
FONCTIONS LOCALEMENT ANALYTIQUES SUR $\mathbf{Z}_p$

par

Pierre Colmez & Shanwen Wang

Résumé. — Nous donnons une preuve par dualité du théorème d'Amice sur les coefficients de Mahler des fonctions localement analytiques sur $\mathbf{Z}_p$.

Abstract. — We give a proof by duality of Amice's result on Mahler coefficients of locally analytic functions on $\mathbf{Z}_p$.

1. Transformée d'Amice et théorème de Mahler

Soit L une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. Soit $\mathcal{C}$ l'espace des $\phi : \mathbf{Z}_p \rightarrow L$ continues. On munit $\mathcal{C}$ de la valuation $v_{\mathcal{C}}$ définie par $v_{\mathcal{C}}(\phi) = \inf_{x \in \mathbf{Z}_p} v_p(\phi(x))$ (c'est une valuation car $\mathbf{Z}_p$ est compact); cela fait de $\mathcal{C}$ un L -banach. On note Mes son dual que l'on munit de la topologie en faisant un L -smith (i.e. la boule unité Mes_0 de Mes est munie de la topologie de la convergence faible et $\text{Mes} = \varinjlim p^{-n} \text{Mes}_0$ est muni de la topologie de la limite inductive) de telle sorte que le dual de Mes est $\mathcal{C}$.

Comme $\mathbf{Z}_p$ est profini, l'espace LC des fonctions localement constantes est dense dans $\mathcal{C}$. Il s'ensuit que Mes_0 est aussi $\text{Hom}(\text{LC}_0, \mathcal{O}_L)$, où LC_0 est la boule unité de LC . Mais $\text{LC} = \varinjlim_h \text{LC}^{(h)}$, où $\text{LC}^{(h)} = \mathcal{C}(\mathbf{Z}/p^h)$, et donc le dual de $\text{LC}^{(h)}$ est $L[\mathbf{Z}/p^h] \cong L[T]/((1+T)^{p^h} - 1)$ où $a \in \mathbf{Z}$ s'envoie sur $(1+T)^a$; la boule unité correspondant à $\mathcal{O}_L[T]/((1+T)^{p^h} - 1)$. En passant à la limite, on en déduit un isomorphisme $\text{Mes}_0 \cong \mathcal{O}_L[[T]]$, la masse de Dirac δ_a en $a \in \mathbf{Z}_p$ s'envoyant sur $(1+T)^a = \sum_{n \geq 0} \binom{a}{n} T^n$. Si $\mu \in \text{Mes}$, on note A_{μ} son image dans $\mathcal{O}_L[[T]]\left[\frac{1}{p}\right]$; c'est la *transformée d'Amice* de μ .

Mais $\binom{a}{n} = \int_{\mathbf{Z}_p} \binom{x}{n} \delta_a$, et donc $A_{\delta_a} = \sum_{n \geq 0} \left(\int_{\mathbf{Z}_p} \binom{x}{n} \delta_a \right) T^n$ et, comme l'espace engendré par les masses de Dirac est dense dans Mes , la formule ci-dessus est valable pour tout μ :

$$A_{\mu} = \sum_{n \geq 0} \left(\int_{\mathbf{Z}_p} \binom{x}{n} \mu \right) T^n$$

Or T^n correspond à $(\delta_1 - \delta_0)^{*n}$, et donc les $(\delta_1 - \delta_0)^{*n}$ forment une base orthonormale de Mes . La relation $\binom{x+1}{n} - \binom{x}{n} = \binom{x}{n-1}$ permet de montrer que la base orthonormale de $\mathcal{C}$, duale de la base des $(\delta_1 - \delta_0)^{*n}$, est constituée des $\binom{x}{n}$. Si $\phi \in \mathcal{C}$, on a alors $\phi = \sum_{n \geq 0} \left(\int_{\mathbf{Z}_p} \phi (\delta_1 - \delta_0)^{*n} \right) \binom{x}{n}$. Si on définit les *coefficients de Mahler* de ϕ par :

$$a_n(\phi) := \int_{\mathbf{Z}_p} \phi (\delta_1 - \delta_0)^{*n} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \phi(n-k)$$

on obtient le théorème de Mahler [4] :

Théorème 1. — (Mahler) Si $\phi \in \mathcal{C}$, alors $a_n(\phi) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $\phi = \sum_{n \geq 0} a_n(\phi) \binom{x}{n}$ et $\phi \mapsto (a_n(\phi))_n$ est une isométrie de $\mathcal{C}$ sur $\ell_0^\infty(\mathbf{N})$.

Exemple 2. — (i) Si $v_p(z) > 0$, alors $x \mapsto (1+z)^x := \sum_{n \geq 0} z^n \binom{x}{n}$ est un caractère continu de $\mathbf{Z}_p$; ses coefficients de Mahler sont $(z^n)_n$.

(ii) Si $z = \zeta - 1$, avec $\zeta \in \mu_{p^\infty}$, le caractère $x \mapsto (1+z)^x = \zeta^x$ est localement constant, et les $x \mapsto \zeta^x$ pour $\zeta \in \mu_{p^\infty}$ forment une base de l'espace des fonctions localement constantes. Par exemple, $\mathbf{1}_{i+p^n \mathbf{Z}_p}(x) = \frac{1}{p^n} \sum_{\zeta \in \mu_{p^n}} \zeta^{-i} \zeta^x$.

Remarque 3. — On dispose d'un certain nombre d'actions naturelles sur l'espace de mesures. Par transport de structure, celles-ci induisent des actions sur $\mathcal{O}_L[[T]]$.

• $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \left(\mathbf{Z}_p \setminus \{0\} \begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$ agit par $\int_{\mathbf{Z}_p} \phi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mu = \int_{\mathbf{Z}_p} \phi(ax+b) \mu(x)$. Si $\lambda = \begin{pmatrix} p^k a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mu$, avec $k \geq 0$ et $a \in \mathbf{Z}_p^*$, on a $A_\lambda = (1+T)^b \varphi^k(\sigma_a(A_\mu))$, avec

$$(\varphi(F))(T) = F((1+T)^p - 1) \quad \text{et} \quad (\sigma_a(F))(T) = F((1+T)^a - 1)$$

• On définit $\psi(\mu)$ par $\int_{\mathbf{Z}_p} \phi \psi(\mu) := \int_{p\mathbf{Z}_p} \phi(p^{-1}x) \mu$. Comme $\mathbf{1}_{p\mathbf{Z}_p}(x) = \frac{1}{p} \sum_{\zeta \in \mu_p} \zeta^x$, on a

$$A_{\psi(\mu)} = \psi(A_\mu), \quad \text{avec} \quad (\psi(F))(T) := \varphi^{-1} \left(\frac{1}{p} \sum_{\zeta \in \mu_p} F((1+T)\zeta - 1) \right)$$

Si $\lambda = \text{Res}_{i+p^h \mathbf{Z}_p} \mu$, avec $h \geq 1$ et $i \in \mathbf{Z}_p$, on a :

$$A_\lambda = (1+T)^i \varphi^h(\psi^h((1+T)^{-i} A_\mu))$$

Notons que l'action de $\left(\mathbf{Z}_p \setminus \{0\} \begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$ s'étend à $L[[T]]$ mais que celle de ψ ne s'étend qu'au sous-anneau des fonctions convergeant sur la boule fermée $\{z, v_p(z) \geq \frac{1}{p-1}\}$ car $v_p(\zeta - 1) = \frac{1}{p-1}$ si $\zeta^p = 1$ et $\zeta \neq 1$.

2. Le théorème d'Amice

Si $h \geq 0$, soit $\text{LA}^{(h)}$ l'espace des $\phi : \mathbf{Z}_p \rightarrow L$, analytiques sur $i + p^h \mathbf{Z}_p$ pour tout $i \in \mathbf{Z}_p$ (ou, de manière équivalente, pour $i \in \{0, 1, \dots, p^h - 1\}$). En particulier, $\text{LA}^{(0)}$ est l'espace des fonctions de la forme $\phi(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$, avec $a_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$; muni de la valuation $v^{(0)}$ définie par $v^{(0)}(\phi) = \inf_{n \geq 0} v_p(a_n)$, $\text{LA}^{(0)}$ est un banach, et

1. Espace des suites d'éléments de L tendant vers 0.

les x^n , pour $n \geq 0$, en forment une base orthonormale. Comme la matrice de passage des $n! \binom{x}{n}$ aux x^n est à coefficients dans $\mathbf{Z}_p$, triangulaire avec des 1 sur la diagonale, les $n! \binom{x}{n}$ forment aussi une base orthonormale de $\mathrm{LA}^{(0)}$. Le th. 5 ci-dessous généralise ce résultat à $\mathrm{LA}^{(h)}$.

Exemple 4. — (i) Si $v_p(z) > \frac{1}{p-1}$, alors $x \mapsto (1+z)^x$ est élément de $\mathrm{LA}^{(0)}$.

(ii) Si $h \geq 1$ et si $v_p(z) > \frac{1}{(p-1)p^h}$, alors $x \mapsto (1+z)^x$ est élément de $\mathrm{LA}^{(h)}$.

Démonstration. — On a $(1+z)^x = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} n! \binom{x}{n}$ et le (i) résulte de ce que les $n! \binom{x}{n}$ forment une base orthonormale de $\mathrm{LA}^{(0)}$ et (2) $v_p\left(\frac{z^n}{n!}\right) \geq \left(v_p(z) - \frac{1}{p-1}\right)n \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Pour prouver le (ii), il suffit de prouver que la restriction de $x \mapsto (1+a)^x$ est analytique sur $p^h \mathbf{Z}_p$ (l'analyticité de sa restriction à $i + p^h \mathbf{Z}_p$ en découle immédiatement). Ceci est équivalent à ce que $x \mapsto (1+a)^{p^h x}$ soit analytique sur $\mathbf{Z}_p$. Or cela suit du (i) et de ce que $v_p((1+a)^{p^h} - 1) \geq \inf(1, p^h v_p(a)) > \frac{1}{p-1}$ si $v_p(a) > \frac{1}{(p-1)p^h}$. $\square$

Maintenant, $\phi \in \mathrm{LA}^{(h)}$ s'écrit, de manière unique, $\phi(x) = \sum_{i=0}^{p^h-1} \mathbf{1}_{i+p^h \mathbf{Z}_p} \phi_i\left(\frac{x-i}{p^h}\right)$, avec $\phi_i \in \mathrm{LA}^{(0)}$. On en déduit un isomorphisme $(\mathrm{LA}^{(0)})^{\oplus p^h} \xrightarrow{\sim} \mathrm{LA}^{(h)}$, et on munit $\mathrm{LA}^{(h)}$ de la valuation $v^{(h)}$ telle que cet isomorphisme soit une isométrie. Alors $\mathrm{LA}^{(h)}$, muni de $v^{(h)}$ est un L -banach ; notons $\mathcal{D}^{(h)}$ son L -dual et notons $\mathcal{D}_0^{(h)}$ la boule unité de ce L -smith.

Notre but est de donner une preuve du résultat suivant d'Amice [1, 2], par dualité ; une démonstration directe peut se trouver dans [3].

Théorème 5. — (Amice) Les $\lfloor \frac{n}{p^h} \rfloor! \binom{x}{n}$ forment une base orthonormale de $\mathrm{LA}^{(h)}$.

Démonstration. — Comme expliqué ci-dessus, le résultat est immédiat pour $h = 0$. Si $h \geq 0$, soit $\mathcal{O}_L[T]^{(h)} \subset L[[T]]$ l'ensemble des $\sum_{n \geq 0} a_n \frac{T^n}{\lfloor n/p^h \rfloor!}$, avec $a_n \in \mathcal{O}_L$ pour tout n . Alors $\mathcal{O}_L[T]^{(h)}$ est un sous-anneau⁽³⁾ de $L[[T]]$. Par dualité, l'énoncé du théorème équivaut à ce que la transformée d'Amice induit un isomorphisme $\mathcal{D}_0^{(h)} \cong \mathcal{O}_L[T]^{(h)}$.

L'isomorphisme $(\mathrm{LA}^{(0)})^{\oplus p^h} \xrightarrow{\sim} \mathrm{LA}^{(h)}$ induit, par dualité, une décomposition de A_μ pour $\mu \in \mathcal{D}^{(h)}$, de manière unique, sous la forme

$$A_\mu = \sum_{i=0}^{p^h-1} (1+T)^i \varphi^h(A_{\mu_i}), \quad \text{avec } \mu_i \in \mathcal{D}^{(0)}.$$

Il résulte du lemme 7 que $A_{\mu_i} = \psi^h((1+T)^{-i} A_\mu)$, et on cherche à prouver que

$$A_\mu \in \mathcal{O}_L[T]^{(h)} \iff A_{\mu_i} \in \mathcal{O}_L[T]^{(0)} \text{ pour tout } i.$$

2. Si $N = a_0 + pa_1 + \dots + p^r a_r$ avec $a_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, on a $v_p(N!) = \frac{N-S(N)}{p-1}$, avec $S(N) := a_0 + a_1 + \dots + a_r$.

3. Complété de l'anneau des puissances divisées partielles relativement à l'idéal (p, T) de $\mathcal{O}_L[T]$.

L'implication $\Leftarrow$ résulte du lemme 6 et l'implication $\Rightarrow$ (plus délicate) fait l'objet du lemme 10 (pour $n = h$ dans les notations de ce lemme). $\square$

3. Estimées pour l'action de ψ

Lemme 6. — Si $f \in L[[T]]$ et si $h \geq 0$, les conditions suivantes sont équivalentes :

- $f \in \mathcal{O}_L[T]^{(h)}$,
- $\varphi(f) \in \mathcal{O}_L[T]^{(h+1)}$.

Démonstration. — Les deux conditions sont équivalentes à $f(T^p) \in \mathcal{O}_L[T]^{(h+1)}$: évident pour la première et, pour la seconde, résulte de ce que $\varphi(T) - T^p \in p\mathcal{O}_L[T]$. $\square$

Si $s \geq 0$, notons $\mathcal{O}(s) \subset L[[T]]$ l'anneau des séries convergeant sur $B(0, s) := \{z, v_p(z) \geq s\}$.

Lemme 7. — Soit $r \leq \frac{p}{p-1}$.

- (i) Si $F \in \mathcal{O}(p^{-1}r)$, il existe $\psi(F) \in \mathcal{O}(r)$, unique, telle que

$$\frac{1}{p} \sum_{\zeta^p=1} F((1+T)\zeta - 1) = \psi(F)((1+T)^p - 1) \quad \left[= (\varphi(\psi(F)))(T) \right]$$

- (ii) Si $F \in \mathcal{O}(p^{-1}r)$, il existe $G_i \in \mathcal{O}(r)$ pour $0 \leq i \leq p-1$, uniques, tels que $F = \sum_{i=0}^{p-1} (1+T)^i \varphi(G_i)$, et on a $G_i = \psi((1+T)^{-i}F)$.

- (iii) Si $F \in \mathcal{O}(p^{-h}r)$ avec $h \geq 1$, et si $G_i \in \mathcal{O}(r)$ pour $0 \leq i \leq p^h - 1$ sont telles que $F = \sum_{i=0}^{p^h-1} (1+T)^i \varphi^h(G_i)$, alors $G_i = \psi^h((1+T)^{-i}F)$.

Démonstration. — $x \mapsto (1+x)^p - 1$ fait de $B(0, p^{-1}r)$ un revêtement étale de $B(0, r)$, de groupe de Galois μ_p , l'action de $\zeta \in \mu_p$ étant $z \mapsto (1+z)\zeta - 1$. D'où le (i).

Pour le (ii), l'unicité des G_i et la formule découlent du fait que $(1+T)^i$ est vecteur propre de μ_p pour le caractère $\zeta \mapsto \zeta^i$.

Enfin, le (iii) se déduit du (ii) par une récurrence facile. $\square$

Lemme 8. — Si $n \geq 0$, et si

$$\sum_{k \geq 0} a_{n,k} \frac{T^k}{k!} = \frac{1}{p} \sum_{\zeta^p=1} \frac{(\zeta(1+T) - 1)^n}{n!} \quad \left[= \varphi\left(\psi\left(\frac{T^n}{n!}\right)\right) \right]$$

alors $a_{n,k} \in \mathbf{Z}_p$ pour tout $k \geq 0$.

Démonstration. — On a $a_{n,k} = 0$ si $k > n$ et $a_{n,k} = \frac{1}{p} \sum_{\zeta^p=1} \frac{(\zeta-1)^{n-k}}{(n-k)!} \zeta^k$ si $k \leq n$. Si $k = n$, on a $a_{n,k} = 1$; si $k < n$ le terme pour $\zeta = 1$ est 0 et les autres sont les conjugués d'un élément de $\mathbf{Z}_p[\mu_p]$ de valuation

$$(n-k)v_p(\zeta_p - 1) - v_p((n-k)!) = \frac{n-k}{p-1} - \frac{(n-k) - S(n-k)}{p-1} = \frac{S(n-k)}{p-1} > 0$$

Il s'ensuit que la somme Σ appartient à $\mathbf{Z}_p$ et $v_p(\Sigma) > 0$, et donc $a_{n,k} = \frac{1}{p} \Sigma \in \mathbf{Z}_p$, ce que l'on cherchait à établir $\square$

Lemme 9. — Si $k < n$, alors

$$v_p\left(\frac{k!}{[k/p^h]!}\right) \leq v_p\left(\frac{n!}{[n/p^h]!}\right)$$

Démonstration. — On utilise la formule de la note 2. Soient $a_0 + pa_1 + \cdots + p^r a_r$ et $b_0 + pb_1 + \cdots + p^r b_r$ les développements de n et k en base p (on ne suppose pas $a_r \neq 0$ ou $b_r \neq 0$). Comme $k < n$, il existe s maximal avec $a_s \neq b_s$ et alors $b_s < a_s$.

Le développement de $[n/p^h]$ est $a_h + pa_{h+1} + \cdots + p^{r-h} a_r$; on en déduit l'identité

$$(p-1)v_p\left(\frac{n!}{[n/p^h]!}\right) = (p-1)a_1 + \cdots + (p^{h-1}-1)a_{h-1} + (p^h-1)(a_h + \cdots + p^{r-h} a_r)$$

et on a la même formule pour $(p-1)v_p\left(\frac{k!}{[k/p^h]!}\right)$ en remplaçant a_i par b_i . Il en résulte que la différence $D := (p-1)\left(v_p\left(\frac{n!}{[n/p^h]!}\right) - v_p\left(\frac{k!}{[k/p^h]!}\right)\right)$ est minimale pour $a_s = b_s + 1$, $a_i = 0$ et $b_i = p-1$ pour $i < s$, auquel cas cette différence vaut

$$\begin{aligned} & (p^h-1)p^{s-h} - (p-1)((p-1) + \cdots + (p^{h-1}-1) + (p^h-1)(1 + \cdots + p^{s-h-1})) \\ &= (p^h-1)p^{s-h} - ((p^h-1) - h(p-1) + (p^h-1)(p^{s-h}-1)) = (p-1)h \geq 0 \end{aligned}$$

(Ce calcul est valable pour $s \geq h$; si $s < h$, on obtient $(p-1)s$ au lieu de $(p-1)h$.) $\square$

Lemme 10. — Si $h \geq n \geq 1$, alors $\psi^n(\mathcal{O}_L[T]^{(h)}) \subset \mathcal{O}_L[T]^{(h-n)}$.

Démonstration. — Le cas général se déduit du cas $n = 1$ par une récurrence immédiate, et le cas $n = 1$ est une conséquence des lemmes 8 et 9 qui permettent de prouver que $\varphi(\psi(\mathcal{O}_L[T]^{(h)})) \subset \mathcal{O}_L[T]^{(h)}$, et du lemme 6. $\square$

Références

- [1] Y. AMICE, Interpolation p -adique, Bull. SMF **92** (1964), 117–180. 3
- [2] Y. AMICE, Duals. Proc. of a conf. on p -adic analysis (Nijmegen 1978), 1-15, Nijmegen, Math. Institut Katholische Univ., 1978. 3
- [3] P. COLMEZ, Fonctions d'une variable p -adique, Astérisque **330** (2010), 13–59. 3
- [4] K. MAHLER, An interpolation series for continuous functions of a p -adic variable, J. reine angew. Math. **199** (1958), 23–34. 2

PIERRE COLMEZ, C.N.R.S., IMJ-PRG, Sorbonne Université, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France
E-mail : pierre.colmez@imj-prg.fr

SHANWEN WANG, School of mathematics, Renmin University of China, 59 ZhongGuanCun Street, 100872 Beijing, P.R. China • E-mail : s_wang@ruc.edu.cn