
LA FORMULE LIMITE DE KRONECKER

par

Pierre Colmez

Résumé. — Nous faisons quelques remarques sur les liens entre la formule limite de Kronecker pour les corps totalement réels, les périodes (normalisées) des variétés abéliennes CM, et les unités des extensions abéliennes des corps CM.

Abstract. — We make some remarks about the relation between the Kronecker limit formula for totally real fields, (normalized) periods of CM abelian varieties, and units in abelian extensions of CM fields.

Cette petite note est une série de commentaires sur [3], en particulier sur le quatrième point de [3, §0.7], qui explicite ce que la conjecture [3, conj.04] (ou [3, conj.II.2.11]) implique pour la moyenne, sur tous les types CM possibles, des hauteurs de Faltings des variétés abéliennes CM par l’anneau des entiers $\mathcal{O}_K$ d’un corps CM K donné : si χ est le caractère quadratique associé à K/F où F est le sous-corps réel maximal de K , on a ⁽¹⁾

$$(1) \quad \frac{1}{2[F:\mathbb{Q}]} \sum_{\Phi \in \Phi(K)} h_{\text{Fal}}(X_{\Phi}) = -\frac{1}{2} \left(\frac{L'(\chi, 0)}{L(\chi, 0)} + \frac{1}{2} \log \mathbf{f}_{\chi} \right) - \frac{[F:\mathbb{Q}]}{2} \log 2\pi$$

Cette formule est maintenant un théorème ([9] pour $[K:\mathbb{Q}] = 4$ et [1, 11] pour le cas général). Dans [3, §0.7], cette formule est suivie du commentaire suivant :

[...] le second membre s’exprime à l’aide de la formule limite de Kronecker pour F . La conjecture 0.4 laisse donc penser que la fonction apparaissant dans la formule limite de Kronecker pour un corps totalement réel a des propriétés arithmétiques, au moins aux points CM, tout-à-fait similaires à celles de la classique fonction $\log |\Delta|$ [...]

Nous explicitons ci-dessous (formule (7)) ce qu’il en est exactement ⁽²⁾. Nous en profitons aussi pour donner une définition géométrique (th.12 et prop.16) de périodes “absolues” des variétés abéliennes CM ; notons que Yoshida [10] a formulé une conjecture donnant une construction analytique de telles périodes. Enfin, dans l’appendice,

1. Les parenthèses de la formule de [3] sont mal placées.

2. Ce que j’avais en tête à l’époque était beaucoup trop optimiste.

nous montrons (prop. 18) que le (ii) de la conjecture [3, conj. II.2.11] (concernant les hauteurs de Faltings) implique “la moitié” de la conjecture complète (la conjecture complète est connue dans le cas abélien grâce à [3, th. III.3.9] complété par [6]).

1. Fonctions zêta de Dedekind en $s = 0$

On note $\overline{\mathbf{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{C}$. Si $L \subset \overline{\mathbf{Q}}$ est un corps de nombres, on note $\mathcal{O}_L$ l’anneau de ses entiers, U_L le groupe des unités de $\mathcal{O}_L$, Cl_L le groupe des classes d’idéaux fractionnaires de L , h_L son cardinal, w_L le nombre de racines de l’unités dans L . On note H_L l’ensemble $\text{Hom}(L, \overline{\mathbf{Q}})$ des plongements de L dans $\overline{\mathbf{Q}}$; comme on a supposé $L \subset \overline{\mathbf{Q}}$, cela fait que H_L contient des éléments privilégiés id et la conjugaison complexe c (qui peut coïncider avec id).

Soient r_1 le nombre de places réelles de L et r_2 le nombre de ses places complexes, et donc $[L : \mathbf{Q}] = r_1 + 2r_2$. Si v est une place archimédienne de L , choisissons $\sigma_v \in H_L$ induisant v , et posons $e_v = 1$ si v est réelle et $e_v = 2$ si v est complexe. L’injection de L dans $\overline{\mathbf{Q}}$ induit une place privilégiée v_0 . Si $u_1, \dots, u_{r_1+r_2-1}$ est une famille libre d’éléments de U_L , le sous-groupe $\langle u_1, \dots, u_{r_1+r_2-1} \rangle$ qu’ils engendrent est d’indice fini dans U_L . On définit le régulateur R_L de U_L par la formule

$$R_L := \frac{1}{[U_L : \langle u_1, \dots, u_{r_1+r_2-1} \rangle]} \left| \det(\log |\sigma_v(u_i)|^{e_v})_{v \neq v_0, 1 \leq i \leq r_1+r_2-1} \right|$$

(Comme on a divisé par l’indice dans tout le groupe des unités et pas dans sa partie libre, notre R_L correspond au $\frac{R_L}{w_L}$ habituel.)

On note ζ_L la fonction zêta de Dedekind de L ; c’est une fonction analytique sur $\mathbf{C}$, holomorphe en dehors d’un pôle simple en $s = 1$; son comportement en $s = 0$ est donné par la formule analytique du nombre de classes

$$\zeta_L(s) \sim -h_L R_L s^{r_1+r_2-1}$$

Soient K un corps CM et F son sous-corps totalement réel maximal. On note d le degré de F sur $\mathbf{Q}$. Alors U_F est d’indice fini dans U_K , et on a

$$[U_K : U_F] = 2^{d-1} \frac{R_F}{R_K}$$

Au voisinage de 0, on a

$$\zeta_F(s) = -h_F (R_F s^{d-1} + \gamma_F s^d) + O(s^{d+1}), \quad \text{avec } \gamma_F \in \mathbf{R}.$$

Remarque 2. — On a $\gamma_{\mathbf{Q}} = \log \sqrt{2\pi}$, mais la nature arithmétique de γ_F n’est pas claire si $F \neq \mathbf{Q}$.

Soit χ le caractère de Dirichlet de F correspondant à l’extension quadratique K/F . La formule (1) est équivalente (via le (ii) de [3, th. 0.3]) à l’identité⁽³⁾

$$L(\chi, s) = L(\chi, 0)(1 + \text{ht}(\chi)s) + O(s^2)$$

3. ht est la forme linéaire fabriquée à partir des logarithmes de périodes de variétés abéliennes CM, qui est définie dans [3, th. 0.3] (cf. aussi le dernier point de la prop. 16 et la note 5.)

Comme $\zeta_K(s) = \zeta_F(s)L(\chi, s)$, on en tire

$$\zeta_K(s) = -h_F L(\chi, 0)(R_F s^{d-1} + (\gamma_F + R_F \text{ht}(\chi))s^d) + O(s^{d+1})$$

En comparant avec la formule analytique du nombre de classes pour K , cela donne

$$(3) \quad \begin{aligned} L(\chi, 0) &= \frac{h_K R_K}{h_F R_F} = \frac{h_K}{h_F} \frac{2^{d-1}}{[U_K : U_F]} \\ \zeta_K(s) &= -h_K R_K s^{d-1} - \left(\frac{2^{d-1} h_K}{[U_K : U_F]} \gamma_F + h_K R_K \text{ht}(\chi) \right) s^d + O(s^{d+1}) \end{aligned}$$

2. Fonctions zêta d'Epstein en $s = 0$

Si Λ est un $\mathcal{O}_F$ -réseau de $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Q}} F$, on pose

$$E(\Lambda, s) = \sum'_{\omega \in \Lambda/U_F} \frac{1}{|N(\omega)|^{2s}}$$

où $N : \mathbf{C} \otimes F \rightarrow \mathbf{C}$ est induit par $N_{F/\mathbf{Q}} : F \rightarrow \mathbf{Q}$. Alors, $E(\Lambda, s)$ admet un prolongement analytique à tout le plan complexe, holomorphe en dehors d'un pôle simple en $s = 1$, et le comportement au voisinage de 0 est donné par la formule limite de Kronecker :

$$E(\Lambda, s) = -R_F s^{d-1} - (\Psi_F(\Lambda) + 2^{d-1} \gamma_F) s^d + O(s^{d+1})$$

où Ψ_F est une fonction sur les $\mathcal{O}_F$ -réseaux vérifiant

$$\Psi_F(\alpha \Lambda) = \Psi_F(\Lambda) + R_F \log |N(\alpha)|^2, \quad \text{si } \alpha \in (\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Q}} F)^*$$

et la constante $2^{d-1} \gamma_F$ est là pour rendre les formules suivantes plus esthétiques.

Remarque 4. — (i) On peut trouver ω_1, ω_2 tels que $\Lambda = \mathfrak{a} \omega_1 \oplus \mathcal{O}_F \omega_2$, où $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathcal{O}_F$ dont l'image dans Cl_K ne dépend que de Λ . Si $z = \frac{\omega_2}{\omega_1}$, alors

$$\Psi_F(\Lambda) = \Psi_F(\mathfrak{a} \oplus \mathcal{O}_F z) + R_F \log |N(\omega_1)|^2$$

Les $z \mapsto \Psi_F(\mathfrak{a} \oplus \mathcal{O}_F z)$, pour $\mathfrak{a} \in \text{Cl}_F$ sont les branches de la forme automorphe analytique réelle dont la transformée de Mellin est $\zeta_F(s) \zeta_F(s+1)$.

(ii) Si $F = \mathbf{Q}$, on peut écrire $\Lambda = \omega_1(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}z)$ avec $\text{Im}(z) > 0$, et on a

$$\Psi_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}z) = \log(\sqrt{2\pi} |\eta(z)|^2)$$

où $\eta(z) = q^{1/24} \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)$ est la forme modulaire de poids $\frac{1}{2}$ habituelle.

Si $\mathfrak{a} \in \text{Cl}_K$, fixons un idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathcal{O}_K$ dont l'image dans Cl_K est $\mathfrak{a}$. Alors

$$\zeta_{\mathfrak{a}}(s) = \sum_{\mathfrak{b} \sim \mathfrak{a}} \frac{1}{N \mathfrak{b}^s} = \frac{1}{[U_K : U_F]} \frac{1}{N \mathfrak{a}^s} \sum_{\alpha \in \mathfrak{a}^{-1}/U_F} \frac{1}{|N(\alpha)|^{2s}} = \frac{1}{[U_K : U_F]} \frac{1}{N \mathfrak{a}^s} E(\mathfrak{a}^{-1}, s)$$

Au voisinage de 0, on a donc

$$(5) \quad \zeta_{\mathfrak{a}}(s) = -R_K s^{d-1} - \frac{1}{[U_K : U_F]} (\Psi_F(\mathfrak{a}) + 2^{d-1} \gamma_F) s^d + O(s^{d+1})$$

où $\Psi_F(\mathfrak{a}) := \Psi_F(\mathfrak{a}^{-1}) + R_F \log \text{Na}$. En comparant les formules (3) et (5) pour $\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a} \in \text{Cl}_K} \zeta_{\mathfrak{a}}(s)$, on en tire l'identité

$$(6) \quad \frac{1}{[U_K : U_F]} \sum_{\mathfrak{a} \in \text{Cl}_K} \Psi_F(\mathfrak{a}) = h_K R_K \text{ht}(\chi)$$

Maintenant, si $\eta : \text{Cl}_K \rightarrow \mathbf{C}^*$ est un caractère, le comportement de $L(\eta, s)$ au voisinage de 0 est donné par la conjecture de Stark : si H est le corps de classes de Hilbert de K , et si U_H^η est le sous-espace de $U_H \otimes \mathbf{Q}(\eta)$ sur lequel $\text{Gal}(H/K) = \text{Cl}_K$ agit par η , alors il existe $A(\eta) \in \mathbf{Q}(\eta)$ tel que

$$L(\eta, s) = A(\eta) R(U_H^\eta) s^d + O(s^{d+1})$$

où $R(U_H^\eta)$ est le régulateur de U_H^η (un déterminant $d \times d$ de combinaisons linéaires de logarithmes d'unités de $\mathcal{O}_H$). Comme $L(\eta, s) = \sum_{\mathfrak{a}} \eta(\mathfrak{a}) \zeta_{\mathfrak{a}}(s)$, une application de la formule d'inversion de Fourier sur Cl_K fournit l'identité (conjecturale)

$$(7) \quad \Psi_F(\mathfrak{a}) = [U_K : U_F] R_K \text{ht}(\chi) + \frac{1}{h_K} \sum_{\eta \neq 1} \eta(\mathfrak{a})^{-1} A(\eta) R(U_H^\eta)$$

Remarque 8. — (i) Si $F = \mathbf{Q}$, l'identité (7) est un théorème grâce au lien entre η , les périodes des courbes elliptiques CM et les unités elliptiques.

(ii) Si $F \neq \mathbf{Q}$, l'identité (7) montre que Ψ_F prend des valeurs intéressantes aux points spéciaux, mais que la situation est nettement plus compliquée que pour $\mathbf{Q}$ car ces valeurs font intervenir des déterminants $d \times d$ de logarithmes de nombres significatifs, ce qui ne donne pas un accès direct à ces nombres.

(iii) En dehors du cas $F = \mathbf{Q}$, on peut prouver l'identité (7) si $|\text{Cl}_K| = 1, 2$. Si $|\text{Cl}_K| = 1$, cela se réduit à la formule (6), et si $|\text{Cl}_K| = 2$, on obtient

$$\Psi_F(\mathfrak{a}) = [U_K : U_F] R_K \text{ht}(\chi) \pm \frac{1}{2} \frac{h_H R_H}{h_K R_K} = [U_K : U_F] R_K \text{ht}(\chi) \pm \frac{1}{2} h_H^- R_H^-$$

où $\pm = +$ si $\mathfrak{a}$ est la classe des idéaux principaux et $\pm = -$ sinon.

(iv) Le membre de droite de l'identité (7) n'a pas l'air homogène car le terme $R_K \text{ht}(\chi)$ est un produit d'un déterminant $(d-1) \times (d-1)$ de logarithmes de conjugués d'unités par le logarithme d'une période, alors que tous les autres termes sont des déterminants $d \times d$ de logarithmes de conjugués d'unités. Nous expliquons ci-dessous (prop. 14) comment écrire naturellement $R_K \text{ht}(\chi)$ comme un déterminant $d \times d$.

3. Corps CM

Notons $\mathbf{Q}^{\text{CM}} \subset \overline{\mathbf{Q}}$ le composé de tous les corps CM et, si K est un corps CM, notons G_K^{CM} le groupe $\text{Gal}(\mathbf{Q}^{\text{CM}}/K)$.

Soit $\mathcal{CM}$ l'espace des $a : G_{\mathbf{Q}} \rightarrow \mathbf{Z}$, localement constantes, se factorisant par $G_{\mathbf{Q}}^{\text{CM}}$, telles que $g \mapsto a(g) + a(cg)$ soit constante, où c est la conjugaison complexe (qui est dans le centre de $G_{\mathbf{Q}}^{\text{CM}}$). Alors $\mathcal{CM}$ contient, comme sous-module d'indice 2, la somme directe de l'espace des fonctions constantes et de $\mathcal{CM}_-$, espace des a telles que $a(cg) = -a(g)$ pour tout $g \in G_{\mathbf{Q}}$. Soient $\mathcal{CM}^0 \subset \mathcal{CM}$ et $\mathcal{CM}_-^0 \subset \mathcal{CM}_-$ les sous-espaces des fonctions centrales.

Alors $\mathbf{C} \otimes \mathcal{M}^0$ admet pour base les caractères d'Artin dont la fonction L ne s'annule pas en 0. Soient μ_{Art} et, si $s \in \mathbf{C}$, $Z(\cdot, s)$ les formes $\mathbf{C}$ -linéaires sur $\mathcal{M}^0$ définies par $\mu_{\text{Art}}(\chi) = \log \mathfrak{f}_\chi$ (où $\mathfrak{f}_\chi$ est le conducteur de χ) et $Z(\chi, s) = \frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)}$. L'inclusion $\overline{\mathbf{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbf{Q}}_p$ induit une inclusion $G_{\mathbf{Q}_p} \hookrightarrow G_{\mathbf{Q}}$, et les formes linéaires ci-dessus se décomposent sous la forme

$$\mu_{\text{Art}} = \sum_{p \in \mathcal{P}} \mu_{\text{Art}, p} \log p, \quad Z(\cdot, s) = - \sum_{p \in \mathcal{P}} Z_p(\cdot, s) \log p$$

où $\mu_{\text{Art}, p}$ et $Z_p(\cdot, s)$ sont des applications linéaires sur $\text{LC}(G_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{Z})$, à valeurs dans $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{Q}(p^{-s})$ respectivement.

On suppose que $F \subset K \subset \overline{\mathbf{Q}}$, i.e. que l'on dispose d'un plongement privilégié de F et K dans $\overline{\mathbf{Q}}$. Si $\sigma, \tau \in H_K$, soit $b_{K, \sigma, \tau} \in \mathcal{M}$ la fonction sur $G_{\mathbf{Q}}$ donnée par la formule ⁽⁴⁾

$$(9) \quad b_{K, \sigma, \tau}(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } g\sigma = \tau, \\ -1 & \text{si } g\sigma = c\tau, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a $b_{K, \sigma, \tau} = -b_{K, \sigma, c\tau} = -b_{K, c\sigma, \tau} = b_{K, c\sigma, c\tau}$.

Si $\Phi \subset H_K$ est un type CM, soit

$$b_{K, \sigma, \Phi} = \sum_{\tau \in \Phi} b_{K, \sigma, \tau}$$

4. Anneaux de périodes

On fixe un plongement $\overline{\mathbf{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbf{Q}}_p$ pour chaque p . Notons $\mathbf{B}_{\text{dR}, p}$ l'anneau des périodes p -adiques. Soit $\mathcal{V} := \{\infty, p \in \mathcal{P}\}$ l'ensemble des places de $\mathbf{Q}$. Si $v \in \mathcal{V}$, on définit $\mathbf{B}_v$ par $\mathbf{B}_\infty = \mathbf{C}$ et $\mathbf{B}_p = \mathbf{B}_{\text{dR}, p}$, si $p \in \mathcal{P}$. Finalement, on pose :

$$\mathbf{B} := \prod_v \mathbf{B}_v$$

Si LC désigne l'espace des fonctions localement constantes, on a des isomorphismes

$$(\mathbf{B} \otimes \overline{\mathbf{Q}})^* = \varinjlim_{[L:\mathbf{Q}] < \infty} (\mathbf{B} \otimes L)^* \cong \text{LC}(G_{\mathbf{Q}}, \mathbf{B}^*)$$

On voit $\overline{\mathbf{Q}}^*$ comme un sous-groupe de $(\mathbf{B} \otimes \overline{\mathbf{Q}})^*$ en envoyant α sur $1 \otimes \alpha$; via l'isomorphisme ci-dessus, cela correspond à envoyer α sur la fonction localement constante $g \mapsto \alpha^g$. L'injection $\overline{\mathbf{Q}}^* \rightarrow \text{LC}(G_{\mathbf{Q}}, \mathbf{B}^*)$ est $G_{\mathbf{Q}}$ équivariante, si on fait agir $h \in G_{\mathbf{Q}}$ sur $\text{LC}(G_{\mathbf{Q}}, \mathbf{B}^*)$ par

$$(h * \phi)(g) = \phi(gh)$$

On note $U_{\overline{\mathbf{Q}}} \subset \overline{\mathbf{Q}}^*$ la limite inductive des U_L . On note U^{CM} la limite inductive des U_F^+ , pour F totalement réel. On définit $\iota : \overline{\mathbf{Q}}^* \mapsto (\mathbf{B} \otimes \overline{\mathbf{Q}})^*$ en envoyant λ sur la fonction $g \mapsto \lambda^g \lambda^{c^g}$, et donc $\iota(\overline{\mathbf{Q}}^*)$ n'est pas un sous-groupe de $\overline{\mathbf{Q}}^* \hookrightarrow (\mathbf{B} \otimes \overline{\mathbf{Q}})^*$.

4. Elle est reliée aux $a_{K, \sigma, \tau}$ de [3] par la formule $b_{K, \sigma, \tau} = a_{K, \sigma, \tau} - a_{K, \sigma, c\tau}$.

On note $\iota(\overline{\mathbf{Q}}^*)_0$ le sous-groupe des $\iota(\lambda)$ vérifiant $v_p(\lambda^g \lambda^{cg}) = 0$ pour tout $g \in G_{\mathbf{Q}}$; en particulier, $\iota(U_{\overline{\mathbf{Q}}}) \subset \iota(\overline{\mathbf{Q}}^*)_0$.

La restriction de ι à $\mathbf{Q}^{\text{CM}}$ est $\lambda \mapsto \lambda \lambda^c$ car $\lambda^{cg} = \lambda^{gc}$ pour tout g , si $\lambda \in U^{\text{CM}}$. Il s'ensuit que $\iota((\mathbf{Q}^{\text{CM}})^*) \subset (\mathbf{Q}^{\text{CM}})^*$ et que $\iota((\mathbf{Q}^{\text{CM}})^*)_0 \subset U^{\text{CM}} \subset \overline{\mathbf{Q}}^* \hookrightarrow (\mathbf{B} \otimes \overline{\mathbf{Q}})^*$.

On dispose d'une application norme normalisée

$$(10) \quad N^{\text{CM}} : (\mathbf{B} \otimes \overline{\mathbf{Q}})^* \rightarrow (\mathbf{B} \otimes \mathbf{Q}^{\text{CM}})^* \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$$

définie, via les identifications $(\mathbf{B} \otimes \overline{\mathbf{Q}})^* \cong \text{LC}(G_{\mathbf{Q}}, \mathbf{B}^*)$ et $(\mathbf{B} \otimes \mathbf{Q}^{\text{CM}})^* \cong \text{LC}(G_{\mathbf{Q}}^{\text{CM}}, \mathbf{B}^*)$ par la formule suivante, pour ϕ fixe par G_L avec $L/\mathbf{Q}$ galoisienne finie, et K plus grand sous-corps CM de L :

$$(N^{\text{CM}}\phi)(g) = \left(\prod_{h \in G_K/G_L} \phi(gh) \right)^{1/[L:K]}$$

(l'exposant $1/[L:K]$ est la raison pour laquelle on a tensorisé $(\mathbf{B} \otimes \mathbf{Q}^{\text{CM}})^*$ par $\mathbf{Q}$; on vérifie facilement que le résultat est indépendant de L grâce à cet exposant $1/[L:K]$). Si $\lambda \in L^*$, on a, car K est un corps CM,

$$\prod_{h \in G_K/G_L} \lambda^{gh} \lambda^{cgh} = (N_{L/K} \lambda)^g (N_{L/K} \lambda)^{cg} = ((N_{L/K} \lambda)(N_{L/K} \lambda)^c)^g$$

Il s'ensuit que $N^{\text{CM}}(\iota(\overline{\mathbf{Q}}^*)_0) \subset U^{\text{CM}} \otimes \mathbf{Q}$, ce qui induit un morphisme

$$N^{\text{CM}} : (\mathbf{B} \otimes \overline{\mathbf{Q}})^* / \iota(\overline{\mathbf{Q}}^*)_0 \rightarrow ((\mathbf{B} \otimes \mathbf{Q}^{\text{CM}})^* / U^{\text{CM}}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$$

induisant l'identité sur $(\mathbf{B} \otimes \mathbf{Q}^{\text{CM}})^* / U^{\text{CM}} \subset (\mathbf{B} \otimes \overline{\mathbf{Q}})^* / \iota(\overline{\mathbf{Q}}^*)_0$.

5. Périodes des variétés abéliennes CM

Si $\Phi \in H_K$ est un type CM, choisissons une variété abélienne X_{Φ} , définie sur une extension finie L de K , à multiplication complexe par $\mathcal{O}_K$, de type CM Φ , ayant bonne réduction partout (c'est possible, quitte à agrandir L). On fixe un modèle $\mathcal{X}_{\Phi}$ de X_{Φ} sur $\mathcal{O}_K$. Si $\sigma \in H_K$, soit $H^{\sigma}(\mathcal{X}_{\Phi})$ le $\mathcal{O}_L$ -module des $\omega \in H_{\text{dR}}^1(\mathcal{X}_{\Phi})$ sur lesquels $\alpha \in \mathcal{O}_K$ agit par multiplication par $\sigma(\alpha)$. Alors (quitte à agrandir encore L) $H^{\sigma}(\mathcal{X}_{\Phi})$ est de rang 1 sur $\mathcal{O}_L$; on en fixe une base ω_{σ} , et donc ω_{σ} est unique à multiplication près par un élément de U_L .

Si $g \in \text{Gal}(L/\mathbf{Q})$, on note X_{Φ}^g , ω_{σ}^g , etc. les objets déduits par extension des scalaires. Alors X_{Φ}^g est isogène à $X_{g\Phi}$ et ω_{σ}^g est une base de $H^{g\sigma}(\mathcal{X}_{g\Phi})$. Si $u_g \in H^1(X_{\Phi}^g(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ notons

$$\langle \omega_{\sigma}^g, u_g \rangle_v := \int_{u_g} \omega_{\sigma}^g \in \mathbf{B}_v$$

Les formules de Riemann impliquent que

$$\langle \omega_{\sigma}^g, u_g \rangle_v \langle \omega_{c\sigma}^g, u_g \rangle_v = \alpha_g t_v$$

où $\alpha_g \in \overline{\mathbf{Q}}$, et où $t_{\infty} = 2i\pi$ et t_p est le $2i\pi$ p -adique de Fontaine.

Les périodes $\langle \omega_{\sigma}^g, u_g \rangle_v$ dépendent de tous les choix entrant dans leur définition; nous allons les normaliser, grâce au théorème de Deligne [4] sur les cycles de Hodge

absolus et son avatar p -adique [5, 2, 7, 8], pour qu'elles ne dépendent que de Φ et σ (à une petite indétermination près). Commençons par remarquer que la conjugaison complexe c induit un isomorphisme $H^1(X_\Phi^g(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) \cong H^1(X_\Phi^{cg}(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$.

Lemme 11. — (i) la quantité $\text{Per}(X_\Phi^g, \omega_\sigma^g, \omega_{c\sigma}^g) = (\text{Per}_v(X_\Phi^g, \omega_\sigma^g, \omega_{c\sigma}^g))_v \in \mathbf{B}^*$, où

$$\text{Per}_v(X_\Phi^g, \omega_\sigma^g, \omega_{c\sigma}^g) := \frac{\langle \omega_\sigma^g, u_g \rangle_v \langle \omega_\sigma^{cg}, c \cdot u_g \rangle_v}{\langle \omega_{c\sigma}^g, u_g \rangle_v \langle \omega_{c\sigma}^{cg}, c \cdot u_g \rangle_v}$$

ne dépend pas du choix de u_g , et $\text{Per}_\infty(X_\Phi^g, \omega_\sigma^g, \omega_{c\sigma}^g)$ est réelle > 0 .

(ii) $v_p(\text{Per}_p(X_\Phi^g, \omega_\sigma^g, \omega_{c\sigma}^g)) = 2(Z_p(b_{K,g\sigma,g\Phi}, 0) - \mu_{\text{Art},p}(b_{K,g\sigma,g\Phi}))$

Démonstration. — Que $\text{Per}_\infty(X_\Phi^g, \omega_\sigma^g, \omega_{c\sigma}^g)$ soit réelle > 0 résulte de ce que $\langle \omega_\sigma^g, u_g \rangle_\infty$ et $\langle \omega_\sigma^{cg}, c \cdot u_g \rangle_\infty$ sont des nombres complexes conjugués (et de même en remplaçant σ par $c\sigma$). Que $\text{Per}(X_\Phi^g, \omega_\sigma^g, \omega_{c\sigma}^g)$ ne dépende pas de u_σ est le contenu de [3, lemme II.2.1] : cela résulte de ce que $H^1(X_\Phi^g(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ est un K -module de rang 1, et que le résultat est vecteur propre pour l'action de K pour le caractère $g\sigma + cg\sigma - gc\sigma - cgc\sigma$ qui est trivial puisque c commute à tout.

Pour prouver le (ii), on utilise le (i) de [3, th. II.1.1] selon lequel,

$$v_p(\langle \omega_{\Phi,\sigma}^g, u \rangle_p) = v_p(\omega_{g\Phi,g\sigma}^g) + Z_p(a_{K,g\sigma,g\Phi}, 0) - \mu_{\text{Art},p}(a_{K,g\sigma,g\Phi})$$

si u est un générateur du $\mathbf{Z}_p \otimes \mathcal{O}_K$ -module $T_p(X_\Phi^g)$ (et idem pour les autres termes). On a imposé $v_p(\omega_\sigma^g) = 0$ en prenant une base de $H^\sigma(\mathcal{X}_\Phi)$, et comme le résultat ne dépend pas du choix de u_g , on peut supposer que u_g est un générateur du $\mathbf{Z}_p \otimes \mathcal{O}_K$ -module $T_p(X_\Phi^g)$ (et idem pour les autres termes). Le résultat est alors une conséquence de la linéarité de $Z_p(\cdot, 0)$ et $\mu_{\text{Art},p}$, et des relations $b_{K,g\sigma,g\Phi} = a_{K,g\sigma,g\Phi} - a_{K,gc\sigma,g\Phi}$ et $b_{K,cg\sigma,cg\Phi} = b_{K,g\sigma,g\Phi}$. $\square$

Théorème 12. — (i) Il existe une unique application multiplicative

$$\Omega : \mathcal{CM}_- \rightarrow (\mathbf{B} \otimes \overline{\mathbf{Q}})_+^* / \iota(\overline{\mathbf{Q}}^*)_0$$

vérifiant, pour tous K corps CM, $\Phi \subset H_K$ type CM, $\sigma \in H_K$ et $g \in G_{\mathbf{Q}}$:

$$\Omega(b_{K,\sigma,\Phi})(g) = \text{Per}(X_\Phi^g, \omega_\sigma^g, \omega_{c\sigma}^g)$$

(ii) L'application multiplicative

$$\Omega^{\text{CM}} = \text{N}^{\text{CM}} \circ \Omega : \mathcal{CM}_- \rightarrow ((\mathbf{B} \otimes \mathbf{Q}^{\text{CM}})^* / U^{\text{CM}}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$$

est $G_{\mathbf{Q}}$ équivariante (i.e. $h * \Omega^{\text{CM}}(b) = \Omega^{\text{CM}}(h \cdot b)$, avec $(h \cdot b)(g) := b(h^{-1}gh)$), et coïncide avec Ω dans $((\mathbf{B} \otimes \overline{\mathbf{Q}})^* \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}) / \iota(\overline{\mathbf{Q}}^*)_0$

Démonstration. — Commençons par remarquer que le membre de droite est un élément bien défini de $(\mathbf{B} \otimes \overline{\mathbf{Q}})_+^* / \iota(\overline{\mathbf{Q}}^*)_0$: on ne peut changer ω_σ et $\omega_{c\sigma}$ que par multiplication par des éléments λ, λ_c de U_L , ce qui multiplie $\Omega(b_{K,\sigma,\Phi})(g)$ par $(\lambda\lambda_c^{-1})^g(\lambda\lambda_c^{-1})^{cg}$. Si on remplace L par une extension, le résultat ne change pas. Enfin, si on remplace X_Φ par une variété isogène X'_Φ , l'isogénie $\alpha : X_\Phi \rightarrow X'_\Phi$ fournit $\lambda_\nu \in L^*$ pour $\nu = \sigma, c\sigma$, tels que $\alpha^* \omega'_{\Phi,\nu} = \lambda_\nu \omega_\nu$. Si $\lambda = \lambda_\sigma \lambda_{c\sigma}^{-1}$, alors $\text{Per}((X'_\Phi)^g, (\omega'_\sigma)^g, (\omega'_{c\sigma})^g) = \lambda^g \lambda^{cg} \text{Per}(X_\Phi^g, \omega_\sigma^g, \omega_{c\sigma}^g)$ et on a $v_p(\lambda^g \lambda^{cg}) = 0$ pour tous g et p , grâce au (ii) du lemme 11.

Maintenant, l'unicité est immédiate car les $b_{K,\sigma,\Phi}$ engendrent le $\mathbf{Z}$ -module $\mathcal{CM}$. Passons à la preuve de l'existence. Il s'agit de vérifier que les relations satisfaites par les $b_{K,\sigma,\Phi}$ le sont encore par les $\Omega(b_{K,\sigma,\Phi})$. Ces relations sont engendrées par les relations suivantes :

- $b_{K,\sigma,\Phi} = -b_{K,c\sigma,\Phi}$.
- Si $h : K' \rightarrow K$ est un isomorphisme, alors $b_{K',\sigma h,\Phi h} = b_{K,\sigma,\Phi}$.
- Si $K \subset K'$, on a $b_{K',\sigma',\Phi'} = b_{K,\sigma,\Phi}$ si $\sigma = \sigma'|_K$ et $\Phi' = \{\tau \in H_{K'}, \tau|_K \in \Phi\}$.
- Si $\sum_i \Phi_i = \sum_j \Phi'_j$, alors $\sum_i b_{K,\sigma,\Phi_i} = \sum_j b_{K,\sigma,\Phi'_j}$.

La formule $\Omega(b_{K,\sigma,\Phi}) = \Omega(b_{K,c\sigma,\Phi})^{-1}$ est immédiate sur la définition, et l'identité $\Omega(b_{K',\sigma h,\Phi h}) = \Omega(b_{K,\sigma,\Phi})$ est la traduction de ce que $X_{K,\Phi}$ est aussi à multiplication complexe par K' , de type CM Φh ; les deux premières relations sont donc préservées par Ω .

La troisième identité à vérifier résulte de ce que $X_{K',\Phi'}$ est un produit de $[K' : K]$ variétés abéliennes isogènes à $X_{K,\Phi}$ (écrire un idéal de $\mathcal{O}_{K'}$, vu comme $\mathcal{O}_K$ -module, sous la forme d'une somme directe d'idéaux de $\mathcal{O}_K$). Cela fournit une égalité à multiplication près par $\lambda^g \lambda^{cg}$, avec $\lambda \in \overline{\mathbf{Q}}^*$, et on montre que $\lambda \in \iota(\overline{\mathbf{Q}}^*)_0$ en constatant que $v_p(\lambda^g \lambda^{cg}) = 0$, pour tous p et g , grâce au (ii) du lemme 11.

Il reste la dernière identité à vérifier (c'est aussi la plus délicate). Si Ψ est un type CM de K , notons $h^1(\Psi)$ le motif de Hodge absolu associé à $H^1(X_\Psi)$. Alors $h^1(\Psi)$ est de rang 1 sur K . Si $\sum_i \Phi_i = \sum_j \Phi'_j$, et si les X_Ψ pour $\Psi = \Phi_i, \Phi'_j$ sont définies sur L , le théorème de Deligne fournit un isomorphisme $\otimes_i h^1(\Phi_i) \cong \otimes_j h^1(\Phi'_j)$ de motifs à coefficients dans K , définis sur L . Il existe alors $\lambda_\nu \in L^*$ tel que $(\otimes_i \omega_{i,\sigma}) = \lambda_\nu (\otimes_j \omega_{j,\sigma})$, si $\nu = \sigma, c\sigma$ (ce λ_ν dépend du choix des ω_ν).

Si $\lambda = \lambda_{\text{id}} \lambda_c^{-1}$, alors $\prod_i \text{Per}(X_{\Phi_i}^g, \omega_{i,\sigma}^g, \omega_{i,c\sigma}^g) = \lambda^g \lambda^{cg} \prod_j \text{Per}(X_{\Phi'_j}^g, \omega_{j,\sigma}^g, \omega_{j,c\sigma}^g)$, pour tout $g \in G_{\mathbf{Q}}$. Pour conclure, il reste à vérifier que $\iota(\lambda) \in \iota(\overline{\mathbf{Q}}^*)_0$ ou, autrement dit, que $v_p(\lambda^g \lambda^{cg}) = 0$ pour tous p et g ; cela résulte du (ii) du lemme 11 et de la linéarité de $Z_p(\cdot, 0)$ et $\mu_{\text{Art},p}$.

Ceci prouve le (i) ; prouvons le (ii). Si K' est le plus grand sous-corps CM de L , alors $K \subset K'$ et

$$(\Omega^{\text{CM}}(b_{K,\sigma,\Phi}))(g) = \left(\prod_{h \in G_{K'}/G_L} \text{Per}((X_\Phi^h)^g, (\omega_\sigma^h)^g, (\omega_{c\sigma}^h)^g) \right)^{1/[L:K']}$$

Or les X_Φ^h sont toutes isogènes à X_Φ (car $h\Phi = \Phi$), et donc

$$\text{Per}((X_\Phi^h)^g, (\omega_\sigma^h)^g, (\omega_{c\sigma}^h)^g) = (\Omega(b_{K,\sigma,\Phi}))(g) \bmod \iota(\overline{\mathbf{Q}}^*)_0$$

pour tout $h \in G_{K'}/G_L$. Le second énoncé du (ii) s'en déduit.

Il reste à vérifier la $G_{\mathbf{Q}}$ -équivalence, et il suffit de la vérifier pour les $b_{K,\sigma,\Phi}$. Celle-ci résulte des identités $b_{K,h\sigma,h\Phi} = h \cdot b_{K,\sigma,\Phi}$ et

$$(\Omega^{\text{CM}}(b_{K,\sigma,\Phi}))(gh) = \text{Per}(X_\Phi^{gh}, \omega_\sigma^{gh}, \omega_{c\sigma}^{gh}) = \text{Per}(X_{h\Phi}^g, \omega_{h\sigma}^g, \omega_{ch\sigma}^g) = (\Omega^{\text{CM}}(b_{K,h\sigma,h\Phi}))(g)$$

Ceci termine la preuve du théorème. $\square$

6. Un régulateur augmenté

Notons $(\mathbf{C} \otimes \mathbf{Q}^{\text{CM}})_+^*$ l'ensemble des $\phi \in \text{LC}(G_{\mathbf{Q}}^{\text{CM}}, \mathbf{C}^*)$ vérifiant $\phi(cg) = \phi(g) \in \mathbf{R}_+^*$, pour tout g . Le (i) du lemme 11 implique que la composante $\Omega_{\infty}^{\text{CM}}$ de Ω^{CM} (i.e. sa projection sur $((\mathbf{C} \otimes \mathbf{Q}^{\text{CM}})^*/U^{\text{CM}}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$) est à valeurs dans $((\mathbf{C} \otimes \mathbf{Q}^{\text{CM}})_+^*/U^{\text{CM}}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$.

Lemme 13. — *Soit K un corps CM.*

- (i) $\Omega_{\infty}^{\text{CM}}(b_{K,\text{id},\text{id}})$ admet un relèvement $\Omega_{\infty}(K) \in (\mathbf{C} \otimes \mathbf{Q}^{\text{CM}})_+^*$ invariant par G_K^{CM} .
- (ii) $\Omega_{\infty}(K)$ est unique à multiplication près par un élément de $U_K^+ \otimes \mathbf{Q}$.

Démonstration. — Remarquons que $h \cdot b_{K,\text{id},\text{id}} = b_{K,\text{id},\text{id}}$ si $h \in G_K^{\text{CM}}$. Il s'ensuit que tout relèvement de $\Omega_{\infty}^{\text{CM}}(b_{K,\text{id},\text{id}})$ est invariant par G_K^{CM} modulo $U^{\text{CM}} \otimes \mathbf{Q}$. Partons donc d'un tel relèvement $\tilde{\Omega}_{\infty}(K)$; il est invariant par G_L^{CM} où $L \subset K$ est un corps CM. Mais alors

$$\left(\prod_{h \in G_K^{\text{CM}}/G_L^{\text{CM}}} h * \tilde{\Omega}_{\infty}(K) \right)^{1/[L:K]}$$

est invariant par G_K^{CM} et est un relèvement de $\Omega_{\infty}^{\text{CM}}(b_{K,\text{id},\text{id}})$ puisque chacun des termes du produit en est un. Ceci prouve le (i).

Le (ii) est une conséquence du fait qu'un élément de $U^{\text{CM}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ fixe par G_K^{CM} appartient à $U_K^+ \otimes \mathbf{Q}$ (c'est immédiat si on ne tensorise pas par $\mathbf{Q}$, et on peut toujours élever notre élément à une puissance entière pour passer de $U^{\text{CM}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ à U^{CM}). $\square$

Comme $\Omega_{\infty}(K)$ est invariant par G_K^{CM} , on peut le voir comme un élément de $(\mathbf{R}_+^*)^{H_K}$ ou encore comme un élément de $(\mathbf{C} \otimes K)_+^*$. Vu dans $(\mathbf{R}_+^*)^{H_K}$, on a

$$\Omega_{\infty}(K) \sim (\Omega_{\infty}^{\text{CM}}(b_{K,\sigma,\sigma}))_{\sigma \in H_K}$$

Proposition 14. — *Soit $v_1, \dots, v_{d-1}$ formant une famille libre dans U_K , alors*

$$R_K \text{ht}(\chi) = \frac{1}{[U_K : \langle v_1, \dots, v_{d-1} \rangle]} |\det(\text{Log}|v_1|^2, \dots, \text{Log}|v_{d-1}|^2, \text{Log}(\Omega_{\infty}(K)))|$$

Démonstration. — Remarquons que le membre de droite ne dépend pas du choix de $\Omega_{\infty}(K)$ puisque cette quantité est unique à multiplication près par un élément de $U_K^+ \otimes \mathbf{Q}$, dont le logarithme est une combinaison linéaire des autres colonnes.

Si on fait la somme des lignes, tous les termes sont 0 sauf le terme de la dernière colonne qui vaut $\log(N_{K/\mathbf{Q}} \Omega_{\infty}(K))$. Vu la définition de R_K , il suffit de vérifier que $\log(N_{K/\mathbf{Q}} \Omega_{\infty}(K)) = \text{ht}(\chi)$.

La fonction $b_{K,\text{id},\text{id}}$ est nulle en dehors de G_F et coïncide avec χ sur G_F . Si $h \in G_{\mathbf{Q}}$, on a $b_{K,h \cdot \text{id}, h \cdot \text{id}} = b_{K,\text{id},\text{id}}(h^{-1}gh)$. On en déduit que $\sum_{\sigma \in H_F} b_{K,\sigma,\sigma} = \text{Ind}_{G_F}^{G_{\mathbf{Q}}} \chi$. En particulier, $\sum_{\sigma \in H_F} b_{K,\sigma,\sigma}$ est une fonction centrale, et donc l'identité que l'on cherche à démontrer est un cas particulier du dernier point de la prop. 16. $\square$

7. Périodes absolues

Comme dans le th. 12, on fait agir $G_{\mathbf{Q}}$ sur $\mathcal{M}$ par conjugaison intérieure sur la variable : $(h \cdot a)(g) = a(h^{-1}gh)$. Si $a \in \mathcal{M}$, on note $\Gamma(a) \subset G_{\mathbf{Q}}$ le stabilisateur de a ,

et on pose $F(a) = \overline{\mathbf{Q}}^{\Gamma(a)}$ (alors $F(a)$ est totalement réel car l'action de $G_{\mathbf{Q}}$ sur $\mathcal{CM}$ se factorise par $G_{\mathbf{Q}}^{\text{CM}}$ dans lequel c est central).

Remarque 15. — (i) $a \in \mathcal{CM}^0$ si et seulement si $F(a) = \mathbf{Q}$.

(ii) Si $h \in G_{\mathbf{Q}}/\Gamma(a) = H_{F(a)}$, alors $\Gamma(h \cdot a) = h\Gamma(a)h^{-1}$ et $F(h \cdot a) = F(a)^h$.

Si $a \in \mathcal{CM}$, choisissons un relèvement $\tilde{\Omega}_{\infty}(a)$ de $\Omega_{\infty}^{\text{CM}}(a)$ dans $(\mathbf{C} \otimes \mathbf{Q}^{\text{CM}})_+^*$ comme ci-dessus. Il existe alors un corps CM K tel que $\tilde{\Omega}_{\infty}(a)$ soit fixe par G_K^{CM} . On pose, comme ci-dessus,

$$\Omega_{\infty}^{\text{abs}}(a) = \left(\prod_{h \in G_{F(a)}^{\text{CM}}/G_K^{\text{CM}}} h * \tilde{\Omega}_{\infty}(a) \right)^{1/[K:F(a)]}$$

Proposition 16. — (i) $\Omega_{\infty}^{\text{abs}}(a)$ est fixe par $G_{F(a)}^{\text{CM}}$ et ne dépend pas, à multiplication près par un élément de $U_{F(a)}^+ \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$, du choix de $\tilde{\Omega}_{\infty}(a)$.

(ii) $\Omega_{\infty}^{\text{abs}} : \mathcal{CM} \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ vérifie les propriétés suivantes :

- si $a \in \mathcal{CM}$, alors $\Omega_{\infty}^{\text{abs}}(a)$ a pour image $\Omega_{\infty}^{\text{CM}}(a) \bmod U^{\text{CM}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$.
- $\Omega_{\infty}^{\text{abs}}(a+b) = (\mathbf{N}_{F(a,b)/F(a+b)}(\Omega_{\infty}^{\text{abs}}(a)\Omega_{\infty}^{\text{abs}}(b)))^{1/[F(a,b):F(a+b)]} \bmod U_{F(a+b)}^+ \otimes \mathbf{Q}$.
- Si $a \in \mathcal{CM}^0$, alors $\Omega_{\infty}^{\text{abs}}(a) = \exp \text{ht}(a)$.

Démonstration. — Le (i) est immédiat ainsi que les deux premières propriétés du (ii). La dernière est juste un exercice de traduction entre la définition de ht (cf. [3, th. 0.3]) et celle de $\Omega_{\infty}^{\text{abs}}$: les deux font intervenir une moyenne des $\text{Per}_{\infty}(X_{\Phi}^g, \omega_{\sigma}^g, \omega_{c\sigma}^g)$ (noté $|\langle \omega_{\sigma}^g, \omega_{c\sigma}^g, u_g \rangle_{\infty}|_{\infty}$ dans [3]), et les facteurs $v_p(\omega_{\sigma}^g) - v_p(\omega_{c\sigma}^g)$ qui apparaissent dans la définition de ht de [3] sont 0 dans cet article grâce à notre normalisation des ω_{τ} . $\square$

Remarque 17. — Yoshida [10] a énoncé une conjecture donnant une formule pour des variantes de $\Omega_{\infty}^{\text{CM}}(b_{K,\sigma,\tau})$ en termes des fonctions Gamma multiples de Shintani mentionnées dans [3, § 0.7]. Notons que les variantes qu'il considère sont aussi définies “à une unité près”.

Appendice A

La conj. 0.4 de [3], combinée avec le (ii) du th. 0.3 de [3], fournit une formule conjecturale pour la hauteur de Faltings d'une variété abélienne à multiplication complexe par l'anneau des entiers de son corps de multiplication complexe. On peut se demander “quelle portion” de la conj. 0.4 découle de la conjecture sur les hauteurs de Faltings ; la prop. 18 ci-dessous montre que c'est “la moitié” (par contre, la conjecture “en moyenne”, démontrée dans [1, 11], ne fournit qu'une toute petite partie de cette conj. 0.4).

On note $a \mapsto a^0$ la projection de $\mathbf{Q} \otimes \mathcal{CM}$ sur $\mathbf{Q} \otimes \mathcal{CM}^0$; elle envoie $\mathbf{Q} \otimes \mathcal{CM}$ dans $\mathbf{Q} \otimes \mathcal{CM}^0$. Si K est un corps CM et $\Phi \subset K$ est un type CM, on pose⁽⁵⁾ $B_{K,\Phi} = \sum_{\sigma,\tau \in \Phi} b_{K,\sigma,\tau}$ où $b_{K,\sigma,\tau}$ est définie par la formule (9).

Proposition 18. — *Le sous-espace de $\mathbf{Q} \otimes \mathcal{CM}^0$ engendré par les $B_{K,\Phi}^0$ est l'espace des fonctions paires de $\mathbf{Q} \otimes \mathcal{CM}^0$ (i.e. $\phi(g^{-1}) = \phi(g)$, pour tout $g \in G_{\mathbf{Q}}$).*

Démonstration. — On a $b_{K,\sigma,\tau}(g^{-1}) = b_{K,\tau,\sigma}(g)$; on en déduit que $B_{K,\Phi}$ est paire. Comme symétriser une fonction paire donne une fonction paire, $B_{K,\Phi}^0$ est aussi paire. Pour la même raison, il suffit de vérifier que le sous-espace de $\mathbf{Q} \otimes \mathcal{CM}$ engendré par les $B_{K,\Phi}$ est l'espace des fonctions paires de $\mathbf{Q} \otimes \mathcal{CM}$.

Maintenant, les $b_{K,\sigma,\tau}$ engendrant $\mathbf{Q} \otimes \mathcal{CM}$, les $b_{K,\sigma,\tau} + b_{K,\tau,\sigma}$ forment une famille génératrice de l'espace des fonctions paires de $\mathcal{CM}$.

Si on écrit $\Phi = \Psi \sqcup \{\alpha, \beta\}$, on fabrique des types CM

$$\Phi_{00} = \Phi, \quad \Phi_{01} = \Psi \sqcup \{\alpha, c\beta\}, \quad \Phi_{10} = \Psi \sqcup \{c\alpha, \beta\}, \quad \Phi_{11} = \Psi \sqcup \{c\alpha, c\beta\}$$

Alors

$$B_{K,\Phi_{00}} - B_{K,\Phi_{10}} - B_{K,\Phi_{01}} + B_{K,\Phi_{11}} = 4(b_{K,\alpha,\beta} + b_{K,\beta,\alpha})$$

On en déduit que l'espace engendré par les $B_{K,\Phi}$ contient une famille génératrice de l'espace des fonctions paires de $\mathbf{Q} \otimes \mathcal{CM}$, ce qui permet de conclure. $\square$

Remarque 19. — Il est facile d'écrire une fonction paire comme combinaison linéaire de 1 et des $b_{K,\sigma,\tau} + b_{K,\tau,\sigma}$; la preuve de la proposition fournit une formule permettant de transformer une telle expression en une combinaison linéaire des $B_{K,\Phi}$ (ou des $A_{K,\Phi}$, cf. note 5). Projeter sur $\mathcal{CM}^0$ fournit une expression d'une fonction centrale paire comme combinaison linéaire des $A_{K,\Phi}^0$.

Références

- [1] F. ANDREATTA, E. GOREN, B. HOWARD, K. MADAPUSI PERA, Faltings heights of abelian varieties with complex multiplication, *Ann. of Math.* **187** (2018), 391–531.
- [2] D. BLASIUS, A p -adic property of Hodge classes on abelian varieties, *Proc. Sympos. Pure Math.* **55**, Part 2 AMS, 1994, 293–308.
- [3] P. COLMEZ, Périodes des variétés abéliennes à multiplication complexe, *Ann. of Math.* **138** (1993), 625–683.
- [4] P. DELIGNE, Hodge cycles on abelian varieties, *Lecture Notes in Math.* **900**, pp. 9–100, Springer-Verlag, 1982.
- [5] R. GILLARD, Relations monomiales entre périodes p -adiques, *Invent. Math.* **93** (1988), 355–381.
- [6] A. OBUS, On Colmez's product formula for periods of CM-abelian varieties, *Math. Ann.* **356** (2013), 401–418.

5. On a $B_{K,\Phi}(g) = 2A_{K,\Phi}(g) - |\Phi|$, et la projection $A_{K,\Phi}^0$ de $A_{K,\Phi}$ est la fonction reliée à la hauteur de Faltings de X_Φ dans [3]. En particulier, la conjecture pour les hauteurs de Faltings équivaut à $\text{ht}(B_{K,\Phi}^0) = Z(B_{K,\Phi}^0, 0)$ pour tous K et Φ .

- [7] A. OGUS, A p -adic analogue of the Chowla-Selberg formula, Lecture Notes in Math. **1454**, pp. 319–341, Springer-Verlag, 1990.
- [8] J.-P. WINTENBERGER, Torseur entre cohomologie étale p -adique et cohomologie cristalline ; le cas abélien, Duke Math. J. **62** (1991), 511–526.
- [9] T. YANG, Arithmetic intersection on a Hilbert modular surface and the Faltings height, Asian J. Math. **17** (2013), 335–381.
- [10] H. YOSHIDA, On absolute CM-periods. II, Amer. J. Math. **120** (1998), 1199–1236.
- [11] X. YUAN, S. ZHANG, On the averaged Colmez conjecture, Ann. of Math. **187** (2018), 533–638.

PIERRE COLMEZ, C.N.R.S., IMJ-PRG, Sorbonne Université, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France
E-mail : pierre.colmez@imj-prg.fr