ZÉROS SUPPLÉMENTAIRES DE FONCTIONS L p-ADIQUES DE FORMES MODULAIRES

par

Pierre Colmez

Résumé. — This is a survey of some of the works dealing with $\mathscr{L}$-invariants of modular forms and the conjecture of Mazur-Tate-Teitelbaum in the case of an extra zero.

Table des matières

Introduction

Si f est une forme primitive de poids k_0 pour $\Gamma_0(Np)$, avec N premier à p, et si la valeur propre de $T_p = U_p$ agissant sur f est $p^{k_0/2-1}$, la fonction L p-adique $L_p(f,s)$ de f a un zéro supplémentaire en $s = k_0/2$. Mazur, Tate et Teitelbaum [**30**] ont conjecturé l'existence d'un invariant $\mathscr{L}(f)$ ne dépendant de f que « localement en p », tel que l'on ait

$$L'_p(f,k_0/2) = \mathscr{L}(f)\cdot \widetilde{L}(f,k_0/2),$$

où $\widetilde{L}(f,k_0/2)$ est la partie algébrique de la valeur spéciale $L(f,k_0/2)$ de la fonction L complexe de f.

Dans cet article, nous passons en revue un certain nombre des travaux menant à la démonstration de cette conjecture. Cet article est une version légèrement remaniée et actualisée des notes de l'exposé que j'ai fait à la conférence ICANT 2003 de Hyderabad, et je voudrais en profiter pour remercier les organisateurs de leur accueil[1]. Comme il s'agit des notes d'un exposé, et comme le terrain survolé est assez vaste, les énoncés que l'on trouve dans ce texte comportent souvent une part de flou artistique en ce qui concerne leur domaine de validité. Le lecteur est invité à consulter les textes originaux (quand ceux-ci sont disponibles...) pour des énoncés précis.

0. Notations

On note $\overline{\mathbf{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{C}$, on fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}_p$ de $\mathbf{Q}_p$ et un plongement de $\overline{\mathbf{Q}}$ dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$. Ceci permet, en particulier, de voir $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ comme un sous-groupe de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, et le caractère cyclotomique $\chi : \mathrm{G}_{\mathbf{Q}} \to \mathbf{Z}_p^*$ aussi comme un caractère de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$. On note $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}} \subset \overline{\mathbf{Q}}_p$ l'extension non ramifiée maximale de $\mathbf{Q}_p$.

On note $\mathscr{H}$ le demi-plan de Poincaré, τ un élément générique de $\mathscr{H}$, et on pose $q = e^{2i\pi\tau}$. Si $M \geq 1$ et $k \geq 2$ sont des entiers, on note $S_k(M)$ l'espace des formes paraboliques de poids k pour $\Gamma_0(M)$ (et caractère trivial). Si ℓ est un nombre premier, on note T_ℓ l'opérateur de Hecke agissant sur $S_k(M)$; en particulier, si $\ell \mid M$, T_ℓ est l'opérateur U_ℓ d'Atkin-Lehner.

1. Algébricité de valeurs spéciales de fonctions L

Soient p un nombre premier et $N \in \mathbf{N}$ premier à p. Soit $k \geq 2$ un entier pair et soit $f = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n q^n \in S_k(Np)$, une forme propre pour tous les T_ℓ, normalisée ($a_1 = 1$) ce qui fait que $f_{|_k} T_\ell = a_\ell f$. En particulier, la relation $f_{|_k} T_p = a_p f$ se traduit par l'équation fonctionnelle $a_{np} = a_p a_n$, et si $a_p \neq 0$, ce que nous supposerons, on peut prolonger $n \mapsto a_n$ en une fonction sur $\mathbf{Z}[1/p]$ vérifiant encore l'équation fonctionnelle $a_{np} = a_p a_n$.

Si $\phi \in \mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p, \overline{\mathbf{Q}})$ est une fonction localement constante à support compact sur $\mathbf{Q}_p$, à valeurs dans $\overline{\mathbf{Q}}$, on définit la fonction $L(f, \phi, s)$ par la formule

$$L(f,\phi,s) = \sum_{n \in \mathbf{Z}[\frac{1}{p}]} \phi(n) a_n n^{-s}. \quad \text{(En particulier, } L(f,s) = L(f, \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}, s).\text{)}$$

La série converge pour $\mathrm{Re}(s) > \frac{k+1}{2}$ et la fonction $L(f, \phi, s)$ possède un prolongement analytique à tout le plan complexe.

Théorème 1. — *Il existe des nombres complexes non nuls Ω_f^+, Ω_f^- tels que, quel que soit $\phi \in \mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p, \overline{\mathbf{Q}})$,*

$$\frac{\Gamma(j)}{(2i\pi)^j} L(f,\phi,j) \in \begin{cases} \overline{\mathbf{Q}} \cdot \Omega_f^+ & \text{si } 1 \leq j \leq k-1 \text{ et } \phi(-x) = (-1)^j \phi(x), \\ \overline{\mathbf{Q}} \cdot \Omega_f^- & \text{si } 1 \leq j \leq k-1 \text{ et } \phi(-x) = -(-1)^j \phi(x). \end{cases}$$

Démonstration. — Il y a plusieurs manières de démontrer ce théorème. Une possibilité est d'utiliser la théorie des symboles modulaires. Si $a \in \mathscr{H} \cup \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$, alors

$$\gamma \mapsto \int_a^{\gamma a} (X - \tau Y)^{k-2} f(\tau)\, d\tau$$

[1] Je voudrais aussi remercier le programme d'échanges CEFIPRA qui a financé une partie du séjour en Inde pendant lequel ont vu le jour certains des travaux mentionnés dans ce texte, concernant la correspondance de Langlands locale p-adique.

est un 1-cocycle sur $\Gamma_0(Np)$ à valeurs dans l'espace $\mathbf{C}[X,Y]^{(k-2)}$ des polynômes homogènes de degré $k-2$ en 2 variables et définit une classe dans le groupe de cohomologie parabolique $H^1_P(\Gamma_0(Np),\mathbf{C}[X,Y]^{(k-2)})$ qui ne dépend pas du choix de a. Par ailleurs, on dispose de l'isomorphisme d'Eichler-Shimura

$$H^1_P(\Gamma_0(Np),\mathbf{C}[X,Y]^{(k-2)}) \cong S_k(Np)\oplus\overline{S_k(Np)}$$

qui commute à l'action des opérateurs de Hecke et à l'action de la conjugaison complexe. Le théorème de multiplicité 1 montre que les morceaux découpés par le système de valeurs propres correspondant à f sont de dimension 2, si on oublie l'action de la conjugaison complexe, et de dimension 1, si on en tient compte. Comme les deux membres ont des $\overline{\mathbf{Q}}$-structures (le membre de gauche en utilisant $\overline{\mathbf{Q}}[X,Y]^{(k-2)}$ et le membre de droite via les q-développements de formes modulaires), cela nous permet de définir deux nombres complexes Ω_f^+ et Ω_f^- permettant de comparer les deux $\overline{\mathbf{Q}}$-structures. Pour terminer, il suffit de constater que les $\frac{\Gamma(j)}{(2i\pi)^j}L(f,\phi,j)$ appartiennent au $\overline{\mathbf{Q}}$-espace vectoriel engendré par les valeurs du cocycle (pour $a=i\infty$) et de ses images sous l'action des opérateurs de Hecke.

Une autre manière de démontrer le théorème, due à Shimura [**39**], est d'utiliser la méthode de Rankin. Si M est un multiple de Np, et $j\geq 1$ est un entier, on définit la série d'Eisenstein

$$E^{(j)}_{0,1/M}=\frac{\Gamma(j)}{(-2i\pi)^j}\sum_{\omega\in\mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau}\frac{1}{(\omega+\frac{1}{M})^j}.$$

(Si $j\leq 2$, la série ne converge pas absolument et on définit $E^{(j)}_{0,1/M}$ par prolongement analytique). Par ailleurs, si χ_1,χ_2 sont deux caractères de Dirichlet de conducteurs divisant M et vérifiant $\chi_1\chi_2(-1)=(-1)^{k-j}$, il existe une forme modulaire $F^{(k-j)}_{\chi_1,\chi_2}=\sum_{n=0}^{+\infty}c_nq^n$, de poids $k-j$ et niveau M, combinaison linéaire de séries d'Eisentein, telle que l'on ait

$$\sum_{n=1}^{+\infty}c_nn^{-s}=L(\chi_1,s-(k-j)+1)\cdot L(\chi_2,s).$$

La méthode de Rankin permet de calculer le produit scalaire de Pertersson de f et $F^{(k-j)}_{\chi_1,\chi_2}E^{(j)}_{0,1/M}$, et permet de montrer que ce produit scalaire, qui appartient à $\overline{\mathbf{Q}}\cdot\langle f,f\rangle$, est, à multiplication près par un facteur innocent et explicite, égal à $L(f,\chi_1,j)L(f,\chi_2,k-1)$. Maintenant, en fixant $\varepsilon\in\{\pm 1\}$ et un caractère χ_ε vérifiant $\chi_\varepsilon(-1)=(-1)^k\varepsilon$, et tel que $L(f,\chi_\varepsilon,k-1)\neq 0$ (ceci est automatique si $k>2$), ce qui précède permet de montrer que le théorème 1 est vérifié avec

$$\Omega_f^\varepsilon=\frac{\langle f,f\rangle}{L(f,\chi_\varepsilon,k-1)}.$$

Remarque 2. — Cette dernière formule a l'avantage de montrer que les périodes Ω_f^+ et Ω_f^- peuvent être choisies d'une manière dépendant raisonnablement de f dans une famille, ce qui est très utile pour la construction de fonctions L p-adiques en famille (th. 16).

Le théorème 1 permet de rendre algébriques les $L(f,\phi,j)$, et donc de les considérer comme des nombres p-adiques, en posant

$$\widetilde{L}(f,\phi,j)=\frac{\Gamma(j)}{(2i\pi)^j}\Big(\frac{L(f,\phi^{(-1)^j},j)}{\Omega_f^+}+\frac{L(f,\phi^{-(-1)^j},j)}{\Omega_f^-}\Big),$$

avec $\phi^+(x) = \frac{1}{2}(\phi(x) + \phi(-x))$ et $\phi^-(x) = \frac{1}{2}(\phi(x) - \phi(-x))$.

2. Distributions p-adiques

Soit K un corps complet pour la valuation p-adique v_p normalisée par $v_p(p) = 1$. Si M est un K-espace vectoriel topologique complet, une *distribution* μ sur $\mathbf{Z}_p$ à valeurs dans M est une application linéaire continue $\phi \mapsto \int_{\mathbf{Z}_p} \phi\mu$ de l'espace $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p, K)$ des fonctions localement analytiques sur $\mathbf{Z}_p$ à valeurs dans K dans le K-espace vectoriel M. Si $r \geq 0$, on dit que μ est *d'ordre* r s'il existe une valuation v_M, continue sur M, et $C \in \mathbf{R}$ tels que, quels que soient $a \in \mathbf{Z}_p$ et $j \in \mathbf{N}$, on ait

$$v_M\Big(\int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} (x-a)^j \mu\Big) \geq n(j-r) + C.$$

Le résultat suivant (cf. **[1, 9]** par exemple) fournit une caractérisation des distributions d'ordre r ainsi qu'une manière d'en construire en ne connaissant que les intégrales du type $\int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} x^j$, pour $a \in \mathbf{Z}_p$ et j petit.

Théorème 3. — *Soit M un banach p-adique* (M est complet pour une valuation v_M).

(i) *L'application $\mu \mapsto \int_{\mathbf{Z}_p} (1+T)^x \mu$ induit un isomorphisme de l'espace des distributions d'ordre r sur celui des séries $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n T^n$ à coefficients dans M telles que la suite $v_M(c_n) + r\frac{\log n}{\log p}$ soit bornée inférieurement.*

(ii) *Si $h > r-1$ et $\mu : \mathrm{LP}^{[0,h]}(\mathbf{Z}_p, K) \to M$ est linéaire sur l'espace $\mathrm{LP}^{[0,h]}(\mathbf{Z}_p, K)$ des fonctions localement polynomiales de degré $\leq h$, et telle qu'il existe $C \in \mathbf{R}$ tel que, quels que soient $a \in \mathbf{Z}_p$ et $0 \leq j \leq h$, on ait*

$$v_M\Big(\int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} (x-a)^j \mu\Big) \geq n(j-r) + C,$$

alors μ s'étend de manière unique en une distribution d'ordre r.

3. Fonctions L p-adiques de formes modulaires

Si $\phi \in \mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p, \overline{\mathbf{Q}}_p)$, on définit $\hat{\phi} \in \mathrm{LC}_c(\mathbf{Q}_p, \overline{\mathbf{Q}}_p)$, transformée de Fourier de ϕ, par la formule $\hat{\phi}(x) = p^{-m} \sum_{y \bmod p^m} \phi(y) e^{-2i\pi xy}$, où $m \in \mathbf{N}$ est assez grand. On a $\hat{\hat{\phi}}(x) = \phi(-x)$, et ϕ est à support dans $p^n\mathbf{Z}_p$ si et seulement si $\hat{\phi}$ est constante modulo $p^{-n}\mathbf{Z}_p$.

Théorème 4. — *Si $v_p(a_p) < k-1$, il existe une unique distribution μ_f d'ordre $v_p(a_p)$ sur $\mathbf{Z}_p$ telle que l'on ait*

$$\int_{\mathbf{Z}_p} \phi(x) x^{j-1}\, \mu_f = \widetilde{L}(f, \hat{\phi}, j)$$

quels que soient $\phi \in \mathrm{LC}(\mathbf{Z}_p, \overline{\mathbf{Q}}_p)$ et $1 \leq j \leq k-1$. De plus, quel que soit $\phi \in \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p, \overline{\mathbf{Q}}_p)$, on a

$$\int_{p\mathbf{Z}_p} \phi(p^{-1}x)\, \mu_f = a_p^{-1} \int_{\mathbf{Z}_p} \phi(x)\, \mu_f.$$

Démonstration. — Il y a trois manières (au moins) de démontrer ce théorème. La manière classique (Mazur, Manin [**29**], Amice-Vélu [**2**], Vishik, Mazur-Tate-Teitelbaum [**30**]...) est d'utiliser la théorie des symboles modulaires pour démontrer l'existence d'un réseau de $\overline{\mathbf{Q}} \cdot \Omega_f^+ + \overline{\mathbf{Q}} \cdot \Omega_f^-$ contenant les $\int_{i\infty}^r \tau^j f(\tau)\, d\tau$, pour $r \in \mathbf{Q}$ et $0 \leq j \leq k-2$, ce qui fournit les résultats d'intégralité dont on a besoin pour démontrer l'existence de μ_f en utilisant le (ii) du théorème 3.

Une méthode récente, due à Hida [**23, 24**] dans le cas ordinaire ($v_p(a_p) = 0$) et à Panchishkin [**33**] dans le cas général, utilise la méthode de Rankin. On commence par construire une distribution d'ordre 0 à valeurs dans les formes modulaires de poids k et de niveau Np^∞ en utilisant les séries d'Eisenstein. Puis on utilise la projection de $\cup_{n\in\mathbf{N}} M_k(\Gamma(Np^n))$ sur le sous-espace caractéristique pour T_p associé à la valeur propre a_p qui se trouve, et c'est là le point crucial, être de dimension finie. On obtient de la sorte une distribution d'ordre $v_p(a_p)$, à valeur dans un espace de formes modulaires, dont on prend le produit scalaire de Petersson avec f ; la méthode de Rankin permet d'évaluer le résultat obtenu et d'en déduire le théorème.

Finalement, une autre démonstration, due à Kato [**27**] passe par la construction d'un système d'Euler, utilise la théorie des (φ, Γ)-modules de Fontaine [**19**] pour en déduire, via une variante de l'exponentielle de Perrin-Riou [**35, 36**], une distribution. Montrer que cette distribution est celle que l'on cherche nécessite de comparer deux lois de réciprocités explicites (ce qui est loin d'être une trivialité [**26, 27**]...), et d'utiliser la méthode de Rankin comme dans l'approche de Panchishkin. On pourra consulter [**10**] pour une présentation de la méthode de Kato et son interprétation en termes de (φ, Γ)-modules.

On définit la fonction L p-adique attachée à f par la formule

$$L_p(f, s) = \int_{\mathbf{Z}_p^*} x^{k/2-1} \langle x\rangle^{s-k/2}\, \mu_f, \quad \text{avec } \langle x\rangle^t = \exp(t \log x).$$

4. Zéros supplémentaires des fonctions L p-adiques

Dans tout le reste de cet article, on fixe $k_0 \geq 2$ un entier pair, une forme primitive $f = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n q^n \in S_{k_0}(Np)$, et K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ contenant les a_n, $n \in \mathbf{N}$, et on suppose que

$$a_p = p^{k_0/2-1}.$$

Par exemple, si $k_0 = 2$ et $a_n \in \mathbf{Q}$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$, alors f correspond à une courbe elliptique E définie sur $\mathbf{Q}$, et, comme p divise le conducteur de E, la condition $a_p = 1$ est équivalente à ce que E a réduction multiplicative déployée en p. D'après le théorème d'uniformisation de Tate, ceci implique qu'il existe $q(E) \in \mathbf{Q}_p^*$ vérifiant $v_p(q(E)) > 0$, tel que $E \cong \mathbf{G}_m/q(E)^{\mathbf{Z}}$ en tant que groupes analytiques rigides. Ceci nous permet de définir l'invariant $\mathscr{L}$ de E par $\mathscr{L}(E) = \frac{\log q(E)}{v_p(q(E))}$.

Un petit calcul montre que

$$L_p(f, k_0/2) = (1 - p^{k_0/2-1} a_p^{-1}) \widetilde{L}(f, k_0/2).$$

La condition $a_p = p^{k_0/2-1}$ implique donc que la fonction L p-adique de f admet un zéro supplémentaire en $s = k_0/2$. Mazur, Tate et Teitelbaum [**30**] ont été amenés, par leur étude de la version p-adique de la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer, à formuler la conjecture suivante.

Conjecture 5. — (i) *Si f correspond à la courbe elliptique E, alors*

$$L_p'(f,1) = \mathscr{L}(E)\cdot \widetilde{L}(f,1).$$

(ii) *Dans le cas général, il existe un invariant $\mathscr{L}(f)\in K$, local en ce sens qu'il est invariant par torsion par un caractère quadratique χ vérifiant $\chi(p)=1$, tel que l'on ait*

$$L_p'(f,k_0/2) = \mathscr{L}(f)\cdot \widetilde{L}(f,k_0/2).$$

Cette conjecture a suscité de nombreux travaux. Nous survolerons certains d'entre eux dans la suite de ce texte.

• Greenberg et Stevens [**18**] ont démontré le point (i).

• Des invariants $\mathscr{L}(f)$ ont été construits par Teitelbaum [**41**], Coleman [**5**], Fontaine-Mazur [**31**], Darmon-Orton [**14, 32**] et Breuil [**4**] en utilisant des techniques très variées, et dans des cadres plus ou moins généraux. L'invariant de Teitelbaum $\mathscr{L}_{\rm Tei}(f)$ est défini via l'intégration p-adique sur une courbe Shimura attachée à f via la correspondance de Jacquet-Langlands, l'invariant $\mathscr{L}_{\rm Col}(f)$ de Coleman utilise la théorie de l'intégration p-adique de Coleman sur la courbe modulaire $X_0(Np)$, l'invariant $\mathscr{L}_{\rm F-M}(f)$ de Fontaine-Mazur utilise la classification des représentations p-adiques, celui $\mathscr{L}_{\rm D-O}(f)$ de Darmon-Orton repose sur les symboles modulaires et celui $\mathscr{L}_{\rm Br}(f)$ de Breuil sur la théorie des représentations unitaires de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.

• L'égalité $\mathscr{L}_{\rm Col}(f)=\mathscr{L}_{\rm F-M}(f)$ a été démontrée par Coleman et Iovita [**7**] (la démonstration consiste à rendre explicite le théorème de comparaison de Faltings [**17**] dans une famille de courbes). L'égalité $\mathscr{L}_{\rm Tei}(f)=\mathscr{L}_{\rm F-M}(f)$ a été démontrée par Iovita et Spiess [**25**]. L'égalité $\mathscr{L}_{\rm D-O}(f)=\mathscr{L}_{\rm Br}(f)$ a été démontrée par Breuil [**4**] ; c'est une manifestation de la compatibilité entre correspondances de Langlands p-adiques locale et globale. L'égalité $\mathscr{L}_{\rm Br}(f)=\mathscr{L}_{\rm F-M}(f)$ est démontrée dans [**12**] ; c'est une version de la correspondance de Langlands locale p-adique pour les représentations semi-stables de dimension 2.

• La deuxième partie de la conjecture de Mazur-Tate-Teitelbaum a été démontrée par Stevens (non rédigé) avec l'invariant de Coleman, par Kato, Kurihara et Tsuji (non rédigé, mais voir [**36, 10**]) avec l'invariant de Fontaine-Mazur, par Darmon [**14**] (en poids 2) et Orton [**32**] (en poids quelconque) avec l'invariant de Darmon-Orton, et par Emerton [**16**] en utilisant l'invariant de Breuil.

5. L'invariant de Coleman

La courbe $X_0(Np)$ sur $\mathbf{F}_p$ est la réunion de deux copies de $X_0(N)$ se coupant aux points supersinguliers. L'espace analytique rigide $X_0^{\rm an}(Np)$ associé à $X_0(Np)$ est donc la réunion de trois parties disjointes Z_∞, Z_0 et W, où Z_0 et Z_∞ sont des affinoïdes connexes contenant respectivement les pointes 0 et ∞, et $W=\cup_{i\in I}C_i$ est la réunion des couronnes supersingulières C_i. On pose $W_0=Z_0\cup W$ et $W_\infty=Z_\infty\cup W$.

Si $k_0=2$, la forme différentielle $f(\tau)d\tau$ sur le demi-plan de Poincaré définit une forme différentielle $\omega\in H^0(X_0(Np),\Omega^1)$. La théorie de l'intégration p-adique de Coleman permet de définir, à addition près d'une fonction constante, deux fonctions F_0 et F_∞ localement analytiques sur W_0 et W_∞ respectivement, vérifiant les équations différentielles $dF_\infty=\omega$ sur W_∞ et $dF_0=\omega$ sur W_0. La fonction $G=F_\infty-F_0$ est constante sur chacune des composantes connexes C_i de W, et on peut la normaliser (quitte à modifier F_∞ par une fonction globalement constante) de telle sorte que $\sum_{i\in I} G(C_i) = 0$.

Par ailleurs, comme C_i est une couronne, on peut choisir une fonction analytique rigide T_i définie sur un voisinage affinoïde de C_i tel que $C_i = \{r_i < v_p(T_i) < s_i\}$, et telle que $v_p(T_i)$ soit plus grand sur W_0 que sur W_∞ (cette dernière condition permet « d'orienter » C_i). La restriction de ω à C_i est alors de la forme $\omega_{|C_i} = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \alpha_{i,n} T_i^n \, dT_i$, et on définit le résidu $\mathrm{Res}(\omega)$ de ω comme la fonction localement constante sur W prenant la valeur $\alpha_{i,-1}$ sur C_i.

En utilisant la compatibilité des constructions précédentes avec l'action des opérateurs de Hecke, et le théorème de multiplicité 1, Coleman a démontré le résultat suivant.

Théorème 6. — *Il existe $\mathscr{L}_{\mathrm{Col}}(f) \in K$ unique, tel que*

$$G = \mathscr{L}_{\mathrm{Col}}(f) \cdot \mathrm{Res}(\omega).$$

Si k_0 est arbitraire, on procède de la même manière en considérant $f(\tau)(d\tau)^{k_0/2}$ comme une section globale d'un certain fibré et en remplaçant l'opérateur différentiel d par la connexion de Gauss-Manin. Le lecteur est renvoyé à [**5**] pour les détails.

6. L'invariant de Fontaine-Mazur

La définition de l'invariant de Fontaine-Mazur utilise la représentation galoisienne attachée à f par Deligne [**15**] en considérant la cohomologie étale des variétés de Kuga-Sato : on dispose du résultat suivant.

Théorème 7. — *Il existe une unique représentation continue V_f de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}}$, de dimension 2 sur K, non ramifiée en dehors de Np, telle que, si $\ell \nmid Np$, et si Fr_ℓ est un frobenius arithmétique en ℓ, alors*

$$\det(1 - \mathrm{Fr}_\ell^{-1} X) = 1 - a_\ell X + \ell^{k_0-1} X^2.$$

Soit $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ l'anneau de Fontaine contenant les périodes p-adiques des variétés algébriques ayant réduction semi-stable. Rappelons [**20**] que cet anneau est muni

- d'une action continue de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$,
- d'un frobenius φ commutant à $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$,
- d'un opérateur N commutant à $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et vérifiant $N\varphi = p\varphi N$,
- d'une filtration décroissante $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}^i$, pour $i \in \mathbf{Z}$, stable par $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

De plus, $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} = \mathbf{B}_{\mathrm{st}}^{N=0}$ est un sous anneau de $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ qui contient $\widehat{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}}$.

Le théorème de comparaison de Faltings et Tsuji complété par un résultat de Saito [**37**] se traduit de la manière suivante.

Théorème 8. — *Le K-espace vectoriel $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V_f) = (\mathbf{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V_f)^{\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}}$ est de dimension 2 (et donc V_f est semi-stable), contient de manière naturelle f qui est une base de $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}^{k_0-1}(V_f) = (\mathbf{B}_{\mathrm{st}}^{k_0-1} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V_f)^{\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}}$, et possède une base e_1, e_2 dans laquelle les actions de N et φ sont données par*

$$Ne_1 = e_2,\ \ Ne_2 = 0, \quad \varphi(e_1) = pa_pe_1,\ \ \varphi(e_2) = a_pe_2.$$

L'invariant $\mathscr{L}_{\mathrm{F-M}}(f)$ est alors l'unique élément de K tel que

$$e_1 + \mathscr{L}_{\mathrm{F-M}}(f) e_2 \in K \cdot f.$$

7. L'invariant de Breuil

On suppose $k_0 > 2$ (le cas $k_0 = 2$ demande de faire quelques changements dans ce qui suit). A f est associée une représentation automorphe de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q})$ qui est un produit tensoriel de représentations locales. La composante locale $\pi_p(f)$ en p de cette représentation automorphe, qui est une représentation localement constante de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, se réalise dans la cohomologie $H^1_c(N)$ de la tour des $Y_0(N,p^r) = Y_0(N) \times_{Y(1)} Y(p^r)$, pour $r \in \mathbf{N}$. On note $\widehat{H}^1_c(N)$ le complété p-adique de $H^1_c(N)$; il est défini par

$$\widehat{H}^1_c(N) = K \otimes \big(\varprojlim_n \big(\varinjlim_r H^1_c(Y_0(N,p^r), \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})\big)\big).$$

On note $\hat{\pi}_p(f)$ l'adhérence de $\pi_p(f)$ dans cet espace ; c'est une représentation unitaire de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.

Soit $B(k_0)$ le quotient, par l'espace des polynômes de degré $\leq k_0 - 2$, de l'espace des ϕ : $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p) \to K$ telles que ϕ soit de classe $\mathscr{C}^{k_0/2-1}$ sur $\mathbf{Q}_p$ et $x^{k_0-2}\phi(1/x)$ se prolonge en un fonction de classe $\mathscr{C}^{k_0/2-1}$ sur $\mathbf{Q}_p$. Si $\mathscr{L} \in K$, on note $\log_{\mathscr{L}}$ le logarithme sur $\mathbf{Q}_p^*$ normalisé par $\log_{\mathscr{L}} p = \mathscr{L}$, et on définit le sous-espace $L(k_0, \mathscr{L})$ de $B(k_0)$ comme l'adhérence de l'espace des fonctions de la forme

$$\sum_{u \in U} \lambda_u (x - a_u)^{j_u} \log_{\mathscr{L}}(x - a_u),$$

où U est un ensemble fini, les j_u sont des entiers vérifiant $\frac{k_0-2}{2} < j_u < k_0 - 2$, les a_u sont des éléments de $\mathbf{Q}_p$, et les λ_u des éléments de K tels que $\deg(\sum_{u\in U} \lambda_u (x-a_u)^{j_u}) < \frac{k_0-2}{2}$.

On note $B(k_0, \mathscr{L})$ le quotient de $B(k_0)$ par $L(k_0, \mathscr{L})$ et on munit $B(k_0, \mathscr{L})$ d'une action unitaire de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, en faisant agir $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ sur $\mu \in B(k_0)^*$ par la formule :

$$\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} \phi(x) \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \star \mu = p^{-(k_0/2-1)v_p(ad-bc)} \int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} (cx+d)^{k-2} \phi\Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)\ \mu.$$

Remarque 9. — (i) Il n'est pas évident, *a priori*, que $B(k_0, \mathscr{L}) \neq 0$, mais la théorie des (φ, Γ)-modules de Fontaine permet [**12**] de le démontrer en toute généralité, et d'obtenir une correspondance de Langlands locale p-adique entre les représentations semi-stables irréductibles de dimension 2 de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et les tordues, par des caractères unitaires, des $B(k, \mathscr{L})$, pour $k > 2$ et $\mathscr{L} \in \overline{\mathbf{Q}}_p$.

(ii) La distribution μ_f admet un unique prolongement à $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ vérifiant $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star \mu_f = p^{k_0/2-1}\mu_f$.

En utilisant des résultats de Darmon [**14**] et Orton [**32**], Breuil [**4**] a démontré le résultat suivant.

Théorème 10. — *Il existe un unique $\mathscr{L}_{\mathrm{Br}}(f) \in K$ tel que*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)}\big(B(k_0, -\mathscr{L}_{\mathrm{Br}}(f)), \hat{\pi}_p(f)\big) \neq 0.$$

De plus, $\mu_f \in B(k_0, -\mathscr{L}_{\mathrm{Br}}(f))^*$.

Remarque 11. — Emerton [**16**] a montré, en utilisant des techniques simples de représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, que, si $\mu \in B(k_0, \mathscr{L})^*$, alors

$$\int_{\mathbf{Z}_p^*} x^{k_0/2-1}\,\mu = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbf{Z}_p^*} x^{k_0/2-1}\log x\,\mu = -\mathscr{L}\cdot\int_{\mathbf{Z}_p} x^{k_0/2-1}\,\mu.$$

Appliqué à la distribution μ_f, cela nous fournit une démonstration du (ii) de la conjecture de Mazur-Tate-Teitelbaum avec l'invariant de Breuil.

Si on utilise la correspondance de Langlands p-adique locale, la théorie des (φ, Γ)-modules et le système d'Euler de Kato, on s'aperçoit que cette démonstration est parallèle à celle de Perrin-Riou [**36**], utilisant l'invariant de Fontaine-Mazur.

8. Familles de formes modulaires

Un des procédés les plus efficaces pour étudier p-adiquement une forme modulaire est de l'inclure dans une famille. On doit à Hida [**21, 22**] (dans le cas ordinaire) et à Coleman et Mazur [**6, 8**] l'énoncé ci-dessous qui est une forme affaiblie de leurs résultats.

Si $x_0 \in \mathbf{C}_p$ et $r \in \mathbf{Q}$, on note $\mathscr{A}(x_0, r)$ l'algèbre des fonctions analytiques sur la boule $B(x_0, r) = \{x,\ v_p(x - x_0) \geq r\}$, que l'on munit de la valuation $v_{\mathscr{A}(x_0,r)}$ définie par

$$v_{\mathscr{A}(x_0,r)} = \inf_{x\in B(x_0,r)} v_p(f(x)),$$

qui en fait un anneau de Banach p-adique.

Théorème 12. — *Il existe $r \in \mathbf{Q}$ et une suite A_n, $n \geq 1$, d'éléments de $\mathscr{A}(k_0, r)$, tels que :*

(i) *$A_1 = 1$ et $A_n(k_0) = a_n$ quel que soit $n \geq 1$;*

(ii) *si $k \in B(k_0, r) \cap \{k_0, k_0 + 1, \ldots\}$, alors $f(k) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n(k)q^n$ est une forme modulaire de poids k et niveau Np, vecteur propre de tous les opérateurs de Hecke.*

De plus :

(iii) *Il existe une représentation continue V_{CM} de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}}$, de dimension 2 sur $\mathscr{A}(k_0, r)$, non ramifiée en dehors de Np, telle que, si $\ell \nmid Np$, alors*

$$\det(1 - X\mathrm{Fr}_\ell^{-1}) = 1 - A_\ell(x)X + \ell^{k_0-1}\langle \ell\rangle^{x-k_0}X^2 \in \mathscr{A}(k_0, r)[X].$$

(iv) *Si $v_p(a_p) = 0$* (i.e. si $k_0 = 2$ dans notre contexte), *la représentation V_{CM} est ordinaire en p : il existe un caractère non ramifié η de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et une base de V_{CM} sur $\mathscr{A}(k_0, r)$ tels que la matrice de l'action de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ soit de la forme*

$$\begin{pmatrix} \eta & \star \\ 0 & \eta^{-1}\chi^{1-k_0}\langle\chi\rangle^{k_0-x} \end{pmatrix};$$

le $\mathscr{A}(k_0, r)$-module $(\widehat{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}\widehat{\otimes} V_{\mathrm{CM}}})^{\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}}$ est libre de rang 1, et l'action du frobenius absolu φ, agissant à travers son action sur $\widehat{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}}$, est donné par multiplication par un élément C_p de $\mathscr{A}(k_0, r)$, et on a

$$A_p = B_p^{-1} = C_p, \quad \textit{si } B_p = \eta(\mathrm{Fr}_p).$$

(v) *Dans le cas général, le $\mathscr{A}(k_0, r)$-module $(\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}\widehat{\otimes} V_{\mathrm{CM}})^{\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}}$ est libre de rang 1, il existe $C_p \in \mathscr{A}(k_0, r)$ tel que φ agisse par multiplication par C_p sur ce module, et on a*

$$A_p = C_p.$$

Remarque 13. — (i) La notation V_{CM} fait référence à Coleman et Mazur, pas à « complex multiplication ».

(ii) Le (iv) est dû à Hida [**22**] ; la définition de C_p du (iv) est un cas particulier de celle du (v) (rappelons que $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ contient $\widehat{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}}$).

(iii) Le (v) est dû à Kisin [**28**] ; sa démonstration de l'égalité $A_p = C_p$ s'obtient par prolongement analytique à partir du théorème de Scholl et Saito [**38, 37**] comparant les valeurs propres de l'opérateur T_p et celle du frobenius agissant sur la cohomologie cristalline de la variété de Kuga-Sato.

9. Invariants $\mathscr{L}$ et familles de formes modulaires

Les démonstrations de Greenberg et Stevens [**18**] (en poids 2) et Stevens (en poids quelconque) reposent sur le théorème suivant.

Théorème 14. — (i) *Si f correspond à une courbe elliptique E, alors $B_p'(1) = \frac{1}{2}\mathscr{L}(E)$.*
(ii) *Dans le cas général, on a*
(a) $A_p(k_0/2)^{-1}A_p'(k_0/2) = -\frac{1}{2}\mathscr{L}_{\mathrm{Col}}(f) = -\frac{1}{2}\mathscr{L}_{\mathrm{Tei}}(f) = -\frac{1}{2}\mathscr{L}_{\mathrm{D-O}}(f)$,
(b) $C_p(k_0/2)^{-1}C_p'(k_0/2) = -\frac{1}{2}\mathscr{L}_{\mathrm{F-M}}(f) = -\frac{1}{2}\mathscr{L}_{\mathrm{Br}}(f)$.

Remarque 15. — (o) Comme $B_p(1) = 1$, il n'y a pas de contradiction entre les (i) et (ii).

(i) Le (i) a été démontré par Greenberg et Stevens [**18**] ; on notera qu'il fait intervenir la quantité B_p qui n'a pas d'équivalent en poids différent de 2. La démonstration repose sur un calcul de cohomologie galoisienne comme suit. Soit $z = x - k_0$ un paramêtre local autour de k_0. La représentation V_f s'obtient, d'une part comme la représentation résiduelle en $z = 0$ de V_{CM} (autrement dit, $V_f = V_{\mathrm{CM}}/zV_{\mathrm{CM}}$), et, d'autre part, comme la duale de la représentation galoisienne associée au module de Tate de la courbe elliptique E. Comme E a réduction multiplicative déployée en p, la restriction de V_f à $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ s'inscrit dans une suite exacte

$$0 \to \mathbf{Q}_p \to V_f \to \mathbf{Q}_p(-1) \to 0,$$

et la classe de cette extension dans $H^1(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{Q}_p(1))$ est l'image $(q(E))$ de $q(E) \in \mathbf{Q}_p^*$ par la théorie de Kummer.

Notons $W = (V_{\mathrm{CM}}/z^2V_{\mathrm{CM}})(1)$. C'est une $(\mathbf{Q}_p[z]/z^2)$-représentation de dimension 2, et dans la base dont le (iv) du théorème 12 affirme l'existence, la matrice de $\sigma \in \mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est de la forme

$$M(\sigma) = \begin{pmatrix} \chi(\sigma)(1 + az\psi_1(\sigma)) & c(\sigma) + zd(\sigma) \\ 0 & 1 - az\psi_1(\sigma) - z\psi_2(\sigma) \end{pmatrix},$$

où $\psi_2 = \log\chi$, ψ_1 est le caractère additif non ramifié de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ vérifiant $\psi_1(\mathrm{Fr}_p) = 1$, et $a = B_p'(1) \in \mathbf{Q}_p$. La relation $M(\sigma\tau) = M(\sigma)M(\tau)$ se traduit par les relations

$$\begin{aligned} c(\sigma\tau) &= \chi(\sigma)c(\tau) + c(\sigma), \\ d(\sigma\tau) - \chi(\sigma)d(\tau) - d(\sigma) &= a\chi(\sigma)\psi_1(\sigma)c(\tau) - (a\psi_1(\tau) + \psi_2(\tau))c(\sigma). \end{aligned}$$

La première de ces relations traduit juste le fait que $V_f(1) = W/zW$ est une extension de $\mathbf{Q}_p$ par $\mathbf{Q}_p(1)$; la classe de c dans $H^1(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{Q}_p(1))$ n'est rien d'autre que la classe de cette extension, à savoir $(q(E))$. La seconde de ces relations se traduit par la nullité de $a\psi_1 \cup c + (a\psi_1 + \psi_2) \cup c$ dans

$H^2(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{Q}_p(1)) = \mathbf{Q}_p$. Comme $\psi_1 \cup c = -v_p(q(E))$ et $\psi_2 \cup c = \log q(E)$, on obtient $a = \frac{1}{2}\mathscr{L}(E)$, ce qui permet de conclure.

(ii) La formule $A_p(k_0/2)^{-1}A'_p(k_0/2) = -\frac{1}{2}\mathscr{L}_{\mathrm{Col}}(f)$ est due à Stevens [**40**] et $A_p(k_0/2)^{-1}A'_p(k_0/2) = -\frac{1}{2}\mathscr{L}_{\mathrm{Tei}}(f) = -\frac{1}{2}\mathscr{L}_{\mathrm{D-O}}(f)$ a été établi par Bertolini, Darmon et Iovita [**3**]. Nous ne reviendrons pas sur leurs démonstrations qui utilisent des techniques modulaires.

(iii) L'égalité $C_p(k_0/2)^{-1}C'_p(k_0/2) = -\frac{1}{2}\mathscr{L}_{\mathrm{F-M}}(f)$ est établie dans [**11**]. La démonstration repose aussi sur un calcul de cohomologie galoisienne, mais à l'intérieur des anneaux de Fontaine. Comme en poids 2, on note $z = x - k_0$; on a $V_f = V_{\mathrm{CM}}/zV_{\mathrm{CM}}$ et on pose $W = V_{\mathrm{CM}}/z^2V_{\mathrm{CM}}$. La représentation W est une extension de V_f par V_f et la classe de cette extension nous définit un élément de $H^1(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}, \mathrm{End}\, V_f) = H^1(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}, K) \oplus H^1(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}, \mathrm{End}^0\, V_f)$, où $\mathrm{End}^0\, V_f$ désigne les éléments de trace nulle. Le point crucial est que la représentation $\mathrm{End}^0\, V_f$ est une représentation semi-stable autoduale de dimension 3 ; une telle représentation ne dépend que des paramètres k_0 et $\mathscr{L}_{\mathrm{F-M}}(f)$ et le $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$-module $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \otimes \mathrm{End}^0\, V_f$ ne dépend que de $\mathscr{L}_{\mathrm{F-M}}(f)$ et pas de k_0. En utilisant l'information selon laquelle $H^0(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}, (\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \otimes W)^{\varphi = C_p(k_0/2) + zC'_p(k_0/2)})$ est de dimension 1 sur $K[z]/z^2$, cela fournit suffisamment de contraintes pour montrer que l'image de la classe de W dans $H^1(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \otimes \mathrm{End}^0\, V_f)$ tombe dans un espace vectoriel de dimension 1 sur K qui ne dépend que de $\mathscr{L}_{\mathrm{F-M}}(f)$, ce qui permet de se ramener au cas $k_0 = 2$ que l'on traite par un calcul assez analogue à celui de Greenberg et Stevens.

(iv) L'égalité $C_p(k_0/2)^{-1}C'_p(k_0/2) = -\frac{1}{2}\mathscr{L}_{\mathrm{Br}}(f)$ est démontrée dans [**13**]. La démonstration passe par la correspondance de Langlands locale p-adique pour les représentations *triangulines* de dimension 2 dont les représentations semi-stables et les représentations associées par Coleman et Mazur aux formes modulaires surconvergentes font partie. (Une représentation V de dimension 2 est trianguline s'il existe un caractère η de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et α tels que $H^0(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}, (\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \otimes V(\eta))^{\varphi=\alpha})$ soit non nul.) Les représentations triangulines (à torsion près par un caractère) forment une variété analytique $\mathscr{X}$ de dimension 2 munie d'une application naturelle vers le plan affine $\mathbf{A}^2$ (cette application envoie $V_{\mathrm{CM}}/(x - x_0)V_{\mathrm{CM}}$ sur $(C_p(x_0), 1 - x_0)$). La formule $C_p(k_0/2)^{-1}C'_p(k_0/2) = -\frac{1}{2}\mathscr{L}_{\mathrm{Br}}(f)$ se traduit géométriquement par le fait que ce morphisme $\mathscr{X} \to \mathbf{A}^2$ est un éclatement au-dessus des points correspondant aux représentations semi-stables.

10. Fonction L p-adique d'une famille de formes modulaires

La méthode employée par Panchishkin pour construire la fonction L p-adique d'une forme modulaire a le bon goût de se laisser interpoler en famille. On a le résultat suivant [**34**] qui généralise des résultats de Hida [**21**] dans le cas ordinaire (on garde les notations du théorème 12).

Théorème 16. — *Il existe une suite D_n, $n \in \mathbf{N}$, d'éléments de $\mathscr{A}(k_0, r)$ vérifiant les conditions suivantes :*

(i) *la suite $v_{\mathscr{A}(k_0,r)}(D_n) + (k_0/2 - 1)\frac{\log n}{\log p}$ est bornée inférieurement ;*

(ii) *si $z \in D(k_0, r)$, la distribution $\mu(z)$, d'ordre $k_0/2 - 1$ sur $\mathbf{Z}_p$, définie par*

$$\int_{\mathbf{Z}_p} (1+T)^x\, \mu(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} D_n(z) T^n,$$

est reliée de manière simple à la distribution $\mu_{f(k)}$ *du théorème 4, si* $x = k$ *est un entier* $\geq k_0$ *appartenant à* $B(k_0, r)$.

On définit les fonctions $L^*(z)$ et $L(z,s)$ par les formules

$$L^*(z) = \int_{\mathbf{Z}_p} x^{k_0/2-1}\mu(z),$$
$$L(z,s) = \int_{\mathbf{Z}_p^*} x^{k_0/2-1}\langle x\rangle^{s-(k_0/2-1)}\mu(z).$$

Remarque 17. — La condition « $\mu(k)$ est reliée de manière simple à $\mu_{f(k)}$ » se traduit par le fait que $L(k,s)$ est égal, à multiplication près par un produit de facteur locaux simples en les premiers divisant N, à $L_p(f(k), s)$, si $k \equiv k_0 \bmod p-1$.

Nous allons prétendre, dans ce qui suit, que ces facteurs locaux sont tous égaux à 1 et montrer comment on peut déduire du théorème précédent et de la formule de Stevens (i.e. du (ii) du théorème 14) le (ii) de la conjecture de Mazur-Tate-Teitelbaum avec l'invariant de Coleman. L'argument ci-dessous est celui que l'on trouve déjà dans l'article de Greenberg et Stevens. Il repose sur les faits suivants.

(i) $L^*(z)$ est analytique en z et $L(z,s)$ est analytique en z et s.

(ii) $L(k_0, s) = L_p(f,s)$.

(iii) $L(z, k_0/2) = (1 - p^{k_2/2-1}A_p(z)^{-1})L^*(z)$ et $L^*(k_0) = \widetilde{L}(f, k_0/2)$

(iv) Si $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ est le signe de l'équation fonctionnelle de $L(f,s)$ (i.e. $\Lambda(f, k_0 - s) = \varepsilon\Lambda(f,s)$ si $\Lambda(f,s) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s}(Np)^{s/2}L(f,s)$), alors

$$L(z, z-s) = -\varepsilon \cdot \langle N\rangle^{s-k_0/2}L(z,s).$$

Les deux premiers points sont des évidences, les deux derniers se démontrent par prolongement analytique à partir du cas $z \in B(k_0, r)$ entier $\geq k_0$.

Maintenant, il y a deux cas suivant que $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = -1$. Si $\varepsilon = -1$, la fonction L complexe s'annule en $k_0/2$ et le (iv) montre que $L_p(f,s)$ a un zéro d'ordre pair en $s = k_0/2$. La conjecture de Mazur-Tate-Teitelbaum devient donc $0 = 0$...

Si $\varepsilon = 1$, alors $L(z, z/2)$ est identiquement nul, ce qui fait que si on écrit la différentielle de L en $(k_0, k_0/2)$ sous la forme $dL = a\,dz + b\,ds$, on a $b = -2a$. Par ailleurs on déduit du (iii), de ce que $A(k_0) = a_p = p^{k_0/2-1}$, et du théorème 14, la formule

$$a = p^{k_0/2-1}\frac{A'(k_0)}{A(k_0)^2}L^*(k_0) = \frac{A'(k_0)}{A(k_0)}L^*(k_0) = -\frac{1}{2}\mathscr{L}_{\mathrm{Col}}(f)\cdot\widetilde{L}(f, k_0/2),$$

et donc

$$L_p'(f, k_0/2) = b = -2a = \mathscr{L}_{\mathrm{Col}}(f)\cdot\widetilde{L}(f, k_0/2).$$

Remarque 18. — Pour démontrer la conjecture 5, on n'a pas besoin de savoir que la fonction $L(z,s)$ interpole les fonctions $L_p(f(k), s)$; il suffit juste de montrer l'existence d'une fonction $L(z,s)$ vérifiant les propriétés (i)-(iv) ci-dessus. C'est ce que fait Stevens (non rédigé) en définissant des symboles modulaires en famille.

Références

[1] Y. Amice, Duals. *Proc. of a conf. on p-adic analysis* (Nijmegen 1978), 1-15, Nijmegen, Math. Institut Katholische Univ., 1978.

[2] Y. Amice et J. Vélu, Distributions p-adiques associées aux séries de Hecke, Astérisque **24-25** (1975) 119–131.

[3] M. Bertolini, H. Darmon et A. Iovita, Families of automorphic forms and the Mazur-Tate-Teitelbaum conjecture, preprint 2004.

[4] C. Breuil, Série spéciale p-adique et cohomologie étale complétée, disponible à : http ://www.ihes.fr/~breuil/publications.html.

[5] R. Coleman, A p-adic Shimura isomorphism and p-adic periods of modular forms, Contemp. Math. **165** (1994) 21–51.

[6] R. Coleman, p-adic Banach spaces, and families of modular forms, Invent. Math. **127** (1997), 417-479.

[7] R. Coleman et A. Iovita, Hidden structures on semi-stable curves, preprint 2003.

[8] R. Coleman et B. Mazur, The eigencurve, *Galois representations in Arithmetic Algebraic Geometry (Durham 1996)*, London Math. Soc. Lect. Note **254** (1997), 1–113.

[9] P. Colmez, Arithmétique de la fonction zêta, dans *La fonction zêta*, 37-164, journées X-UPS 2002.

[10] P. Colmez, La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer p-adique, *Séminaire Bourbaki 2002-03*, exp. 919, Astérisque **294** (2004), 251-319.

[11] P. Colmez, Invariants $\mathscr{L}$ et dérivées de valeurs propres de frobenius, preprint 2003.

[12] P. Colmez, Une correspondance de Langlands locale p-adique pour les représentations semi-stables de dimension 2, preprint 2004.

[13] P. Colmez, Série principale unitaire pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et représentations triangulines de dimension 2, preprint 2005.

[14] H. Darmon, Integration on $\mathscr{H}_p \times \mathscr{H}$ and arithmetic applications, Ann. of Math. **154** (2001) 589–639.

[15] P. Deligne, Formes modulaires et représentations ℓ-adiques, *Sém. Bourbaki 1968/69*, exp. 343, SLN **179** (1971) 139-172.

[16] M. Emerton, p-adic L-functions and completions of representations of p-adic reductive groups, preprint 2004.

[17] G. Faltings, Almost étale extensions, Astérisque **279** (2002), 185–270.

[18] R. Greenberg et G. Stevens, p-adic L-functions and p-adic periods of modular forms, Invent. Math. **111** (1993) 407–447.

[19] J.-M. Fontaine, Représentations p-adiques des corps locaux, dans "*The Grothendieck Festschrift*", vol 2, Prog. in Math. **87**, 249–309, Birkhäuser 1991.

[20] J.-M. Fontaine, Le corps des périodes p-adiques. dans "*Périodes p-adiques*" exposé II, Astérisque **223**, 59-102, 1994.

[21] H. Hida, A p-adic measure attached to the zeta functions associated with two elliptic cusp forms. I, Invent. Math. **79** (1985), 159–195.

[22] H. Hida, Galois representations into $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p[[X]])$ attached to ordinary cusp forms, Invent. Math. **85** (1986), 545–613.

[23] H. Hida, Le produit de Pertersson et de Rankin p-adique, *Séminaire de théorie des nombres 1988-89*, Progr. Math. **91** (1990), 87-102.

[24] H. Hida, *Elementary theory of L-functions and Eisenstein series*, London Math. Soc. Stud. Texts **26**, Cambridge University Press, 1993

[25] A. Iovita et M. Spiess, Derivatives of p-adic L-functions, Heegner cycles and monodromy modules attached to modular forms, Invent. Math. **154** (2003) 333-384.

[26] K. Kato, Generalized explicit reciprocity laws, *Algebraic number theory (Hapcheon/Saga, 1996)*, Adv. Stud. Contemp. Math. (Pusan) **1** (1999), 57–126.

[27] K. Kato, Hodge theory and values of zeta functions of modular forms, *Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques (III)*, Astérisque **295** (2004), 117-290.

[28] M. Kisin, Overconvergent modular forms and the Fontaine-Mazur conjecture, Invent. Math. **153** (2003), 373–454.

[29] Y. Manin, Periods of cusp forms, and p-adic Hecke series, Math USSR-Sb. **92** (1973) 371–393.

[30] B. Mazur, J. Tate et J. Teitelbaum, On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer, Invent. Math. **84** (1986), 1-48.

[31] B. Mazur, On monodromy invariants occuring in global arithmetic, and Fontaine's theory, Contemp. Math. **165** (1994) 1–20.

[32] L. Orton, An elementary proof of a weak exceptional zero conjecture, Canad. J. Math., à paraître.

[33] A. Panchishkin, A new method of constructing p-adic L-functions associated with modular forms, Mosc. Math. J. **2** (2002) 313–328.

[34] A. Panchishkin, Two variable p-adic L functions attached to eigenfamilies of positive slope, Invent. Math. **154** (2003), 551-615.

[35] B. Perrin-Riou, Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local, Invent. Math. **115** (1994), 81-149.

[36] B. Perrin-Riou, Quelques remarques sur la théorie d'Iwasawa des courbes elliptiques, *Number theory for the millennium, III* (Urbana, IL, 2000) 119–147.

[37] T. Saito, Modular forms and p-adic Hodge theory, Invent. Math. **129** (1997), 607–620.

[38] A. Scholl, Motives for modular forms, Invent. Math. **100** (1990) 419–430.

[39] G. Shimura, The special values of the zeta functions associated with cusp forms, Comm. Pure Appl. Math. **29** (1976) 783–804.

[40] G. Stevens, Coleman's $\mathscr{L}$-invariant and families of modular forms, preprint 1996.

[41] J. Teitelbaum, Values of p-adic L-functions and a p-adic Poisson kernel, Invent. Math. **101** (1990), 395-410.

Pierre Colmez, C.N.R.S., Institut de mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France
E-mail : `colmez@math.jussieu.fr`