Corrigé de l'examen du 8 juillet 2008

Exercice 1. (i) (a) Comme V est une représentation de permutation, $\chi_{\mathrm{V}}(\sigma)$ est le nombre de points fixes de σ agissant sur $\{1,2,3,4\}$ (alinéa 2.3 du § I.1). On a donc $\chi_{\mathrm{V}}(\mathrm{C}_1)=4$, $\chi_{\mathrm{V}}(\mathrm{C}_2)=2$, $\chi_{\mathrm{V}}(\mathrm{C}_{2,2})=0$, $\chi_{\mathrm{V}}(\mathrm{C}_3)=1$ et $\chi_{\mathrm{V}}(\mathrm{C}_4)=0$.

Le produit scalaire $\langle\chi_{\mathrm{V}},\chi_{\mathrm{V}}\rangle$ est égal à $\frac{1}{24}(4^2+6\cdot 2^2+3\cdot 0^2+8\cdot 1^2+6\cdot 0^2)=2$. Si $\mathrm{V}=\oplus_{\mathrm{W}\in\mathrm{Irr}(\mathrm{S}_4)}m_{\mathrm{W}}\mathrm{W}$, ce produit scalaire est aussi égal à $\sum_{\mathrm{W}\in\mathrm{Irr}(\mathrm{S}_4)}m_{\mathrm{W}}^2$ puisque les χ_{W} forment une famille orthonormale (th. I.2.10), et comme la seule écriture de 2 comme somme de deux carrés est 1^2+1^2, on en déduit que $m_{\mathrm{W}}=1$ pour exactement deux $\mathrm{W}\in\mathrm{Irr}(\mathrm{S}_4)$, et $m_{\mathrm{W}}=0$ pour les autres, ce qui permet de conclure.

(b) La droite V_1 engendrée par $e_1+\cdots+e_4$ et l'hyperplan V_2 d'équation $x_1+\cdots+x_4$ sont stables par S_4. Comme V_1 est de dimension 1, elle est automatiquement irréductible.

Soit $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathrm{V}_2$ non nul. Il s'agit de prouver que le sous-espace vectoriel U_x de V_2 engendré par les $\sigma\cdot x$, pour $\sigma\in\mathrm{S}_4$, est égal à V_2. Il existe $i\neq j$ tels que $x_i\neq x_j$. Soit τ la transposition (ij). Alors $x-\tau\cdot x$ est un multiple non nul de e_i-e_j. On en déduit l'appartenance de e_i-e_j à U_x, et donc aussi celle de $\sigma\cdot(e_i-e_j)=e_{\sigma(i)}-e_{\sigma(j)}$, pour tout $\sigma\in\mathrm{S}_4$. Comme $(\sigma(i),\sigma(j))$ décrit les couples d'éléments distincts de $\{1,2,3,4\}$ quand σ décrit S_4, cela montre que U_x contient e_1-e_2, e_1-e_3 et e_1-e_4, et comme ces vecteurs engendrent V_2, cela permet de conclure.

(c) La représentation V_1 est la représentation triviale, et donc $\chi_{\mathrm{V}_1}(\mathrm{C})=1$ pour tout $\mathrm{C}\in\mathrm{Conj}(\mathrm{S}_4)$. Comme $\chi_{\mathrm{V}_1}+\chi_{\mathrm{V}_2}=\chi_{\mathrm{V}}$, cela permet de déterminer le caractère de χ_{V_2} et de remplir les première et quatrième colonnes de la table.

(ii) (a) La seconde représentation de dimension 1 est la signature ε ; ses valeurs sont bien celles reportées dans la seconde colonne. La seconde représentation de dimension 3 est $\mathrm{V}_1\otimes\varepsilon$. Si elle pouvait se décomposer sous la forme $\mathrm{V}_1\otimes\varepsilon=\mathrm{W}_1\oplus\mathrm{W}_2$, alors $\mathrm{V}_1=(\mathrm{V}_1\otimes\varepsilon)\otimes\varepsilon$ pourrait se décomposer sous la forme $(\mathrm{W}_1\otimes\varepsilon)\oplus(\mathrm{W}_2\otimes\varepsilon)$, ce qui est absurde. On a $\chi_{\mathrm{V}_1\otimes\varepsilon}(g)=\chi_{\mathrm{V}_1}(g)\varepsilon(g)$ (alinéa 2.1 du § I.1), et donc $\chi_{\mathrm{V}_1\otimes\varepsilon}(\mathrm{C}_2)=-1$ est différent de $\chi_{\mathrm{V}_1}(\mathrm{C}_2)=1$, ce qui prouve que les représentations $\mathrm{V}_1\otimes\varepsilon$ et V_1 ne sont pas isomorphes puisque leurs caractères sont distincts.

(b) Comme S_4 a 5 classes de conjugaison, il a 5 représentations irréductibles (cor. I.2.12). Si on note d la dimension de la représentation manquante et θ son caractère, la formule de Burnside montre que $24=1^2+1^2+3^2+3^2+d^2$, et donc que $d=2$. Pour remplir la dernière colonne, on utilise le fait que $1+\varepsilon+2\theta+3\chi_1+3\chi_2$ est le caractère de la représentation régulière ((i) du cor. I.2.9) qui est connu (alinéa 2.3 du § I.1).

Exercice 2. (i) La fonction $\mathrm{tg}\,z$ est holomorphe en dehors des zéros de $\cos z$. Comme le disque $\mathrm{D}(0,(\frac{\pi}{2})^-)$ ne contient aucun de ces zéros, $\mathrm{tg}\,z$ est somme de sa série de Taylor en 0 sur tout le disque ((i) de la rem. V.2.8), et donc a fortiori sur $]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

(ii) La fonction $\frac{\sin\pi z}{z-1}$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$ sauf peut-être en $z=1$ où elle peut avoir un pôle d'ordre 1. Or, en $z=1$, la fonction $\sin\pi z$ s'annule ; il n'y a donc pas de pôle et $\frac{\sin\pi z}{z-1}$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$ tout entier. Le rayon de convergence de sa série de Taylor en 0 est donc $+\infty$.

Exercice 3. (i) Comme le chemin γ_{R} formé du segment $[0,\mathrm{R}]$, de l'arc de cercle de centre 0 allant de R à $e^{i\theta}\mathrm{R}$, et du segment $[e^{i\theta}\mathrm{R},0]$ est un lacet, on a

$$\mathrm{I}_1(\mathrm{R})+\mathrm{I}_2(\mathrm{R})+\mathrm{I}_3(\mathrm{R})=2i\pi\Big(\sum_{a^n+1=0}\mathrm{I}(\gamma_{\mathrm{R}},a)\mathrm{Res}(\frac{1}{z^n+1},a)\Big),$$

d'après la formule des résidus. Les solutions de $a^n+1=0$ sont les $e^{i\pi(2k+1)/n}$, pour $k=\{0,1,\dots,n-1\}$ et le pôle de $\frac{1}{z^n+1}$ en chacun d'eux est simple ; son résidu est donc $\frac{1}{na^{n-1}}=\frac{-a}{n}$. Par ailleurs, l'indice $\mathrm{I}(\gamma_{\mathrm{R}}, e^{i\pi(2k+1)/n})$ est égal à 1, si $0<\frac{(2k+1)\pi}{n}<\theta$, et vaut 0 sinon. On a donc

$$\mathrm{I}_1(\mathrm{R})+\mathrm{I}_2(\mathrm{R})+\mathrm{I}_3(\mathrm{R})=\frac{-2i\pi}{n}\sum_{0<\frac{(2k+1)\pi}{n}<\theta} e^{i\pi(2k+1)/n}.$$

(ii) Les fonctions $\frac{1}{1+t^n}$ et $\frac{1}{1+t^n e^{in\theta}}$ étant sommables sur $\mathbf{R}_+$, on a $\mathrm{I}_1(\mathrm{R})\to\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^n}$ et $\mathrm{I}_3(\mathrm{R})\to -e^{i\theta}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^n e^{in\theta}}$. Maintenant, $\mathrm{I}_2(\mathrm{R})=\int_0^{\theta}\frac{i\mathrm{R}e^{it}dt}{1+\mathrm{R}^n e^{int}}$, et on peut majorer $\left|\frac{i\mathrm{R}e^{it}}{1+\mathrm{R}^n e^{int}}\right|$ par $\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}^n-1}$. On a donc $|\mathrm{I}_2(\mathrm{R})|\leqslant\frac{\theta\,\mathrm{R}}{\mathrm{R}^n-1}$, et comme $n\geqslant 2$, cela montre que $\mathrm{I}_2(\mathrm{R})\to 0$.

(iii) Prenons $\theta=\frac{2\pi}{n}$. En passant à la limite dans la formule du (i), on obtient

$$(1-e^{2i\pi/n})\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^n}=\frac{-2i\pi}{n}e^{i\pi/n},$$

et donc

$$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^n}=\frac{2i\pi\ e^{i\pi/n}}{n(e^{2i\pi/n}-1)}=\frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}.$$

Exercice 4. (i) La fonction e^{-z} est holomorphe sur $\mathbf{C}$ qui est contractile. Son intégrale sur tout lacet est donc nulle ((i) de la rem. VI.1.4 ou formule des résidus). On en déduit que

$$\int_0^{\mathrm{R}} t^n e^{-t}dt+\int_0^{\frac{b\mathrm{R}}{a}}(\mathrm{R}+it)^n e^{-\mathrm{R}-it}\,i\,dt+\int_{\mathrm{R}}^0(\alpha t)^n e^{-\alpha t}\alpha\,dt=0.$$

Quand $\mathrm{R}\to+\infty$, on a $\int_0^{\mathrm{R}} t^n e^{-t}dt\to\int_0^{+\infty}t^n e^{-t}dt=n!$ et

$$\Big|\int_0^{\frac{b\mathrm{R}}{a}}(\mathrm{R}+it)^n e^{-\mathrm{R}-it}\,i\,dt\Big|\leqslant e^{-\mathrm{R}}\int_0^{\frac{b\mathrm{R}}{a}}|(\mathrm{R}+it)|^n\,dt\leqslant e^{-\mathrm{R}}\frac{b\mathrm{R}}{a}(\mathrm{R}^2+(\frac{b\mathrm{R}}{a})^2)^{n/2}\to 0.$$

Comme $\int_{\mathrm{R}}^0(\alpha t)^n e^{-\alpha t}\alpha\,dt\to -\alpha^{n+1}\int_0^{+\infty}t^n e^{-\alpha t}\,dt$, on obtient, en passant à la limite, l'identité $\alpha^{n+1}\int_0^{+\infty}t^n e^{-\alpha t}\,dt=n!$, ce qui permet de conclure.

(ii) $\hat f_\lambda(x)=\int_{\mathbf{R}}e^{-2i\pi xt}f_\lambda(t)\,dt=\int_0^{+\infty}te^{-(\lambda+2i\pi x)t}dt=\frac{1}{(\lambda+2i\pi x)^2}$ d'après le (i), car $\lambda+2i\pi x\in\Omega$.

(iii) Si $\hat f_\lambda$ n'est pas sommable, alors sa restriction à $\mathbf{R}-[-1,1]$ n'est pas sommable puisque $\hat f_\lambda$ est continue d'après le théorème de Riemann-Lebesgue, et donc sommable sur $[-1,1]$. Comme $|x\hat f_\lambda(x)|\geqslant|\hat f_\lambda(x)|$ sur $\mathbf{R}-[-1,1]$, cela implique que $x\hat f_\lambda(x)$ n'est pas sommable sur cet ouvert ni, a fortiori, sur $\mathbf{R}$.

Si $\hat f_\lambda$ est sommable et si $x\hat f_\lambda(x)$ est sommable, alors d'après le (ii) du th. IV.2.8, $\mathscr{F}\hat f_\lambda$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et $\mathscr{F}(x\hat f_\lambda(x))(t)=\frac{-1}{2i\pi}(\mathscr{F}\hat f_\lambda)'(t)$. Maintenant, la formule d'inversion de Fourier dans L^1, appliquée à f_λ, montre que $(\mathscr{F}\hat f_\lambda)(t)=f_\lambda(-t)$. On aboutit à une contradiction puisque f_λ n'est pas dérivable en 0 ; c'est donc que $x\hat f_\lambda(x)$ n'est pas sommable.

(iv) La fonction $\hat f_\lambda$ et sa dérivée sont des $\mathrm{O}(|x|^{-2})$ en l'infini. On peut donc lui appliquer la formule de Poisson. Par ailleurs, $\hat f_\lambda$ étant sommable, la formule d'inversion de Fourier dans L^1

appliquée à f_λ montre que $(\mathscr{F}\hat{f}_\lambda)(t) = f_\lambda(-t)$. La formule de Poisson devient donc

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{1}{(\lambda+2i\pi n)^2} = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \hat{f}_\lambda(n) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} f_\lambda(-n) = \sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-n\lambda}$$
$$= -\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n\lambda}\Big)' = -\big(\frac{1}{1-e^{-\lambda}}\big)' = \frac{e^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})^2} = \frac{e^{\lambda}}{(e^{\lambda}-1)^2}.$$

(L'interversion de la dérivée et de la série est justifiée par le fait que l'on a affaire à des séries entières (en $e^{-\lambda}$).)

(v) On remarque que $(-1)^n = e^{i\pi n}$. On peut donc évaluer la série en utilisant la formule de Poisson pour $e^{i\pi x}\hat{f}_\lambda(x)$ dont la transformée de Fourier est $t\mapsto f_\lambda(\frac{1}{2}-t)$.

(vi) Si K est un compact de $\mathbf{C} - 2i\pi\mathbf{Z}$, il existe $\mathrm{R} > 0$ tel que $|z| \leqslant \mathrm{R}$, pour tout $z\in \mathrm{K}$. Si $|n| > \frac{\mathrm{R}}{2\pi}$, on a alors $\big|\frac{1}{(z+2i\pi n)^2}\big| \leqslant \frac{1}{(2\pi|n|-\mathrm{R})^2}$, et comme $\sum_{|n|>\frac{\mathrm{R}}{2\pi}} \frac{1}{(2\pi|n|-\mathrm{R})^2} < +\infty$, la série est normalement convergente (et donc en particulier convergente en tout point) sur K. On note $f(z)$ la somme de la série. Comme chaque $\frac{1}{(z+2i\pi n)^2}$ est holomorphe sur $\mathbf{C} - 2i\pi\mathbf{Z}$, il résulte du th. V.2.12 que f est holomorphe sur $\mathbf{C} - 2i\pi\mathbf{Z}$. Or elle coïncide avec la fonction holomorphe $z\mapsto \frac{e^z}{(e^z-1)^2}$ sur $\mathbf{R}_+^*$. Comme $\mathbf{C} - 2i\pi\mathbf{Z}$ est connexe, il résulte du théorème des zéros isolés que $f(z) - \frac{e^z}{(e^z-1)^2} = 0$ pour tout $z\in\mathbf{C} - 2i\pi\mathbf{Z}$.

Exercice 5. (i) D'après l'inégalité de Cauchy ((i) de la rem. V.2.8), si $z_0 = x_0 + iy_0$, on a $|g'(z_0)| \leqslant \frac{1}{r}\sup_{z\in \mathrm{C}(z_0,r)} |g(z)|$. Si $|y_0| \geqslant \mathrm{M}' = 2\mathrm{M}$, et si $r = \frac{|y_0|}{2}$, on a $\mathrm{M} \leqslant |\mathrm{Im}(z)| \leqslant \frac{3|y_0|}{2}$, pour tout $z\in\mathrm{C}(z_0,r)$, et donc $|g(z)| \leqslant \mathrm{C}\big(\frac{3|y_0|}{2}\big)^{\mathrm{N}}$. On en déduit que $|g'(z_0)| \leqslant \mathrm{C}'|y_0|^{\mathrm{N}-1}$, avec $\mathrm{C}' = 3^{\mathrm{N}}2^{1-\mathrm{N}}$, si $|y_0| \geqslant \mathrm{M}'$.

(ii) Soit $g = f^2 + f'$. Comme f est holomorphe sur $\mathrm{D}(0,1^-) - \{0\}$, impaire, et a un pôle simple de résidu 1 en 0, on a $f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2k+1}z^{2k+1}$ sur $\mathrm{D}(0,1^-)$ (fonction holomorphe sur un disque épointé, n° 2 du § VI.2). On en déduit que $f'(z) = \frac{-1}{z^2} + \sum_{n=0}^{+\infty}(2k+1)a_{2k+1}z^{2k}$, que $f(z)^2 = \frac{1}{z^2} + 2a_1 + \cdots$, et que $g(z)$ est holomorphe en 0. Comme elle est périodique de période 1, elle est holomorphe en tous les entiers, et comme f est holomorphe sur $\mathbf{C}-\mathbf{Z}$, elle est holomorphe sur $\mathbf{C}$ tout entier.

De plus, il résulte du (i) que g est un $\mathrm{O}(y^{2\mathrm{N}})$ et que $g^{(k)}$ est un $\mathrm{O}(y^{2\mathrm{N}-k})$ pour tout k. On en déduit que $g^{(2\mathrm{N})}$ est bornée sur $\{z,\ 0\leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant 1,\ |\mathrm{Im}(z)| \geqslant \mathrm{M_N}\}$, si $\mathrm{M_N}$ est assez grand. Comme $g^{(2\mathrm{N})}$ est continue (car holomorphe) sur $\{z,\ 0\leqslant \mathrm{Re}(z)\leqslant 1\}$, et comme $\{z,\ 0\leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant 1,\ |\mathrm{Im}(z)| \leqslant \mathrm{M_N}\}$ est compact, on en déduit l'existence de $\mathrm{C_N}$ tel que $|g^{(2\mathrm{N})}(z)| \leqslant \mathrm{C_N}$, si $0 \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant 1$. La périodicité de $g^{(2\mathrm{N})}$ implique alors que $|g^{(2\mathrm{N})}(z)| \leqslant \mathrm{C_N}$, pour tout $z\in\mathbf{C}$, et le théorème de Liouville permet d'en conclure que $g^{(2\mathrm{N})}$ est constante. On en déduit que g est un polynôme de degré $\leqslant \mathrm{N}$, et comme g est périodique, cela implique que g est une constante, ce que l'on cherchait à démontrer.

On aurait pu aussi constater que $h(z) = f(z) - \pi\operatorname{cotg}\pi z$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$, impaire, périodique de période 1, et $\mathrm{O}(y^{\mathrm{N}})$. Les même arguments que ci-dessus permettent alors de montrer que $h = 0$, et donc que $f^2 + f' = -\pi^2$.