
UNE CONJECTURE C_{st} POUR LA COHOMOLOGIE À SUPPORT COMPACT

par

Pierre Colmez, Sally Gilles & Wiesława Nizioł

Résumé. — Soit $\mathbf{B}$ l'anneau des fonctions analytiques sur la courbe de Fargues-Fontaine Y_{FF} . Nous montrons qu'en adjoignant suffisamment de périodes itérées, on tue sa cohomologie galoisienne en degrés ≥ 1 . Pour $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$, le résultat analogue s'obtient en adjoignant simplement $\log t$ et relève du folklore. Cela permet de formuler des conjectures de type C_{dR} et C_{st} pour la cohomologie à support compact des variétés analytiques p -adiques.

Abstract. — Let $\mathbf{B}$ be the ring of analytic functions on the Fargues-Fontaine curve Y_{FF} . We show that, by adding sufficiently iterated periods, one can kill its Galois cohomology in degrees ≥ 1 . For $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$, the corresponding result is obtained by adjoining just $\log t$ and is folklore. This allows to formulate C_{dR} and C_{st} conjectures for the compactly supported cohomology of p -adic analytic varieties.

Table des matières

Introduction.....	2
1. La conjecture C_{dR} pour la cohomologie à support compact.....	3
2. Une construction universelle pour tuer $H^1(G, B)$	7
3. La conjecture C_{st} pour la cohomologie à support compact.....	13
Appendice A. Algèbres de mélange.....	21
Références.....	28

Introduction

Les conjectures C_{dR} et C_{st} [10, conj. 1.6] fournissent des recettes pour extraire, de leur cohomologie proétale p -adique, les cohomologies de de Rham et de Hyodo-Kato des variétés analytiques p -adiques : si Hom_{G_L} désigne les morphismes G_L -équivalents

P. C. et W. N. sont partiellement financés par la Simons Collaboration on Perfection in Algebra, Geometry, and Topology.

continus (pour les topologies naturelles sur les deux membres), on a la conjecture suivante.

Conjecture 0.1. — *Si Y est une variété analytique partiellement propre, définie sur une extension finie K de $\mathbf{Q}_p$, on a des isomorphismes fonctoriels (de K -modules filtrés et de (φ, N, G_K) -modules sur $\mathbf{Q}_p^{\text{nr}}$, respectivement)*

$$\begin{array}{ccc} (C_{\text{dR}}) & \text{Hom}_{G_K}(H_{\text{proét}}^n(Y_{\mathbf{C}_p}, \mathbf{Q}_p), \mathbf{B}_{\text{dR}}) \simeq H_{\text{dR}}^n(Y)^* \\ (C_{\text{st}}) & \varinjlim_{[L:K] < \infty} \text{Hom}_{G_L}(H_{\text{proét}}^n(Y_{\mathbf{C}_p}, \mathbf{Q}_p), \mathbf{B}_{\text{st}}) \simeq H_{\text{HK}}^n(Y_{\mathbf{C}_p})^* \end{array}$$

Les $H_{\text{proét}}^n(Y_{\mathbf{C}_p}, \mathbf{Q}_p)$ sont en général de dimension infinie, même si les $H_{\text{dR}}^n(Y)$ sont de dimension finie (c'est par exemple le cas pour le H^1 de l'analytifié d'une courbe algébrique non propre, cf. [6, th. 0.7] ou [5, th. 1.8]), et la formulation usuelle (covariante) des conjectures C_{dR} et C_{st} (pour la cohomologie étale des variétés algébriques) tombe en défaut (elle donnerait des groupes beaucoup trop gros), ce qui explique la formulation (contravariante) ci-dessus.

Pour la cohomologie à support compact, on a le même problème de finitude, mais prendre un point de vue contravariant ne suffit pas (rem. 1.6) : au lieu de Hom, on doit prendre un Hom dérivé (sinon on obtient des groupes trop petits), et aussi tuer la cohomologie galoisienne des anneaux $\mathbf{B}_{\text{dR}}$ et $\mathbf{B}_{\text{st}}$ en degrés ≥ 1 (sinon on se retrouve avec des termes parasites).

Dans cette note, on explique comment tuer⁽¹⁾, en degrés ≥ 1 , la cohomologie galoisienne des anneaux de périodes $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+, \mathbf{B}_{\text{dR}}$, en rajoutant un logarithme du $2i\pi$ p -adique de Fontaine (th. 1.4), et celle (des avatars $\mathbf{B}[\log \tilde{p}], \mathbf{B}[\log \tilde{p}, \frac{1}{t}]$) de $\mathbf{B}_{\text{st}}^+, \mathbf{B}_{\text{st}}$ en se fatiguant un peu plus (th. 3.19). Le cas de $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ relève du folklore mais qu'il existe un objet raisonnable tuant la cohomologie de $\mathbf{B}[\log \tilde{p}]$ est plus surprenant⁽²⁾.

Ceci nous permet de formuler (cf. conj. 1.5 et 3.22) un analogue de la conjecture 0.1 pour la cohomologie à support compact des variétés analytiques partiellement propres.

Remerciements. — Nous remercions Hui Gao pour des échanges intéressants concernant cet article.

Lors de la préparation de ce travail, ChatGPT (OpenAI) a été utilisé pour explorer et discuter certains arguments mathématiques, notamment pour détecter une erreur dans une version antérieure et développer la présentation par les algèbres de mélange.

1. Plus précisément, on veut une algèbre contenant l'anneau considéré, ayant même H^0 , mais tel que $H^i = 0$ pour $i \geq 1$.

2. Dans une version antérieure de cet article, nous avons affirmé que, quitte à remplacer $\mathbf{B}_{\text{st}}^+$ par $\mathbf{B}[\log \tilde{p}]$, il suffisait de rajouter $\log t$, mais comme nous l'expliquons dans le chap. 2, il n'est pas possible de s'en tirer en rajoutant un nombre fini d'éléments (le lemme 2.1 montre que rajouter un élément pour tuer une classe de cohomologie introduit de nouvelles classes non triviales).

1. La conjecture C_{dR} pour la cohomologie à support compact

1.1. Cohomologie galoisienne de B_{dR}

1.1.1. Cohomologie galoisienne de C

Soient κ un corps parfait dénombrable, de caractéristique p , $F := W(\kappa)[\frac{1}{p}]$ et K une extension finie totalement ramifiée de F (et donc le corps résiduel κ_K de K est κ). On note G_K le groupe de Galois absolu de K et C le complété d'une clôture algébrique de K . On doit à Tate [18] le calcul de la cohomologie galoisienne de C . Si $j \in \mathbf{Z}$, on note $C(j)$ le tordu de C par χ_{cycl}^j , où $\chi_{\text{cycl}} : G_K \rightarrow \mathbf{Z}_p^*$ est le caractère cyclotomique.

Proposition 1.1. — (Tate) On a

$$H^0(G_K, C(j)) = \begin{cases} K & \text{si } j = 0, \\ 0 & \text{si } j \neq 0; \end{cases} \quad H^1(G_K, C(j)) \cong \begin{cases} K \cdot \log \chi_{\text{cycl}} & \text{si } j = 0, \\ 0 & \text{si } j \neq 0; \end{cases}$$

$$H^i(G_K, C(j)) = 0, \text{ pour tout } j, \text{ si } i \geq 2.$$

1.1.2. Élimination de la cohomologie de C en degrés ≥ 1

On définit $\log t$ comme étant transcendant sur C , et on munit $C[\log t]$ de l'action de G_K donnée par $\sigma(\log t) = \log t + \log \chi_{\text{cycl}}(\sigma)$ (comme dans [3]).

Proposition 1.2. — On a

$$H^0(G_K, C[\log t]) = K, \quad H^i(G_K, C[\log t](j)) = 0 \text{ si } i \geq 1 \text{ ou si } j \neq 0.$$

Démonstration. — Notons $C[\log t]^{\leq k}$ le C -module des polynômes de degré $\leq k$ en $\log t$. Alors $C[\log t]^{\leq k}$ est stable par G_K et, si $j \in \mathbf{Z}$, on a une suite exacte de G_K -modules

$$0 \rightarrow C[\log t]^{\leq k}(j) \rightarrow C[\log t]^{\leq k+1}(j) \rightarrow C(j) \rightarrow 0$$

• Si $j \neq 0$, on en déduit, par une récurrence immédiate utilisant la prop. 1.1, que pour tout i et tout k , on a $H^i(G_K, C[\log t]^{\leq k}(j)) = 0$. En passant à la limite inductive, cela prouve que $H^i(G_K, C[\log t](j)) = 0$, pour tout i .

• Si $j = 0$, on prouve, par récurrence sur k , que $H^i(G_K, C[\log t]^{\leq k}) = 0$ si $i \geq 2$, et donc que $H^i(G_K, C[\log t]) = 0$ si $i \geq 2$. La suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte courte ci-dessus et la nullité de $H^2(G_K, C[\log t]^{\leq k})$ fournissent une suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H^0(G_K, C[\log t]^{\leq k}) & \rightarrow & H^0(G_K, C[\log t]^{\leq k+1}) & \rightarrow & H^0(G_K, C) \\ & & & & \swarrow & & \\ & & H^1(G_K, C[\log t]^{\leq k}) & \rightarrow & H^1(G_K, C[\log t]^{\leq k+1}) & \rightarrow & H^1(G_K, C) \rightarrow 0 \end{array}$$

Montrons, par récurrence sur k , que :

- $H^0(G_K, C[\log t]^{\leq k}) = K$,
- $H^1(G_K, C[\log t]^{\leq k}) \cong K$,
- $H^0(G_K, C) \rightarrow H^1(G_K, C[\log t]^{\leq k})$ est un isomorphisme,

- $H^1(G_K, C[\log t]^{\leq k}) \rightarrow H^1(G_K, C[\log t]^{\leq k+1})$ est l'application nulle.

Tous les modules ci-dessus sont des K -espaces vectoriels et l'hypothèse de récurrence alliée à la prop. 1.1 montre qu'ils sont tous de dimension 1 sauf peut-être $H^i(G_K, C[\log t]^{\leq k+1})$, pour $i = 0, 1$. Si $H^0(G_K, C[\log t]^{\leq k+1}) \neq K$, comme $H^0(G_K, C) = K$, il existe $a_k, \dots, a_0 \in C$ tels que $(\log t)^{k+1} + a_k(\log t)^k + \dots + a_0$ soit fixe par G_K . En appliquant $\sigma - 1$ et en regardant modulo $C[\log t]^{\leq k-1}$, cela donne $(\sigma - 1)a_k = -(k+1) \log \chi_{\text{cycl}}(\sigma)$, ce qui contredit le fait que la classe du 1-cocycle $\sigma \mapsto \log \chi_{\text{cycl}}(\sigma)$ dans $H^1(G_K, C)$ est non nulle (prop. 1.1).

On en déduit que $H^1(G_K, C[\log t]^{\leq k+1})$ est de dimension 1 et tous les autres énoncés résultent de l'exactitude de la suite ci-dessus. Par passage à la limite, on en déduit que $H^0(G_K, C[\log t]) = K$ et $H^1(G_K, C[\log t]) = 0$. $\square$

1.1.3. Élimination de la cohomologie de $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ en degrés ≥ 1

Comme $t^j \mathbf{B}_{\text{dR}}^+ / t^{j+1} \mathbf{B}_{\text{dR}}^+ = C(j)$, il n'est pas très difficile de déduire de la prop. 1.1 le résultat suivant.

Proposition 1.3. — Si $\Lambda = \mathbf{B}_{\text{dR}}^+, \mathbf{B}_{\text{dR}}$,

$$H^0(G_K, \Lambda) = K, \quad H^1(G_K, \Lambda) = K \cdot \log \chi_{\text{cycl}}, \quad H^i(G_K, \Lambda) = 0 \text{ si } i \geq 2.$$

La preuve de la prop. 1.2 peut alors s'adapter pour démontrer le résultat suivant, dans lequel on a posé (comme dans [12]) :

$$\mathbf{B}_{\text{pdR}}^+ := \mathbf{B}_{\text{dR}}^+[\log t], \quad \mathbf{B}_{\text{pdR}} := \mathbf{B}_{\text{dR}}[\log t]$$

Théorème 1.4. — Si $\Lambda = \mathbf{B}_{\text{pdR}}^+, \mathbf{B}_{\text{pdR}}$,

$$H^0(G_K, \Lambda) = K, \quad H^i(G_K, \Lambda) = 0 \text{ si } i \geq 1.$$

1.2. La conjecture C_{dR}

On munit $\mathbf{B}_{\text{pdR}}$ de la filtration définie par $\text{Fil}^i \mathbf{B}_{\text{pdR}} := t^i \mathbf{B}_{\text{pdR}}^+$.

Conjecture 1.5. — Si Y est une variété analytique lisse, de dimension d , partiellement propre, définie sur K , on a un isomorphisme naturel de K -modules filtrés :

$$(C_{\text{dR}}) \quad \text{R}\Gamma_{\text{dR}}(Y) \simeq \text{RHom}_{G_K}(\text{R}\Gamma_{\text{proét}, c}(Y_C, \mathbf{Q}_p(d))[2d], \mathbf{B}_{\text{pdR}})$$

En particulier, si Y est Stein, alors

$$\Omega^i(Y)[-i] \simeq \text{RHom}_{G_K}(\text{R}\Gamma_{\text{proét}, c}(Y_C, \mathbf{Q}_p(d))[2d], \mathbf{C}_p(i)[\log t])$$

Remarque 1.6. — (i) On peut mettre la conj. 0.1 sous une forme plus proche de celle ci-dessus en utilisant la dualité de Poincaré pour la cohomologie de de Rham.

(ii) Pour formuler une conjecture comme ci-dessus, la première idée qui vient à l'esprit serait de considérer $\text{Hom}_{G_K}(H_{\text{proét}, c}^i(Y_C, \mathbf{Q}_p), \mathbf{B}_{\text{dR}})$ (après tout, ça marche si Y est propre!). Le problème est que, si Y est une courbe affine, un petit calcul montre

que $\text{Hom}_{G_K}(H_{\text{proét},c}^1(Y_C, \mathbf{Q}_p), \mathbf{B}_{\text{dR}})$ ne contient qu'une petite partie de $H_{\text{dR}}^1(Y)$ (celle correspondant au sous-espace de pente 1 de $H_{\text{HK}}^1(Y_C)$, cf. rem. 1.7 ci-dessous).

(iii) La seconde idée serait de considérer un RHom_{G_K} plutôt qu'un Hom_{G_K} . Le cas d'une variété propre montre que ce n'est pas encore ça car, si V est une représentation de de Rham, $\text{Ext}_{G_K}^1(V, \mathbf{B}_{\text{dR}}) \cong \text{Ext}_{G_K}^0(V, \mathbf{B}_{\text{dR}})$ (en interprétant ces groupes comme $H^i(G_K, \mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes V^*)$ et en utilisant le fait que $\mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes V^* \cong \mathbf{B}_{\text{dR}}^{\oplus d}$ puisque V est de Rham, l'isomorphisme est le cup-produit avec $\log \chi_{\text{cycl}}$). Il s'ensuit que l'on va retrouver deux fois les groupes de cohomologie de de Rham au lieu d'une... Il faut donc tuer le $\text{Ext}_{G_K}^1$ pour les représentations de de Rham (et donc rajouter $\log t$ pour trivialisier $\log \chi_{\text{cycl}}$). Cela conduit à la conjecture C_{dR} ci-dessus, et on s'est débrouillé pour que cette conjecture soit un théorème si Y est propre.

(iv) Pour formuler C_{st} l'idée naturelle serait de remplacer $\mathbf{B}_{\text{dR}}$ par $\mathbf{B}_{\text{st}}$ comme pour la conj. 0.1, mais la cohomologie de $\mathbf{B}_{\text{st}}[\log t]$ n'est pas 0 en degré 1 (elle est même de dimension infinie), et donc on retombe sur le problème mentionné au point (iii). Définir un anneau $\mathbf{B}_{\text{pFF}}$ permettant de formuler la conjecture demande nettement plus de travail (cf. § 3.3).

(v) Implicitement, RHom_{G_K} est calculé dans une catégorie adéquate de $\mathbf{Q}_p$ -espaces vectoriels topologiques munis d'une action continue de G_L . Le choix évident, à savoir la catégorie des $\mathbf{Q}_p$ -modules condensés munis d'une action continue de G_K , ne marche pas car $\dim_K \text{Ext}^1(\mathbf{C}_p, \mathbf{C}_p) = \infty$ dans cette catégorie, alors que l'on voudrait que $\text{Ext}^1(\mathbf{C}_p, \mathbf{C}_p) = K$ comme dans la théorie des presque $\mathbf{C}_p$ -représentations de Fontaine [13]. Dans notre travail en cours [9], nous utilisons une version G_K -équivalente de la catégorie des TVS que nous avons utilisée dans notre preuve des théorèmes de dualité [8].

Remarque 1.7. — Les calculs ci-dessous sont ceux qui nous ont donné confiance en la conjecture ; ces calculs sont purement heuristiques et ne constituent pas une preuve dans le cas considéré ⁽³⁾.

Soit Y l'analytifié d'une courbe algébrique lisse, non propre, définie sur une extension finie K de $\mathbf{Q}_p$; les $H_{\text{dR}}^i(Y)$ sont des K -modules de rang fini, nuls si $i \geq 2$. Les théorèmes de comparaison ⁽⁴⁾ et la suite exacte longue reliant la cohomologie à support compact, la cohomologie usuelle et celle du bord ⁽⁵⁾, nous donnent les isomorphismes et suite exacte suivants, dans lesquels on utilise l'abréviation $H_c^i := H_{\text{proét},c}^i(Y_C, \mathbf{Q}_p(1))$,

$$H_c^i = 0, \text{ si } i \neq 1, 2, \quad H_c^1 \simeq V, \quad 0 \rightarrow V_1 \rightarrow H_c^2 \rightarrow V_2 \rightarrow 0$$

où :

3. Une vraie preuve demanderait d'utiliser des techniques nettement plus sophistiquées comme dans [7], par exemple, où l'on examine ce qui se passe si on remplace $\mathbf{B}_{\text{pDR}}$ par $\mathbf{Q}_p$.

4. Pour les courbes, on peut utiliser [6, th. 0.7] ou [5, th. 1.8].

5. Maintenant que la théorie a été développée, on pourrait aussi utiliser les théorèmes de comparaison pour la cohomologie à support compact [1, § 7.2], qui donnent le résultat sous une forme un peu différente.

- $V := (H_{\mathrm{HK},c}^1(Y_C) \otimes t\mathbf{B}_{\mathrm{st}}^+)^{N=0, \varphi=p}$ est de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$, et est de Rham en tant que représentation de G_K .
- V_1 est le quotient de $H_{\mathrm{dR},c}^1(Y_C)$ par l'image de $V_1' := (H_{\mathrm{HK},c}^1(Y_C) \otimes \mathbf{B}_{\mathrm{st}}^+)^{N=0, \varphi=p}$ (cette image est V_1'/V) ; c'est une presque C -représentation au sens de Fontaine.
- V_2 est une extension de $\mathbf{Q}_p$ par le C -dual topologique $(\mathcal{O}(Y_C)/C)^*$ de $\mathcal{O}(Y_C)/C$ (un C -module topologique de rang infini).

Posons $\mathrm{Ext}^i := \mathrm{Ext}_{G_K}^i$ et

$$\mathrm{RHom}^i := H^i(\mathrm{RHom}_{G_K}(\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{pro\acute{e}t},c}(Y_C, \mathbf{Q}_p(1))[2], \mathbf{B}_{\mathrm{pdR}}))$$

Comme $\mathrm{Ext}^2(-, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}})$ devrait être 0, la suite spectrale convergeant vers RHom^i fournit des suites exactes, pour $i \in \mathbf{Z}$,

$$(1.8) \quad 0 \rightarrow \mathrm{Ext}^1(H_c^{3-i}) \rightarrow \mathrm{RHom}^i \rightarrow \mathrm{Ext}^0(H_c^{2-i}) \rightarrow 0$$

Comme $\mathrm{Ext}^0(C, \mathbf{B}_{\mathrm{pdR}}) = 0$ et $\mathrm{Ext}^1(C, \mathbf{B}_{\mathrm{pdR}}) = 0$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^0(V_1, \mathbf{B}_{\mathrm{pdR}}) &= 0, \quad \mathrm{Ext}^1(V_1, \mathbf{B}_{\mathrm{pdR}}) = \mathrm{Ext}^0(V_1'/V, \mathbf{B}_{\mathrm{pdR}}) \\ \mathrm{Ext}^0((\mathcal{O}(Y_C)/C)^*, \mathbf{B}_{\mathrm{pdR}}) &= 0, \quad \mathrm{Ext}^1((\mathcal{O}(Y_C)/C)^*, \mathbf{B}_{\mathrm{pdR}}) = 0 \end{aligned}$$

Les seuls termes non nuls ⁽⁶⁾ dans les suites exactes (1.8) sont donc ⁽⁷⁾

$$\mathrm{Ext}^0(H_c^1, \mathbf{B}_{\mathrm{pdR}}) = (H_{\mathrm{dR},c}^1(Y)^{(0)})^* = H_{\mathrm{dR}}^1(Y)^{(1)} \subset H_{\mathrm{dR}}^1(Y)$$

$$\mathrm{Ext}^0(H_c^2, \mathbf{B}_{\mathrm{pdR}}) = K = H_{\mathrm{dR}}^0(Y), \quad \mathrm{Ext}^1(H_c^2, \mathbf{B}_{\mathrm{pdR}}) = \mathrm{Ker}(H_{\mathrm{dR}}^1(Y) \rightarrow (H_{\mathrm{dR},c}^1(Y)^{(0)})^*)$$

Injecter ce résultat dans (1.8) fournit des suites exactes donnant corps à la conjecture 1.5 qui affirme que $\mathrm{RHom}^i \simeq H_{\mathrm{dR}}^i(Y)$, pour tout i . (Si on avait utilisé $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ au lieu de $\mathbf{B}_{\mathrm{pdR}}$, il y aurait des termes parasites provenant de $\mathrm{Ext}^1(V, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}})$ et $\mathrm{Ext}^1(\mathbf{Q}_p, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}})$ contribuant respectivement à $\mathrm{Ext}^1(H^1, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}})$ et $\mathrm{Ext}^1(H^2, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}})$.)

2. Une construction universelle pour tuer $H^1(G, B)$

2.1. Comment tuer la cohomologie des anneaux de périodes ?

Pour formuler une conjecture C_{st} pour la cohomologie à support compact, on a besoin de tuer la cohomologie de $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ (ou d'une variante) en degrés ≥ 1 . La recette que nous avons utilisée pour tuer celle de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ ne marche pas telle quelle, comme nous l'expliquons ci-dessous. Pour pouvoir traiter les variantes éventuelles de $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$, considérons un cadre un peu plus général.

6. Le calcul des Ext^0 utilise [10, th. 5.8].

7. On a des isomorphismes fonctoriels (de Hyodo-Kato) $H_{\mathrm{dR}}^i(Y) \simeq (\overline{\mathbf{Q}}_p \otimes H_{\mathrm{HK}}^i(Y_C))^{G_K}$ et $H_{\mathrm{dR},c}^i(Y) \simeq (\overline{\mathbf{Q}}_p \otimes H_{\mathrm{HK},c}^i(Y_C))^{G_K}$. Les pentes de Frobenius sur $H_{\mathrm{HK}}^1(Y_C)$ et $H_{\mathrm{HK},c}^1(Y_C)$ sont dans l'intervalle $[0, 1]$; si $? \in \{, c\}$, on note $H_{\mathrm{HK},?}^1(Y_C)^{(r)}$ le sous-espace de pente r et on pose $H_{\mathrm{dR},?}^1(Y) := (\overline{\mathbf{Q}}_p \otimes H_{\mathrm{HK},?}^1(Y_C)^{(r)})^{G_K}$; la dualité entre $H_{\mathrm{dR}}^1(Y)$ et $H_{\mathrm{dR},c}^1(Y)$ met en dualité $H_{\mathrm{dR}}^1(Y)^{(r)}$ et $H_{\mathrm{dR},c}^1(Y)^{(1-r)}$. On a aussi $V = t(H_{\mathrm{HK},c}^1(Y_C)^{(0)} \otimes \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^+)^{\varphi=1}$.

Soit donc B une $\mathbf{Q}$ -algèbre topologique munie d'une action continue d'un groupe profini G , avec $F := H^0(G, B)$ un corps valué complet, de caractéristique 0, et $H^i(G, B) = 0$ si $i \geq 2$.

Si $\dim_F H^1(G, B) = 1$, la recette pour tuer la cohomologie de $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ en degrés ≥ 1 (i.e. rajouter un élément transcendant qui tue la classe non triviale dans $H^1(G, B)$) marche pour tuer $H^i(G, B)$ pour $i \geq 1$. Par contre, si $\dim_F H^1(G, B) \geq 2$, le lemme 2.1 ci-dessous montre que l'on ne peut pas tuer $H^1(G, B)$ en rajoutant un nombre fini d'éléments (ceci s'applique à $\mathbf{B}_{\text{cris}}^+$ – et à ses variantes – car son H^1 contient au moins deux classes indépendantes (à savoir celles associées à $\log \tilde{p}$ et $\log t$)). Il existe néanmoins une recette universelle pour tuer cette cohomologie : nous en donnons deux présentations dans la suite cet article :

- L'idée naturelle est de prendre une base $c_1, \dots, c_r$ de $H^1(G, B)$ sur F , et de rajouter des variables Y_i vérifiant $\sigma(Y_i) = Y_i + c_{i,\sigma}$ pour $1 \leq i \leq r$ (où $\sigma \mapsto c_{i,\sigma}$ est un 1-cocycle dans la classe de c_i). Si $B_1 = B[Y_1, \dots, Y_r]$, les c_i meurent dans $H^1(G, B_1)$, mais $H^1(G, B_1) \neq 0$ (et même est de dimension infinie si $r \geq 2$). On peut alors recommencer et construire une B_1 -algèbre polynomiale B_2 telle que $H^1(G, B_1) \rightarrow H^1(G, B_2)$ soit identiquement 0, etc. À la limite, on obtient une B -algèbre B_∞ ayant les propriétés requises (cf. rem. A.15). L'inconvénient de cette méthode est que les algèbres B_n qui apparaissent sont de type infini sur B , ce qui pose des problèmes pour les applications. Dans ce chapitre, nous présentons une variante moins brutale de ce processus, pour laquelle les B_n sont toutes de type fini (mais la limite B_∞ reste de type infini).

- Dans l'appendice, nous donnons une présentation plus conceptuelle reposant sur la notion d'algèbre de mélange. Si $W = H^1(G, B)$, le produit de mélange munit $\text{Sh}_F(W) := \bigoplus_{n \geq 0} W^{\otimes n}$ d'une structure d'algèbre commutative (qui peut se raffiner pour obtenir une algèbre de Hopf, ce qui fait que $\text{Sh}_F(W)$ est naturellement l'algèbre des fonctions sur un groupe algébrique pro-unipotent $\mathcal{U}$). Si $c : W \rightarrow Z^1(G, B)$ est un scindage de l'application naturelle, on peut relever c en un 1-cocycle C à valeurs dans $\mathcal{U}(B)$, ce qui permet de tordre l'action naturelle de G sur $B \otimes_F \text{Sh}_F(W)$, pour obtenir une B -algèbre P_C vérifiant $H^1(G, P_C) = 0$.

2.2. Un exemple

On suppose que $\dim_F H^1(G, B) \geq 2$. On peut donc trouver deux 1-cocycles $\sigma \mapsto c_\sigma$ et $\sigma \mapsto c'_\sigma$ dont les classes c, c' dans $H^1(G, B)$ sont indépendantes sur F . Notons B' la B -algèbre $B[U]$ que l'on munit d'une action de G prolongeant celle sur B via la formule $\sigma(U) = U + c_\sigma$, si $\sigma \in G$. Le 2-cocycle

$$(\sigma, \tau) \mapsto (d(Uc'))_{\sigma, \tau} = \sigma(Uc'_\tau) - Uc'_{\sigma\tau} + Uc'_\sigma = (U + c_\sigma)\sigma(c'_\tau) - Uc'_{\sigma\tau} + Uc'_\sigma = c_\sigma \sigma(c'_\tau)$$

est à valeurs dans B . Comme $H^2(G, B) = 0$, il existe une 1-cochaîne $\sigma \mapsto b_\sigma$ telle que $\sigma \mapsto Uc'_\sigma - b_\sigma$ soit un 1-cocycle.

Lemme 2.1. — On a $H^0(G, B') = F$, et les classes de $\sigma \mapsto c'_\sigma$ et $\sigma \mapsto Uc'_\sigma - b_\sigma$ dans $H^1(G, B')$ sont linéairement indépendantes sur F , et donc $\dim_F H^1(G, B') \geq 2$.

Démonstration. — La dérivation $\frac{d}{dU}$ commute à G . On en déduit que, si $H^0(G, B')$ contient un élément de degré ≥ 1 , il contient un élément de degré 1, et donc il existe $a_1, b_0 \in B$, avec $a_1 \neq 0$, tels que $a_1U + a_0$ soit fixe par G . Alors a_1 est aussi fixe par G , et donc $a_1 \in F$, et $a_1c_\sigma + (\sigma - 1)a_0 = 0$, ce qui implique que $\sigma \mapsto c_\sigma$ est un cobord contrairement aux hypothèses. On a donc bien $H^0(G, B') = F$.

Si $\lambda_1, \lambda_2 \in F$ et $y \in B'$ sont tels que $\lambda_1c'_\sigma + \lambda_2(Uc'_\sigma - b_\sigma) = (\sigma - 1)y$, on peut appliquer $\frac{d}{du}$ deux fois, ce qui tue le membre de gauche. On en déduit que y est de la forme $a_2U^2 + a_1U + a_0$, avec $a_2 \in F$, $a_1, a_0 \in B$. En n'appliquant $\frac{d}{du}$ qu'une fois, cela nous donne $\lambda_2c'_\sigma = (\sigma - 1)(2a_2U + a_1)$ et donc $\sigma \mapsto \lambda_2c'_\sigma - 2a_2c_\sigma$ est un cobord dans B . Par hypothèse, ceci implique $\lambda_2 = a_2 = 0$, et donc $\lambda_1c'_\sigma = (\sigma - 1)(a_1U + a_0)$. En comparant les termes en U des deux côtés, on en déduit que $a_1 \in F$, et que $\sigma \mapsto \lambda_1c'_\sigma - a_1c_\sigma$ est un cobord dans B . Il en résulte que $\lambda_1 = a_1 = 0$.

Ceci permet de conclure. $\square$

2.3. L'algèbre B_{uni}

Soit B une $\mathbf{Q}$ -algèbre topologique intègre, munie d'une action continue d'un groupe profini G . L'action de G sur B s'étend à $\text{Fr}(B)$, et on suppose que :

- $F := B^G = \text{Fr}(B)^G$ et $H^1(G, B) \rightarrow H^1(G, \text{Fr}(B))$ est injective.
- $H^1(G, B)$ est de dimension finie sur F et $H^i(G, B) = 0$ si $i \geq 2$.

Théorème 2.2. — Il existe, à isomorphisme G -équivariant de B -algèbres près, une unique B -algèbre de polynômes⁽⁸⁾ B_{uni} , munie d'une action continue⁽⁹⁾ de G , et vérifiant les conditions suivantes :

- $B_{\text{uni}}^G = \text{Fr}(B_{\text{uni}})^G = F$ et $H^i(G, B_{\text{uni}}) = 0$ si $i \geq 1$.
- B_{uni} est la limite inductive d'algèbres Λ_n , où $\Lambda_0 = B$, $\Lambda_{n+1} = \Lambda_n$ ou bien $\Lambda_{n+1} = \Lambda_n[x_{n+1}]$ avec⁽¹⁰⁾ $\sigma(x_{n+1}) - x_{n+1} \in \Lambda_n$ pour tout $\sigma \in G$.

Démonstration. — La construction de B_{uni} fait l'objet du §2.4; la preuve de son unicité est donnée dans la rem. 2.10. $\square$

Remarque 2.3. — Pour la construction d'une algèbre B_{uni} telle que $H^i(G, B_{\text{uni}}) = 0$ si $i \geq 1$, la première condition ci-dessus sur B peut être remplacée par « $F := B^G$ est un corps » (impliquée par $B^G = \text{Fr}(B)^G$). Par contre, cette condition est utilisée crucialement pour prouver l'unicité de B_{uni} .

8. En une infinité de variables si $\dim_{B^G} H^1(G, B) \geq 2$.

9. B_{uni} est la limite inductive de B -modules libres de type fini, et on la munit de la topologie de la limite inductive.

10. « uni » est une abréviation pour « universel » ou « unipotent », au choix.

2.4. Construction de B_{uni}

L'algèbre B_{uni} est une algèbre filtrée par le poids (xy est de poids $i+j$ si x est de poids i et y de poids j); c'est la limite inductive d'algèbres de polynômes B_n munies d'une filtration $B_n^{\leq k}$ par le poids (on a une suite exacte $0 \rightarrow B_n^{\leq k-1} \rightarrow B_n^{\leq k} \rightarrow \text{Gr}^k B_n \rightarrow 0$) et d'une action de G telle que $B_n^G = F$, et qui laisse stable la filtration par les $B_n^{\leq k}$. Les B_n sont construites par récurrence, de la manière suivante :

- $B_0 = B$.
- $r_n = \dim_F H^1(G, B_{n-1}^{\leq n-1}) - \dim_F \text{Ker}(H^1(G, B_{n-1}^{\leq n-1}) \rightarrow H^1(G, B_{n-1}^{\leq n}))$.
- $\sigma \mapsto c_\sigma^{(n,i)}$, pour $1 \leq i \leq r_n$, sont des 1-cocycles sur G à valeurs dans $B_{n-1}^{\leq n-1}$, dont les images dans $H^1(G, B_{n-1}^{\leq n-1})$ forment une base d'un supplémentaire de $\text{Ker}(H^1(G, B_{n-1}^{\leq n-1}) \rightarrow H^1(G, B_{n-1}^{\leq n}))$.
- $B_n = B_{n-1}[X_1^{(n)}, \dots, X_{r_n}^{(n)}]$, où les $X_i^{(n)}$ sont de poids n , et $\sigma \in G$ agit via la formule $\sigma(X_i^{(n)}) = X_i^{(n)} + c_\sigma^{(n,i)}$, pour $1 \leq i \leq r_n$, de telle sorte que $H^1(G, B_{n-1}^{\leq n-1}) \rightarrow H^1(G, B_n^{\leq n})$ est identiquement 0.

Pour vérifier les propriétés annoncées, il faut vérifier que $B_n^G = F$ pour tout n ; c'est l'objet du lemme 2.4 ci-dessous.

Notons que $\text{Gr}^k B_n$ est un B -module libre et que, si $d_{n,k}$ désigne son rang, on a $\text{Gr}^k B_n \simeq B^{d_{n,k}}$ en tant que G -module. On en déduit, par récurrence sur k , que $H^i(G, B_n^{\leq k}) = 0$ si $i \geq 2$, pour tous n, k , et que $H^1(G, B_n^{\leq k})$ est de dimension finie sur F .

Par construction, l'image de $H^1(G, B_n^{\leq k}) \rightarrow H^1(G, B_m)$ est 0 si m est assez grand (i.e., $m \geq n + \sup(k - n + 1, 0)$). Or un i -cocycle continu sur G , à valeurs dans B_{uni} , est à valeurs dans $B_n^{\leq k}$ pour n et k assez grands car G est compact et B_{uni} est la limite inductive des $B_n^{\leq k}$. Il en résulte que $H^i(G, B_{\text{uni}}) = 0$ pour $i \geq 1$.

Lemme 2.4. — (i) $B_n^G = F$.

(ii) Si $x \in B_n$ et $(\sigma - 1) \cdot x \in B_n^{\leq k}$ pour tout $\sigma \in G$, alors $x \in B_n^{\leq k+1}$.

Démonstration. — Pour $n = 0$, les deux énoncés sont immédiats. Soit $n \geq 1$, et supposons que les énoncés sont vrais pour $n - 1$.

Supposons que le (i) soit faux pour n . Il existe donc $P = \sum_{\mathbf{j}} a_{\mathbf{j}} X^{\mathbf{j}}$, où $X = (X_1^{(n)}, \dots, X_{r_n}^{(n)})$, fixe par G et de degré total $d \geq 1$ en les $X_i^{(n)}$. Mais, $\partial_i^{(n)} := \frac{\partial}{\partial X_i^{(n)}}$ (dérivation B_{n-1} -linéaire), pour $1 \leq i \leq r_n$, commute à l'action de G . Il en résulte que $\partial_{i_1}^{(n)} \dots \partial_{i_d}^{(n)} P \in B_n^G$ pour tout choix de $\partial_{i_1}^{(n)}, \dots, \partial_{i_d}^{(n)}$. On peut donc supposer $d = 1$, i.e. $P = a_0 + \sum_{i=1}^{r_n} b_i X_i^{(n)}$. Une comparaison des coefficients de P et de $\sigma(P) = \sigma(a_0) + \sum_{i=1}^{r_n} \sigma(b_i)(X_i^{(n)} + c_\sigma^{(n,i)})$ montre que $b_i \in B_{n-1}^G = F$, pour tout i , et que $\sum_{i=1}^{r_n} b_i c_\sigma^{(n,i)} = a_0 - \sigma(a_0)$.

Utilisant le (ii) pour $n - 1$, on en déduit que $a_0 \in B_{n-1}^{\leq n}$, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle les images des classes des $\sigma \mapsto c_\sigma^{(n,i)}$ dans $H^1(G, B_{n-1}^{\leq n-1})$ forment une famille libre sur F . On en déduit que $B_n^G = F$.

On va montrer le (ii) pour n par récurrence sur k . Comme $B_n^{\leq k} = B_{n-1}^{\leq k}$ si $k \leq n-1$, et comme $B_n^G = F \subset B_n^{\leq 0}$, l'énoncé est vrai pour $k \leq n-1$. Si $k \geq n$, on peut appliquer $\partial_i^{(n)}$, et la condition $(\sigma-1) \cdot x \in B_n^{\leq k}$ entraîne $(\sigma-1)(\partial_i^{(n)} x) \in B_n^{\leq k-n}$ pour $1 \leq i \leq r_n$. L'hypothèse de récurrence implique donc que $\partial_i^{(n)} x \in B_n^{\leq k-n+1}$, pour tout i .

On peut écrire x sous la forme $x = a_0 + x'$, où $a_0 \in B_{n-1}$ et $x' = \sum_{\mathbf{j} \neq 0} a_{\mathbf{j}} X^{\mathbf{j}}$, et ce qui précède montre que $a_{\mathbf{j}} X^{\mathbf{j}} \in B_n^{\leq k+1}$ si $\mathbf{j} \neq 0$. Il s'ensuit que le terme constant de $\sigma(x')$ appartient à $B_{n-1}^{\leq k}$ car passer de $X_i^{(n)}$ à $c_{\sigma}^{(n,i)}$ baisse le poids de 1. Comme celui de $\sigma(x) - x$ appartient à $B_{n-1}^{\leq k}$ puisque $\sigma(x) - x \in B_n^{\leq k}$, on en déduit que $\sigma(a_0) - a_0 \in B_{n-1}^{\leq k}$ pour tout $\sigma \in G$, et donc $a_0 \in B_{n-1}^{k+1}$ par l'hypothèse de récurrence. Il en résulte que $x \in B_n^{\leq k+1}$ ce que l'on voulait. $\square$

Remarque 2.5. — (i) Supposons⁽¹¹⁾ $\dim_F H^1(G, B) \geq 2$. Soit $X = \{(n, i), n \geq 1, 1 \leq i \leq r_n\}$. Choisissons une bijection $\iota : X \rightarrow \mathbf{N}$ telle que $\iota(n, i) > \iota(m, j)$ si $n > m$, et posons $X_i^{(n)} = Y_{\iota(n,i)}$. Si $\Lambda_n = B[Y_1, \dots, Y_n]$, alors B_{uni} est la limite inductive des Λ_n , chaque Λ_n est stable par G et $\sigma(Y_n) - Y_n \in \Lambda_{n-1}$ pour tout $\sigma \in G$. La B -algèbre B_{uni} vérifie donc toutes les conditions du th. 2.2.

(ii) B_{uni} est aussi la limite inductive des $B_{\text{uni}}^{\leq n} = B_n^{\leq n}$, et on a

$$B_{\text{uni}}^{\leq n} = B_{n-1}^{\leq n} \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{r_n} B \cdot X_i^{(n)} \right), \quad B_{\text{uni}}^{\leq n} / B_{\text{uni}}^{\leq n-1} \simeq B \otimes_F H^1(G, B)^{\otimes n}$$

On en déduit que, si $\dim_F H^1(G, B) = 1$, on a $B_{\text{uni}} = B[X_1^{(1)}]$ (et si $H^1(G, B) = 0$, alors $B_{\text{uni}} = B$), mais si $\dim_F H^1(G, B) \geq 2$, alors B_{uni} est une B -algèbre de polynômes en une infinité de variables.

Posons $W := H^1(G, B)$ et $Z_n := B_{\text{uni}}^{\leq n} / B_{\text{uni}}^{\leq n-1}$. On prouve que $Z_n \simeq B \otimes_F W^{\otimes n}$ par récurrence sur n ; le cas $n = 1$ étant immédiat.

Pour passer de $n-1$ à n , on utilise la suite de cohomologie associée à la suite exacte $0 \rightarrow B_{\text{uni}}^{\leq n-1} \rightarrow B_{\text{uni}}^{\leq n} \rightarrow Z_n \rightarrow 0$. Comme $H^1(G, B_{\text{uni}}^{\leq n-1}) \rightarrow H^1(G, B_{\text{uni}}^{\leq n})$ est identiquement 0 par construction, cette suite fournit des isomorphismes $H^0(G, Z_n) \simeq H^1(G, B_{\text{uni}}^{\leq n-1})$ et $H^1(G, B_{\text{uni}}^{\leq n}) \simeq H^1(G, Z_n)$. L'hypothèse de récurrence implique que $H^1(G, B_{\text{uni}}^{\leq n-1}) \simeq H^1(G, B \otimes W^{\otimes n-1}) = W^{\otimes n}$, et donc $Z_n = B \otimes H^0(G, Z_n) \simeq B \otimes W^{\otimes n}$. Ceci permet de conclure.

(iii) L'algèbre B_{uni} est un cas particulier d'algèbre de mélange (« shuffle algebra » en anglais). Voir l'appendice pour plus de détails.

Exemple 2.6. — On peut appliquer le th. 2.2 (et le (ii) de la rem. 2.5) à C et à $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ pour en conclure que

$$C_{\text{uni}} = C[\log t] \quad \text{et} \quad (\mathbf{B}_{\text{dR}}^+)_{\text{uni}} = \mathbf{B}_{\text{pdR}}^+$$

et donc retrouver le prop. 1.2 et le th. 1.4.

11. Si $\dim_F H^1(G, B) = 0$ ou 1, X est fini et on peut prendre une suite stationnaire pour les Λ_n .

2.5. Plongement dans un G -anneau

Soient L un corps de caractéristique 0, G un groupe agissant sur L , $\sigma \mapsto c_\sigma$ un 1-cocycle sur G à valeurs dans L dont la classe c dans $H^1(G, L)$ est $\neq 0$. On fait agir G sur $L(X)$ en imposant $\sigma(X) = X + c_\sigma$, pour tout $\sigma \in G$.

Lemme 2.7. — (i) On a

$$H^0(G, L(X)) = L^G, \quad \text{Ker}(H^1(G, L) \rightarrow H^1(G, L(X))) = L^G \cdot c$$

(ii) Si $L = \text{Fr}(A)$, où A est stable par G , si $\sigma \mapsto c_\sigma$ est à valeurs dans A , et si $A^G = L^G$ et $H^1(G, A) \rightarrow H^1(G, L)$ est injectif, alors $H^1(G, A[X]) \rightarrow H^1(G, L(X))$ est injectif.

Démonstration. — Soit $\sigma \mapsto c'_\sigma$ un 1-cocycle sur G à valeurs dans L . On suppose que $\sigma \mapsto c'_\sigma$ se trivialise dans $H^1(G, L(X))$. Il existe donc $P, Q \in L[X]$, premiers entre eux, Q unitaire, tels que $c'_\sigma = \frac{P^\sigma(X+c_\sigma)}{Q^\sigma(X+c_\sigma)} - \frac{P(X)}{Q(X)}$ pour tout $\sigma \in G$.

Posons $P_\sigma(X) = P^\sigma(X + c_\sigma)$ et $Q_\sigma(X) = Q^\sigma(X + c_\sigma)$. La relation ci-dessus implique que QQ_σ divise $P_\sigma Q - PQ_\sigma$, et comme Q est premier à P , cela implique $Q \mid Q_\sigma$; de même Q_σ est premier à P_σ et $Q_\sigma \mid Q$. Comme Q et Q_σ sont unitaires, on a $Q^\sigma(X + c_\sigma) = Q(X)$ pour tout $\sigma \in G$. En comparant les termes de degré $e - 1$, où $e = \deg Q$, on obtient $ec_\sigma + \sigma(b_{e-1}) = b_{e-1}$, ce qui implique que $\sigma \mapsto c_\sigma$ est un cobord, contrairement à l'hypothèse. Il s'ensuit que $Q = 1$.

Écrivons $P = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \dots + a_0$. Une comparaison des termes de degré d implique $a_d \in L^G$, et celle des termes de degré $d - 1$ donne $da_d c_\sigma + \sigma(a_{d-1}) - a_{d-1} = 0$ si $d \geq 2$, $a_1 c_\sigma + \sigma(a_0) - a_0 = c'_\sigma$, si $d \leq 1$.

- Pour $c'_\sigma = 0$, cela implique que $\sigma \mapsto c_\sigma$ est un cobord si $d \geq 1$, contrairement à l'hypothèse, et donc $H^0(G, L(X)) = L^G$.

- Dans le cas général, cela implique que $d \leq 1$ et que $c'_\sigma - a_1 c_\sigma$ est un cobord.

Ceci prouve le (i). Les arguments pour prouver le (ii) sont assez similaires : si $P, Q \in L[X]$ sont premiers entre eux, avec Q unitaire, et si $\frac{P^\sigma(X+c_\sigma)}{Q^\sigma(X+c_\sigma)} - \frac{P(X)}{Q(X)} \in A[X]$ pour tout $\sigma \in G$, les arguments ci-dessus prouvent que $Q = 1$. On est donc ramené à prouver que, si $P^\sigma(X + c_\sigma) - P(X) \in A[X]$ pour tout $\sigma \in G$, alors $P \in A[X]$. On peut soustraire à P un élément de $A[X]$ sans changer l'énoncé. Si l'énoncé est faux, on peut donc supposer que $P(X) = a_d X^d + \dots + a_0$, où $a_d \in L \setminus A$. Mais alors $\sigma \mapsto \sigma(a_d) - a_d$ est un 1-cocycle sur G , à valeurs dans A , dont la classe dans $H^1(G, L)$ est 0. Comme $H^1(G, A) \rightarrow H^1(G, L)$ est injectif, il existe $a'_d \in A$ tel que $\sigma(a_d) - a_d = \sigma(a'_d) - a'_d$ pour tout $\sigma \in G$, et comme $L^G = A^G$, on a $a'_d - a_d \in A$, et donc $a_d \in A$, contrairement à ce que l'on avait supposé. $\square$

Soit Λ un anneau intègre muni d'une action de G , et d'une injection G -équivariante $L \hookrightarrow \Lambda$.

Lemme 2.8. — Soit $x \in \Lambda$ vérifiant $\sigma(x) - x = c_\sigma$ pour tout $\sigma \in G$. Alors x est transcendant sur L et l'injection $L \hookrightarrow \Lambda$ s'étend en des injections G -équivariantes $L[X] \hookrightarrow \Lambda$, $L(X) \hookrightarrow \text{Fr}(\Lambda)$, en envoyant X sur x .

Démonstration. — Supposons que x est algébrique sur L . Soit $P(X) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \dots + a_0$ le polynôme minimal de x sur L . Par unicité du polynôme minimal, on a

$$P(X) = (X + c_\sigma)^d + \sigma(a_{d-1})(X + c_\sigma)^{d-1} + \dots + \sigma(a_0)$$

pour tout $\sigma \in G$. L'identification des termes de degré $d-1$ nous donne $dc_\sigma + \sigma(a_{d-1}) - a_{d-1} = 0$, ce qui prouve que $\sigma \mapsto c_\sigma$ est un cobord, contrairement à l'hypothèse. $\square$

Soit Λ un anneau intègre, muni d'une action de G . On suppose que $H^1(G, \Lambda) = 0$.

Lemme 2.9. — Si $\iota : B \rightarrow \Lambda$ est une injection G -équivariante, alors ι se prolonge en des injections G -équivariantes $B_{\text{uni}} \hookrightarrow \Lambda$ et $\text{Fr}(B_{\text{uni}}) \hookrightarrow \text{Fr}(\Lambda)$.

Démonstration. — Écrivons B_{uni} comme la limite inductive des Λ_n comme dans la rem. 2.5. Il suffit de prouver l'énoncé pour Λ_n à la place de B_{uni} , ce qui se fait par récurrence sur n , en utilisant les lemmes 2.7 et 2.8. $\square$

Remarque 2.10. — Si B_1, B_2 sont deux B -algèbres satisfaisant les conclusions du th. 2.2, le lemme 2.9 fournit des injections G -équivariantes de B -algèbres $\iota_1 : B_1 \rightarrow B_2$ et $\iota_2 : B_2 \rightarrow B_1$. La composée fournit une injection G -équivariante de B -algèbres $\iota : B_1 \rightarrow B_1$; pour prouver l'unicité à isomorphisme près de B_{uni} il suffit de prouver qu'une telle injection G -équivariante est automatiquement un isomorphisme. Pour cela, il suffit de prouver que ι induit un automorphisme de $B_{\text{uni}}^{\leq n}$ pour tout n .

Pour $n = 0$, cela résulte de ce que ι est l'identité sur B , par hypothèse. Si ι induit un automorphisme de $B_{\text{uni}}^{\leq i} = B_i^{\leq i}$, pour $i \leq n-1$, il induit aussi un automorphisme de B_{n-1} respectant la filtration par le poids, ainsi que des automorphismes de $H^1(G, B_{n-1}^{\leq n-1})$ et du noyau de $H^1(G, B_{n-1}^{\leq n-1}) \rightarrow H^1(G, B_{n-1}^{\leq n})$. Il s'ensuit que les images des $\sigma \mapsto \iota(c_\sigma^{(n,i)})$ forment une base d'un supplémentaire de ce noyau dans $H^1(G, B_{n-1}^{\leq n-1})$. Comme $B_{\text{uni}}^G = F \subset B_{n-1}^{\leq n}$, on en déduit que $\iota(X_i^{(n)}) \in B_{\text{uni}}^{\leq n}$, et que ι induit un automorphisme de $B_{\text{uni}}^{\leq n}/B_{n-1}^{\leq n}$, et donc aussi de $B_{\text{uni}}^{\leq n}$.

3. La conjecture C_{st} pour la cohomologie à support compact

L'anneau $\mathbf{B}_{\text{cris}}^+$ (à partir duquel $\mathbf{B}_{\text{st}}$ est construit) peut être remplacé par $\mathbf{B}_{\text{rig}}^+ := \bigcap_{n \geq 0} \varphi^n(\mathbf{B}_{\text{cris}}^+)$ dans la formulation de la conj. 0.1. Mais $\mathbf{B}_{\text{rig}}^+$ peut s'interpréter comme l'anneau des fonctions analytiques sur $(\text{Spa } \mathbf{A}_{\text{inf}}) \setminus \{p = 0\}$, et on peut aussi le remplacer par $\mathbf{B} = \mathcal{O}(Y_{\text{FF}})$, où $Y_{\text{FF}} = (\text{Spa } \mathbf{A}_{\text{inf}}) \setminus (\{p = 0\} \cup \{\tilde{p} = 0\})$ car tous ces anneaux ont les mêmes sous- $\mathbf{Q}_p$ -modules de rang fini stables par φ . L'intérêt de remplacer

$\mathbf{B}_{\text{cris}}^+$ par $\mathbf{B}$ est que la cohomologie galoisienne de ce dernier est nettement plus facile à décrire.

3.1. Cohomologie galoisienne de $\mathbf{B}$

Soit donc Y_{FF} la courbe de Fargues-Fontaine obtenue en retirant de $\text{Spa}(\mathbf{A}_{\text{inf}})$ les diviseurs $p = 0$ et $\tilde{p} = 0$, où $\tilde{p} = [p^b]$. Si I est un intervalle de $\mathbf{R}_+^*$, soit $\mathbf{B}^I = \mathcal{O}(Y_{\text{FF}}^I)$, où Y_{FF}^I est le lieu des v vérifiant $v(\tilde{p})/v(p) \in I$. Si $I = [r, s]$ avec $r, s \in \mathbf{Q}$, alors $\mathbf{B}^I = \mathbf{A}^{[r, s]}[\frac{1}{p}]$, où $\mathbf{A}^{[r, s]}$ est le complété p -adique de $\mathbf{A}_{\text{inf}}[\frac{\tilde{p}^{1/r}}{p}, \frac{p}{\tilde{p}^{1/s}}]$. Soit

$$\mathbf{B} := \mathbf{B}^{[0, \infty[} = \mathcal{O}(Y_{\text{FF}}) = \varprojlim \mathbf{B}^{[r, s]}.$$

On note $x_{\text{dR}} \in Y_{\text{FF}}$ le point défini par $\tilde{p} = p$; le complété de l'anneau local en ce point est alors $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$, ce qui fournit un morphisme injectif $\mathbf{B} \hookrightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ qui est G_K -équivariant.

Lemme 3.1. — [2, (2.13)]. *On a des isomorphismes*

$$\mathbf{B}/t\mathbf{B} = \prod_{n \in \mathbf{Z}} C \quad \text{et} \quad \mathbf{B}^{[0, r]} / t\mathbf{B}^{[0, r]} = \prod_{p^n r \geq 1} C$$

Démonstration. — Si $r, s \in \mathbf{Q}_+^*$, il résulte de [11, th.2.5.1] et [11, th.2.4.10] que $\mathbf{B}^{[r, s]} / t\mathbf{B}^{[r, s]} = \prod_{y \in \text{Div}(t) \cap Y_{\text{FF}}^{[r, s]}} \mathbf{B}_{\text{dR}}^+(C_y) / \text{Fil}^{v_y(t)}$. Or les zéros de t sont l'ensemble des translatés de x_{dR} par $\varphi^{\mathbf{Z}}$, chacun avec multiplicité 1. Comme les corps résiduels en tous ces translatés sont, naturellement, isomorphes à C , on obtient $\mathbf{B}^{[r, s]} / t\mathbf{B}^{[r, s]} = \prod_{r \leq p^n \leq s} C$. Le résultat s'en déduit en utilisant la nullité de $\mathbf{R}^1 \varprojlim t\mathbf{B}^{[r, s]}$ (qui résulte du critère de Mittag-Leffler topologique). $\square$

On définit $\log \tilde{p}$ comme un élément transcendant sur $\mathbf{B}$, vérifiant

$$\varphi(\log \tilde{p}) = p \log \tilde{p} \quad \text{et} \quad \sigma(\log \tilde{p}) = \log \tilde{p} + \text{Kum}_p(\sigma) t$$

où $\text{Kum}_p : G_K \rightarrow \mathbf{Z}_p(\chi_{\text{cycl}})$ est le cocycle de Kummer associé à p et t est le $2i\pi$ p -adique de Fontaine. On pose alors :

$$\mathbf{B}_{\text{FF}}^+ := \mathbf{B}[\log \tilde{p}], \quad \mathbf{B}_{\text{FF}} := \mathbf{B}_{\text{FF}}^+[\frac{1}{t}]$$

On étend l'injection $\mathbf{B} \hookrightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ en un morphisme d'anneaux $K \otimes_F \mathbf{B}_{\text{FF}}^+ \rightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ en envoyant $\log \tilde{p}$ sur $\log \frac{\tilde{p}}{p}$ (la série définissant $\log \frac{\tilde{p}}{p}$ converge puisque $\frac{\tilde{p}}{p} - 1$ est dans l'idéal maximal de $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$). Ce morphisme est G_K -équivariant.

Proposition 3.2. — ([11, prop. 10.3.15]) *Le morphisme $K \otimes_F \mathbf{B}_{\text{FF}}^+ \rightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ ci-dessus est injectif.*

Lemme 3.3. — *L'application naturelle $H^i(G_K, \mathbf{B}) \rightarrow H^i(G_K, \mathbf{B}[\frac{1}{t}])$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Comme G_K est compact, $H^i(G_K, \mathbf{B}[\frac{1}{t}]) = \varinjlim_j H^i(G_K, t^{-j}\mathbf{B})$ et il suffit de prouver que, si $j \geq 0$, alors $H^i(G_K, t^{-j}\mathbf{B}) \rightarrow H^i(G_K, t^{-j-1}\mathbf{B})$ est un isomorphisme. Il résulte du lemme 3.1 que l'on a une suite exacte

$$0 \rightarrow t^{-j}\mathbf{B} \rightarrow t^{-j-1}\mathbf{B} \rightarrow \prod_{n \in \mathbf{Z}} C(-j-1) \rightarrow 0$$

et le résultat est une conséquence de ce que $H^i(G_K, \prod_{n \in \mathbf{Z}} C(-j-1)) = 0$ pour tout i , d'après la prop. 1.1. $\square$

Lemme 3.4. — *L'image de $H^1(G_K, t\mathbf{B})$ dans $H^1(G_K, \mathbf{B})$ est un F -espace de dimension 1 engendré par la classe de $\sigma \mapsto (\sigma - 1) \cdot \log \tilde{p}$.*

Démonstration. — Soit $\sigma \mapsto c_\sigma$ un 1-cocycle à valeurs dans $t\mathbf{B}$. Fixons $r \in]1, p[$; alors $\mathbf{B} \subset \mathbf{B}^{[0, r]}$. Choisissons $s \in]1, r[$. D'après [4, prop. 10.7], appliquée à $\varphi^n(c_\sigma)$ (qui vérifie le (ii) de la proposition en question puisqu'il est à valeurs dans $t\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$), il existe $a'_n \in F$ et $b'_n \in \mathbf{B}^{[0, s]}$ tels que $\varphi^n(c_\sigma) = (\sigma - 1)(a'_n \log \tilde{p} + b'_n)$. On a alors $c_\sigma = (\sigma - 1)(a_n \log \tilde{p} + b_n)$, avec $a_n = p^{-n} \varphi^{-n}(a'_n) \in F$ et $b_n = \varphi^{-n}(b'_n) \in \mathbf{B}^{[0, p^n s]}$. Par ailleurs, comme $H^0(G_K, \mathbf{B}^{[0, s]} \oplus F \log \tilde{p}) = F$, on a $a_{n+1} = a_n$ pour tout n et $b_{n+1} - b_n \in F$, pour tout n . On peut donc modifier b_n par un élément de F de telle sorte que $b_{n+1} = b_n := b$ pour tout n , et alors $b \in \cap_{n \geq 0} \mathbf{B}^{[0, p^n s]} = \mathbf{B}$.

Le résultat s'en déduit. $\square$

Lemme 3.5. — *$H^i(G_K, t^j\mathbf{B}) = 0$ pour tout $j \in \mathbf{Z}$ et tout $i \geq 2$.*

Démonstration. — Soient $H_K := \text{Ker } \chi_{\text{cycl}}$ et $\Gamma_K := G_K/H_K = \text{Gal}(K(\mu_{p^\infty})/K)$. Par descente presque étale, on prouve que $H^i(H_K, t^j\mathbf{B}) = 0$ pour tout $i \geq 1$ et tout j . Donc l'inflation $H^i(\Gamma_K, H^0(H_K, t^j\mathbf{B})) \rightarrow H^i(G_K, t^j\mathbf{B})$ est un isomorphisme pour tout $i \geq 1$ et tout j . Le résultat est donc une conséquence de ce que Γ_K est de dimension cohomologique 1. $\square$

Proposition 3.6. — *On a une suite exacte*

$$0 \rightarrow F \cdot \text{Kum}_p \rightarrow H^1(G_K, \mathbf{B}) \rightarrow \left(\prod_{n \in \mathbf{Z}} K \right) \cdot \log \chi_{\text{cycl}} \rightarrow 0$$

Démonstration. — Cela résulte de la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte $0 \rightarrow t\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B} \rightarrow \prod_{n \in \mathbf{Z}} C \rightarrow 0$, de la nullité de $H^2(G_K, t\mathbf{B})$ (lemme 3.5, pour la surjectivité à droite), du lemme 3.4 et de la prop. 1.1 dont on tire l'identité $H^1(G_K, \prod_{n \in \mathbf{Z}} C) = (\prod_{n \in \mathbf{Z}} K) \cdot \log \chi_{\text{cycl}}$. $\square$

Remarque 3.7. — (i) Les mêmes arguments montrent que, si $I \subset]0, \infty[$ est un intervalle ouvert, alors :

- L'application naturelle $H^i(G_K, \mathbf{B}^I) \rightarrow H^i(G_K, t^{-j}\mathbf{B}^I)$ est un isomorphisme pour tous $i \geq 0$ et $j \geq 0$.
- Si $\mathbf{Z}(I)$ est l'ensemble des $n \in \mathbf{Z}$, tels que $p^{-n} \in I$, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow F \cdot \text{Kum}_p \rightarrow H^1(G_K, \mathbf{B}^I) \rightarrow \left(\prod_{n \in \mathbf{Z}(I)} K \right) \cdot \log \chi_{\text{cycl}} \rightarrow 0$$

Il en résulte que, si I est à extrémités dans $\mathbf{Q}^*$, alors $H^1(G_K, \mathbf{B}^I)$ est un F -module de rang fini.

Par ailleurs $H^i(G_K, \mathbf{B}^I) = 0$ si $i \geq 2$, car une descente presque étale montre que ce groupe est isomorphe à $H^i(\Gamma_K, (\mathbf{B}^I)^{H_K})$, où $\Gamma_K = \text{Gal}(K(\mu_{p^\infty})/K)$ et $H_K = \text{Gal}(\overline{K}/K(\mu_{p^\infty}))$, et Γ_K a dimension cohomologique 1.

(ii) On déduit de la description de $H^1(G_K, \mathbf{B}^I)$ ci-dessus que, si $I \subset J \subset]0, \infty[$ sont des intervalles ouverts, alors $H^1(G_K, \mathbf{B}^J) \rightarrow H^1(G_K, \mathbf{B}^I)$ est surjective.

(iii) Si I n'est pas ouvert (i.e. fermé ou fermé d'un seul côté), alors $H^1(G_K, \mathbf{B}^I)$ est de rang infini sur F et n'est pas séparé.

3.2. Les $\mathbf{B}_{\text{uni}}^I$

Le résultat suivant permet de comparer $\mathbf{B}_{\text{uni}}^I$ à $\mathbf{B}_{\text{pdR}}^+$ ou $\mathbf{B}_{\text{uni}}^J$ (prop. 3.9 ci-dessous).

Lemme 3.8. — *Soit $I \subset]0, +\infty[$ un intervalle à extrémités dans $\mathbf{Q}^*$. Alors $H^0(G_K, \mathbf{B}^I) = H^0(G_K, \text{Fr}(\mathbf{B}^I))$ et $H^1(G_K, \mathbf{B}^I) \rightarrow H^1(G_K, \text{Fr}(\mathbf{B}^I))$ est injective.*

Démonstration. — Soit $\sigma \mapsto c_\sigma$ un 1-cocycle à valeurs dans $\mathbf{B}^I$. On suppose que ce cocycle est un cobord dans $\text{Fr}(\mathbf{B}^I)$, et donc qu'il existe $c \in \text{Fr}(\mathbf{B}^I)$ avec $c_\sigma = \sigma(c) - c$ pour tout $\sigma \in G_K$. On cherche à prouver que $c \in \mathbf{B}^I$ (le cas $c_\sigma = 0$ pour tout σ implique le résultat pour les H^0).

Si I est fermé (resp. n'est pas fermé), l'anneau $\mathbf{B}^I$ est principal (resp. de Bézout), et on peut donc écrire $c = \frac{a}{b}$ avec a et b premiers entre eux. Comme $\sigma(c) - c \in \mathbf{B}^I$, on en déduit que les diviseurs de $\sigma(b)$ et de b sont les mêmes. Il en résulte que le diviseur de b est stable par G_K , et donc est concentré en les $\varphi^n(x_{\text{dR}})$ appartenant à Y_{FF}^I , et cet ensemble est fini grâce à l'hypothèse faite sur I .

On peut décomposer la partie polaire en éléments simples. Notons $\frac{[\alpha]}{\xi_n^m}$ le terme de plus haut degré pour la partie correspondant à $\varphi^n(x_{\text{dR}})$. Comme ce terme disparaît dans $\sigma(c) - c$, on doit avoir $\sigma(\frac{[\alpha]}{\xi_n^m}) - \frac{[\alpha]}{\xi_n^m} = 0 \bmod \frac{1}{\xi_n^{m-1}} \mathbf{B}^I$; autrement dit, l'image de $\frac{[\alpha]}{\xi_n^m}$ dans $C(-m)$ est fixe par G_K , ce qui est impossible, si $m \geq 1$, d'après Tate. On en déduit que c n'a de pôle en aucun des $\varphi^n(x_{\text{dR}})$, et donc $c \in \mathbf{B}^I$, ce qui permet de conclure. $\square$

D'après la rem. 3.7, si $I \subset]0, +\infty[$ est un intervalle ouvert à extrémités dans $\mathbf{Q}^*$, alors $\mathbf{B}^I$ satisfait les hypothèses du th. 2.2, et donc on dispose de la $\mathbf{B}^I$ -algèbre $\mathbf{B}_{\text{uni}}^I$.

Proposition 3.9. — *Soient I, J des intervalles ouverts à extrémités dans $\mathbf{Q}^*$.*

(i) *Si Y_{FF}^I contient x_{dR} , l'injection $\mathbf{B}^I \hookrightarrow \mathbf{B}_{\text{pdR}}^+$ s'étend en une injection G_K -équivariante $\mathbf{B}_{\text{uni}}^I \hookrightarrow \mathbf{B}_{\text{pdR}}^+$.*

(ii) *Si Y_{FF}^I ne contient aucun $\varphi^n(x_{\text{dR}})$, alors $\mathbf{B}_{\text{uni}}^I = \mathbf{B}^I[\log \tilde{p}]$.*

(iii) *Si $J \subset I$, l'injection $\mathbf{B}^I \hookrightarrow \mathbf{B}^J$ s'étend (de manière non unique) en une injection G_K -équivariante $\iota_I^J : \mathbf{B}_{\text{uni}}^I \hookrightarrow \mathbf{B}_{\text{uni}}^J$, et le sous-anneau $\iota_I^J(\mathbf{B}_{\text{uni}}^I)$ de $\mathbf{B}_{\text{uni}}^J$ ne dépend pas de ι_I^J .*

(iv) Si $J = p^{-1}I$, l'isomorphisme $\varphi : \mathbf{B}^I \xrightarrow{\sim} \mathbf{B}^J$ s'étend (de manière non unique) en un isomorphisme G_K -équivariant $\varphi_I^J : \mathbf{B}_{\text{uni}}^I \xrightarrow{\sim} \mathbf{B}_{\text{uni}}^J$.

Démonstration. — Tout résulte du th. 2.2, et des lemmes 3.8 et 2.9, à part pour le fait que les images ne dépendent pas des choix des extensions. Ceci est une conséquence du lemme 3.10 ci-dessous. $\square$

Lemme 3.10. — Si $u : \mathbf{B}^I \rightarrow \mathbf{B}^J$ est une injection G_K -équivariante, et si $\tilde{u} : \mathbf{B}_{\text{uni}}^I \rightarrow \mathbf{B}_{\text{uni}}^J$ est une extension G_K -équivariante de u , alors l'image de $\tilde{u}$ ne dépend pas de $\tilde{u}$ et ne dépend que de l'image de u .

Démonstration. — Ceci se prouve comme l'unicité de B_{uni} (cf. rem. 2.10), en montrant, par récurrence sur n , que $\tilde{u}(\mathbf{B}_n^I)$ (et même l'image de la filtration) ne dépend pas du choix de l'extension : en effet, une extension à $\mathbf{B}_{n-1}^I$ étant choisie, les $\tilde{u}(X_i^{(n)})$ sont bien définis à addition près d'éléments de $(\mathbf{B}_{\text{uni}}^J)^{G_K} = F$, et comme $F \subset u(\mathbf{B}^I)$, l'algèbre engendrée (et même l'image de $\mathbf{B}_{\text{uni}}^{I, \leq n}$) ne dépend pas de ces choix. $\square$

Remarque 3.11. — Le (ii) de la prop. 3.9 implique, en particulier, que $\mathbf{B}^I[\log \tilde{p}]$ contient $\log t$ si Y_{FF}^I ne contient aucun $\varphi^n(x_{\text{dR}})$. L'hypothèse équivaut à ce qu'il existe $n \in \mathbf{Z}$ tel que $I \subset]\frac{1}{p^{n+1}}, \frac{1}{p^n}[$. En écrivant t sous la forme $\frac{1}{p^n} \log(1 + \varphi^n(\pi)) = \frac{1}{p^n} \varphi^n(\pi) E(\varphi^n(\pi))$ où $\pi = [\varepsilon] - 1$ et $E(X) = X^{-1} \log(1 + X) = 1 - \frac{X}{2} + \frac{X^2}{3} + \dots$, et en utilisant la branche de log telle que $\log p = 0$, cela permet d'écrire $\log t$ sous la forme

$$\log t = \log(E(\varphi^n(\pi))) + \log(\varphi^n(\pi)/[\varepsilon - 1]^{p^n}) + \frac{p^n}{2(p-1)} \log([\varepsilon - 1]^{2(p-1)}/\tilde{p}^{2p}) + \frac{p^{n+1}}{p-1} \log \tilde{p}$$

Nous laissons au lecteur le plaisir de vérifier que le 1^{er} terme converge si $\frac{v(\tilde{p})}{v(p)} > \frac{1}{p^{n+1}}$, le 2nd si $\frac{v(\tilde{p})}{v(p)} < \frac{1}{p^n}$, et le 3^{ème} partout car $u := ([\varepsilon - 1]^{p-1}/\tilde{p}^p)^2$ est une unité de $\mathbf{A}_{\text{inf}}$ vérifiant $v(u - 1) > 0$ pour tout v (une traduction de $v_p((\zeta_p - 1)^{p-1} + p) \geq 1 + \frac{1}{p-1}$), et que l'on a bien $(\sigma - 1) \cdot \log t = \log(\chi_{\text{cycl}}(\sigma))$ avec cette définition de $\log t$.

Remarque 3.12. — (i) Posons $W_I := H^1(G_K, \mathbf{B}^I)$, $P_I := \mathbf{B}^I \otimes_F \text{Sh}_F(W_I)$, Alors, d'après le corollaire A.13, on a un isomorphisme filtré G_K -équivariant non canonique $\mathbf{B}_{\text{uni}}^I \simeq P_I$, où l'action sur le membre de droite est construite dans l'appendice.

(ii) Pour $J \subset I$, soient $\rho_{IJ} : W_I \rightarrow W_J$ l'application naturelle, et $\mathcal{U}_I := \text{Spec Sh}_F(W_I)$. Le corollaire A.10 renforce la proposition 3.9 : pour deux prolongements équivariants quelconques $\iota_1, \iota_2 : P_I \rightarrow P_J$ de $\iota : \mathbf{B}^I \rightarrow \mathbf{B}^J$, il existe un unique $v \in \mathcal{U}_I(F)$ tel que $\iota_1 = \iota_2 \circ h_v$. De plus, h_v préserve la filtration et agit trivialement sur le gradué associé : i.e. $\iota_1(P_{I, \leq n}) = \iota_2(P_{I, \leq n})$ pour tout n , et $\text{gr}_n(\iota_i) = \iota \otimes \rho_{IJ}^{\otimes n}$.

Lemme 3.13. — Soit J tel que Y_{FF}^J ne contienne aucun $\varphi^n(x_{\text{dR}})$, et soit $N : \mathbf{B}_{\text{uni}}^J \rightarrow \mathbf{B}_{\text{uni}}^J$ la dérivée $\mathbf{B}^J$ -linéaire telle que $N(\log \tilde{p}) = -1$. Si $J \subset I$, alors N laisse stable $\iota_I^J(\mathbf{B}_{\text{uni}}^I)$; plus précisément, N envoie $\iota_I^J((\mathbf{B}_{\text{uni}}^I)^{\leq n})$ dans $\iota_I^J((\mathbf{B}_{\text{uni}}^I)^{\leq n-1})$.

Démonstration. — Démontrons le résultat plus précis, par récurrence sur n . Comme N tue $\mathbf{B}^J$ et donc aussi $\iota(\mathbf{B}^I)$, le résultat est vrai pour $n = 0$.

Maintenant, $\mathbf{B}_{\text{uni}}^I$ est la limite inductive des $\mathbf{B}_n^I$ comme dans le (ii) de la rem. 2.5, et il suffit de prouver que N envoie $\iota_J^I((\mathbf{B}_n^I)^{\leq k})$ dans $\iota_J^I((\mathbf{B}_n^I)^{\leq k-1})$, pour tous k, n . Comme N est une dérivation, le résultat pour $k = n$ implique le résultat pour tout k .

Notons simplement ι l'injection ι_J^I et $B_n^{\leq k}$ le $\mathbf{B}^I$ -module $(\mathbf{B}_n^I)^{\leq k}$. On a $B_n^{\leq n} = B_{n-1}^{\leq n} \oplus (\oplus_{i=1}^{r_n} \mathbf{B}^I X_i^{(n)})$, et il suffit de prouver que $N(\iota(X_i^{(n)})) \in \iota(B_{n-1}^{\leq n-1})$. Supposons le résultat vrai pour $n-1$. Comme N commute à G_K , on a $(\sigma-1) \cdot N(\iota(X_i^{(n)})) = N(\iota(c_\sigma^{(n,i)}))$, où $\sigma \mapsto c_\sigma^{(n,i)}$ est un 1-cocycle à valeurs dans $B_{n-1}^{\leq n-1}$, et donc $\sigma \mapsto N(\iota(c_\sigma^{(n,i)}))$ est un 1-cocycle à valeurs dans $\iota(B_{n-2}^{\leq n-2})$ (avec la convention $B_m = 0$, si $m < 0$), d'après l'hypothèse de récurrence.

Comme $H^1(G_K, B_{n-2}^{\leq n-2}) \rightarrow H^1(G_K, B_{n-1}^{\leq n-1})$ est identiquement 0, il existe $z_i^{(n)} \in \iota(B_{n-1}^{\leq n-1})$ tel que $(\sigma-1)z_i^{(n)} = (\sigma-1) \cdot N(\iota(X_i^{(n)}))$ pour tout σ . Ceci implique que $N(\iota(X_i^{(n)})) - z_i^{(n)} \in F$, et donc que $N(\iota(X_i^{(n)})) \in \iota(B_{n-1}^{\leq n-1})$, ce que l'on voulait. $\square$

3.3. L'anneau $\mathbf{B}_{\text{pFF}}$

3.3.1. L'anneau $\mathbf{B}_{\text{pFF},K}$

Posons

$$\mathbf{B}_{\text{uni}}^{(I), \leq m} := \cap_{J \supset I} \iota_J^I(\mathbf{B}_{\text{uni}}^{J, \leq m}), \quad \mathbf{B}_{\text{uni}}^{(I)} := \varinjlim_m \mathbf{B}_{\text{uni}}^{(I), \leq m}$$

Lemme 3.14. — On a $\mathbf{R}^1 \varprojlim_J \iota_J^I(\mathbf{B}_{\text{uni}}^{J, \leq m}) = 0$, pour tout $m \geq 0$.

Démonstration. — Pour $m = 0$, cela résulte de ce que $\mathbf{B}^J$ est d'image dense dans $\mathbf{B}^I$ si $J \supset I$, et donc que le système vérifie la condition de Mittag-Leffler topologique. Maintenant, pour tout J , on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbf{B}_{\text{uni}}^{J, \leq m-1} \rightarrow \mathbf{B}_{\text{uni}}^{J, \leq m} \rightarrow \mathbf{B}^J \otimes_F W_J^{\otimes m} \rightarrow 0, \quad \text{où } W_J = H^1(G_K, \mathbf{B}^J).$$

Par ailleurs, si $J \supset I$, l'application naturelle $W_J \rightarrow W_I$ est surjective (cf. (ii) de la rem. 3.7), et donc $W_J^{\otimes m} \rightarrow W_I^{\otimes m}$ aussi. Comme $\mathbf{B}_J \rightarrow \mathbf{B}_I$ est d'image dense, on en déduit que le système des $\mathbf{B}^J \otimes_F W_J^{\otimes m}$ vérifie la condition de Mittag-Leffler topologique. Il s'ensuit que son $\mathbf{R}^1 \varprojlim$ est 0, et une récurrence immédiate permet d'en déduire que $\mathbf{R}^1 \varprojlim_J \iota_J^I(\mathbf{B}_{\text{uni}}^{J, \leq m}) = 0$, pour tout m . $\square$

Remarque 3.15. — Si $(I_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante d'intervalles ouverts de $]0, +\infty[$, à extrémités dans $\mathbf{Q}^*$, telle que $I_0 = I$ et $\cup_n I_n =]0, +\infty[$, le lemme 3.14 se traduit par l'existence d'une suite exacte stricte :

$$0 \rightarrow \mathbf{B}_{\text{uni}}^{(I), \leq m} \rightarrow \prod_n \mathbf{B}_{\text{uni}}^{I_n, \leq m} \rightarrow \prod_n \mathbf{B}_{\text{uni}}^{I_n, \leq m} \rightarrow 0$$

qui permet de calculer la cohomologie galoisienne de $\mathbf{B}_{\text{uni}}^{(I), \leq m}$ à partir de celle des $\mathbf{B}_{\text{uni}}^{I_n, \leq m}$.

D'après la prop. 3.9, $\mathbf{B}_{\text{uni}}^{(I)} \subset \mathbf{B}_{\text{uni}}^I$ ne dépend pas du choix des ι_J^I . Ce qui précède s'applique à $I_1 =]\frac{1}{p}, 1 + \frac{1}{p}[$, $I_2 =]\frac{1}{p}, \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}[$ (remarquons que $\mathbf{B}_{\text{uni}}^{I_2} = \mathbf{B}^{I_2}[\log \tilde{p}]$ car $Y_{\text{FF}}^{I_2}$ ne contient aucun $\varphi^n(x_{\text{dR}})$). On déduit de la prop. 3.9 que les injections $\iota : \mathbf{B}^{I_1} \rightarrow \mathbf{B}^{I_2}$ et $\iota' : \mathbf{B}^{p^{-1}I_1} \rightarrow \mathbf{B}^{I_2}$ se prolongent (de manière non unique) en des injections $\iota : \mathbf{B}_{\text{uni}}^{I_1} \rightarrow \mathbf{B}_{\text{uni}}^{I_2}$ et $\iota' : \mathbf{B}_{\text{uni}}^{p^{-1}I_1} \rightarrow \mathbf{B}_{\text{uni}}^{I_2}$ et que ces injections induisent des isomorphismes $\iota : \mathbf{B}_{\text{uni}}^{(I_1)} \simeq \mathbf{B}_{\text{uni}}^{(I_2)}$ et $\iota' : \mathbf{B}_{\text{uni}}^{(p^{-1}I_1)} \simeq \mathbf{B}_{\text{uni}}^{(I_2)}$. De même l'isomorphisme $\varphi : \mathbf{B}^{I_1} \rightarrow \mathbf{B}^{p^{-1}I_1}$ se prolonge (de manière non unique) en des isomorphismes $\varphi : \mathbf{B}_{\text{uni}}^{I_1} \rightarrow \mathbf{B}_{\text{uni}}^{p^{-1}I_1}$ et $\varphi : \mathbf{B}_{\text{uni}}^{(I_1)} \simeq \mathbf{B}_{\text{uni}}^{(p^{-1}I_1)} \xrightarrow{\iota'} \mathbf{B}_{\text{uni}}^{(I_2)}$. On pose

$$\mathbf{B}_{\text{pFF},K}^+ := \mathbf{B}_{\text{uni}}^{(I_2)}, \quad \mathbf{B}_{\text{pFF},K} := \mathbf{B}_{\text{pFF},K}^+[\tfrac{1}{t}]$$

Alors ι fournit une identification $\iota_K : \mathbf{B}_{\text{uni}}^{(I_1)} = \mathbf{B}_{\text{pFF},K}^+$, et la restriction de φ à $\mathbf{B}_{\text{pFF},K}^+$ devient un isomorphisme $\varphi_K : \mathbf{B}_{\text{pFF},K}^+ \xrightarrow{\sim} \mathbf{B}_{\text{pFF},K}^+$ prolongeant $\varphi : \mathbf{B} \xrightarrow{\sim} \mathbf{B}$.

Remarque 3.16. — (i) La topologie sur $\mathbf{B}_{\text{pFF},K}^+$ est strictement plus fine que celle induite par le plongement dans $\mathbf{B}_{\text{uni}}^{I_2}$.

(ii) Il serait plus naturel de définir $\mathbf{B}_{\text{pFF},K}^+$ comme $\cap_{J \supset I_2} \iota_J^{I_2}(\mathbf{B}_{\text{uni}}^J)$ mais, comme nous l'a fait remarquer ChatGPT, $\mathbf{R}^1 \varprojlim \iota_J^{I_2}(\mathbf{B}_{\text{uni}}^J) \neq 0$, ce qui poserait des problèmes pour déduire la cohomologie galoisienne de $\mathbf{B}_{\text{pFF},K}^+$ de celle des $\mathbf{B}_{\text{uni}}^J$, si on le définissait de cette manière.

3.3.2. Passage à la limite sur les extensions finies de K

Il résulte du lemme 3.10 que, pour tout $J \supset I_2$, l'image de $\mathbf{B}_{\text{uni}}^J$ dans $\mathbf{B}_{\text{uni}}^{I_2}$ est stable par G_F et pas seulement par G_K ; il en est de même de $\mathbf{B}_{\text{pFF},L}^+$, pour tout L .

Lemme 3.17. — Soient $M \subset L$ des extensions de K , galoisiennes, finies et soient $F_M := M \cap F^{\text{nr}}$, $F_L := L \cap F^{\text{nr}}$. Soient $I, J \supset I_2$, et soit $u : \mathbf{B}_{\text{uni},M}^I \rightarrow \mathbf{B}_{\text{uni},M}^J$ un morphisme semi-linéaire de F_L -algèbres commutant à G_K . Alors u admet une extension $u_L : \mathbf{B}_{\text{uni},L}^I \rightarrow \mathbf{B}_{\text{uni},L}^J$ commutant à G_K .

Démonstration. — On a $\mathbf{B}_{\text{uni},L}^I = \varinjlim_n \mathbf{B}_{n,L}^I$, et $\mathbf{B}_{n,L}^I = \mathbf{B}_{n-1,L}^I[X_1^{(n)}, \dots, X_r^{(n)}]$. Posons $A_0 := \mathbf{B}_{\text{uni},M}^I$ et notons A_n la sous- $\mathbf{B}_{\text{uni},M}^I$ -algèbre de $\mathbf{B}_{\text{uni},L}^I$ engendrée par les $X_i^{(n)}$ (ou, ce qui revient au même, par $\mathbf{B}_{n,L}^I$). Nous allons construire, par récurrence sur n , une extension $u_n : A_n \rightarrow \mathbf{B}_{\text{uni},L}^J$ commutant à G_K . Il n'y a rien à faire si $n = 0$ (car $A_0 = \mathbf{B}_{\text{uni},K}^I$).

On suppose u_{n-1} construite. Soient $\widetilde{W}_n = A_{n-1} + \sum_i F_L \cdot X_i^{(n)}$, et $W_n := \widetilde{W}_n / A_{n-1}$. Il résulte du lemme 3.10 (et de sa preuve) que $\widetilde{W}_n$ est stable par G_K . On choisit une sous-famille des $X_i^{(n)}$, pour $i \in \mathbf{i}$, formant une base de W_n sur F_L . Pour construire u_n il suffit de d'étendre u_{n-1} à $\widetilde{W}_n$ en une application F_L -semi-linéaire, G_K -équivariante, et pour cela, il suffit de déterminer les images des $X_i^{(n)}$, pour $i \in \mathbf{i}$ (pour passer

d'une base de W_n à une base de transcendance de A_n sur A_{n-1} , on peut utiliser les lemmes 2.7 et 2.8).

Comme $H^1(G_L, \mathbf{B}_{\text{uni},L}^J) = 0$, on peut trouver $x_i^{(n)} \in \mathbf{B}_{\text{uni},L}^J$ (unique à addition près d'un élément de $(\mathbf{B}_{\text{uni},L}^J)^{G_L} = F_L$), pour $i \in \mathbf{i}$, tel que

$$(\sigma - 1) \cdot x_i^{(n)} = u_{n-1}((\sigma - 1) \cdot X_i^{(n)}), \quad \text{pour tout } \sigma \in G_L.$$

Notons $u'_n : \widetilde{W}_n \rightarrow \mathbf{B}_{\text{uni},L}^J$ l'application F_L -semi-linéaire coïncidant avec u_{n-1} sur A_{n-1} et envoyant $X_i^{(n)}$ sur $x_i^{(n)}$, pour $i \in \mathbf{i}$.

Faisons agir $\sigma \in G_K$ sur $\text{Hom}_F(\widetilde{W}_n, \mathbf{B}_{\text{uni},L}^J)$ par $(\sigma * v)(x) = \sigma(v(\sigma^{-1}x))$. Alors $(\sigma - 1) * u'_n$ est 0 si $\sigma \in G_L$, et est identiquement 0 sur A_{n-1} pour tout $\sigma \in G_K$ (puisque u_{n-1} est G_K -équivariante), et est à valeurs dans F_L . On peut donc considérer $\sigma \mapsto (\sigma - 1) * u'_n$ comme un 1-cocycle sur G_K/G_L à valeurs dans $\text{Hom}_F(W_n, F_L)$. Comme G_K/G_L est un groupe fini, ce 1-cocycle est un 1-cobord, et il existe $v_n : \widetilde{W}_n \rightarrow F_L$, identiquement 0 sur A_{n-1} , tel que $(\sigma - 1) * u'_n = (\sigma - 1) * v_n$ pour tout $\sigma \in G_K$. Il suffit alors de poser $u_n = u'_n - v_n$ pour obtenir l'objet désiré. $\square$

Si L est une extension galoisienne finie de K , on a $\mathbf{B}_{\text{pFF},K}^+ \subset \mathbf{B}_{\text{pFF},L}^+ \subset \mathbf{B}_{\text{uni}}^{I_2}$, et on peut imposer, grâce au lemme 3.17, que si $M \subset L$ est une extension galoisienne de K , les restrictions de ι_L et φ_L à $\mathbf{B}_{\text{pFF},M}^+$ coïncident avec ι_M et φ_M . Cela permet, en écrivant $\overline{K}$ comme la limite inductive $\varinjlim L$ d'une réunion croissante dénombrable d'extensions finies galoisiennes de K , de définir

$$\mathbf{B}_{\text{pFF}}^+ = \varinjlim_{[L:K] < \infty} \mathbf{B}_{\text{pFF},L}^+, \quad \mathbf{B}_{\text{pFF}} := \mathbf{B}_{\text{pFF}}^+[\frac{1}{t}]$$

et de les munir de φ défini comme la limite des φ_L .

Remarque 3.18. — (i) On peut imposer que $\varphi(\log \tilde{p}) = p \log \tilde{p}$ car $\varphi((\sigma - 1) \log \tilde{p}) = p(\sigma - 1) \log \tilde{p}$, pour tout $\sigma \in G_K$.

(ii) L'identification $\mathbf{B}_{\text{uni}}^{(I_1)} = \mathbf{B}_{\text{pFF},K}^+$ permet de construire une injection G_K -équivariante $\mathbf{B}_{\text{pFF},K}^+ \hookrightarrow \mathbf{B}_{\text{pDR}}^+$ prolongeant $\mathbf{B} \hookrightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}}^+$. Celle-ci s'étend, en passant à la limite, en une injection G_K -équivariante $\mathbf{B}_{\text{pFF}}^+ \hookrightarrow \mathbf{B}_{\text{pDR}}^+$ et, en inversant t , en une injection G_K -équivariante $\mathbf{B}_{\text{pFF}} \hookrightarrow \mathbf{B}_{\text{pDR}}$.

3.3.3. Cohomologie galoisienne de $\mathbf{B}_{\text{pFF}}$

Théorème 3.19. — (i) Si $\Lambda_K = \mathbf{B}_{\text{pFF},K}^+, \mathbf{B}_{\text{pFF},K}$, alors

$$H^0(G_K, \Lambda_K) = F, \quad H^i(G_K, \Lambda_K) = 0, \text{ si } i \geq 1.$$

De plus, N laisse stable $\Lambda_K \subset \mathbf{B}_{\text{uni}}^{I_2}$.

(ii) Si $\Lambda = \mathbf{B}_{\text{pFF}}^+, \mathbf{B}_{\text{pFF}}$, alors

$$H^0(G_K, \Lambda) = F, \quad H^i(G_K, \Lambda) = 0, \text{ si } i \geq 1.$$

De plus, N laisse stable $\Lambda \subset \mathbf{B}_{\text{uni}}^{I_2}$.

Démonstration. — On a $H^0(G_K, \mathbf{B}_{\text{uni}}^{J, \leq m}) = F$ pour tous J et m , et donc

$$H^0(G_K, \mathbf{B}_{\text{pFF}, K}^+) = F, \quad \mathrm{R}^1 \varprojlim_J H^0(G_K, \mathbf{B}_{\text{uni}}^{J, \leq m}) = 0, \quad \text{pour tout } m.$$

Maintenant, si m est fixé, $H^1(G_K, \mathbf{B}_{\text{uni}}^{J, \leq m}) = W_J^{\otimes m+1}$ (où $W_J = H^1(G_K, \mathbf{B}^J)$), d'après le (ii) de la rem. 2.5, et $H^i(G_K, \mathbf{B}_{\text{uni}}^{J, \leq m}) = 0$ si $i \geq 2$. Comme $W_J \rightarrow W_I$ est surjective, si $J \supset I$, on en déduit que $\mathrm{R}^1 \varprojlim_J H^1(G_K, \mathbf{B}_{\text{uni}}^{J, \leq m}) = 0$ (le même résultat est trivialement vrai pour H^i , avec $i \geq 2$). Il en résulte que

$$H^i(G_K, \mathbf{B}_{\text{uni}}^{(I_2), \leq m}) = \varprojlim_J H^i(G_K, \mathbf{B}_{\text{uni}}^{J, \leq m}), \quad \text{si } i \geq 1.$$

Il s'ensuit que $H^i(G_K, \mathbf{B}_{\text{uni}}^{(I_2), \leq m}) = 0$ si $i \geq 2$. On en déduit que $H^i(G_K, \mathbf{B}_{\text{pFF}, K}^+) = 0$ si $i \geq 2$, en passant à la limite sur m .

Pour prouver que $H^1(G_K, \mathbf{B}_{\text{pFF}, K}^+) = 0$, on utilise le fait que $H^1(G_K, \mathbf{B}_{\text{uni}}^{J, \leq m}) \rightarrow H^1(G_K, \mathbf{B}_{\text{uni}}^{J, \leq m+1})$ est identiquement 0, pour tous J et m ; il en résulte que $H^1(G_K, \mathbf{B}_{\text{uni}}^{(I_2), \leq m}) \rightarrow H^1(G_K, \mathbf{B}_{\text{uni}}^{(I_2), \leq m+1})$ est identiquement 0 pour tout m , ce qui prouve le résultat en passant à la limite sur m .

Enfin, que N laisse stable $\mathbf{B}_{\text{pFF}, K}^+$ est une conséquence directe du lemme 3.13.

Ceci démontre le (i) pour $\mathbf{B}_{\text{pFF}, K}^+$; le (ii) pour $\mathbf{B}_{\text{pFF}}^+$ s'en déduit facilement par passage à la limite sur les extensions finies galoisiennes L de K .

Pour traiter le cas de $\mathbf{B}_{\text{pFF}, K}$ et $\mathbf{B}_{\text{pFF}}$, on utilise le lemme 3.3 (ou plutôt le (i) de la rem. 3.7) selon lequel l'application naturelle $H^i(G_K, \mathbf{B}^I) \rightarrow H^i(G_K, t^{-j}\mathbf{B}^I)$ est un isomorphisme pour tous I ouvert, $i \geq 0$ et $j \geq 0$. On en déduit, par récurrence sur n , que $H^i(G_K, \mathbf{B}_{\text{uni}}^{I, \leq n}) \rightarrow H^i(G_K, t^{-j}\mathbf{B}_{\text{uni}}^{I, \leq n})$ est un isomorphisme pour tous I ouvert, $i \geq 0$, $j \geq 0$ et $n \geq 0$. Ceci permet de ramener le calcul de $H^i(G_K, t^{-j}\mathbf{B}_{\text{pFF}, K}^+)$ à celui de $H^i(G_K, \mathbf{B}_{\text{pFF}, K}^+)$; on en déduit le résultat pour $\mathbf{B}_{\text{pFF}, K}$ par passage à la limite sur j , et pour $\mathbf{B}_{\text{pFF}}$ par passage à la limite sur les extensions finies galoisiennes L de K . $\square$

Remarque 3.20. — (i) On a $N\varphi = p\varphi N$ sur le sous-anneau $\mathbf{B}_{\text{FF}}^+$ de $\mathbf{B}_{\text{pFF}, K}^+$.

(ii) Par contre, on ne peut pas avoir $N\varphi \neq p\varphi N$ sur $\mathbf{B}_{\text{pFF}, K}^+$. En effet, on a $\log t \in \mathbf{B}_{\text{pFF}, K}^+$ car le 1-cocycle associé $\sigma \mapsto \log \chi_{\text{cycl}}(\sigma)$ est à valeurs dans $\mathbf{B}_I$, pour tout I . On déduit de la rem. 3.20 (pour $n = 0$, puisque $I_2 \subset]\frac{1}{p}, 1]$) que $N(\log t) = -\frac{p}{p-1}$, et donc $\varphi(N(\log t)) = N(\log t)$. Par ailleurs, comme φ commute à G_K , on déduit de la formule $(\sigma - 1) \cdot \log t = \log \chi_{\text{cycl}}(\sigma)$ que $\varphi(\log t) - \log t$ est fixe par G_K , et donc appartient à F . Il s'ensuit que $N(\varphi(\log t)) = N(\log t)$. On en déduit que $N(\varphi(\log t)) \neq p\varphi(N(\log t))$, et donc que $N\varphi \neq p\varphi N$ sur $\mathbf{B}_{\text{pFF}, K}^+$.

Remarque 3.21. — Soit $A = (\mathbf{B}_{\text{pFF}}^+)^{N=0}$. Alors $\mathbf{B}_{\text{pFF}}^+ = A[\log \tilde{p}]$, A est stable par G_K et $H^1(G_K, A) = F \cdot \text{Kum}_p$, mais le (ii) de la rem. 3.20 implique que A n'est pas stable par φ .

3.4. La conjecture C_{st}

Conjecture 3.22. — Si Y est une variété analytique lisse, de dimension d , partiellement propre, définie sur K , on a un isomorphisme naturel de (φ, N, G_K) -modules :

$$(C_{\text{st}}) \quad \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(Y_C) \simeq \varinjlim_{[L:K] < \infty} \mathrm{RHom}_{G_L}(\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{proét},c}(Y_C, \mathbf{Q}_p(d))[2d], \mathbf{B}_{\mathrm{pFF}})$$

Cet isomorphisme est compatible avec celui de la conj. 1.5 : l'injection $\mathbf{B}_{\mathrm{pFF}} \hookrightarrow \mathbf{B}_{\mathrm{pdR}}$ induit l'isomorphisme de Hoydo-Kato $\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}}^{\square} \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(Y_C) \simeq \mathbf{C}_p \otimes_K^{\square} \mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{dR}}(Y)$.

Remarque 3.23. — (i) Il faut faire un peu attention à la signification de $\varinjlim_{[L:K] < \infty}$: si les groupes de cohomologie de de Rham sont de dimension finie, la formule est valable telle quelle ; dans le cas général, cette condition de finitude est satisfaite localement, ce qui donne une recette pour exprimer les $H_{\mathrm{HK}}^i(Y_C)$.

(ii) On a $N\varphi = p\varphi N$ sur $\mathrm{R}\Gamma_{\mathrm{HK}}(Y_C)$ mais pas sur $\mathbf{B}_{\mathrm{pFF}}$ (rem. 3.20). Il n'y a pas de contradiction car on passe de $\mathbf{B}_{\mathrm{FF}}$ à $\mathbf{B}_{\mathrm{pFF}}$ pour tuer les classes parasites ; celles qui survivent vivent dans $\mathbf{B}_{\mathrm{FF}}$ sur lequel on a bien $N\varphi = p\varphi N$.

Appendice A

Algèbres de mélange

Nous expliquons comment la structure d'algèbre de mélange permet de retrouver, de manière plus conceptuelle, les résultats des §§ 2.4 et 2.5, et de les préciser (cf. rem. 3.12).

Dans toute cette section, F est un corps non archimédien complet de caractéristique nulle, G un groupe profini et R une F -algèbre topologique commutative munie d'une action continue de G par automorphismes de F -algèbres. On suppose que R est localement convexe en tant que F -espace vectoriel. Par ailleurs :

Hypothèse A.1. — On suppose que

$$R^G = F, \quad W := H^1(G, R) \text{ est de dimension finie sur } F, \quad H^i(G, R) = 0 \quad (i \geq 2).$$

A.1. L'algèbre de Hopf $\mathrm{Sh}_F(W)$ et le groupe prounipotent $\mathcal{U}$

Nous rappelons ici la définition de l'algèbre de Hopf de mélange $\mathrm{Sh}_F(W)$ associée à W (voir [14, section 1.6] et [17] pour plus de détails).

On munit $\bigoplus_{n \geq 0} W^{\otimes n}$ muni de la topologie de somme directe localement convexe. Si w est un tenseur pur de longueur $n \geq 1$ (i.e. $w = w_1 \otimes \cdots \otimes w_n$), on note $[w]$ ou $[w_1 | \cdots | w_n]$ l'élément correspondant de $\bigoplus_{n \geq 0} W^{\otimes n}$ et $\ell(w) = n$ sa longueur ; on identifie $W^{\otimes 0}$ à F et un tenseur vide (i.e. de longueur 0) à $1 \in F$.

Il y a deux produits usuels qui transforment $\bigoplus_{n \geq 0} W^{\otimes n}$ en F -algèbre unitaire :

- Le produit de concaténation pour lequel

$$[w_1 | \cdots | w_n] \cdot [w'_1 | \cdots | w'_m] = [w_1 | \cdots | w_n | w'_1 | \cdots | w'_m]$$

L'algèbre ainsi obtenue est l'algèbre tensorielle $T_F(W)$ associée à W .

- Le produit de mélange Π défini par

$$[v_1 | \cdots | v_n] \Pi [v'_1 | \cdots | v'_m] = \sum_I w_I$$

où I parcourt les parties à n éléments de $\{1, \dots, n+m\}$ et w_I est obtenu de la manière suivante : on numérote $i(1) < \cdots < i(n)$ les éléments de I et $j(1) < \cdots < j(m)$ ceux de son complémentaire, et on a $w_I = [w_1 | \cdots | w_{n+m}]$, avec $w_k = v_a$ si $k = i(a) \in I$ et $w_k = v'_b$ si $k = j(b) \notin I$. L'algèbre ainsi obtenue est l'algèbre de mélange $\text{Sh}_F(W)$ associée à W .

Les deux produits sont compatibles avec la filtration croissante associée à la longueur : i.e. $\text{Fil}_i = \bigoplus_{n \leq i} W^{\otimes n}$ et $\text{Fil}_i * \text{Fil}_j \subset \text{Fil}_{i+j}$, si $*$ = $\cdot$, Π .

On transforme $\text{Sh}_F(W)$ en une algèbre de Hopf commutative pour le produit Π , le coproduit Δ , la co-unité ε et l'antipode $[w_1 | \cdots | w_n] \mapsto (-1)^n [w_n | \cdots | w_1]$, où :

- $\Delta : \text{Sh}_F(W) \rightarrow \text{Sh}_F(W) \otimes \text{Sh}_F(W)$ est donné par la déconcaténation ⁽¹²⁾ :

$$\Delta([w]) = \sum_{w=vv'} [v] \otimes [v'].$$

- $\varepsilon(1) = 1$ et $\varepsilon([v]) = 0$ si $\ell([v]) \geq 1$.

On définit l'algèbre de Lie libre $\mathbb{L}_F(W^\vee)$ comme la sous-algèbre de Lie de $T_F(W^\vee)$ engendrée par $W^\vee$, le crochet sur $T_F(W^\vee)$ étant le commutateur $[a, b] := a \cdot b - b \cdot a$ pour le produit de concaténation. Notons $\mathfrak{l}_n := \mathbb{L}_F(W^\vee) \cap (W^\vee)^{\otimes n}$ sa composante homogène de degré n ; elle est engendrée par les crochets itérés faisant intervenir n éléments de $W^\vee$.

Soit $\mathcal{U}$ le groupe pro-unipotent $\mathcal{U} := \text{Spec Sh}_F(W)$. Si R est une F -algèbre, on note

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{U}(R) \times \text{Sh}_F(W) \rightarrow R$$

l'accouplement naturel. $\mathcal{U}$ a pour algèbre de Lie

$$\mathfrak{u} := \text{Lie}(\mathcal{U}) = \widehat{\mathbb{L}}_F(W^\vee) = \prod_{n \geq 1} \mathfrak{l}_n,$$

où la complétion est prise par rapport au degré. Pour $m \geq 1$, on note $\mathcal{U}_{\leq m}$ le quotient unipotent de $\mathcal{U}$ dont l'algèbre de Lie est

$$\text{Lie}(\mathcal{U}_{\leq m}) = \mathfrak{u}_{\leq m} := \mathfrak{u} / \prod_{n > m} \mathfrak{l}_n \simeq \bigoplus_{n=1}^m \mathfrak{l}_n$$

On a une suite exacte $1 \rightarrow \mathfrak{l}_m \rightarrow \mathcal{U}_{\leq m} \rightarrow \mathcal{U}_{\leq m-1} \rightarrow 1$ de groupes unipotents, et $\mathfrak{l}_m$ est incluse dans le centre de $\mathcal{U}_{\leq m}$.

12. La notation $\sum_{w=vv'}$ est un peu abusive ; de manière précise, si $w = w_1 \otimes \cdots \otimes w_n$, le premier terme est $[w] \otimes 1$, le dernier $1 \otimes [w]$ et les termes intermédiaires $[w_1 | \cdots | w_i] \otimes [w_{i+1} | \cdots | w_n]$, pour $1 \leq i \leq n-1$.

Remarque A.2. — Si $v \in \mathcal{U}(F)$, l'application $u \mapsto vu$ dans $\mathcal{U}$ induit un morphisme de F -algèbres $h_v : \text{Sh}_F(W) \rightarrow \text{Sh}_F(W)$ tel que $vu = u \circ h_v$. Or

$$\langle vu, [w] \rangle = \langle (v, u), \Delta([w]) \rangle = \left\langle u, \sum_{w=w'w''} \langle v, [w'] \rangle [w''] \right\rangle$$

Il s'ensuit que h_v est donné par

$$(A.3) \quad h_v([w]) = (v \otimes 1) \Delta([w]) = \sum_{w=w'w''} \langle v, [w'] \rangle [w'']$$

La formule montre que $h_v(\text{Fil}_n) \subset \text{Fil}_n$ et que h_v induit l'identité sur $\text{Fil}_n/\text{Fil}_{n-1}$ (en effet, $\ell(w'') < \ell(w)$ si $w = w'w''$ et $w'' \neq w$); il en résulte, par récurrence, que $h_v(\text{Fil}_n) = \text{Fil}_n$.

Remarque A.4. — D'après [16, th. 3.1.1(e)] ou [15, section 4], l'algèbre de mélange $\text{Sh}_F(W)$ est une algèbre de polynômes. On peut munir les variables d'un poids de sorte que la filtration par la longueur coïncide avec la filtration par le degré total pondéré.

A.2. Structures galoisiennes

Définissons la R -algèbre P et ses sous- R -modules libres de type fini $P_{\leq n}$ par :

$$P := R \otimes_F \text{Sh}_F(W) = \varinjlim_n P_{\leq n}, \quad P_{\leq n} := R \otimes_F \left(\bigoplus_{j=0}^n W^{\otimes j} \right).$$

Les $P_{\leq n}$ définissent une filtration croissante exhaustive de P , compatible au produit de mélange au sens où

$$P_{\leq m} \amalg P_{\leq n} \subseteq P_{\leq m+n}.$$

On munit P d'une structure de G -module en faisant agir $\sigma \in G$ sur R ; cette action laisse stables les $P_{\leq n}$, et on a $\sigma([w]) = [w]$ pour tout w . On en déduit une action de G , dite « naturelle », sur $\mathcal{U}(R)$: on demande que $\langle \sigma(x), \sigma(\lambda) \rangle = \sigma(\langle x, \lambda \rangle)$ pour tous $x \in \mathcal{U}(R)$, $\lambda \in P$ et $\sigma \in G$.

Si $\sigma \mapsto C_\sigma$ est un 1-cocycle sur G (i.e. $C_{\sigma\tau} = C_\sigma \sigma(C_\tau)$), à valeurs dans $\mathcal{U}(R)$, on peut tordre l'action naturelle de G sur $\mathcal{U}(R)$, et obtenir une nouvelle action via la formule $\sigma *_C x = \sigma(x) C_\sigma^{-1}$. Ceci définit une action tordue sur P (on note P_C la R -algèbre P munie de cette action tordue $*_C$), et on a (en utilisant $\sigma(C_{\sigma^{-1}}) = C_\sigma^{-1}$)

$$\begin{aligned} \sigma^{-1}(\langle x, \sigma *_C [w] \rangle) &= \langle \sigma^{-1} *_C x, [w] \rangle = \langle \sigma^{-1}(x) C_{\sigma^{-1}}^{-1}, [w] \rangle = \langle (\sigma^{-1}(x), C_{\sigma^{-1}}^{-1}), \Delta([w]) \rangle \\ &= \sum_{w=vv'} \langle \sigma^{-1}(x), [v] \rangle \langle C_{\sigma^{-1}}^{-1}, [v'] \rangle = \sigma^{-1} \left(\sum_{w=vv'} \langle x, [v] \rangle \langle C_\sigma, [v'] \rangle \right) \end{aligned}$$

On en déduit que, si $w = w_1 \otimes \cdots \otimes w_n$,

$$(A.5) \quad \begin{aligned} \sigma *_C [w] &= \sum_{w=vv'} \langle C_\sigma, [v'] \rangle [v] \\ &= [w] + \langle C_\sigma, [w_n] \rangle [w_1] \cdots [w_{n-1}] + \cdots + \langle C_\sigma, [w] \rangle \end{aligned}$$

Remarque A.6. — On déduit de cette formule que $\sigma *_C [w] - [w] \in P_{\leq n-1}$ si w est de longueur n (le seul terme de longueur $> n-1$ dans la formule ci-dessus est le premier). En particulier G laisse stables les $P_{\leq n}$ (on note $P_{C, \leq n}$ le G -module ainsi obtenu), et l'action de G sur $P_{C, \leq n}/P_{C, \leq n-1} = R \otimes_F W^{\otimes n}$ coïncide avec l'action naturelle.

A.3. Construction d'un cocycle

Choisissons un scindage $c : W \rightarrow Z^1(G, R)$, F -linéaire, de la projection $Z^1(G, R) \rightarrow H^1(G, R) = W$. Il détermine un 1-cocycle

$$\tilde{c} : G \rightarrow \operatorname{Hom}_F(W, R) \simeq R \otimes_F W^\vee = \mathcal{U}_{\leq 1}(R), \quad \tilde{c}_g(w) = c(w)(g).$$

Théorème A.7. — *Supposons l'hypothèse A.1 satisfaite. Alors :*

- (i) *Il existe un 1-cocycle $C : G \rightarrow \mathcal{U}(R)$ dont l'image dans $\mathcal{U}_{\leq 1}(R)$ est $\tilde{c}$.*
- (ii) *Pour tout $n \geq 0$, on a ⁽¹³⁾ :*

$$H^0(G, P_{C, \leq n}) = F, \quad H^1(G, P_{C, \leq n}) \simeq W \otimes_F W^{\otimes n}, \quad H^i(G, P_{C, \leq n}) = 0 \quad (i \geq 2).$$

De plus, $H^1(G, P_{C, \leq n-1}) \rightarrow H^1(G, P_{C, \leq n})$ est identiquement 0, et $\operatorname{R}\Gamma(G, P_C) \simeq F[0]$.

Démonstration. — Pour prouver le (i), il s'agit de construire une suite compatible $(c_m)_{m \geq 1}$ de 1-cocycles, où c_m est à valeurs dans $\mathcal{U}_{\leq m}(R)$, et $c_1 = \tilde{c}$. Supposons c_{m-1} construit et relevons c_{m-1} en une 1-cochaîne continue $\hat{c}_m$ à valeurs dans $\mathcal{U}_{\leq m}(R)$. Comme l'extension $0 \rightarrow R \otimes \mathfrak{l}_m \rightarrow \mathcal{U}_{\leq m}(R) \rightarrow \mathcal{U}_{\leq m-1}(R) \rightarrow 1$ est centrale, $(\sigma, \tau) \mapsto \sigma(\hat{c}_{m, \tau})\hat{c}_{m, \sigma\tau}^{-1}\hat{c}_{m, \sigma}$ est un 2-cocycle à valeurs dans $R \otimes_F \mathfrak{l}_m$. Or on a

$$H^2(G, R \otimes_F \mathfrak{l}_m) \simeq H^2(G, R) \otimes_F \mathfrak{l}_m = 0,$$

On peut donc multiplier $\hat{c}_m$ par une 1-cochaîne à valeurs dans $R \otimes_F \mathfrak{l}_m$ pour la transformer en 1-cocycle. Ceci démontre le (i).

Passons à la preuve du (ii). On dispose de suites exactes de G -modules

$$(A.8) \quad 0 \rightarrow P_{C, \leq n-1} \rightarrow P_{C, \leq n} \rightarrow R \otimes_F W^{\otimes n} \rightarrow 0.$$

On en déduit par récurrence, en utilisant l'hypothèse A.1, que $H^i(G, P_{C, \leq n}) = 0$ si $i \geq 2$. La suite exacte longue de cohomologie associée à la suite (A.8) réduit la preuve des énoncés concernant H^0 et H^1 au fait que l'application de connexion $W^{\otimes n} = H^0(G, R \otimes_F W^{\otimes n}) \rightarrow H^1(G, P_{C, \leq n-1})$ est un isomorphisme. Or l'hypothèse de récurrence fournit un isomorphisme $H^1(G, P_{C, \leq n-1}) \simeq H^1(G, R) \otimes W^{\otimes n-1}$ (donné par la projection $P_{\leq n-1} \rightarrow R \otimes W^{\otimes n-1}$), et on déduit de l'identification des termes de longueur $n-1$ dans la formule (A.5) que l'application de connexion est $[w_1] \cdots [w_n] \mapsto c(w_n) \otimes [w_1] \cdots [w_{n-1}]$. Comme $c : W \rightarrow H^1(G, R)$ est un isomorphisme, cela implique que l'application de connexion est effectivement un isomorphisme.

¹³. Rappelons que l'on note $P_C, P_{C, \leq n}$ les G -modules obtenus en tordant l'action naturelle par C .

Comme $\text{R}\Gamma(G, P_C) \simeq \varinjlim_n \text{R}\Gamma(G, P_{C, \leq n})$ (car G est compact et P_C est, topologiquement, la limite inductive des $P_{C, \leq n}$), cela achève la preuve du théorème. $\square$

A.4. Réalisations dans une algèbre acyclique

Soient T une F -algèbre munie d'une action de G , et $\iota : R \rightarrow T$ un morphisme G -équivariant de F -algèbres. Un morphisme $u : P_C \rightarrow T$ de R -algèbres n'est autre qu'un point de $\mathcal{U}_C(T)$ et u est G -équivariant si et seulement si il est fixe par G vu comme élément de $\mathcal{U}_C(T)$, ce qui se traduit par $\sigma(u)\iota(C_\sigma)^{-1} = u$ pour tout $\sigma \in G$.

Proposition A.9. — (i) Si $H^1(G, T) = 0$, alors ι admet un prolongement G -équivariant $u : P_C \rightarrow T$.

(ii) Si u_1, u_2 sont deux tels prolongements et si $H^0(G, T) = F$, il existe $v \in \mathcal{U}(F)$, unique, tel que $u_2 = vu_1 \in \mathcal{U}_C(T)$.

Démonstration. — Pour prouver le (i), il suffit de prouver que $\mathcal{U}_C(T)$ contient un élément G -invariant et, pour cela, il suffit de construire une tour $(u_m)_{m \geq 0}$ d'éléments compatibles avec $u_m \in \mathcal{U}_{C, \leq m}(T)^G$. Il n'y a rien à faire pour $m = 0$.

Supposons u_{m-1} construit. La fibre de $\mathcal{U}_{C, \leq m}(T) \rightarrow \mathcal{U}_{C, \leq m-1}(T)$ au-dessus de u_{m-1} est non vide et, si u est un relèvement fixé, tout autre relèvement s'écrit de manière unique $\exp(a)u$, avec $a \in T \otimes_F \mathfrak{l}_m$. Comme u_{m-1} est fixe par G , cette fibre est stable par l'action $*_C$, et on a $g *_C (\exp(a)u) = \exp(g(a))(g *_C u)$, où G agit sur $T \otimes_F \mathfrak{l}_m$ par son action sur T . L'obstruction à relever u_{m-1} en un élément fixe par G vit donc dans $H^1(T \otimes \mathfrak{l}_m)$. Or ce groupe est 0 puisque $H^1(G, T) = 0$; on peut donc trouver $u_m \in \mathcal{U}_{C, \leq m}(T)^G$ relevant u_{m-1} . On en déduit le (i).

Pour le (ii), la condition selon laquelle u_1 et u_2 sont fixes par G (vus comme éléments de $\mathcal{U}_C(T)$) se traduit par $u_i = \sigma(u_i)\iota(C_\sigma)^{-1}$ pour tout $\sigma \in G$, si $i = 1, 2$. Il en résulte que $u_2 u_1^{-1} = \sigma(u_2 u_1^{-1})$ pour tout $\sigma \in G$, et donc $v := u_2 u_1^{-1} \in \mathcal{U}(F)$ (grâce à l'hypothèse $H^0(G, T) = F$), ce qui permet de conclure puisque $u_2 = vu_1$. $\square$

Soient R, R' des F -algèbres satisfaisant l'hypothèse A.1 (pour le même G), et soient $P := P_C, P' := P'_C$ correspondant à R, R' comme dans le th. A.7. D'après la proposition A.9, tout morphisme continu G -équivariant de F -algèbres $\iota : R \rightarrow R'$ se prolonge en un morphisme G -équivariant d'algèbres $P \rightarrow P'$.

Proposition A.10. — (i) Tout tel prolongement $\hat{\iota}$ vérifie $\hat{\iota}(P_{\leq n}) \subset P'_{\leq n}$, si $n \geq 0$.

(ii) Si ι est un isomorphisme, tout tel prolongement $\hat{\iota}$ est un isomorphisme, et $\hat{\iota}(P_{\leq n}) = P'_{\leq n}$, si $n \geq 0$.

Démonstration. — Observons d'abord que

$$(A.11) \quad y \in P', \quad (\sigma \mapsto (\sigma - 1)y) \in Z^1(G, P'_{\leq r}) \implies y \in P'_{\leq r+1}.$$

En effet, le théorème A.7 affirme que l'application $H^1(G, P'_{\leq r}) \rightarrow H^1(G, P'_{\leq r+1})$ est nulle. Il existe donc $z \in P'_{\leq r+1}$ tel que $(\sigma - 1)z = (\sigma - 1)y$ pour tout σ . Alors $y - z \in (P')^G = F \subseteq P'_{\leq 0}$, ce qui prouve (A.11).

Soit $\hat{\iota} : P \rightarrow P'$ un prolongement équivariant. On raisonne par récurrence sur la longueur. En longueur 0, on a $\hat{\iota} = \iota : R \rightarrow R'$. Si l'assertion est vraie pour les longueurs $< d$, alors, pour $[w]$ de longueur d , $\sigma \mapsto (\sigma - 1)\hat{\iota}([w]) = \hat{\iota}((\sigma - 1)[w])$ qui est un 1-cocycle, est à valeurs dans $P'_{\leq d-1}$ d'après la formule (A.5) et l'hypothèse de récurrence. L'implication (A.11) donne $\hat{\iota}([w]) \in P'_{\leq d}$. Ceci prouve le (i).

Si ι est un isomorphisme, il existe $\hat{\iota}' : P' \rightarrow P$ prolongeant ι^{-1} . Mais alors $\hat{\iota}' \circ \hat{\iota}$ est un morphisme G -équivariant de P dans lui-même. Le (ii) de la prop A.9 appliqué à $u_1 = \text{id}$ et $u_2 = \hat{\iota}' \circ \hat{\iota}$, et la rem. A.2 impliquent que $\hat{\iota}' \circ \hat{\iota}$ est un isomorphisme et $\hat{\iota}' \circ \hat{\iota}(P_{\leq n}) = P_{\leq n}$. Pour la même raison, $\hat{\iota} \circ \hat{\iota}'$ est un isomorphisme et $\hat{\iota} \circ \hat{\iota}'(P'_{\leq n}) = P'_{\leq n}$. On en déduit que $\hat{\iota}'$ et $\hat{\iota}$ sont des isomorphismes, et que les inclusions $\hat{\iota}'(P'_{\leq n}) \subset P_{\leq n}$ et $\hat{\iota}(P_{\leq n}) \subset P'_{\leq n}$ sont des égalités. Ceci prouve le (ii) et permet de conclure. $\square$

A.5. Comparaisons

Soit A une R -algèbre munie d'une action de G compatible avec celle de G sur R , et admettant une présentation

$$A = \varinjlim_{n \geq 0} A_n, \quad A_0 = R, \quad A_{n+1} = A_n[X_{n,\alpha} \mid \alpha \in S_n],$$

où chaque A_n est stable par G et $\sigma(X_{n,\alpha}) = X_{n,\alpha} + z_{n,\alpha}(\sigma)$, pour $z_{n,\alpha} \in Z^1(G, A_n)$. Supposons que $A^G = F$, $H^1(G, A) = 0$. D'après la prop. A.9, l'inclusion $R \hookrightarrow A$ s'étend (de manière non unique) en un morphisme G -équivariant $i : P_C \rightarrow A$.

Proposition A.12. — *Tout morphisme continu G -équivariant de R -algèbres entre P_C et A , dans l'un ou l'autre sens, est un isomorphisme d'inverse continu.*

Démonstration. — On dispose déjà de $i : P_C \rightarrow A$; construisons un morphisme continu dans l'autre sens $r : A \rightarrow P_C$. Nous montrerons ensuite que r et i sont des isomorphismes continus.

Pour construire r , on va construire sa restriction $r_n : A_n \rightarrow P_C$ par récurrence sur n . On n'a pas le choix pour $r_0 : R \rightarrow P_C$. Supposons $r_n : A_n \rightarrow P$ construit. Pour tout $\alpha \in S_n$, choisissons $x_{n,\alpha} \in P$ tel que

$$(\sigma - 1)x_{n,\alpha} = r_n(z_{n,\alpha}(\sigma)), \quad \sigma \in G.$$

C'est possible car, d'après le théorème A.7, $H^1(G, P) = 0$. Envoyer $X_{n,\alpha}$ sur $x_{n,\alpha}$ prolonge r_n en un morphisme G -équivariant $r_{n+1} : A_{n+1} \rightarrow P$, continu. On obtient r en passant à la limite.

Alors $u := r \circ i : P_C \rightarrow P_C$ est un endomorphisme G -équivariant de R -algèbres. D'après le corollaire A.10, c'est un automorphisme d'inverse continu. Quitte à remplacer i par $i \circ u^{-1}$, on peut supposer que $r \circ i = \text{id}_P$. Alors $e := i \circ r$ est un endomorphisme continu équivariant de R -algèbres de A vérifiant $e^2 = e$. Pour conclure, il s'agit de prouver que $e = \text{id}$.

Montrons par récurrence que e fixe tout élément de chaque A_n . C'est vrai pour $A_0 = R$. Supposons-le pour A_n ; soit $\alpha \in S_n$. Comme $z_{n,\alpha}(\sigma) \in A_n$, on a

$$(\sigma - 1)(e(X_{n,\alpha}) - X_{n,\alpha}) = e(z_{n,\alpha}(\sigma)) - z_{n,\alpha}(\sigma) = 0, \quad \sigma \in G.$$

Donc $c := e(X_{n,\alpha}) - X_{n,\alpha} \in A^G = F$. Comme e fixe F , et comme $e^2 = e$, on a $c = e(c) = e^2(X_{n,\alpha}) - e(X_{n,\alpha}) = 0$, et donc $e(X_{n,\alpha}) = X_{n,\alpha}$, ce qui permet de conclure. $\square$

La proposition ci-dessus permet de faire le lien entre l'algèbre de mélange P_C et l'algèbre R_{uni} du th. 2.2 (dont l'existence ne demande que la condition $H^0(G, R) = F$, cf. rem. 2.3).

Corollaire A.13. — *Il existe un isomorphisme G -équivariant de R -algèbres $P_C \simeq R_{\text{uni}}$, et tout tel isomorphisme identifie la filtration par la longueur sur P_C à la filtration par le poids sur R_{uni} .*

Démonstration. — L'existence résulte du th. 2.2 et de la proposition A.12. Maintenant, soit $f : P_C \xrightarrow{\sim} R_{\text{uni}}$ un R -isomorphisme topologique G -équivariant. On veut prouver que f et f^{-1} préservent les filtrations. Rappelons que, si $T = P_C, R_{\text{uni}}$ est muni de la filtration idoine, on a (cf. (A.11) pour P_C et (ii) du lemme 2.4 pour R_{uni})

$$(A.14) \quad y \in T, \quad (\sigma \mapsto (\sigma - 1)y) \in Z^1(G, T_{\leq n-1}) \implies y \in T_{\leq n}.$$

Dans les deux cas, on va utiliser cette implication pour prouver, par récurrence sur n , que le cran n de la filtration est préservé. On a $P_{C, \leq 0} = R = R_{\text{uni}}^{\leq 0}$; le résultat est donc immédiat pour $n = 0$. Supposons qu'il soit vrai pour $n - 1$.

- Pour f , si $[w]$ est de longueur n , alors $(\sigma - 1)[w] \in P_{C, \leq n-1}$ d'après la rem. A.6. L'hypothèse de récurrence donne $(\sigma - 1)f([w]) = f((\sigma - 1)[w]) \in R_{\text{uni}}^{\leq n-1}$, et le critère (A.14) implique $f([w]) \in R_{\text{uni}}^{\leq n}$. L'hypothèse de récurrence est donc vraie pour n .

- Pour f^{-1} , si $1 \leq i \leq r_n$, alors $(\sigma - 1)X_i^{(n)} = c_{\sigma}^{(n,i)} \in R_{\text{uni}}^{\leq n-1}$. L'hypothèse de récurrence donne $(\sigma - 1)f^{-1}(X_i^{(n)}) = f^{-1}(c_{\sigma}^{(n,i)}) \in P_{C, \leq n-1}$, et le critère (A.14) implique $f^{-1}(X_i^{(n)}) \in P_{C, \leq n}$. L'hypothèse de récurrence est donc vraie pour n .

Ceci permet de conclure. $\square$

Remarque A.15. — La prop. A.12 permet de montrer qu'on peut aussi construire R_{uni} de manière plus brutale, comme la limite inductive d'algèbres A_n telles que $H^1(G, A_n) \rightarrow H^1(G, A_{n+1})$ soit identiquement 0, pour tout $n \geq 0$ (la différence avec la construction du § 2.4 est que A_{n+1} est, en général, de type infini sur A_n , si $n \geq 1$). On pose $A_0 = R$ et, A_n étant construite, on choisit des 1-cocycles $(z_{n,\alpha})_{\alpha \in S_n}$ dont les classes forment une F -base de $H^1(G, A_n)$, et on pose

$$A_{n+1} = A_n[X_{n,\alpha} \mid \alpha \in S_n], \quad \sigma(X_{n,\alpha}) = X_{n,\alpha} + z_{n,\alpha}(\sigma), \quad A_{\infty} = \varinjlim_n A_n.$$

On a $H^1(G, A_\infty) = 0$ par construction et $A_\infty^G = F$ par une variante (facile) des arguments de la preuve du lemme 2.4. On peut donc utiliser la prop. A.12 pour en déduire que $P_C \simeq A_\infty$, et le cor. A.13 pour en déduire que $A_\infty \simeq R_{\text{uni}}$.

Références

- [1] P. ACHINGER, S. GILLES, W. NIZIOŁ, Compactly supported p -adic pro-étale cohomology of analytic varieties, [arXiv:2501.13651\[math.AG\]](#), Nagoya Math. J. (à paraître).
- [2] G. BOSCO, Rational p -adic Hodge theory for rigid-analytic varieties, [arXiv:2306.06100v1\[math.AG\]](#), 2023.
- [3] P. COLMEZ, Sur un résultat de Shankar Sen, C.R.A.S. **318** (1994), 983–985.
- [4] P. COLMEZ, Espaces Vectoriels de dimension finie et représentations de de Rham, Astérisque **319** (2008), 117–186.
- [5] P. COLMEZ, G. DOSPINESCU, W. NIZIOŁ, Cohomology of p -adic Stein spaces, Invent. Math. **219** (2020), 873–985.
- [6] P. COLMEZ, G. DOSPINESCU, W. NIZIOŁ, Cohomologie des courbes analytiques p -adiques, Cambridge J. Math. **10** (2022), 511–655.
- [7] P. COLMEZ, S. GILLES, W. NIZIOŁ, Arithmetic duality for the pro-étale cohomology of p -adic analytic curves, [arXiv:2308.07712\[math.NT\]](#), Compositio Math (à paraître).
- [8] P. COLMEZ, S. GILLES, W. NIZIOŁ, Duality for p -adic geometric proétale cohomology, [arXiv:2411.12163\[math.AG\]](#), 2024 (nouvelle version augmentée 2025).
- [9] P. COLMEZ, S. GILLES, Z. LI, W. NIZIOŁ, C_{st} -conjecture for compactly supported pro-étale cohomology, en préparation.
- [10] P. COLMEZ, W. NIZIOŁ, On the cohomology of p -adic analytic spaces, II : The C_{st} -conjecture, Duke Math. J. **174** (2025), 2203–2301.
- [11] L. FARGUES, J.-M. FONTAINE, Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge p -adique, Astérisque **406** (2018), 51–382.
- [12] J.-M. FONTAINE, Arithmétique des représentations galoisiennes p -adiques, Astérisque **295** (2004), 1–115.
- [13] J.-M. FONTAINE, Presque C_p -représentations, *Kazuya Kato's fiftieth birthday*, Doc. Math. 2003, Extra Vol., 285–385.
- [14] D. GRINBERG, V. REINER, Hopf Algebras in Combinatorics, [arXiv:1409.8356v7\[math.CO\]](#), 2020.
- [15] G. MELANÇON, C. REUTENAUER, Lyndon words, free algebras and shuffles, Canad. J. Math. **41** (1989), 577–591.
- [16] D. RADFORD, A natural ring basis for the shuffle algebra and an application to group schemes, J. Algebra **58** (1979), 432–454.
- [17] C. REUTENAUER, *Free Lie Algebras*, London Mathematical Society Monographs, New Series 7, Clarendon Press, Oxford, 1993.
- [18] J. TATE, p -divisible groups, *Proc. of a conference on local fields*, Nuffic Summer School at Driebergen, 158–183, Springer 1967.

PIERRE COLMEZ, CNRS, IMJ-PRG, Sorbonne Université, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France

E-mail : pierre.colmez@imj-prg.fr

SALLY GILLES, LMB, Université Marie et Louis Pasteur, 16 route de Gray, 25030 Besançon CEDEX,
France • *E-mail* : sally.gilles@umlp.fr

WIESŁAWA NIZIOL, CNRS, IMJ-PRG, Sorbonne Université, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France

E-mail : wieslawa.niziol@imj-prg.fr