
UNE CONJECTURE C_{st} POUR LA COHOMOLOGIE À SUPPORT COMPACT

par

Pierre Colmez, Sally Gilles & Wiesława Nizioł

Résumé. — Let $\mathbf{B}$ be the ring of analytic functions on the Fargues-Fontaine curve Y_{FF} . We show that adding p -adic analogs of $\log p$ and $\log 2\pi i$ kills its Galois cohomology in degrees ≥ 1 . The analogous result for $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ is folklore. This makes it possible to formulate C_{dR} and C_{st} -type conjectures for compact support cohomology of p -adic analytic varieties.

Introduction

Les conjectures C_{dR} et C_{st} [3, conj. 1.6] fournissent des recettes pour extraire, de leur cohomologie proétale p -adique, les cohomologies de de Rham et de Hyodo-Kato des variétés analytiques p -adiques.

Conjecture 0.1. — *Si Y est une variété analytique partiellement propre, définie sur une extension finie K de $\mathbf{Q}_p$, on a des isomorphismes (de K -modules filtrés et de (φ, N, G_K) -modules sur $\mathbf{Q}_p^{\text{nr}}$, respectivement)*

$$\begin{aligned} (C_{\text{dR}}) \quad & \text{Hom}_{G_K}(H_{\text{proét}}^n(Y_{\mathbf{C}_p}, \mathbf{Q}_p), \mathbf{B}_{\text{dR}}) \simeq H_{\text{dR}}^n(Y)^* \\ (C_{\text{st}}) \quad & \varinjlim_{[L:K] < \infty} \text{Hom}_{G_L}(H_{\text{proét}}^n(Y_{\mathbf{C}_p}, \mathbf{Q}_p), \mathbf{B}_{\text{st}}) \simeq H_{\text{HK}}^n(Y)^* \end{aligned}$$

Dans la conjecture, Hom_{G_L} est une abréviation pour désigner les morphismes G_L -équivalariants continus (pour les topologies naturelles sur les deux membres).

Les mêmes recettes ne marchent pas pour la cohomologie à support compact. Au lieu de Hom , on doit prendre un Hom dérivé, et aussi tuer la cohomologie galoisienne des anneaux $\mathbf{B}_{\text{dR}}$ et $\mathbf{B}_{\text{st}}$ en degrés ≥ 1 , sinon on se retrouve avec des termes parasites (cf. rem. 3.2).

P. C. et W. N. sont partiellement financés par la Simons Collaboration on Perfection in Algebra, Geometry, and Topology.

Dans cette courte note, on explique comment tuer, en degrés ≥ 1 , la cohomologie galoisienne des anneaux de périodes $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ et (des avatars $\mathbf{B}[\log \tilde{p}]$, $\mathbf{B}[\log \tilde{p}, \frac{1}{t}]$ de) $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}^+$, $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ en rajoutant un logarithme du $2i\pi$ p -adique de Fontaine (th. 1.4 et 2.4). Le cas de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ relève du folklore mais celui de $\mathbf{B}[\log \tilde{p}]$ est plus surprenant (en particulier, il ne semble pas possible de faire la même chose avec $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}^+$ lui-même).

Ceci nous permet de formuler (cf. conj. 3.1) un analogue de la conjecture 0.1 ci-dessus pour la cohomologie à support compact des variétés analytiques partiellement propres.

1. Cohomologie galoisienne de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$

1.1. Cohomologie galoisienne de C . — Soient κ un corps parfait de caractéristique p , $F = W(\kappa)[\frac{1}{p}]$ et K une extension finie totalement ramifiée de F (et donc le corps résiduel κ_K de K est κ). On note G_K le groupe de Galois absolu de K et C le complété d'une clôture algébrique de K . On doit à Tate [5] le calcul de la cohomologie galoisienne de C . Si $j \in \mathbf{Z}$, on note $C(j)$ le tordu de C par χ_{cycl}^j , où $\chi_{\mathrm{cycl}} : G_K \rightarrow \mathbf{Z}_p^*$ est le caractère cyclotomique.

Proposition 1.1. — (Tate) On a

$$H^0(G_K, C(j)) = \begin{cases} K & \text{si } j = 0, \\ 0 & \text{si } j \neq 0; \end{cases} \quad H^1(G_K, C(j)) \cong \begin{cases} K \cdot \log \chi_{\mathrm{cycl}} & \text{si } j = 0, \\ 0 & \text{si } j \neq 0; \end{cases}$$

$$H^i(G_K, C(j)) = 0, \text{ pour tout } j, \text{ si } i \geq 2.$$

1.2. Élimination de la cohomologie de C en degrés ≥ 1 . — On définit $\log t$ comme étant transcendant sur C , et on munit $C[\log t]$ de l'action de G_K donnée par $\sigma(\log t) = \log t + \log \chi_{\mathrm{cycl}}(\sigma)$.

Proposition 1.2. — On a

$$H^0(G_K, C[\log t]) = K, \quad H^i(G_K, C[\log t](j)) = 0 \text{ si } i \geq 1 \text{ ou si } j \neq 0.$$

Démonstration. — Notons $C[\log t]^{\leq k}$ le C -module des polynômes de degré $\leq k$ en $\log t$. Alors $C[\log t]^{\leq k}$ est stable par G_K et, si $j \in \mathbf{Z}$, on a une suite exacte de G_K -modules

$$0 \rightarrow C[\log t]^{\leq k}(j) \rightarrow C[\log t]^{\leq k+1}(j) \rightarrow C(j) \rightarrow 0$$

- Si $j \neq 0$, on en déduit, par une récurrence immédiate utilisant la prop. 1.1, que pour tout i et tout k , on a $H^i(G_K, C[\log t]^{\leq k}(j)) = 0$. En passant à la limite inductive, cela prouve que $H^i(G_K, C[\log t](j)) = 0$, pour tout i .

- Si $j = 0$, on prouve, par récurrence sur k , que $H^i(G_K, C[\log t]^{\leq k}) = 0$ si $i \geq 2$, et donc que $H^i(G_K, C[\log t]) = 0$ si $i \geq 2$. La suite exacte longue de cohomologie associée

à la suite exacte courte ci-dessus et la nullité de $H^2(G_K, C[\log t]^{\leq k})$ fournissent une suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H^0(G_K, C[\log t]^{\leq k}) & \rightarrow & H^0(G_K, C[\log t]^{\leq k+1}) & \rightarrow & H^0(G_K, C) \\ & & & & \nwarrow & & \\ & & H^1(G_K, C[\log t]^{\leq k}) & \rightarrow & H^1(G_K, C[\log t]^{\leq k+1}) & \rightarrow & H^1(G_K, C) \rightarrow 0 \end{array}$$

Montrons, par récurrence sur k , que :

- $H^0(G_K, C[\log t]^{\leq k}) = K$,
- $H^1(G_K, C[\log t]^{\leq k}) \cong K$,
- $H^0(G_K, C) \rightarrow H^1(G_K, C[\log t]^{\leq k})$ est un isomorphisme,
- $H^1(G_K, C[\log t]^{\leq k}) \rightarrow H^1(G_K, C[\log t]^{\leq k+1})$ est l'application nulle.

Tous les modules ci-dessus sont des K -espaces vectoriels et l'hypothèse de récurrence alliée à la prop. 1.1 montre qu'ils sont tous de dimension 1 sauf peut-être $H^i(G_K, C[\log t]^{\leq k+1})$, pour $i = 0, 1$. Si $H^0(G_K, C[\log t]^{\leq k+1}) \neq K$, comme $H^0(G_K, C) = K$, il existe $a_k, \dots, a_0 \in C$ tels que $(\log t)^{k+1} + a_k(\log t)^k + \dots + a_0$ soit fixe par G_K . En appliquant $\sigma - 1$ et en regardant modulo $C[\log t]^{\leq k-1}$, cela donne $(\sigma - 1)a_k = (k + 1) \log \chi_{\text{cycl}}(\sigma)$. Mais alors $x := \exp((p - 1)p^N a_k)$ est, si $N \gg 0$, un élément de C^* vérifiant $\sigma(x) = \chi_{\text{cycl}}^j(\sigma)x$, avec $j = (p - 1)p^N(k + 1)$, ce qui contredit la nullité de $H^0(G_K, C(-j))$. Il s'ensuit que $H^0(G_K, C[\log t]^{\leq k+1}) = K$.

On en déduit que $H^1(G_K, C[\log t]^{\leq k+1})$ est de dimension 1 et tous les autres énoncés résultent de l'exactitude de la suite ci-dessus. Par passage à la limite, on en déduit que $H^0(G_K, C[\log t]) = K$ et $H^1(G_K, C[\log t]) = 0$. $\square$

1.3. Élimination de la cohomologie de $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ en degrés ≥ 1 . — Comme $t^j \mathbf{B}_{\text{dR}}^+ / t^{j+1} \mathbf{B}_{\text{dR}}^+ = C(j)$, il n'est pas très difficile de déduire de la prop. 1.1 le résultat suivant.

Proposition 1.3. — *Si $\Lambda = \mathbf{B}_{\text{dR}}^+, \mathbf{B}_{\text{dR}}$,*

$$H^0(G_K, \Lambda) = K, \quad H^1(G_K, \Lambda) = K \cdot \log \chi_{\text{cycl}}, \quad H^i(G_K, \Lambda) = 0 \text{ si } i \geq 2.$$

La preuve de la prop. 1.2 peut alors s'adapter pour démontrer le résultat suivant, dans lequel on a posé :

$$\mathbf{B}_{\text{pdR}}^+ := \mathbf{B}_{\text{dR}}^+[\log t], \quad \mathbf{B}_{\text{pdR}} := \mathbf{B}_{\text{dR}}[\log t]$$

Théorème 1.4. — *Si $\Lambda = \mathbf{B}_{\text{pdR}}^+, \mathbf{B}_{\text{pdR}}$,*

$$H^0(G_K, \Lambda) = K, \quad H^i(G_K, \Lambda) = 0 \text{ si } i \geq 1.$$

2. Cohomologie de $\mathbf{B}$

2.1. L'anneau $\mathbf{B}$ et ses extensions. — Soit Y_{FF} la courbe de Fargues-Fontaine obtenue en retirant de $\text{Spa}(\mathbf{A}_{\text{inf}})$ les diviseurs $p = 0$ et $\tilde{p} = 0$, où $\tilde{p} = [p^{\flat}]$. Si I est un intervalle de $\mathbf{R}_+^*$, soit $\mathbf{B}^I = \mathcal{O}(Y_{\text{FF}}^I)$, où Y_{FF}^I est le lieu des v vérifiant $v(\tilde{p})/v(p) \in I$.

Si $I = [r, s]$ avec $r, s \in \mathbf{Q}$, alors $\mathbf{B}^I = \mathbf{A}^{[r,s]}[\frac{1}{p}]$, où $\mathbf{A}^{[r,s]}$ est le complété p -adique de $\mathbf{A}_{\text{inf}}[\frac{p^{1/r}}{p}, \frac{p}{p^{1/s}}]$. Soit

$$\mathbf{B} := \mathbf{B}^{[0,\infty[} = \mathcal{O}(Y_{\text{FF}}) = \varprojlim \mathbf{B}^{[r,s]}.$$

On note $x_{\text{dR}} \in Y_{\text{FF}}$ le point défini par $\tilde{p} = p$; le complété de l'anneau local en ce point est alors $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$, ce qui fournit un morphisme injectif $\mathbf{B} \hookrightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ qui est G_K -équivariant.

Lemme 2.1. — [1, (2.13)]. On a des isomorphismes

$$\mathbf{B}/t\mathbf{B} = \prod_{n \in \mathbf{Z}} C \quad \text{et} \quad \mathbf{B}^{[0,r]}/t\mathbf{B}^{[0,r]} = \prod_{p^n r \geq 1} C$$

Démonstration. — Si $r, s \in \mathbf{Q}_+^*$, il résulte de [4, th.2.5.1] et [4, th.2.4.10] que $\mathbf{B}^{[r,s]}/t\mathbf{B}^{[r,s]} = \prod_{y \in \text{Div}(t) \cap Y_{\text{FF}}^{[r,s]}} \mathbf{B}_{\text{dR}}^+(C_y)/\text{Fil}^{v_y(t)}$. Or les zéros de t sont l'ensemble des translatés de x_{dR} par $\varphi^{\mathbf{Z}}$, chacun avec multiplicité 1. Comme les corps résiduels en tous ces translatés sont, naturellement, isomorphes à C , on obtient $\mathbf{B}^{[r,s]}/t\mathbf{B}^{[r,s]} = \prod_{r \leq p^n \leq s} C$. Le résultat s'en déduit en utilisant la nullité de $\mathbf{R}^1 \varprojlim t\mathbf{B}^{[r,s]}$ (qui résulte du critère de Mittag-Leffler topologique). $\square$

On définit $\log \tilde{p}$ comme un élément transcendant sur $\mathbf{B}$, vérifiant

$$\varphi(\log \tilde{p}) = p \log \tilde{p} \quad \text{et} \quad \sigma(\log \tilde{p}) = \log \tilde{p} + \text{Kum}_p(\sigma) t$$

où $\text{Kum}_p : G_K \rightarrow \mathbf{Z}_p(\chi_{\text{cycl}})$ est le cocycle de Kummer associé à p et t est le $2i\pi$ p -adique de Fontaine. On pose alors :

$$\mathbf{B}_{\text{FF}}^+ := \mathbf{B}[\log \tilde{p}], \quad \mathbf{B}_{\text{FF}}^+ := \mathbf{B}_{\text{FF}}^+[\frac{1}{t}], \quad \mathbf{B}_{\text{pFF}}^+ := \mathbf{B}_{\text{FF}}^+[\log t], \quad \mathbf{B}_{\text{pFF}}^+ := \mathbf{B}_{\text{pFF}}^+[\frac{1}{t}]$$

On étend l'injection $\mathbf{B} \hookrightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ en un morphisme d'anneaux $K \otimes_F \mathbf{B}_{\text{FF}}^+ \rightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ en envoyant $\log \tilde{p}$ sur $\log \frac{\tilde{p}}{p}$ (la série définissant $\log \frac{\tilde{p}}{p}$ converge puisque $\frac{\tilde{p}}{p} - 1$ est dans l'idéal maximal de $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$). Ce morphisme est G_K -équivariant.

Proposition 2.2. — ([4, prop. 10.3.15]) *Le morphisme $K \otimes_F \mathbf{B}_{\text{FF}}^+ \rightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ ci-dessus est injectif.*

Corollaire 2.3. — (i) *Le morphisme naturel $K \otimes_F \mathbf{B}_{\text{pFF}}^+ \rightarrow \mathbf{B}_{\text{pdR}}$ est G_K -équivariant et injectif.*

(ii) $H^0(G_K, \mathbf{B}_{\text{pFF}}^+) = F$.

Démonstration. — Le (i) est immédiat et le (ii) en résulte en utilisant le fait que $H^0(G_K, \mathbf{B}_{\text{pdR}}) = K$. $\square$

2.2. Élimination de la cohomologie de $\mathbf{B}$ en degrés ≥ 1 . — Nous allons prouver le résultat suivant.

Théorème 2.4. — *Si $\Lambda = \mathbf{B}_{\text{pFF}}^+, \mathbf{B}_{\text{pFF}}^+$, alors*

$$H^i(G_K, \Lambda) = \begin{cases} F & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{si } i \geq 1. \end{cases}$$

Démonstration. — Le cas $i = 0$ a été traité ci-dessus ((ii) du cor. 2.3). Le cas $i \geq 1$ est une conséquence directe du lemme 2.11 ci-dessous. $\square$

Remarque 2.5. — Au lieu de $\mathbf{B}$, on utilise plus classiquement $\mathbf{B}_{\text{cris}}^+$ ou encore $\mathbf{B}_{\text{rig}}^+ := \cap_{n \geq 0} \varphi^n(\mathbf{B}_{\text{cris}}^+)$ en théorie de Hodge p -adique; $\mathbf{B}_{\text{rig}}^+$ est l'anneau des fonctions analytiques sur la courbe analytique obtenue en retirant seulement le diviseur $p = 0$ à $\text{Spa}(\mathbf{A}_{\text{inf}})$. Les anneaux $\mathbf{B}$ et $\mathbf{B}_{\text{rig}}^+$ ont des propriétés très proches (en particulier, les éléments vivant dans des sous- F -modules de type fini, stables par φ , sont les mêmes, et ce sont eux qui apparaissent dans les matrices des isomorphismes de comparaison), mais il semble difficile de tuer la cohomologie galoisienne de $\mathbf{B}_{\text{rig}}^+$ (ou de $\mathbf{B}_{\text{cris}}^+$) en lui adjoignant un nombre fini d'éléments. Le problème semble être que $\mathbf{B}_{\text{cris}}^+/t\mathbf{B}_{\text{cris}}^+$ et $\mathbf{B}_{\text{rig}}^+/t\mathbf{B}_{\text{rig}}^+$ n'ont pas une description aussi simple que celle de $\mathbf{B}/t\mathbf{B}$ donnée dans le lemme 2.1 ci-dessus.

Lemme 2.6. — *L'application naturelle $H^i(G_K, \mathbf{B}) \rightarrow H^i(G_K, \mathbf{B}[\frac{1}{t}])$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Comme G_K est compact, $H^i(G_K, \mathbf{B}[\frac{1}{t}]) = \varinjlim_j H^i(G_K, t^{-j}\mathbf{B})$ et il suffit de prouver que, si $j \geq 0$, alors $H^i(G_K, t^{-j}\mathbf{B}) \rightarrow H^i(G_K, t^{-j-1}\mathbf{B})$ est un isomorphisme. Il résulte du lemme 2.1 que l'on a une suite exacte

$$0 \rightarrow t^{-j}\mathbf{B} \rightarrow t^{-j-1}\mathbf{B} \rightarrow \prod_{n \in \mathbf{Z}} C(-j-1) \rightarrow 0$$

et le résultat est une conséquence de ce que $H^i(G_K, \prod_{n \in \mathbf{Z}} C(-j-1)) = 0$ pour tout i , d'après la prop. 1.1. $\square$

Lemme 2.7. — *L'image de $H^1(G_K, t\mathbf{B})$ dans $H^1(G_K, \mathbf{B})$ est un F -espace de dimension 1 engendré par la classe de $\sigma \mapsto (\sigma - 1) \cdot \log \tilde{p}$.*

Démonstration. — Soit $\sigma \mapsto c_\sigma$ un 1-cocycle à valeurs dans $t\mathbf{B}$. Fixons $r \in]1, p[$; alors $\mathbf{B} \subset \mathbf{B}^{[0, r]}$. Choisissons $s \in]1, r[$. D'après [2, prop. 10.7], appliquée à $\varphi^n(c_\sigma)$ (qui vérifie le (ii) de la proposition en question puisqu'il est à valeurs dans $t\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$), il existe $a'_n \in F$ et $b'_n \in \mathbf{B}^{[0, s]}$ tels que $\varphi^n(c_\sigma) = (\sigma - 1)(a'_n \log \tilde{p} + b'_n)$. On a alors $c_\sigma = (\sigma - 1)(a_n \log \tilde{p} + b_n)$, avec $a_n = p^{-n} \varphi^{-n}(a'_n) \in F$ et $b_n = \varphi^{-n}(b'_n) \in \mathbf{B}^{[0, p^n s]}$. Par ailleurs, comme $H^0(G_K, \mathbf{B}^{[0, r]} \oplus F \log \tilde{p}) = F$, on a $a_{n+1} = a_n$ pour tout n et $b_{n+1} - b_n \in F$, pour tout n . On peut donc modifier b_n par un élément de F de telle sorte que $b_{n+1} = b_n := b$ pour tout n , et alors $b \in \cap_{n \geq 0} \mathbf{B}^{[0, p^n s]} = \mathbf{B}$.

Le résultat s'en déduit. $\square$

Lemme 2.8. — *$H^i(G_K, t^j\mathbf{B}) = 0$ pour tout $j \in \mathbf{Z}$ et tout $i \geq 2$.*

Démonstration. — Soient $H_K := \text{Ker } \chi_{\text{cycl}}$ et $\Gamma_K := G_K/H_K = \text{Gal}(K(\mu_{p^\infty})/K)$. Par descente presque étale, on prouve que $H^i(H_K, t^j\mathbf{B}) = 0$ pour tout $i \geq 1$ et tout j . Donc l'inflation $H^i(\Gamma_K, H^0(H_K, t^j\mathbf{B})) \rightarrow H^i(G_K, t^j\mathbf{B})$ est un isomorphisme

pour tout $i \geq 1$ et tout j . Le résultat est donc une conséquence de ce que Γ_K est de dimension cohomologique 1. $\square$

Proposition 2.9. — *On a une suite exacte*

$$0 \rightarrow F \cdot \text{Kum}_p \rightarrow H^1(G_K, \mathbf{B}) \rightarrow \left(\prod_{n \in \mathbf{Z}} K \right) \cdot \log \chi_{\text{cycl}} \rightarrow 0$$

Démonstration. — Cela résulte de la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte $0 \rightarrow t\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B} \rightarrow \prod_{n \in \mathbf{Z}} C \rightarrow 0$, de la nullité de $H^2(G_K, t\mathbf{B})$ (lemme 2.8, pour la surjectivité à droite), du lemme 2.7 et de la prop. 1.1 dont on tire l'identité $H^1(G_K, \prod_{n \in \mathbf{Z}} C) = (\prod_{n \in \mathbf{Z}} K) \cdot \log \chi_{\text{cycl}}$. $\square$

Remarque 2.10. — Les mêmes arguments montrent que, si $I \subset]0, \infty[$ est un intervalle ouvert, et si $\mathbf{Z}(I)$ est l'ensemble des $n \in \mathbf{Z}$, tel que $p^{-n} \in I$, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow F \cdot \text{Kum}_p \rightarrow H^1(G_K, \mathbf{B}^I) \rightarrow \left(\prod_{n \in \mathbf{Z}(I)} K \right) \cdot \log \chi_{\text{cycl}} \rightarrow 0$$

Lemme 2.11. — *Si $\Lambda = \mathbf{B}, \mathbf{B}[\frac{1}{t}]$, soit $\Lambda[\log \tilde{p}, \log t]^{\leq k}$ l'espace des polynômes de degré total $\leq k$ en $\log \tilde{p}, \log t$. Alors $H^i(G_K, \Lambda[\log \tilde{p}, \log t]^{\leq k}) = 0$ pour tout k , si $i \geq 2$, et $H^1(G_K, \Lambda[\log \tilde{p}, \log t]^{\leq k}) \rightarrow H^1(G_K, \Lambda[\log \tilde{p}, \log t]^{\leq k+1})$ est identiquement nulle.*

Démonstration. — On a $\mathbf{B}[\log \tilde{p}, \log t]^{\leq k} / \mathbf{B}[\log \tilde{p}, \log t]^{\leq k-1} \cong \mathbf{B}^{\oplus k+1}$. Le résultat pour $i \geq 2$ s'en déduit par une récurrence immédiate.

Passons à la preuve de l'énoncé pour $i = 1$. On va faire la preuve par récurrence sur k . Commençons par vérifier le résultat pour $k = 0$. Soit $\sigma \mapsto c_\sigma$ un 1-cocycle à valeurs dans $\mathbf{B}$. Son image dans $H^1(G_K, \prod_{n \in \mathbf{Z}} C)$ est de la forme $a \log \chi_{\text{cycl}}$, avec $a \in \prod_{n \in \mathbf{Z}} K$. Choisissons un relevé $\tilde{a}$ de a dans $\mathbf{B}$. Le 1-cocycle $c_\sigma - (\sigma - 1)(\tilde{a} \log t)$ a une image nulle dans $H^1(G_K, \prod_{n \in \mathbf{Z}} C)$. Il existe donc $b \in \mathbf{B}$ tel que $c'_\sigma := c_\sigma - (\sigma - 1)(\tilde{a} \log t + b)$ soit à valeurs dans $t\mathbf{B}$. Le lemme 2.7 permet d'en déduire qu'il existe $c \in \mathbf{B} + F \log \tilde{p}$ tel que $c'_\sigma = (\sigma - 1)c$. On a donc prouvé que $\sigma \mapsto c_\sigma$ se trivialise dans $\mathbf{B} + \mathbf{B} \log t + F \log \tilde{p} \subset \mathbf{B}[\log \tilde{p}, \log t]^{\leq 1}$, ce qui prouve le résultat pour $k = 0$ dans le cas $\Lambda = \mathbf{B}$. Pour le prouver dans le cas $\Lambda = \mathbf{B}[\frac{1}{t}]$, on utilise le lemme 2.6 pour modifier notre cocycle par un cobord de manière à le transformer en un cocycle à valeurs dans $\mathbf{B}$.

Supposons maintenant le résultat vrai pour $k - 1$. Soit $\sigma \mapsto c_\sigma$ un 1-cocycle à valeurs dans $\Lambda[\log \tilde{p}, \log t]^{\leq k}$. Écrivons son image modulo $\Lambda[\log \tilde{p}, \log t]^{\leq k-1}$ sous la forme $\sum_{i=0}^k c_{i,\sigma} (\log t)^i (\log \tilde{p})^{k-i}$; alors $\sigma \mapsto c_{i,\sigma}$ est un 1-cocycle à valeurs dans Λ , et donc, d'après le cas $k = 0$, est de la forme $(\sigma - 1)c_i$, avec $c_i \in \Lambda[\log \tilde{p}, \log t]^{\leq 1}$. Si on retranche à $\sigma \mapsto c_\sigma$ le cobord $\sigma \mapsto (\sigma - 1) \cdot (\sum_{i=0}^k c_i (\log t)^i (\log \tilde{p})^{k-i})$, le cocycle obtenu est à valeurs dans $\Lambda[\log \tilde{p}, \log t]^{\leq k-1}$. L'hypothèse de récurrence permet de conclure car $\sum_{i=0}^k c_i (\log t)^i (\log \tilde{p})^{k-i} \in \Lambda[\log \tilde{p}, \log t]^{\leq k+1}$. $\square$

3. La conjecture C_{st} pour la cohomologie à support compact

On munit $\mathbf{B}_{\text{dR}}[\log t]$ de la filtration définie par $\text{Fil}^i \mathbf{B}_{\text{dR}}[\log t] := t^i \mathbf{B}_{\text{dR}}^+[\log t]$, et on étend φ et N à $\mathbf{B}[\log \tilde{p}, \log t, \frac{1}{t}]$ en imposant $\varphi(\log t) = \log t$ et $N(\log t) = 0$.

Conjecture 3.1. — *Si Y est une variété analytique, partiellement propre, définie sur une extension finie K de $\mathbf{Q}_p$, on a des isomorphismes naturels (de K -modules filtrés et (φ, N, G_K) -modules respectivement) :*

$$\begin{aligned} (C_{\text{dR}}) \quad R\Gamma_{\text{dR}}(Y) &\simeq R\text{Hom}_{G_K}(R\Gamma_{\text{proét},c}(Y_{\mathbf{C}_p}, \mathbf{Q}_p(d))[2d], \mathbf{B}_{\text{dR}}[\log t]) \\ (C_{\text{st}}) \quad R\Gamma_{\text{HK}}(Y) &\simeq \varinjlim_{[L:K] < \infty} R\text{Hom}_{G_L}(R\Gamma_{\text{proét},c}(Y_{\mathbf{C}_p}, \mathbf{Q}_p(d))[2d], \mathbf{B}[\log \tilde{p}, \log t, \frac{1}{t}]) \end{aligned}$$

Remarque 3.2. — (i) On peut mettre la conj. 0.1 sous une forme plus proche de celle ci-dessus en utilisant la dualité de Poincaré pour les cohomologies de de Rham et de Hyodo-Kato

(ii) Pour formuler une conjecture comme ci-dessus, la première idée qui vient à l'esprit serait de considérer $\text{Hom}_{G_K}(H_{\text{proét},c}^i(Y_{\mathbf{C}_p}, \mathbf{Q}_p), \mathbf{B}_{\text{dR}})$ (après tout, ça marche si Y est propre!). Le problème est que, si Y est une courbe affine, un petit calcul montre que $\text{Hom}_{G_K}(H_{\text{proét},c}^1(Y_{\mathbf{C}_p}, \mathbf{Q}_p), \mathbf{B}_{\text{dR}})$ ne contient qu'une petite partie de $H_{\text{dR}}^1(Y)$ (celle correspondant au sous-espace de pente 1 de $H_{\text{HK}}^1(Y)$).

(iii) La seconde idée serait de considérer un $R\text{Hom}_{G_K}$ plutôt qu'un Hom_{G_K} . Le cas d'une variété propre montre que ce n'est pas encore ça car, si V est une représentation de de Rham, $\text{Ext}_{G_K}^1(V, \mathbf{B}_{\text{dR}}) \cong \text{Ext}_{G_K}^0(V, \mathbf{B}_{\text{dR}})$ (en interprétant ces groupes comme $H^i(G_K, \mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes V^*)$ et en utilisant le fait que $\mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes V^* \cong \mathbf{B}_{\text{dR}}^{\oplus d}$ puisque V est de Rham, l'isomorphisme est le cup-produit avec $\log \chi_{\text{cycl}}$). Il s'ensuit que l'on va retrouver deux fois les groupes de cohomologie de de Rham au lieu de une... Il faut donc tuer le $\text{Ext}_{G_K}^1$ pour les représentations de de Rham (et donc rajouter $\log t$ pour trivialisier $\log \chi_{\text{cycl}}$). Cela conduit à la conjecture C_{dR} ci-dessus, et on s'est débrouillé pour que *cette conjecture soit un théorème si Y est propre*.

(iv) Pour formuler C_{st} l'idée naturelle serait de remplacer $\mathbf{B}_{\text{dR}}$ par $\mathbf{B}_{\text{st}}$ comme pour la conj. 0.1, mais la cohomologie de $\mathbf{B}_{\text{st}}[\log t]$ n'est pas 0 en degré 1, et donc on retombe sur le problème mentionné au point (iii). On est donc forcé de considérer l'avatar $\mathbf{B}[\log \tilde{p}]$ de $\mathbf{B}_{\text{st}}^+$ pour formuler la conjecture. Remarquons que le résultat ne change pas si on remplace $\mathbf{B}_{\text{st}}^+$ par $\mathbf{B}[\log \tilde{p}]$ dans la conj. 0.1.

(v) Implicitement, $R\text{Hom}_{G_L}$ est calculé dans une catégorie adéquate de $\mathbf{Q}_p$ -espaces vectoriels topologiques muni d'une action continue de G_L .

(vi) Les formules pour l'action de φ et N sur $\log t$ sont naturelles mais ne jouent pas un rôle très important : $\log t$ est juste introduit pour tuer les classes parasites, et donc n'apparaît pas dans celles qui survivent.

Références

- [1] G. BOSCO, Rational p -adic Hodge theory for rigid-analytic varieties, [arXiv:2306.06100v1\[math.AG\]](#), preprint 2023.
- [2] P. COLMEZ, Espaces Vectoriels de dimension finie et représentations de de Rham, *Astérisque* **319** (2008), 117–186.
- [3] P. COLMEZ, W. NIZIOL, On the cohomology of p -adic analytic spaces, II : The C_{st} -conjecture, *Duke Math. J.* 174 (2025), 2203–2301.
- [4] L. FARGUES et J.-M. FONTAINE, Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge p -adique, *Astérisque* **406** (2018), 51–382.
- [5] J. TATE, p -divisible groups, *Proc. of a conference on local fields*, Nuffic Summer School at Driebergen, 158–183, Springer 1967.

PIERRE COLMEZ, CNRS, IMJ-PRG, Sorbonne Université, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France

E-mail : pierre.colmez@imj-prg.fr

SALLY GILLES, Universität Duisburg-Essen, Fakultät für Mathematik, Thea-Leymann-Str. 9, 45127

Essen, Deutschland • *E-mail* : sally.gilles@uni-due.de

WIESŁAWA NIZIOL, CNRS, IMJ-PRG, Sorbonne Université, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France

E-mail : wieslaw.niziol@imj-prg.fr