# Éléments d'analyse et d'algèbre

## Mode d'emploi du cours et du poly

Comme vous pouvez le constater, le poly est gros[(1)] et nous ne disposons que de 9 semaines (et que d'une heure et demi de cours par semaine). Ce petit texte essaie d'expliquer comment le cours va se dérouler (il est d'un format assez différent de ceux auxquels vous êtes habitués), ce que j'espère que vous en retirerez et ce que je pense être la bonne manière de l'aborder pour en profiter au maximum suivant vos attentes.

### 1. Présentation du cours

Le cours de MAT331 est un cours généraliste dont le but est multiple :
• fournir des outils et des concepts utilisables dans les autres sciences,
• élargir le socle de concepts sur lequel s'appuyer et préparer le terrain pour les cours de seconde année[(2)],
• faire sentir que les mathématiques ne sont pas une collection de théories déconnectées, établies de toute éternité, mais qu'elles constituent une science bien vivante régie par une profonde unité.

#### 1.1. Contenu du cours

Les théories abordées dans le cours s'articulent autour des deux thèmes "transformation de Fourier" et "fonctions holomorphes". La transformation de Fourier, de par ses diverses incarnations, est une excellente illustration de l'unité des mathématiques, et le cours essaye de souligner la continuité existant entre le fini (théorie des caractères des groupes finis), le discret (séries de Fourier) et le continu (tranformée de Fourier dans $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^m)$). Ces théories sont utilisées, à des degrés divers, dans toutes les autres sciences, ce qui peut être une motivation suffisante pour essayer d'en comprendre les tenants et les aboutissants, même si on n'a pas l'âme d'un mathématicien et pas le temps ni l'envie d'en saisir toutes les finesses. Elles possèdent aussi une beauté intrinsèque, au niveau des énoncés et des méthodes, qui devrait séduire quiconque veut bien faire l'effort de passer la barrière des définitions initiales. De plus, elles se combinent harmonieusement pour aboutir à des résultats proprement magnifiques.

---

[(1)] Et vu le nombre de choses que j'ai apprises en l'écrivant, je doute qu'il y ait beaucoup de mathématiciens professionnels qui maîtrisent vraiment tout son contenu.

[(2)] Le peu de théorie des groupes finis vu dans le cours rend le cours de théorie de Galois accessible à n'importe qui, et les rudiments de transformée de Fourier préparent le terrain pour les transformées de Fourier dans $\mathrm{L}^2$ et dans les distributions, qui sont les deux cas les plus utiles pour les applications extra mathématiques. J'en profite pour souligner l'existence, en début de seconde année, du cours de MAT 432, dont le programme (Espaces de Hilbert, transformée de Fourier dans $\mathrm{L}^2$, et applications aux équations de la physique) a été spécialement conçu pour les élèves issus de la filière PC.

La théorie des caractères des groupes finis, à laquelle le début du cours est consacré, qui est objectivement la plus facile, est probablement celle qui vous déroutera le plus, compte-tenu de votre formation. Elle permet d'illustrer un certain nombre de concepts fondamentaux dont on ne peut que déplorer la disparition du programme des classes antérieures : les groupes sont faits pour agir et les symétries d'un système forment un groupe dont il est bon de comprendre l'action pour étudier le système (ce principe de symétrie est à la base d'une partie non négligeable de la physique théorique moderne). Cela permet aussi de sensibiliser aux problèmes de classification en mathématiques : il est possible de décrire complètement les représentations irréductibles d'un groupe fini donné, ce qui est un petit peu surprenant au vu de la définition, mais présente des similarités certaines (pas totalement fortuites comme vous le constaterez peut-être plus tard) avec la classification périodique des éléments en chimie ou celle des particules élémentaires en physique.

La suite du cours a pour but une introduction à la transformée et l'inversion de Fourier dans $\mathbf{R}^n$, l'objectif étant d'initier au va et vient entre une fonction et sa transformée de Fourier (problématique que vous pourrez apprécier avec la démonstration du théorème central limite du cours MAP 311, et aurez l'occasion de revoir à l'œuvre dans les cours MAT 431 et MAT 432, pour la résolution de certaines équations aux dérivées partielles issues de la physique). La transformée de Fourier dans $\mathrm{L}^1$ reposant sur l'intégrale de Lebesgue, le cours comporte un chapitre consacré aux principaux théorèmes d'intégration (dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$, mais pas dans le cadre d'une théorie générale de la mesure). Cette partie du cours est dans la droite ligne de ce que vous connaissez déjà.

Enfin, une petite moitié du cours a pour objet l'étude des fonctions holomorphes telle qu'elle a été développée par Cauchy dans les années 1820-1840. Comparée à celle des fonctions d'une variable réelle, cette théorie marche tellement bien que cela en devient un peu déstabilisant quand on a pris l'habitude de voir des pièges potentiels partout. Le cours se termine par la démonstration des théorèmes de la progression arithmétique et des nombres premiers (deux sommets des mathématiques du 19-ième siècle), ce qui est l'occasion de voir fonctionner les principaux résultats de base de la théorie des fonctions holomorphes, tout en illustrant l'unité des mathématiques et en faisant prendre conscience qu'une démonstration d'un résultat ne tient pas forcément sur un tableau, et que la solution d'un problème demande parfois de concevoir une stratégie en plusieurs étapes mêlant des techniques variées(3).

### 1.2. Le poly

Le poly comporte une partie technique, qui constitue le cœur du cours, et une partie culturelle, faite pour être lue par petits bouts, en prenant son temps, selon son envie et ses besoins.

La partie technique recouvre les chapitres I à VII et le cours proprement dit correspond à ce qui se trouve en gros caractères(4) dans les chapitres I à VI ainsi que dans les paragraphes

(3) Excellente gymnastique intellectuelle pour un futur dirigeant.

(4) Les petits caractères correspondent à des prolongements naturels que je n'aurai pas le temps d'aborder.

VII.1, VII.2 et VII.3 du chapitre VII. À cela, on peut rajouter l'appendice E qui contient 6 problèmes corrigés dont 5, distribués les années précédentes, peuvent être utilisés comme des problèmes de révision sur des parties du poly (le dernier est un prolongement de l'annexe C). Compte-tenu des impasses que je serai amené à faire (voir ci-dessous), les problèmes les plus utiles à la compréhension du cours sont les problèmes E.1, E.4 et E.5.

J'ai essayé, autant que faire se peut, de donner des démonstrations naturelles, sans trop de raccourcis astucieux ou de contraintes artificielles(5). Le corollaire est que je n'ai pas hésité à avoir recours à des notions ayant disparu(6) du programme officiel, mais que l'on peut trouver dans le chapitre « Vocabulaire mathématique ». Je n'ai pas totalement résisté à la tentation de « l'élémentaire », par exemple la construction de l'intégrale de Lebesgue que je propose n'échappe pas à ce péché(7).

Le poly comporte aussi un aspect culturel assez marqué, plutôt inhabituel dans un cours de ce niveau, dont le but est de donner une petite idée du fonctionnement interne des mathématiques (comment la solution d'un problème impose l'apparition de nouveaux concepts qui par la suite se retrouvent animés d'une vie propre et donnent naissance à de nouvelles théories, comment la continuité des mathématiques suggère des raisonnements par analogie d'une théorie à l'autre, comment les théories interagissent entre elles pour donner naissance à de nouveaux problèmes...). Cet aspect culturel intervient à plusieurs niveaux :

---

(5)Une démonstration dans laquelle on s'interdit certains outils peut parfois être impressionnante de virtuosité, mais est très difficile à retenir et quasiment impossible à réutiliser, et demande, pour être vraiment appréciée, de pouvoir faire la comparaison avec une démonstration naturelle comme pour le texte ci-dessous dont vous pourrez lire la suite à l'adresse `http://www.graner.net/nicolas/OULIPO/affabulations.html` :

Un loup fond sur un mouton.
Un propos du plus fort sort toujours plus promu :
Nous montrons tout d'un coup son but.
Un jour un doux Mouton poupon
But du flot pur d'un bon cours d'or.
Lors donc un Loup goulu voulut un coup du sort,
Mû pour son lunch d'un goût surtout glouton.
Butor, tu bus mon flot sous mon croc, sous mon front !
Sort d'un ton dur mon Loup bougon :
Nous romprons donc ton cou pour ton trop gros culot.

(6)Je pense principalement à celle de passage au quotient par une relation d'équivalence (n° 2.2) qui est, certes, un peu traumatisante la première fois qu'on la rencontre mais, en définitive, travailler dans $\mathbf{Z}/15\mathbf{Z}$ revient à travailler dans $\mathbf{Z}$ en rajoutant la relation $15 = 0$ (et donc $16 = 1$, $6 \cdot 5 = 0$...). Vous avez fait des passages au quotient nettement plus compliqués lors de votre petite enfance, par exemple pour définir un chien ou une couleur (les passages au quotient mathématiques se font sur des objets nettement mieux définis : « *If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realize how complicated life is* »i, dixit von Neumann).

(7)Ça m'a permis de comprendre le plaisir un peu pervers que peut ressentir un professeur de classe préparatoire quand il réussit à fabriquer une démonstration d'un résultat profond en n'utilisant que les notions que les réformes successives lui ont laissées.

• La culture de base est développée dans le long chapitre « Vocabulaire mathématique », qui ne fait pas partie du cours, mais vise à fournir un document rassemblant des notions mathématiques d'usage constant[(8)], ayant fait partie, il n'y a pas si longtemps, du programme des classes préparatoires, mais dont beaucoup sont actuellement présentées (au moins dans le programme officiel) sous une forme difficilement utilisable. Sa maîtrise procure un confort indéniable[(9)].

• Le texte comporte un nombre assez conséquent de notes de bas de page ; celles-ci sont de deux types que vous ne devriez pas avoir de mal à différencier. Les premières apportent juste un éclairage au texte principal, les autres forment une espèce de blog mathématique proposant de petites excursions hors de l'autoroute des mathématiques « utiles ». Celles-ci peuvent être d'ordre historique, présenter un problème ouvert, énoncer un résultat récent[(10)] ou encore indiquer des passerelles entre des mondes *a priori* sans rapport[(11)].

• Quatre appendices permettent au lecteur curieux d'approfondir le contenu du cours.

— L'appendice A, consacré au théorème des nombres premier est une espèce de couronnement du cours de fonctions holomorphes (il est assez remarquable que cette théorie analytique permette d'attaquer le problème arithmétique de la répartition des nombres premiers, qui avait résisté aux assauts d'Euler, Gauss, Riemann etc.). Il est lisible par quelqu'un ayant bien assimilé les théorèmes de base de la théorie des fonctions holomorphes des chapitres V et VI, ainsi que les propriétés de base des fonction $\Gamma$ et $\zeta$ du chapitre VII.

— L'appendice B contient des exemples de représentations de groupes finis un peu plus sophistiqués que ceux que vous aurez le temps de voir en petites classes. Les représentations du groupe symétrique (indexées par des « diagrammes de Young ») jouent un rôle non négligeable dans certaines questions de physique théorique ; c'est pour cela que j'ai inclus les résultats (sans démonstration). Les représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_q)$ feraient un très bon problème de révision (un peu long et un brin répétitif) pour la théorie des représentations des groupes finis.

— L'appendice C prend pour prétexte un problème très simple et très ancien (la première trace écrite de ce problème remonte à 948) pour introduire l'un des problèmes à un million de dollar du Clay Institute. Le début est lisible par n'importe qui, le reste le devient après le cours de fonctions holomorphes.

---

(8) Les deux derniers paragraphes de ce chapitre sont plus anecdotiques ; j'ai rassemblé dans le paragraphe « Tératologie » quelques monstres mathématiques que je trouve particulièrement sympathiques (certains ont un peu traumatisé les contemporains de leurs découvreurs), et j'ai développé les nombres $p$-adiques dans le dernier paragraphe parce que je les aime bien et qu'il est assez amusant de comparer les mondes $p$-adiques et réels, avec leurs différences et leurs similarités.

(9) Il est parfaitement possible de se débrouiller sans, de même que l'on peut se déplacer à quatre pattes, mais marcher debout est quand même plus agréable, moins fatigant, et permet de voir plus loin.

(10) Celui-ci peut être parfaitement futile comme le second de la note 9 du chapitre « Vocabulaire mathématique » (mais qui suggère quand même qu'il faut utiliser des résultats assez profonds pour y parvenir) ou celui de la note 1 de l'annexe A (qui a rapporté 100000 dollar à ses auteurs, le monde est injuste...), bien que la plupart soient assez profonds.

(11) Par exemple, la note 26 du chapitre « Vocabulaire mathématique » montre comment un joli exercice de colle se transforme, comme par magie, en une question naturelle fort difficile.

— L'appendice D est d'un niveau plus élevé, un peu sur le modèle des articles mathématiques de l'Encylopaedia Universalis. C'est une introduction au programme de Langlands qui joue en mathématiques le rôle de la grande unification en physique (certains physiciens rêvent d'ailleurs d'unifier les deux programmes...). J'ai essayé de l'écrire de manière compréhensible pour quelqu'un de motivé ayant bien assimilé le cours.

— Enfin, les problèmes de l'annexe E peuvent aussi être vus comme des compléments culturels. C'est aussi le cas de la série d'exercices du chap. VII sur les formes modulaires [12].

### 1.3. Performances escomptées

Compte-tenu de l'abondance et de la variété du matériel, il est difficile (voire impossible) d'espérer le maîtriser aussi bien que ce dont vous avez l'habitude, concours obligent. D'un autre côté, une maîtrise aussi totale est en général parfaitement inutile, même pour un mathématicien[13]. Voici la liste des concepts et résultats dont la maîtrise [14] me semble un objectif minimum et sur lesquels les exercices en petites classes se concentreront.

• Représentations des groupes finis :

— définition d'une représentation d'un groupe et de son caractère,

— décomposition d'une représentation en somme directe de représentations irréductibles,

— les caractères forment une base orthonormée des fonctions centrales (version finie de la formule d'inversion de Fourier aux conséquences assez miraculeuses : finitude du nombre de représentations irréductibles, détermination d'une représentation par son caractère, formule de Burnside...),

---

[12]La théorie des formes modulaires est incroyablement séduisante. Si vous êtes plus « theory builder » que « problem solver », vous pouvez en apprendre les bases dans le *Cours d'arithmétique* de Serre où elle est fort joliment traitée, ou dans le volume IV de l'*Analyse mathématique* de Godement, qui lui consacre un chapitre intitulé : « le jardin des délices modulaires, ou l'opium du mathématicien ».

[13]J'ai amplement utilisé, au cours de ma carrière, les résultats qui suivent sans forcément en avoir vu de démonstration ; je n'ai jamais vraiment étudié de construction de la mesure de Lebesgue (par contre, quand j'ai pris connaissance du théorème de convergence dominée, je me suis demandé pourquoi on avait trouvé nécessaire de me le cacher jusque-là...) ou les démonstrations du théorème de Fubini, de la formule des résidus..., jusqu'à ce que je doive les rédiger pour le poly. De même, quand on m'a dit qu'une série de fonctions holomorphes était holomorphe et se dérivait terme à terme, j'ai été fort satisfait de la simplicité de cet énoncé, mais je me suis bien gardé d'aller voir la démonstration (en l'occurence, ce n'était pas forcément très malin car la démonstration repose sur une jolie idée que l'on peut réutiliser avec profit, et ne comporte pas vraiment de détails sordides à oublier le plus vite possible).

[14]Par maîtrise, j'entends : savoir utiliser, mais pas forcément connaître la démonstration. Une théorie mathématique se résume souvent, pour ses utilisateurs, à quelques définitions et un petit nombre de théorèmes fondamentaux que l'on peut utiliser comme une boite noire. Ce n'est pas très éloigné de l'utilisation d'un logiciel et la maîtrise de la démonstration d'un théorème est à peu près aussi nécessaire à son utilisation que la lecture des lignes de code pour un logiciel. J'ai inclus les démonstrations dans le poly pour ceux que les mathématiques intéressent vraiment, et qui sont curieux de voir comment les choses marchent. Beaucoup de démonstrations sont aussi l'occasion de voir comment les théorèmes fondamentaux sont utilisés ; certaines contiennent des idées utilisables dans un autre contexte, ce qui fait que les lire et essayer de les comprendre ne peut qu'être profitable.

— établissement de la table des caractères d'un petit groupe en étant guidé.

• Intégration et Fourier :

— théorèmes de base d'intégration (convergence dominée, Fubini, changement de variable, continuité et dérivation sous le signe somme)[(15)],

— complétude de $L^1$ et $L^2$,

— utilisation de la densité de sous-espaces sympathiques (fonctions en escaliers, fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact...) pour démontrer des résultats sur $L^1$ ou $L^2$ par continuité,

— propriétés élémentaires de la transformée de Fourier dans $L^1$ : formules pour les dilatations-translations, échange de la dérivation et de la multiplication par un polynôme, échange de la régularité et de la décroissance à l'infini (en incluant le théorème de Riemann-Lebesgue), formule d'inversion de Fourier (dans l'espace de Schwartz et $L^1$),

— formule de Poisson.

• Fonctions holomorphes :

— existence d'un développement de Taylor sur un disque de rayon maximal,

— inégalités de Cauchy permettant de majorer les dérivées d'une fonction holomorphe,

— principe du maximum,

— théorème des zéros isolés et unicité du prolongement analytique,

— construction de fonctions holomorphes par séries, produits infinis et intégrales,

— multivaluation du logarithme,

— formule des résidus pour calculer des intégrales ou localiser les zéros d'une fonction holomorphe,

— quelques techniques de prolongement analytique (fonctions $\Gamma$ et $\zeta$).

Pour donner une idée de ce que j'attends[(16)], je considère que vous avez suffisamment bien compris le cours si vous êtes capable, sans consulter le poly, d'obtenir une note $\geq 20$ en moins[(17)]

---

[(15)]Ils ont déjà été vus (sous une forme limitée) jusqu'à plus-soif dans les années précédentes, et donc je m'attends à ce qu'ils ne posent pas de problème spécial. En particulier, je ne compte pas m'apesantir sur les problèmes d'interversions de limites et d'intégrales ; il y a des choses nettement plus exaltantes en mathématiques...

[(16)]Si on continue la comparaison avec un logiciel, ceci correspond à une bonne idée de ce à quoi le logiciel peut servir et à la maîtrise de ses fonctionnalités de base. La maîtrise de la version de base correspondrait à savoir faire tous les exercices des feuilles (il y en a à peu près le double de ce qui peut matériellement être traité en petites classes) ou avoir fait les problèmes de révision (E.1 pour les représentations, E.4 pour Fourier et E.5 pour les fonctions holomorphes). La version + correspond à un cours de bon niveau. Dans le cas des fonctions holomorphes, elle demanderait d'avoir lu et fait l'effort de comprendre l'appendice A ou d'avoir fait la série d'exercices sur les formes modulaires ; en représentation des groupes finis, il s'agirait de lire ce qui est en petits caractères dans le chap. I et l'appendice B, et pour Fourier, il s'agirait de lire tout ce qui est en petits caractères dans les chapitres II à IV. La version pro demanderait de maîtriser toutes les démonstrations du cours, mais à part pour quelqu'un travaillant directement dans une des théories concernées ou devant l'enseigner, je ne vois pas qui pourrait vraiment avoir besoin d'un tel niveau d'expertise.

[(17)]Arriver à le faire dans les 2 heures imparties dénote une rapidité certaine : en 2007, cela a été le cas de 5 élèves (dont un PC et un étranger), et en 2008, cela a été le cas de 13 élèves (dont 2 PC et 2 étrangers).

de 4 heures aux examens des années précédentes. Pour faciliter l'acquisition de ces concepts, je distribuerai deux problèmes de révision, dans le genre de ceux que l'on peut trouver à l'annexe E.

### 1.4. Impasses

Les chapitres du poly correspondant au cours contiennent des prolongements naturels que je n'aurai pas le temps de traiter :

• La théorie systématique des espaces de Banach et de Hilbert ne sera abordée qu'extrèmement superficiellement en amphi et presque pas en petites classes. Cette théorie rend de multiples services et se résume à une petite dizaine d'énoncés fondamentaux assez esthétiques[(18)], mais elle a le mauvais goût d'être au programme de certaines filières alors que les suites de Cauchy et la complétude, sur laquelle elle s'appuie, ont disparu des autres. Les courageux pourront lire les énoncés et les démonstrations tous seuls, les un peu moins courageux se contenteront des énoncés, les autres pourront attendre le cours de MAT432 pour un traitement systématique.

• La transformée de Fourier dans $L^2$ est absolument fondamentale pour les applications à la physique et dans beaucoup d'autres applications des mathématiques ; elle ne sera que mentionnée en amphi et pas traitée en petites classes pour les mêmes raisons que celles évoquées au point précédent : le passage de $L^1$ à $L^2$ repose sur des considérations topologiques qui ont disparu de certaines filières. Par contre, elle est rédigée dans le poly et fait l'objet du problème E.3 ; elle sera traitée en détail dans les cours de MAT431 et MAT432.

• En ce qui concerne les fonctions holomorphes, les aspects « relations de Cauchy-Riemann » et « représentation conforme » seront complètement escamotés faute d'applications immédiates vraiment percutantes ; il s'agit pourtant de prolongements importants pour les applications des mathématiques au monde réel.

## 2. Le déroulement du cours

### 2.1. Le rythme

L'enseignement dispensé à l'École polytechnique constitue un choc culturel assez sévère pour quelqu'un sortant d'une classe préparatoire[(19)], habitué à ce que chaque notion introduite soit traitée dans les moindres détails[(20)]. De plus, les résultats ont tendance à avoir des démonstrations nettement plus sophistiquées, et il faut s'habituer à utiliser un résultat sans en maîtriser toutes

---

[(18)] J'apprécie particulièrement le cor. II.1.17 du th. de Banach-Steinhaus.

[(19)] Peut-être un peu moins que celui que j'ai reçu à l'École Normale où on nous a déclaré : « vous lisez le Lang (*Algebra*) et le Rudin (*Fonctions d'une variable réelle et complexe*), pas la peine d'aller en cours » (à l'époque, les cours étaient dispensés à l'université). A l'usage, je ne recommande pas vraiment cette option...

[(20)] J'ai tendance à penser qu'un vrai cours de maths se rapproche plus du format offert en prépa que de celui que je propose, et se fait devant un auditoire limité qui permet une interaction avec la salle, à la craie, en alternant théorèmes et exercices d'application, ce qui permet d'avancer à un rythme permettant une absorption au fur et à mesure, avec au moins deux séances par semaine pour ne pas tout oublier d'une fois sur l'autre. Le problème d'un cours de ce format est que l'on peut difficilement espérer couvrir plus de 4 pages du poly par séance, ce qui ne permettrait pas d'aller très loin, vu le temps dont on dispose.

les subtilités. Le cours ne proposera donc qu'une introduction aux trois théories qui le composent. Celle-ci est amplement suffisante pour donner une idée fidèle des tenants et aboutissants de la théorie ; elle suffit aussi pour beaucoup d'applications, et le poly apporte les compléments nécessaires à ceux qui veulent aller plus loin.

### 2.2. Les amphis

Compte-tenu des conditions d'enseignement, je peux difficilement faire plus en amphi que présenter les résultats, revenir sur les plus importants, essayer de montrer comment on s'en sert en faisant quelques démonstrations (ce qui a aussi l'avantage de couper le rythme), faire quelques commentaires culturels pour signaler des points surprenants ou des progrès récents, et renvoyer l'auditoire au poly pour les détails. Les petites classes sont nettement plus propices à l'assimilation du matériel du cours, même si l'amphi permet de mettre les choses en perspective.

*2.2.1. Avant l'amphi.* — Profiter à plein du cours demande un peu de préparation(21) et un travail personnel régulier. Il faut préparer les amphis en jetant un coup d'oeil aux transparents (disponibles sur ma page `http://people.math.jussieu.fr/~colmez/Enseignement.html` le dimanche soir précédant l'amphi) pour repérer les objets dont vous ne connaissez pas la définition afin d'aller la consulter dans le poly(22). C'est particulièrement vrai du *premier amphi où un vocabulaire important concernant les actions de groupes est introduit et utilisé dans la foulée.* De manière précise, voici ce qu'il me semble important d'avoir regardé avant les différents amphis :

Amphi 1 : Revoir les espaces préhilbertiens (n° 10.6), vocabulaire d'action de groupe sur un ensemble (définition d'une action à gauche, orbites, conjugaison, classes de conjugaison, en bref tout le n° 2.6), définition d'une représentation de groupe et équivalence avec le point de vue morphisme de groupes dans $\mathrm{GL}(V)$ (le tout début du n° 1 du § I.1), le groupe(23) $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ (n° 6.5). Pour profiter des exercices de la première petite classe, aller voir ce qui concerne le groupe symétrique (alinéas 3.5.1 et 3.5.2) serait très utile vu que c'est l'exemple de groupe le plus concret dont on dispose, se familiariser avec les notions de groupe cyclique et d'ordre d'un élément (alinéas 3.2.1 et 3.2.2) et regarder le théorème de Lagrange et ses variantes (n° 3.4) serait aussi une bonne idée.

Amphi 3 : Définition d'un ensemble de mesure nulle.

(21) Vous aurez probablement l'impression de visiter l'Europe en 7 jours. Si le voyage est bien préparé, cela laisse le temps de voir de jolies choses, mais pas celui de se laisser imprégner par les lieux que l'on visite ; sinon il y a un fort risque de partager son temps entre les voyages en avion et les chambres d'hotel, ce qui est un peu frustrant.

(22) En une heure et demi, on n'a pas le temps de s'apesantir autant qu'il le faudrait sur les définitions, et l'expérience montre que l'on peut perdre pied très vite pour des problèmes de pur vocabulaire. De plus, apprendre quelque chose de totalement nouveau est une véritable torture (je présume que le cerveau doit faire un effort gigantesque pour comprendre comment stocker cette nouvelle information et l'organiser en créant de nouveaux circuits), alors que revenir en terrain (pas trop) connu est souvent franchement agréable.

(23) Il est plus agréable de penser en termes de fonctions sur $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ plutôt qu'en termes de fonctions périodiques de période 1, même si les deux notions sont strictement équivalentes.

Amphi 4 : Définition d'un espace de Banach (tout début du n° 1 du § II.1), notion de densité (n° 5.6), convergence uniforme (n° 9.2)[24].

Amphi 6 : Définition d'un connexe (n° 7.1), d'un compact (n° 6.1, 6.2), définition de l'anneau $K[[T]]$ des séries formelles et définition d'une fonction holomorphe (en bref, jeter un coup d'oeil au début du chap. V).

*2.2.2. Pendant l'amphi.* — Des copies des transparents sont distribuées au début de l'amphi. Elles représentent un bon résumé du cours. Par ailleurs, une moitié de la page est laissée en blanc, ce qui permet de prendre des notes, mais il est totalement inutile (c'est même nuisible car ça empèche de se concentrer sur les idées de la démonstration) de noter in extenso les démonstrations que je fais (sauf peut-être si je signale qu'il s'agit d'un exercice du poly) ; elles sont nettement mieux rédigées dans le poly.

*2.2.3. Après l'amphi.* — Les petites classes se déroulent juste après l'amphi. Cela permet de voir tout de suite comment on utilise les théorèmes du cours, mais ne laisse pas le temps d'en assimiler vraiment le contenu. Il vaut donc probablement la peine de les regarder à tête reposée entre deux amphis, en essayant de faire certains des exercices de la feuille qui n'auront pas été traités, faute de temps. Si vous n'y arrivez pas, cela vous fournira des questions à poser à vos enseignants de PC.

*2.2.4. Les deux derniers amphis et leur version alternative.* — L'amphi 8 est consacré à la fonction zêta de Riemann et aux fonctions $L$ de Dirichlet. Il s'agit d'illustrer la puissance du prolongement analytique pour attaquer certaines questions (c'est un peu magique), tout en utilisant de manière répétée les principaux théorèmes de fonctions holomorphes. Le dernier amphi est consacré au théorème des nombres premiers (je présenterai le plan de la démonstration[25], et les passages les plus frappants, en lien avec le cours de fonctions holomorphes).

Ces deux amphis seront précédés de séances de corrections d'exercices (se trouvant dans les feuilles, pour la plupart, mais non traités en petites classes), d'un niveau probablement moins élevé que celui des amphis (même si je compte ajuster le niveau de ceux-ci en prenant en compte les expériences des années précédentes). Vous avez donc le choix entre deux[26] versions de la fin

---

[24] Dans certaines filières, au lieu de dire que les polynômes sont denses dans les fonctions continues sur un intervalle pour la norme de la convergence uniforme, on dit que toute fonction continue sur un intervalle peut être approchée uniformément par des polynômes, ce qui est rigoureusement la même chose, mais il est quand même assez grotesque d'éviter le vocabulaire « dense », « par densité », « converge uniformément »... utilisé par le reste du monde.

[25] Il me semble que l'on peut ressentir une certaine fierté à l'idée de pouvoir comprendre la solution d'un problème ayant résisté à Euler, Gauss et Riemann (parmi tant d'autres). On peut aussi prendre un certain plaisir à une vue d'ensemble de la démonstration (qui est franchement magnifique), même si on n'en maîtrise pas tous les détails (un peu comme devant un paysage de montagne que l'on découvre à la sortie d'un téléphérique). Un adepte de l'escalade sera peut-être plus attiré par certaines des subtilités ponctuelles de la preuve (comme le théorème de Borel-Carathéodory).

[26] Il est possible de cumuler les deux.

du cours, l'une menant à la démonstration de vrais résultats, l'autre un peu moins ambitieuse visant juste à renforcer les acquis, sans but culturel précis.

### 2.3. Les petites classes

Je distribue les feuilles d'exercices longtemps à l'avance. Mon idée est qu'il vaut la peine de les regarder avant la petite classe pour avoir des questions à poser à l'enseignant[(27)]. Réfléchir 10 minutes à un exercice et aller demander la solution est incomparablement plus efficace, pour apprendre quelque chose, que d'avaler tout cru la solution d'un exercice auquel on n'a pas réfléchi : je présume que le cerveau a besoin de préparation pour savoir comment encoder la solution, et qu'une réflexion préalable ne lui demande que de connecter certaines informations au lieu de partir de zéro.

De manière générale, je pense que si on doit faire un choix, il vaut mieux essayer de résoudre les exercices proposés dans les feuilles que s'acharner à comprendre les démonstrations des théorèmes fondamentaux (les lire peut toutefois donner des idées[(28)]).

### 2.4. Le tutorat

Le début du cours risque d'être un peu rude pour les élèves des filières dont les groupes sont presque absents. Pour vous aider, un tutorat (ouvert à tous les élèves) sera mis en place tous les mercredis de 18h-20h avec 3 tuteurs (3 groupes) à compter du mercredi 6 mai jusqu'au mercredi 1er juillet. Pour toute participation, merci de bien vouloir vous inscrire auprès du bureau Tutorat : linda.guevel@polytechnique.edu.

Il n'est pas impossible que l'on puisse mettre aussi en place un tutorat plus individualisé, si la demande s'en fait sentir.

### 2.5. L'examen

Compte-tenu de la masse de connaissances que je propose, et de l'importance que j'accorde à l'aspect culturel du cours, j'ai décidé de remplacer l'examen par du contrôle continu[(29)]. La note finale sera donc déterminée par vos enseignants de petite classe, après correction du second problème « à la maison ».

---

[(27)]Les séances d'exercices sont un peu une spécialité française : par exemple, à Cambridge les étudiants travaillent leurs feuilles d'exercices tous seuls et les passent en revue, par groupe de 2, avec un tuteur, pour faire le point de ce qui pose problème.

[(28)]La bonne manière de comprendre la démonstration d'un théorème est d'essayer de la retrouver sans la lire ; si on réussit c'est parfait, si on n'y arrive pas (ce qui n'est nullement honteux vu la complexité de beaucoup ; une démonstration de plus de 10 lignes est difficilement reconstructible sauf s'il s'agit juste d'adapter une démonstration que l'on connaît déjà), le terrain est préparé pour que la lecture serve vraiment à quelque chose. Évidemment, ce procédé prend du temps et, comme je l'ai déjà dit, n'est pas vraiment indispensable pour apprendre à se servir du théorème.

[(29)]Cela évitera la tentation de vous transformer en machines à résoudre des exercices types.