gamma_{\mathrm{K}}, \mathrm{GL}_d((\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})^{\mathscr{H}_{\mathrm{K}}})) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathscr{G}_{\mathrm{K}}, \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})),$$

induites par l'inflation de Γ_{K} *à* $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$ *et les inclusions* $\mathrm{K}_n[[t]] \subset (\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})^{\mathscr{H}_{\mathrm{K}}} \subset \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$*, sont des bijections.*

Comme précédemment, on peut utiliser cette proposition pour définir, si n est assez grand, un élément privilégié $\mathbf{D}^+_{\mathrm{Dif},n}(\mathrm{V})$ parmi les sous-$\mathrm{K}_n[[t]]$-modules libres de rang d de $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{V}$, fixes par $\mathscr{H}_{\mathrm{K}}$, stables par $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$ et engendrant $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{V}$.

Proposition 5.15. — (i) *L'image de* $\mathbf{D}^+_{\mathrm{Dif},n}(\mathrm{V})$ *par* $\theta : \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{V} \to \mathrm{C} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{V}$ *est* $\mathbf{D}_{\mathrm{Sen},n}(\mathrm{V})$*.*

(ii) *La famille d'opérateurs* $\frac{\gamma-1}{\chi(\gamma)-1}$ *tend, quand* $\gamma \in \Gamma_{\mathrm{K}}$ *tend vers* 1*, vers une connexion* ∇_{V} *au-dessus de* $\nabla = t\frac{d}{dt}$ *sur* $\mathbf{D}^+_{\mathrm{Dif},n}(\mathrm{V})$ *et on a* $\theta \circ \nabla_{\mathrm{V}} = \Theta_{\mathrm{V}}$*.*

(iii) *De plus,* $\mathbf{D}^+_{\mathrm{Dif},n}(\mathrm{V}) = \mathrm{K}_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{K}}^{]0,p^{-n}]}} \mathbf{D}^{]0,p^{-n}]}(\mathrm{V})$ *et cette identification commute à* ∇_{V}*.*

Le (iii) montre que $\mathbf{D}^+_{\mathrm{Dif},n}(\mathrm{V})$ est le localisé du (φ, ∇)-module $\mathbf{D}^{]0,p^{-n}]}(\mathrm{V})$ en $\varepsilon^{(n)} - 1$ et le (ii) montre que le résidu de la connexion ∇_{V} en ce point est Θ_{V}. Pour pouvoir se débarrasser de ces singularités, il faut au moins que Θ_{V} soit diagonalisable à valeurs propres entières (i.e. que V soit de Hodge-Tate), mais ce n'est pas suffisant (voir ci-dessous) ; en tout cas, ce résultat montre que le (φ, ∇)-module associé à une représentation galoisienne admet en général une infinité de singularités « non enlevables ».

Proposition 5.16 ([6, 43]). — (i) $\mathbf{D}^+_{\mathrm{Dif},n}(\mathrm{V})$ *est sans singularité si et seulement si* V *est* C-*admissible.*

(ii) $\mathbf{D}^+_{\mathrm{Dif},n}(\mathrm{V})$ *est à singularités apparentes* (la connexion a une base de sections horizontales dans $\mathbf{D}_{\mathrm{Dif},n}(\mathrm{V}) = \mathbf{D}^+_{\mathrm{Dif},n}(\mathrm{V})[\frac{1}{t}]$) *si et seulement si* V *est de de Rham.*

Le (i) est une évidence et le (ii) se démontre en utilisant la proposition 5.6. Remarquons que si V est de de Rham, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{Dif},n}(\mathrm{V}) = \mathrm{K}_n((t)) \otimes_{\mathrm{K}} \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\mathrm{V})$ et donc $\mathbf{D}_{\mathrm{Dif},n}(\mathrm{V})$ possède un sous-$\mathrm{K}_n[[t]]$-réseau sur lequel on peut diviser ∇_{V} par t, à savoir $\mathrm{K}_n[[t]] \otimes_{\mathrm{K}} \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\mathrm{V})$.

5.3.4. *Le (φ, ∂)-module attaché à une représentation de de Rham.* D'après le paragraphe précédent, si V est de de Rham, les singularités de ∇_{V} ne sont qu'apparentes d'un point de vue local ; le problème est donc d'arriver à les supprimer simultanément ou, ce qui revient au même, de trouver un réseau sur lequel on puisse diviser ∇_{V} par t. Le lemme suivant fournit la clé de ce que l'on doit faire.

Lemme 5.17. — x est divisible par t dans $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig,K}}$ si et seulement si $\iota_n(x) \in t\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$, pour tout n assez grand.

Soit alors $\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(\mathrm{V}) = \mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig,K}} \otimes_{\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{K}}} \mathbf{D}^\dagger(\mathrm{V})$, et soient $\mathbf{N}^+_{\mathrm{dR}}(\mathrm{V}) = \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathrm{K}} \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(\mathrm{V})$ et $\mathbf{N}^\dagger_{\mathrm{rig}}(\mathrm{V})$ l'ensemble des $x \in \mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(\mathrm{V})[\frac{1}{t}]$, tels que $\iota_n(x) \in \mathbf{N}^+_{\mathrm{dR}}(\mathrm{V})$ si n est assez grand (dépendant de x). Ce $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig,K}}$-module est fermé et, si a et b sont respectivement le plus grand et le plus petit poids de Hodge-Tate de V, alors $\mathbf{N}^\dagger_{\mathrm{rig}}(\mathrm{V})$ contient $t^{-b}\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(\mathrm{V})$ et est contenu dans $t^{-a}\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(\mathrm{V})$; c'est donc un $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig,K}}$-module libre de rang d (cf. prop. 1.1). Un peu plus de travail permet d'obtenir :

Théorème 5.18 ([6]). — *Si* V *est une $\mathbf{Q}_p$-représentation de de Rham de $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$ de dimension d, alors $\mathbf{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(\mathrm{V})[\frac{1}{t}]$ contient un unique sous-$\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig,K}}$-module $\mathbf{N}^\dagger_{\mathrm{rig}}(\mathrm{V})$ libre de rang d stable par $\partial_{\mathrm{V}} = t^{-1}\nabla_{\mathrm{V}}$.*

De plus, ce module est stable par φ et Γ_{K} et on a

$$\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig,K}}[\frac{1}{t}] \otimes_{\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig,K}}} \mathbf{N}^\dagger_{\mathrm{rig}}(\mathrm{V}) = \mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig,K}}[\frac{1}{t}] \otimes_{\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{K}}} \mathbf{D}^\dagger(\mathrm{V}).$$

Ce théorème admet comme corollaire la conjecture de monodromie de Fontaine (modulo la conjecture de monodromie de Crew) : si V est de de Rham, $\mathbf{N}^\dagger_{\mathrm{rig}}(\mathrm{V})$ est un (φ, ∂)-module sur l'anneau de Robba $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{rig,K}}$. Un tel module étant quasi-unipotent d'après la conjecture de Crew, il existe une extension finie L de K telle que $\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{log,L}}[\frac{1}{t}] \otimes_{\mathbf{B}^\dagger_{\mathrm{K}}} \mathbf{D}^\dagger(\mathrm{V})$ admette une base constituée de sections horizontales pour ∇_{V}. Vu le lien entre Γ_{L} et ∇_{V}, cela implique que Γ_{L} agit à travers un quotient fini sur l'espace vectoriel des sections horizontales, et la proposition 5.8 permet de montrer que V est semi-stable en tant que représentation de $\mathscr{G}_{\mathrm{L}_n}$ si n est assez grand.

Remarque 5.19 ([6]). — Si V est C-admissible, alors $\mathbf{N}^\dagger_{\mathrm{rig}}(\mathrm{V}) = \mathbf{D}^\dagger(\mathrm{V})$. Ceci permet de déduire du théorème de Tsuzuki (cor. 2.10) l'équivalence (cf. th. 5.11)

« V est C-admissible » $\Leftrightarrow$ « l'inertie de $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}$ agit à travers un quotient fini ».

Postface (janvier 2003)

Depuis la rédaction de cet exposé, le sujet a connu quelques prolongements :

— Kedlaya a annoncé, comme conséquences de la conjecture de Crew, des résultats généraux de finitude [57] pour la cohomologie rigide avec coefficients, et une preuve [58] des conjectures de Weil par voie p-adique (la possibilité d'obtenir une telle preuve avait été suggérée par Mebkhout [63]).

— En faisant du mécano avec certains des arguments de Berger [5, 6] et Kedlaya [54], on peut obtenir [28] une démonstration de la conjecture de Fontaine évitant complètement la théorie des équations différentielles p-adiques ; les détails seront publiés ailleurs.

Remerciements

La rédaction de cet exposé a bénéficié des remarquables conditions de travail offertes par le K.I.A.S. de Seoul, et je voudrais remercier cette institution et Minhyong Kim de leur hospitalité.

RÉFÉRENCES

[1] Y. André, Représentations galoisiennes et opérateurs de Bessel p-adiques, Ann. Inst. Fourier **52** (2002).

[2] Y. André, Filtrations de type Hasse-Arf et monodromie p-adique, Inv. Math. **148** (2002), 285–317.

[3] J. Ax, Zeroes of polynomials over local fields. The Galois action, J. Algebra **15** (1970), 417–428.

[4] D. Benois, On Iwasawa theory of crystalline representations, Duke Math. J. **104** (2000) 211–267.

[5] L. Berger, *Représentations p-adiques et équations différentielles*, thèse de l'université Paris 6 (2001).

[6] L. Berger, Représentations p-adiques et équations différentielles, Inv. Math. **148** (2002), 219–284.

[7] P. Berthelot, Finitude et pureté cohomologique en cohomologie rigide, Inv. Math. **128** (1997), 329–377.

[8] D. Bertrand, Groupes algébriques et équations différentielles linéaires, *Séminaire Bourbaki* 1991/92, exp. 750, Astérisque **206** (1992), 183–204.

[9] N. Bourbaki, *Algèbre commutative, IX-X,* Masson, Paris, 1983.

[10] C. Breuil, Une application de corps des normes, Comp. Math. **117** (1999), 189–203.

[11] F. Cherbonnier, Représentations p-adiques surconvergentes, thèse de l'université d'Orsay (1996).

[12] F. Cherbonnier et P. Colmez, Représentations p-adiques surconvergentes, Inv. Math. **133** (1998), 581–611.

[13] F. Cherbonnier et P. Colmez, Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques d'un corps local, J. Amer. Math. Soc. **12** (1999), 241–268.

[14] B. Chiarellotto et G. Christol, Overconvergent isocrystals and F-isocrystals, Comp. Math. **100** (1996), 77–99.

[15] G. Christol, About a Tsuzuki theorem, *p-adic functional analysis (Ioannina, 2000)*, 63–74, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **222**, Dekker, New York, 2001.

[16] G. Christol et B. Dwork, Modules différentiels sur des couronnes, Ann. Inst. Fourier **44** (1994), 689–720.

[17] G. Christol et Z. Mebkhout, Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques I, Ann. Inst. Fourier **43** (1993), 1545–1574.

[18] G. Christol et Z. Mebkhout, Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques II, Ann. of Maths **146** (1997), 345–410.

[19] G. Christol et Z. Mebkhout, Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques III, Ann. of Maths **151** (2000), 385–457.

[20] G. Christol et Z. Mebkhout, Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques IV, Inv. Math. **143** (2001), 629–672.

[21] G. Christol et Z. Mebkhout, Équations différentielles p-adiques et coefficients p-adiques sur les courbes, Astérisque **279** (2002), 125–183.

[22] G. Christol et P. Robba, *Équations différentielles p-adiques. Applications aux sommes exponentielles*, Actualités Mathématiques, Hermann, Paris, 1994.

[23] P. Colmez, Sur un résultat de Shankar Sen, C.R.A.S. **318** (1994), 983–985.

[24] P. Colmez, Représentations p-adiques d'un corps local, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians II (Berlin 1998)*, Doc. Mat. Extra vol. II (1998), 153–162.

[25] P. Colmez, Représentations cristallines et représentations de hauteur finie, J. Reine Angew. Math. **514** (1999), 119–143.

[26] P. Colmez, Fonctions L p-adiques, *Séminaire Bourbaki* 1998/99, exp. 851, Astérisque **266** (2000), 21–58.

[27] P. Colmez, Espaces de Banach de dimension finie, J. Inst. Math. Jussieu **1** (2002), 331–439.

[28] P. Colmez, exposé à Orsay, novembre 2001.

[29] P. Colmez et J-M. Fontaine, Construction des représentations p-adiques semi-stables, Inv. Math. **140** (2000), 1–43.

[30] R. Crew, F-isocrystals and p-adic representations, *Algebraic Geometry - Bowdoin 1985*, Proc. Symp. Pure Math. **XLVI** (2) (1987), 111–138.

[31] R. Crew, Finiteness theorems for the cohomology of an overconvergent isocrystal on a curve, Ann. scient. E.N.S. **31** (1998), 717–763.

[32] R. Crew, Canonical extensions, irregularities, and the Swan conductor, Math. Ann. **316** (2000), 19–37.

[33] B. Dwork, On exponents of p-adic differential modules, J. Reine Angew. math. **484** (1997), 85–126.

[34] B. Dwork, N. Gerotto et F. Sullivan, *An introduction to* G*-functions*, Ann. of Math. Studies **133**, Princeton Univ. Press (1994).

[35] G. Faltings, Almost étale extensions, Astérisque **279** (2002), 185–270.

[36] J-M. Fontaine, Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate, *Journées arithmétiques de Rennes III*, Astérisque **65** (1979), 3–80.

[37] J-M. Fontaine, Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local ; construction d'un anneau de Barsotti-Tate. Ann. Math. **115** (1982), 529–577.

[38] J-M. Fontaine, Cohomologie de de Rham, cohomologie cristalline et représentations p-adiques, *Algebraic geometry (Tokyo/Kyoto,1982)*, SLN **1016** (1983), 86–108.

[39] J-M. Fontaine, Représentations p-adiques des corps locaux, *The Grothendieck Festschrift*, vol II, Birkhauser, Boston 249–309, 1991.

[40] J-M. Fontaine, Le corps des périodes p-adiques, *Périodes p-adiques* exp. II, Astérisque **223** (1994), 59–102.

[41] J-M. Fontaine, Représentations p-adiques semi-stables. *Périodes p-adiques*, exp. III, Astérisque **223** (1994) 113–184.

[42] J-M. Fontaine, exposé à Orsay, 1998.

[43] J-M. Fontaine, Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques, Astérisque (à paraître).

[44] J-M. Fontaine et G. Laffaille, Construction de représentations p-adiques, Ann. Sci. E.N.S. **15** (1982), 547–608.

[45] J-M. Fontaine et J-P. Wintenberger, Le corps des normes de certaines extensions algébriques de corps locaux, C.R.A.S. **288** (1979) 367–370.

[46] A. Grothendieck, lettres des 24/9/64 p. 183 et 3-5/10/64 p. 204, *Correspondance Grothendieck-Serre*, Documents Mathématiques **2**, S.M.F. (2001).

[47] G. Henniart, La conjecture de Langlands locale numérique pour GL(n), An. Sci. E.N.S. **21** (1988), 497–544.

[48] L. Herr, Sur la cohomologie galoisienne des corps p-adiques, Bull. S.M.F. **126** (1998), 563–600.

[49] L. Herr, Une approche nouvelle de la dualité de Tate, Math. Ann. **320** (2001), 307–337.

[50] O. Hyodo, $H^1_g(K, V) = H^1_{st}(K, V)$, *proceedings of a symposium on arithmetic geometry*, ed. K. Kato, M. Kurihara, T. Saito, Univ. Tokyo (1991).

[51] L. Illusie, Autour du thórème de monodromie locale, *Périodes p-adiques*, exp. I, Astérisque **223** (1994), 9–57.

[52] A. J. de Jong, Smoothness, semi-stability and alterations, Publ. Math. I.H.E.S. **83** (1996), 51–93.

[53] N. Katz, p-adic properties of modular schemes and modular forms, *Modular functions of one variable III*, SLN **350** (1973), 69–190.

[54] K. Kedlaya, A p-adic local monodromy theorem, Ann. of Math., (à paraître).

[55] K. Kedlaya, Full faithfulness for overconvergent F-isocrystals, preprint 2001.

[56] K. Kedlaya, Semi-stable reduction for overconvergent F-isocrystals on a curve, preprint 2001.

[57] K. Kedlaya, Finiteness of rigid cohomology with coefficients, preprint 2002.

[58] K. Kedlaya, Fourier transforms and p-adic Weil II, preprint 2002.

[59] M. Lazard, Les zéros des fonctions analytiques d'une variable sur un corps valué complet, Publ. Math. I.H.E.S. **14** (1962) 47–75.

[60] F. Loeser, Exposants p-adiques et théorèmes d'indice pour les équations différentielles p-adiques (d'après G. Christol et Z. Mebkhout), *Séminaire Bourbaki* 1996/97, exp. 822, Astérisque **245** (1997), 57–81.

[61] S. Matsuda, Local indices of p-adic differential operators corresponding to Artin-Schreier-Witt coverings, Duke Math. J. **77** (1995), 607–625.

[62] S. Matsuda, Katz correspondence for quasi-unipotent overconvergent isocrystals, Comp. Math. **134** (2002), 1–34.

[63] Z. Mebkhout, Sur le théorème de finitude de la cohomologie p-adique d'une variété affine non singulière, Amer. J. Math. **119** (1997), 1027–1081.

[64] Z. Mebkhout, Analogue p-adique du théorème de Turritin et le théorème de la monodromie p-adique, Inv. Math. **148** (2002), 319–351.

[65] P. Robba, On the index of p-adic differential operators I, Ann. of Math. **101** (1975), 280–316.

[66] P. Robba, On the index of p-adic differential operators II, Duke Math. J. **43** (1976), 19–31.

[67] P. Robba, On the index of p-adic differential operators III, applications to twisted exponential sums, Astérisque **119-120** (1984), 191–266.

[68] P. Robba, Indice d'un opérateur différentiel p-adique IV. Cas des systèmes. Mesure de l'irrégularité dans un disque, Ann. Inst. Fourier **35** (1985), 13–55.

[69] S. Sen, Lie algebras of Galois groups arising from Hodge-Tate modules, Ann. of Math. **97** (1973), 160–170.

[70] S. Sen, Continuous cohomology and p-adic Galois representations, Inv. Math. **62** (1980/81), 89–116.

[71] J-P. Serre, *Corps locaux*, Deuxième édition. Publications de l'Université de Nancago, No. VIII. Hermann, Paris, 1968. 245 pp.

[72] J. Tate, p-divisible groups, *Proc. Conf. Local Fields* (*Driebergen, 1966*) 158–183 Springer, Berlin.

[73] T. Tsuji, p-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case. Inv. Math. **137** (1999), 233–411.

[74] T. Tsuji, Semi-stable conjecture of Fontaine-Jannsen : a survey, Astérisque **279** (2002), 323–370.

[75] N. Tsuzuki, The local index and the Swan conductor, Comp. Math. **111** (1998), 245–288.

[76] N. Tsuzuki, Slope filtration of quasi-unipotent overconvergent F-isocrystals, Ann. Inst. Fourier **48** (1998), 379–412.

[77] N. Tsuzuki, Finite local monodromy of overconvergent unit-root F-isocrystal on a curve, Amer. J. Math. **120** (1998), 1165–1190.

[78] N. Wach, Représentations p-adiques potentiellement cristallines, Bull. S.M.F. **124** (1996), 375–400.

[79] N. Wach, Représentations cristallines de torsion, Comp. Math. **108** (1997), 185–240.

[80] J-P. Wintenberger, Le corps des normes de certaines extensions infinies des corps locaux ; applications, Ann. Sci. E.N.S. **16** (1983), 59–89.

[81] P. Young, Radii of convergence and index for p-adic differential operators, Trans. A.M.S. **333** (1992), 769–785.

Pierre COLMEZ

Institut de mathématiques de Jussieu
4 place Jussieu
75005 PARIS
E-mail : colmez@math.jussieu.fr