

UNIVERSITÉ PARIS Diderot - Paris 7

UFR de Mathématiques

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

MATHÉMATIQUES PURES

Pierre FIMA

Groupes, groupes quantiques et algèbres d'opérateurs

Rapporteurs : Yasuyuki Kawahigashi GSMS, Tokyo
Georges Skandalis IMJ, Paris
Quanhua Xu LMB, Besançon

Soutenue publiquement le 20 novembre 2014 devant le jury composé de :

Alain	Connes	Collège de France, Paris
Éric	Ricard	LMNO, Caen
Georges	Skandalis	IMJ, Paris
Stefaan	Vaes	KU Leuven
Leonid	Vainerman	LMNO, Caen
Quanhua	Xu	LMB, Besançon

Remerciements

Mes premiers remerciements vont à mon directeur de thèse, Leonid Vainerman, ainsi qu'à mon directeur de DEA, Stefaan Vaes. Ils m'ont tous les deux initié à la recherche et transmis le goût des algèbres d'opérateurs. De plus, Stefaan Vaes est resté pour moi un interlocuteur privilégié et j'ai beaucoup appris à ses côtés lors de l'année que j'ai passé à Leuven. Je remercie ensuite Georges Skandalis pour toutes les discussions mathématiques que nous avons eu et tous les conseils qu'il m'a donné qui m'ont toujours beaucoup aidé.

Je suis très reconnaissant envers Yasu Kawahigashi, Georges Skandalis et Quanhua Xu pour avoir rapporté le présent mémoire. Je remercie aussi très sincèrement Alain Connes et Éric Ricard de me faire l'honneur de participer à mon jury d'habilitation.

J'ai beaucoup appris de mes différentes collaborations scientifiques et c'est donc avec plaisir que je remercie mes co-auteurs Martijn Caspers, Matt Daws, Amaury Freslon, Soyoung Moon, Adam Skalski, Yves Stalder, Stefaan Vaes, Leonid Vainerman, Roland Vergnioux et Stuart White.

Je tiens également à remercier tous les membres du projet "algèbres d'opérateurs" de l'IMJ qui m'ont très bien accueilli ainsi que les membres des projets ANR NEUMANN et OSQPI et du GDR "géométrie non commutative" avec lesquels j'ai pu profiter de plusieurs rencontres mathématiques très stimulantes.

Enfin, mon dernier remerciement, je le réserve à Sophie. Son affection et son soutien me sont toujours d'un grand secours.

Pierre Fima

Groupes, groupes quantiques et algèbres d'opérateurs

Mémoire d'habilitation

Pierre Fima

Ce mémoire résume mes travaux de recherche depuis ma thèse. Je me suis initié à la recherche en travaillant sur les groupes quantiques localement compacts et leurs algèbres d'opérateurs (section 3.2). Par la suite, je me suis intéressé plus spécifiquement aux groupes quantiques compacts et discrets, toujours dans la perspective des algèbres d'opérateurs (section 3.1). Cela m'a mené à étudier plus directement les algèbres de von Neumann (section 2) d'actions (section 2.2) et de groupes (section 2.1). Récemment, j'ai étudié les actions de groupes (section 1) hautement transitives (section 1.2) et moyennables (section 1.1).

Table des matières

1	Liste des publications présentées pour l'HDR	2
2	Groupes et actions de groupes	3
2.1	Actions moyennables de groupes non moyennables	3
2.2	Actions hautement transitives de groupes agissant sur un arbre	4
3	Algèbres de von Neuman	6
3.1	Propriétés structurelles des algèbres de von Neumann	6
3.2	Unicité de la sous-algèbre de Cartan et actions W^* -superrigides	7
4	Groupes quantiques et algèbres d'opérateurs	9
4.1	Groupes quantiques compacts	9
4.1.1	Propriété T	11
4.1.2	K-moyennabilité	12
4.2	Groupes quantiques localement compacts	15
4.2.1	Bifacteurs	18
4.2.2	Torsions et déformations de Rieffel	19
4.2.3	Propriété de Haagerup	23
	Index	26
	Références	27

Notations. Lorsque G est un groupe et $g_1, \dots, g_n \in G$, $\langle g_1, \dots, g_n \rangle$ désignera le groupe engendré par g_1, \dots, g_n . Si G est de plus localement compact, $L(G)$ désignera l'algèbre de von Neumann de G , $C^*(G)$ la C^* -algèbre pleine et $C_r^*(G)$ la C^* -algèbre réduite. Pour un espace de Hilbert H , le produit scalaire, supposé linéaire à gauche, sera noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Nous noterons $\mathcal{B}(H)$ la C^* -algèbre des opérateurs bornés sur H et $\mathcal{K}(H)$ la C^* -algèbre des opérateurs compacts sur H . Le symbole \otimes désignera, suivant le contexte, le produit tensoriel d'espaces de Hilbert, le produit tensoriel minimal de C^* -algèbres ou le produit tensoriel d'algèbres de von

Neumann. Enfin, pour un A -module Hilbertien \mathcal{H} , on notera $\mathcal{L}_A(\mathcal{H})$ la C^* -algèbre des opérateurs A -linéaires et admettant un adjoint de \mathcal{H} dans lui-même.

1 Liste des publications présentées pour l’HDR

[FF13] P. Fima et A. Freslon, Graphs of quantum groups and K -amenability, *Adv. Math.* **260** (2014) 233-280.

[FMS13] P. Fima, S. Moon et Y. Stalder ; Highly transitive actions of groups acting on trees, *Proc. Amer. Math. Soc.*, à paraître.

[Fi13c] P. Fima, K -amenability of HNN extensions of amenable discrete quantum groups, *J. Funct. Anal.* **265** (2013) 507–519.

[Fi13b] P. Fima, Amenable, transitive and faithful actions of groups acting on trees, *Ann. Inst. Fourier*, à paraître.

[Fi13a] M. Daws, P. Fima, A. Skalski et S. White, The Haagerup property for locally compact quantum groups, *J. Reine Angew. Math.*, à paraître.

[FV12] P. Fima et S. Vaes, HNN extensions and unique group measure space decomposition of II_1 factors, *Trans. Amer. Math. Soc.* **364** (2012), 2601–2617.

[Fi11] P. Fima, A note on the von Neumann algebra of a Baumslag-Solitar group, *C. R. Acad. Sci. Paris* **349** (2011), 25–27.

[Fi10] P. Fima, Kazhdan’s property T for discrete quantum groups, *Internat. J. Math.* **21** (2010), 47–65.

[FV09] P. Fima et L. Vainerman, Twisting and Rieffel’s deformation of locally compact quantum groups. Deformation of the Haar measure, *Comm Math. Phys.* **286** (2009), 1011–1050.

[FV08] P. Fima et L. Vainerman, A locally compact quantum group of upper triangular matrices, *Ukrainian Math. J.* **60** (2008), 648–662.

[Fi07] P. Fima, On locally compact quantum groups whose algebras are factors, *J. Funct. Anal.* **244** (2007), 78–94.

2 Groupes et actions de groupes

2.1 Actions moyennables de groupes non moyennables

À la suite de la construction de la mesure de Lebesgue [Leb01] au début du xx^e siècle, la découverte des paradoxes de Banach-Hausdorff-Tarski [Ban23, HSS14, Tar29] a incité von Neumann [vN29] à étudier la question suivante : étant donné un groupe agissant sur un ensemble X , existe-t-il une moyenne invariante sur X ?

Définition 2.1 (von Neumann [vN29]). Soit X un ensemble et $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X . Une *moyenne* sur X est une application $m : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, 1]$ telle que

- $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ pour tous $A, B \subset X$ disjoints.
- $m(X) = 1$.

On dit qu'une action $\Gamma \curvearrowright X$ du groupe Γ sur X est *moyennable* s'il existe une moyenne m sur X telle que $m(gA) = m(A)$ pour tous $g \in \Gamma$ et $A \subset X$.

Cette notion d'action moyennable est différente de celle introduite plus tard par Zimmer [Zim84].

L'article de von Neumann montre que l'origine des paradoxes est dans la structure du groupe lui-même plutôt que dans l'ensemble sur lequel il agit. von Neumann propose alors d'étudier les *groupes moyennables*, c'est-à-dire les groupes tels que l'action $\Gamma \curvearrowright \Gamma$ par translations à gauche est moyennable. Il est facile de voir que toutes les actions d'un groupe moyennable sont moyennables. La réciproque est vraie pour les actions libres. Greenleaf se demande dans son livre [Gre69] si la réciproque est encore vraie pour des actions non nécessairement libres. Afin d'éviter une réponse négative triviale, il est important de se restreindre aux actions transitives (un point fixe donne une moyenne invariante évidente) et fidèles (sinon ce que l'on considère vraiment est un quotient de Γ). La question de Greenleaf est donc la suivante : si Γ admet une action moyennable, transitive et fidèle alors Γ est-il moyennable ?

La réponse négative à cette question est donnée par van Douwen. Il montre, dans un article posthume [vD90], que tous les groupes libres (avec un nombre fini ou infini dénombrable de générateurs) admettent une action moyennable, transitive et fidèle.

Le résultat de van Douwen a incité Glasner et Monod [GM07] à étudier la classe \mathcal{A} de tous les groupes dénombrables admettant une action moyennable, transitive et fidèle. Glasner et Monod ont caractérisé les produits libres qui sont dans la classe \mathcal{A} . En particulier, ils ont montré que la classe \mathcal{A} est stable par produit libre. Leur résultat, qui est basé sur le théorème de Baire, donne une preuve beaucoup plus simple, mais non explicite, du résultat de von Douwen. Grigorchuk et Nekrashevych [GN05] ont également donné une preuve plus simple du résultat de van Douwen.

En conclusion de leur article, Glasner et Monod posent la question suivante : quels produits libres amalgamés et extensions HNN sont dans la classe \mathcal{A} ? Par la suite, Moon [Moo10, Moo11a] a montré qu'un produit libre de groupes libres finiment engendrés amalgamé sur certains sous-groupes cycliques est dans la classe \mathcal{A} . Elle a aussi montré [Moo11b] qu'un produit libre amalgamé sur un groupe fini de deux groupes moyennables ou bien d'un groupe résiduellement fini et d'un groupe moyennable infini est dans la classe \mathcal{A} . Les résultats de Moon sont également basés sur le théorème de Baire.

Nous dirons qu'une action est *à orbites infinies* si toutes les orbites sont infinies.

Théorème 2.2 ([Fim12]). Soient Γ_1, Γ_2 et H des groupes dénombrables infinis et Σ un sous-groupe fini de Γ_1, Γ_2 et H . Soit $\theta : \Sigma \rightarrow H$ un morphisme injectif.

1. S'il existe une action moyennable, fidèle, à orbites infinies de H sur un ensemble dénombrable et libre sur Σ et $\theta(\Sigma)$ alors l'extension HNN $\text{HNN}(H, \Sigma, \theta)$ est dans \mathcal{A} .
2. Si, pour $i = 1, 2$, il existe une action moyennable, fidèle, à orbites infinies de Γ_i sur un ensemble dénombrable et libre sur Σ alors le produit libre amalgamé $\Gamma_1 *_\Sigma \Gamma_2$ est dans \mathcal{A} .

Pour démontrer le théorème 2.2 nous utilisons le théorème de Baire. L'énoncé du théorème 2.2 dépend du sous-groupe fini Σ . Il est possible d'obtenir un énoncé "uniforme en Σ " en imposant une hypothèse plus forte

sur l'action. Nous dirons qu'une action est *presque libre* si tout élément non trivial du groupe agit avec un nombre fini de points fixes. L'intérêt d'une action presque libre $\Gamma \curvearrowright X$ est que l'action diagonale $\Gamma \curvearrowright X_n$, où $X_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n : x_i \neq x_j \forall i \neq j\}$ est le *complémentaire de la diagonale large de X^n* , est moyennable (respectivement à orbites infinies) dès que $\Gamma \curvearrowright X$ l'est et tout élément $g \in \Gamma$ ayant au plus $n - 1$ points fixes dans X agit librement dans X_n .

Notons $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ la classe de tous les groupes dénombrables admettant une action moyennable presque libre et à orbites infinies sur un ensemble dénombrable. On déduit de la discussion qui précède que si $\Gamma \in \mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ et $F \subset \Gamma$ est un sous-ensemble fini alors il existe une action de Γ moyennable, fidèle, à orbites infinies et telle que tout élément non trivial de F agit librement. On obtient ainsi une version uniforme du théorème 2.2.

La classe $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ contient évidemment tous les groupes moyennables infinis. De plus, l'action moyennable, transitive et fidèle de \mathbb{F}_n , $1 \leq n \leq \infty$, construite par van Douwen est en fait presque libre. Il est facile de voir, en considérant l'action induite, que si H est un sous-groupe d'indice fini de Γ alors $H \in \mathcal{A}_{\mathcal{F}} \implies \Gamma \in \mathcal{A}_{\mathcal{F}}$. On en déduit que tous les groupes virtuellement libres sont dans $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$. De plus, l'obstruction à être dans la classe \mathcal{A} découverte dans [GM07] est également une obstruction à être dans la classe $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$. Plus précisément, si N est un sous-groupe distingué de H et si la paire (N, H) a la propriété (T) relative alors $H \in \mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ (resp. $H \in \mathcal{A}$) implique que N est d'exposant fini. En particulier, $\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ n'est ni dans \mathcal{A} ni dans $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$.

En utilisant la théorie de Bass-Serre, on montre par récurrence le corollaire suivant de la version uniforme du théorème 2.2.

Corollaire 2.3 ([Fim12]). *Soit Γ un groupe dénombrable agissant sans inversion sur un arbre non trivial \mathcal{T} . On suppose que les stabilisateurs des arêtes sont finis et que le graphe quotient \mathcal{T}/Γ est fini. Si les stabilisateurs des sommets sont dans $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ alors $\Gamma \in \mathcal{A}$.*

Il reste toujours de nombreuses questions ouvertes au sujet de la classe \mathcal{A} . L'une d'entre elles est la suivante.

Problème 2.4. La classe \mathcal{A} est-elle stable par équivalence mesurable ?

Il n'est en fait même pas connu si la classe est stable par sous-groupe d'indice fini.

Problème 2.5. Soit $H < \Gamma$ un sous-groupe d'indice fini d'un groupe $\Gamma \in \mathcal{A}$. A-t-on $H \in \mathcal{A}$?

2.2 Actions hautement transitives de groupes agissant sur un arbre

Les résultats exposés dans cette section sont issus d'un travail en commun avec Moon et Stalder [FMS13].

Dans cette section, X est un ensemble dénombrable infini. Une action $\Gamma \curvearrowright X$ est dite *hautement transitive* si elle est n -transitive pour tout $n \geq 1$. Soit $S(X)$ le groupe Polonais des bijections de X muni de la topologie de la convergence simple. Il est clair qu'une action $\Gamma \curvearrowright X$ est hautement transitive si et seulement si l'image de Γ dans $S(X)$ est dense dans $S(X)$. En particulier, le groupe S_{∞} des permutations de X de support fini agit hautement transitivement sur X . Ce groupe n'est pas de type fini et, étant moyennable, il est loin d'être libre.

La première construction explicite d'une action hautement transitive et fidèle du groupe libre \mathbb{F}_n , $2 \leq n \leq \infty$, est due à McDonough [McD77]. Par la suite, Dixon [Dix90] a démontré que pour tout $k \geq 2$, génériquement au sens de Baire, k permutations $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in S(X)$ telles que l'action du groupe $\langle \gamma_1, \dots, \gamma_k \rangle$ sur X est à orbites infinies, engendrent un groupe libre qui agit hautement transitivement sur X . Glass and McCleary [GM91] ont construit une action fidèle et hautement transitive du groupe $\Gamma_1 * \Gamma_2$ lorsque Γ_1, Γ_2 sont deux groupes dénombrables non triviaux et l'un des Γ_i possède un élément d'ordre infini. Ils ont également remarqué que $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ ne possède pas d'action fidèle et 2-transitive. Enfin, ils ont posé la question suivante : pour quels groupes non triviaux dénombrables Γ_1, Γ_2 , le produit libre $\Gamma_1 * \Gamma_2$ possède-t-il une action fidèle et hautement transitive ?

Gunhouse [Gun92] a complètement répondu à la question en construisant, pour tous les groupes non triviaux et au plus dénombrables Γ_1, Γ_2 , avec l'un des Γ_i de cardinal au moins 3, une action fidèle et hautement transitive du produit libre $\Gamma_1 * \Gamma_2$. Un résultat similaire a été démontré indépendamment, et presque en même

temps, par Hickin [Hic92]. Récemment, Moon et Stalder [MS13] ont obtenu un résultat de généralité à la Dixon pour les actions hautement transitives et fidèles de produits libres.

En utilisant les techniques explicites de Hickin, Gunhouse a caractérisé, en 1993 dans sa thèse, les produits libres amalgamés sur un groupe Artinien qui possèdent une action hautement transitive et fidèle. L'existence de ce résultat, qui n'a jamais été publié, m'a été communiquée par Glass, le directeur de thèse de Gunhouse. Gunhouse démontre que si $\Gamma = \Gamma_1 *_\Sigma \Gamma_2$ où $\Sigma \subsetneq \Gamma_i$, $i = 1, 2$, est un groupe Artinien, alors Γ admet une action hautement transitive et fidèle si et seulement si le seul sous-groupe de Σ qui est distingué à la fois dans Γ_1 et Γ_2 est le groupe trivial. Lorsque Σ est fini et d'indice au moins 3 dans l'un des Γ_i cette dernière condition est équivalente à dire que Γ est à classes de conjugaison infinies (cci) [Cor09].

D'autres exemples de groupes admettant une action fidèle et hautement transitive ont été découverts récemment : les groupes de surfaces (Kitroser [Kit12]) et $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ pour $n \geq 4$ (Garion et Glasner [GG13]). Kitroser obtient un résultat de généralité à la Dixon alors que Garion et Glasner construisent une action explicite.

Il est facile de voir que si Γ admet une action fidèle et hautement transitive (en fait 2-transitive suffit) alors Γ est cci. Nous démontrons avec Moon et Stalder le résultat suivant.

Théorème 2.6 ([FMS13]). *Soit Γ un groupe agissant sans inversion sur un arbre non trivial. Si les stabilisateurs des arêtes sont finis et les stabilisateurs des sommets sont cci alors Γ admet une action fidèle et hautement transitive.*

Par les arguments standards de la théorie de Bass-Serre, la preuve du théorème 2.6 se réduit au cas d'une extension HNN ou d'un produit libre amalgamé. De plus, il n'est pas nécessaire de se restreindre au cas où les stabilisateurs d'arêtes sont finis. La bonne hypothèse à imposer sur ces sous-groupes est qu'ils aient un *cœur enfantin*.

Soit $\Sigma < H$ un sous-groupe et $S \subset H$ un sous-ensemble. Le *cœur de Σ relativement à S* est l'ensemble $\text{cœur}_S(\Sigma) = \bigcap_{h \in S} h^{-1}\Sigma h$. On dit que le cœur de Σ est trivial si $\text{cœur}_H(\Sigma) = \{1\}$. Nous avons besoin d'une propriété plus forte que le cœur trivial : on impose que, pour tout recouvrement de H en sous-ensembles non vides, il existe au moins un élément du recouvrement relativement auquel le cœur de Σ est trivial. Si l'on demande de plus que cette propriété soit vraie pour les recouvrements modulo un nombre fini de Σ -classes on arrive à la définition suivante.

Définition 2.7 ([FMS13]). On dit que le cœur d'un sous-groupe $\Sigma < H$ est *enfantin* (dans H) si, pour tout sous-ensemble fini $F \subset H$, pour tout $n \geq 1$, pour tous sous-ensembles non vides $S_1, \dots, S_n \subset H$ tels que $H \setminus \Sigma F \subset \bigcup_{k=1}^n S_k$, il existe $1 \leq k \leq n$ tel que $\text{cœur}_{S_k}(\Sigma) = \{1\}$.

Il est clair que si le cœur de Σ est enfantin alors son cœur est trivial. De plus, si H est fini, alors le cœur de tout sous-groupe non-trivial n'est pas enfantin (il existe cependant des groupes finis possédant un sous-groupe non-trivial avec un cœur trivial, par exemple le groupe de permutation S_n dans S_{n+1} a un cœur trivial). Plus généralement, le cœur d'un sous-groupe d'indice fini n'est jamais enfantin. Cela montre que cette notion n'est intéressante que pour les groupes infinis.

Exemple 2.8 ([FMS13]). L'exemple le plus simple est un sous-groupe fini relativement cci. En particulier, un groupe fini dans un groupe cci.

Tout sous-groupe $\Sigma < H$ d'indice infini et malnormal tel que $Cl_\Sigma(\sigma) = \{t\sigma t^{-1} : t \in \Sigma\}$ est fini pour tout $\sigma \in \Sigma$. Voici quelques exemples particuliers.

- Un sous-groupe fini et malnormal dans un groupe infini.
- $H = \Sigma * G$, G et Σ non-triviaux et Σ abélien. Plus généralement, tout sous-groupe abélien malnormal Σ d'indice infini dans un groupe infini H .
- $H = K^* \rtimes K$ et $\Sigma = K^* < H$ où K est un corps infini.
- $H = \langle a, b \rangle = \mathbb{F}_2$ et Σ un sous-groupe cyclique infini engendré par un élément primitif (par exemple $a^k b a^{-l} b^{-1}$ avec $k, l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$).

Nous démontrons le théorème suivant en utilisant le théorème de Baire.

- Théorème 2.9** ([FMS13]). 1. Soient H un groupe dénombrable infini, $\Sigma < H$ un sous-groupe et $\theta : \Sigma \rightarrow H$ un morphisme injectif. Si les cœurs de Σ et $\theta(\Sigma)$ sont enfantins dans H alors $\text{HNN}(H, \Sigma, \theta)$ admet une action hautement transitive et fidèle. Si H est moyennable et Σ est fini alors cette action peut être choisie de telle sorte qu'elle soit en plus moyennable.
2. Soient Γ_1, Γ_2 deux groupes infinis dénombrables et Σ un sous-groupe commun. Si le cœur de Σ est enfantin dans Γ_1 et Γ_2 alors $\Gamma_1 *_\Sigma \Gamma_2$ admet une action fidèle et hautement transitive. Si Γ_1 et Γ_2 sont moyennables et Σ est fini alors cette action peut être choisie de telle sorte qu'elle soit en plus moyennable.

Ce théorème fournit de nombreux nouveaux exemples de groupes admettant une action hautement transitive et fidèle. On retrouve également le résultat principal de [Kit12] assurant que le groupe fondamental $\pi_1(\Sigma_g)$ d'une surface orientable de genre $g > 1$ admet une action hautement transitive et fidèle. En effet, pour $g > 1$, le groupe $\pi_1(\Sigma_g)$ s'injecte dans $\pi_1(\Sigma_2)$ comme sous-groupe d'indice fini. Il est alors facile de vérifier que la restriction à $\pi_1(\Sigma_g)$ d'une action hautement transitive et fidèle de $\pi_1(\Sigma_2)$ reste hautement transitive et fidèle. Il suffit donc de montrer que $\pi_1(\Sigma_2) = \langle a_1, b_1 \rangle *_\Sigma \langle a_2, b_2 \rangle$, où $\langle a_1, b_1 \rangle \simeq \mathbb{F}_2 \simeq \langle a_2, b_2 \rangle$ et $\Sigma = \langle a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \rangle = \langle a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \rangle$ admet une action hautement transitive et fidèle. C'est une conséquence du théorème 2.9 car, d'après l'exemple 2.8, le cœur de Σ est enfantin dans $\langle a_1, b_1 \rangle$ et $\langle a_2, b_2 \rangle$.

Nous terminons cette section par une conjecture.

Conjecture 2.10. Soit Γ un groupe dénombrable agissant sans inversions sur un arbre non-trivial avec des stabilisateurs d'arêtes finis. Alors Γ admet une action hautement transitive et fidèle si et seulement si Γ est cci.

3 Algèbres de von Neuman

Dans cette section, toutes les algèbres de von Neumann sont supposées à prédual séparable.

3.1 Propriétés structurelles des algèbres de von Neumann

Il existe plusieurs notions d'indécomposabilité pour les facteurs II_1 dont la plus évidente est la primalité. Un facteur II_1 M est dit *premier* si il n'admet pas de décomposition non-triviale en produit tensoriel de deux facteurs. C'est-à-dire, pour toute décomposition $M \simeq M_1 \otimes M_2$, M_1 ou M_2 est un facteur de type I. Murray et von Neumann ont démontré que le facteur hyperfini II_1 \mathcal{R} n'est pas premier, car il est McDuff. Un facteur II_1 M est dit *McDuff* si $M \simeq M \otimes \mathcal{R}$.

Le premier facteur II_1 premier a été découvert par Popa. Il a montré [Pop83] que le facteur du groupe libre avec une infinité non-dénombrable de générateurs est premier. Le cas des groupes libres dénombrables est resté longtemps ouvert avant d'être résolu par Ge [Ge98]. Ce résultat a ensuite été généralisé par Ozawa au cas des groupes hyperboliques. Nous dirons qu'une algèbre de von Neumann finie M est *solide* si, pour toute sous-algèbre de von Neumann $A \subset M$ diffuse, le commutant relatif $A' \cap M$ est injectif. Il est facile de vérifier que si M est un facteur II_1 solide alors M est premier. Ozawa [Oza04] a montré que l'algèbre de von Neumann d'un groupe hyperbolique est solide.

Une autre notion d'indécomposabilité pour un facteur II_1 est l'absence de sous-algèbre de Cartan. Une *sous-algèbre de Cartan* A dans un facteur II_1 M est une sous-algèbre de von Neumann telle que

- A est *abélienne maximale* : $A' \cap M = A$;
- A est *régulière* : $\mathcal{N}_M(A)'' = M$ où $\mathcal{N}_M(A) = \{u \in \mathcal{U}(M) : uAu^* = A\}$ est le *normalisateur* de A .

Feldman et Moore [FM77] ont démontré que M possède une sous-algèbre de Cartan si et seulement si M est isomorphe à l'algèbre de von Neumann d'une relation d'équivalence Borélienne, à orbites dénombrables, préservant la mesure et ergodique sur un espace de probabilité standard, tordue par un 2-cocycle.

Pendant longtemps, l'existence d'une sous-algèbre de Cartan dans tout facteur II_1 ou, de façon équivalente, la décomposabilité de tout facteur II_1 en algèbre de relation, fut une question ouverte. Le premier exemple de facteur II_1 sans sous-algèbre de Cartan fut découvert par Voiculescu. Il a démontré dans [Voi96] que le facteur

d'un groupe libre non-abélien $L(\mathbb{F}_n)$, $2 \leq n \leq \infty$, n'a pas de sous-algèbre de Cartan. Ce résultat a ensuite été renforcé par Ozawa et Popa. Ils ont démontré dans [OP10a] que $L(\mathbb{F}_n)$ est fortement solide pour $2 \leq n \leq \infty$. Une algèbre de von Neumann est dite *fortement solide* si, pour toute sous-algèbre de von Neumann diffuse et moyennable $Q \subset M$, l'algèbre de von Neumann $\mathcal{N}_M(Q)''$ engendrée par le normalisateur de Q est moyennable. Si M est non-moyennable alors il est clair que la solidité forte implique l'absence de sous-algèbre de Cartan. La solidité forte est également un renforcement de la solidité.

D'autres propriétés structurelles des facteurs II_1 permettent d'obtenir des résultats de non-isomorphisme. Par exemple, pour montrer que $L(\mathbb{F}_2)$ n'est pas isomorphe au facteur hyperfini II_1 , Murray et von Neumann [MvN43] ont démontré que $L(\mathbb{F}_2)$ n'a pas la propriété Gamma, ce qui implique qu'il n'est pas McDuff, alors que \mathcal{R} l'est. On dit qu'un facteur II_1 M munit de la trace τ a la *propriété Gamma* s'il existe une suite d'unitaire $u_n \in \mathcal{U}(M)$ telle que $\tau(u_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\|u_n x - x u_n\|_2 \rightarrow 0$ pour tout $x \in M$. La propriété Gamma implique également la non-solidité.

Dans l'article [Fim11] nous étudions les propriétés structurelles de l'algèbre de von Neumann d'un groupe de Baumslag-Solitar.

Soient $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et $\text{BS}(n, m) = \langle a, b : ab^n a^{-1} = b^m \rangle$ le groupe de Baumslag-Solitar associé. Moldavanskii a montré dans [Mol91] que $\text{BS}(n, m) \simeq \text{BS}(p, q)$ si et seulement si il existe $\epsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $\{n, m\} = \{\epsilon p, \epsilon q\}$. On sait que le groupe $\text{BS}(n, m)$ a la propriété de Haagerup ainsi que la propriété d'approximation métrique complète (Gal et Januszkiewicz [GJ03]), qu'il est non-moyennable mais intérieurement moyennable et ceci dès que $|n|, |m| > 1$ et $|n| \neq |m|$ (Stalder [Sta06]).

Théorème 3.1 ([Fim11]). *Soient $|n|, |m| > 1$, $|n| \neq |m|$ et $\Gamma = \text{BS}(n, m)$. On a*

1. $L(\Gamma)$ est premier.
2. $L(\Gamma)$ n'est pas solide et n'a pas de sous-algèbre de Cartan.

La preuve de non-solidité est très simple. Notons que Ozawa a également observé que $L(\Gamma)$ a la propriété Gamma. Ce qui implique le résultat de Stalder sur la moyennabilité intérieure ainsi que la non-solidité. La primalité se déduit des résultats de Chifan et Houdayer [CH12] et l'absence de Cartan est démontrée en utilisant les techniques d'Ozawa et Popa [OP10a] qui reposent de façon cruciale sur la propriété d'approximation métrique complète. Nous montrons en fait que $L(\Gamma)$ est *robuste*, c'est-à-dire que le commutant relatif de toute sous-algèbre de von Neumann moyennable et régulière n'est pas moyennable, ce qui implique l'absence de sous-algèbre de Cartan.

Il existe beaucoup d'autres travaux sur la primalité et la solidité dans le cas fini [OP04, Shl04, Oza06a, Oza06b, Pet09b, Oza09, Bou12] ainsi que dans le cas général [Shl00, VV07, CH12, Hou10a, HV12, Iso13b, Iso12, DI12]. Citons également les nombreux résultats d'absence de Cartan et solidité forte dans le cas fini [Shl09, OP10b, Hou10b, HS11, Dab10, Sin11, CS13b, CSU13, Avs11, Ioa12a, DI12] ainsi que dans le cas général [HR11, Iso12, BHR12, Iso13a].

3.2 Unicité de la sous-algèbre de Cartan et actions W^* -superrigides

L'un des thèmes centraux de la théorie des algèbres de von Neuman est la classification des produits croisés $L^\infty(X) \rtimes \Gamma$ en termes de l'action libre, ergodique et préservant la mesure de probabilité (pmp) $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$. Le célèbre théorème de Connes [Con76] implique que, pour toute action libre, ergodique et pmp le facteur II_1 $L^\infty(X) \rtimes \Gamma$ est isomorphe au facteur hyperfini II_1 et oublie donc beaucoup d'informations sur l'action initiale $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$.

En utilisant sa technique de déformation/rigidité, Popa a réussi à établir de nombreux théorèmes de rigidité. Pour certaines familles d'actions de groupes, il a réussi à retrouver l'action initiale $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ à partir du facteur II_1 $L^\infty(X) \rtimes \Gamma$. Dans [Pop06], Popa a démontré que si $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ est une action libre, ergodique et pmp d'un groupe qui a la propriété (T) et si $\Lambda \curvearrowright (Y, \eta) = [0, 1]^\Lambda$ est l'action de Bernoulli d'un groupe cci alors un isomorphisme de $L^\infty(X) \rtimes \Gamma$ et $L^\infty(Y) \rtimes \Lambda$ implique un isomorphisme des groupes Γ et Λ et une conjugaison de leurs actions.

Dans les articles [Pet09a, PV10, Ioa11b], des actions satisfaisant la plus forte des formes de rigidité, appelée la W^* -superrigidité, ont été découvertes. Une action $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ est dite *W^* -superrigide* si pour toute action

libre, ergodique et pmp $\Lambda \curvearrowright (Y, \eta)$, un isomorphisme de $L^\infty(X) \rtimes \Gamma$ et $L^\infty(Y) \rtimes \Lambda$ implique un isomorphisme de Γ et Λ et une conjugaison de leurs actions.

La W^* -superrigidité est équivalente à la coexistence de deux phénomènes de rigidité :

- L'unicité, à conjugaison unitaire près, de la sous algèbre de Cartan de type produit croisé : si $M = L^\infty(X) \rtimes \Gamma$ a une autre décomposition en produit croisé par une action libre, ergodique et pmp $M = L^\infty(Y) \rtimes \Lambda$, alors les sous-algèbres de Cartan $L^\infty(X)$ et $L^\infty(Y)$ sont unitairement conjuguées dans M .
- La *superrigidité orbitale* de l'action $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$: s'il existe une action libre, ergodique et pmp $\Lambda \curvearrowright (Y, \eta)$ qui est orbitalement équivalente à $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ alors Γ et Λ sont isomorphes et leurs actions sont conjuguées.

Ces deux phénomènes sont très difficiles à établir. Ils sont encore plus difficiles à obtenir simultanément.

Les premiers résultats de rigidité orbitale furent obtenus par Zimmer [Zim80, Zim84]. La première action orbitalement superrigide a été découverte par Furman [Fur99]. Depuis, de nombreuses autres actions orbitalement superrigides ont été obtenues [Pop07a, Kid10, Ioa11a, PV11, Kid11, PS12]. Pour un panorama des résultats sur la rigidité et superrigidité orbitale, le lecteur intéressé pourra consulter les articles [Fur11, Gab10, Pop07b, Sha05, Vae07, Vae10].

Le phénomène d'unicité de la sous-algèbre de Cartan a plusieurs facettes. Pour obtenir un résultat de W^* -superrigidité nous avons uniquement besoin de l'unicité, à conjugaison unitaire près, de la sous-algèbre de Cartan de type produit croisé. Il est aussi possible de considérer l'unicité de toutes les sous-algèbres de Cartan, à conjugaison unitaire près ou bien à conjugaison par un $*$ -automorphisme près. Par exemple, les résultats de [CFW81] et [Kri76] impliquent que deux sous-algèbres de Cartan du facteur hyperfini II_1 sont toujours conjuguées par un $*$ -automorphisme. Plus récemment, Ozawa et Popa ont réussi à produire les premiers exemples de facteurs II_1 non-moyennables avec une unique sous-algèbre de Cartan, à conjugaison unitaire près. Ils montrent dans [OP10a] que, pour toute action libre, ergodique pmp et profinie $\mathbb{F}_n \curvearrowright (X, \mu)$ du groupe libre à $n \geq 2$ générateurs, le facteur II_1 $L^\infty(X) \rtimes \Gamma$ a $L^\infty(X)$ comme unique sous-algèbre de Cartan, à conjugaison unitaire près.

Dans [PV10] Popa et Vaes ont découvert une classe de groupes dénombrables telle que tous les produits croisés $L^\infty(X) \rtimes \Gamma$, pour n'importe quelle action libre, ergodique et pmp $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$, ont $L^\infty(X)$ comme unique sous-algèbre de Cartan de type produit croisé, à conjugaison unitaire près. Cette classe contient non seulement tous les produits libres $\Gamma_1 * \Gamma_2$ d'un groupe Γ_1 infini ayant la propriété (T) avec un groupe non-trivial Γ_2 mais aussi une famille assez large de produits libres amalgamés $\Gamma_1 *_{\Sigma} \Gamma_2$. Dans l'article [FV12], en collaboration avec Vaes, nous montrons un résultat similaire pour les extensions HNN.

Théorème 3.2 ([FV12]). *Soit H un groupe dénombrable contenant un sous-groupe non-moyennable avec la propriété (T) relative ou bien deux sous-groupes non-moyennables commutant l'un avec l'autre. Soient $\Sigma < H$ un sous-groupe moyennable et $\theta : \Sigma \rightarrow H$ un morphisme injectif. S'il existe $g_1, \dots, g_n \in \Gamma = \text{HNN}(H, \Sigma, \theta)$ tels que $\cap_{i=1}^n g_i \Sigma g_i^{-1}$ soit fini alors pour toute action libre, ergodique et pmp $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ le facteur $L^\infty(X) \rtimes \Gamma$ a $L^\infty(X)$ comme unique sous-algèbre de Cartan de type produit croisé, à conjugaison unitaire près.*

Lorsque \mathcal{G} est un graphe, nous notons $V(\mathcal{G})$ (resp. $E(\mathcal{G})$) l'ensemble des sommets (resp. des arêtes) de \mathcal{G} et $s : E(\mathcal{G}) \rightarrow V(\mathcal{G})$ (resp. r) l'application source (resp. but). En utilisant la théorie de Bass-Serre, les théorèmes 3.2 et [PV10, Theorem 1.1] nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 3.3 ([FV12]). *Soit Γ un groupe dénombrable satisfaisant les conditions suivantes.*

1. Γ contient un sous-groupe non-moyennable ayant la propriété (T) relative ou bien deux sous-groupes non-moyennables commutant l'un avec l'autre.
2. Γ agit sans inversion sur un arbre \mathcal{T} de telle sorte qu'il existe un sous-arbre fini ayant un stabilisateur fini et une arête $e \in E(\mathcal{T})$ telle que le stabilisateur de e est moyennable et les petits sous-arbres contenant toutes les arêtes de $\Gamma.s(e)$ (resp. $\Gamma.r(e)$) sont tous les deux égaux à \mathcal{T} .

Alors, pour toute action libre, ergodique et pmp $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ le facteur $L^\infty(X) \rtimes \Gamma$ a $L^\infty(X)$ comme unique sous-algèbre de Cartan de type produit croisé, à conjugaison unitaire près.

C'est en superposant leur résultat d'unicité de Cartan avec ceux de superrigidité orbitale de certaines actions de Bernoulli obtenus par Popa [Pop07a, Pop08] que Popa et Vaes avaient obtenu leurs exemples d'actions W^* -superrigides dans [PV10]. En faisant de même, nous obtenons de nouveaux exemples.

Rappelons que, si $\Gamma \curvearrowright I$ est une action sur un ensemble dénombrable I , alors l'action de Bernoulli généralisée $\Gamma \curvearrowright (X_0, \mu_0)^I$, où (X_0, μ_0) est un espace de probabilité standard et $(g \cdot x)_i = x_{g^{-1} \cdot i}$, est libre si et seulement si $\Gamma \curvearrowright I$ est fidèle lorsque (X_0, μ_0) est sans atomes ou bien $\{g \cdot i : i \in I\}$ est infini pour tout $g \in \Gamma \setminus \{e\}$ lorsque (X_0, μ_0) possède au moins un atome. Dans l'énoncé qui suit, nous supposons implicitement que les actions de Bernoulli généralisées rencontrées sont libres.

Théorème 3.4 ([FV12]). *Soient H un groupe dénombrable ayant la propriété (T), $\Sigma < H$ un sous-groupe infini moyennable et $\theta : \Sigma \rightarrow H$ un morphisme injectif tel que $\Sigma \cap \theta(\Sigma) = \{e\}$. Si $\Gamma \curvearrowright I$ est une action sur un ensemble dénombrable telle que $\Sigma \cdot i$ est infini pour tout $i \in I$, alors l'action de Bernoulli généralisée $\Gamma \curvearrowright (X_0, \mu_0)^I$ est W^* -superrigide.*

En considérant deux copies différentes de \mathbb{Z} dans $SL_n(\mathbb{Z})$, pour $n \geq 3$, on obtient un exemple explicite satisfaisant les hypothèses du théorème 3.4.

D'autres résultats d'unicité de la sous-algèbre de Cartan et d'actions W^* -superrigides ont été obtenu [Ioa11b, HPV13, CP13, Vae13, CS13b, CSU13, PV13a, Ioa12c, PV13b, Ioa12a, Bou13, DI12, CIK13]. Le lecteur intéressé pourra aussi consulter le papier [Ioa12b] pour une vue d'ensemble. Le plus spectaculaire de ces résultats de W^* -superrigidité est celui de Ioana [Ioa11b] qui assure que l'action de Bernoulli d'un groupe cci avec la propriété (T) est W^* -superrigide et le plus spectaculaire des résultats d'unicité de Cartan est certainement celui de Popa et Vaes [PV13a, PV13b] qui généralise celui d'Ozawa et Popa en prolongeant leurs méthodes. Ils montrent que, pour toute action libre, ergodique et pmp d'un groupe hyperbolique non-élémentaire $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ le facteur $L^\infty(X) \rtimes \Gamma$ a $L^\infty(X)$ comme unique sous-algèbre de Cartan, à conjugaison unitaire près. Citons également les résultats d'unicité de Cartan et de W^* -superrigidité pour des actions uniquement supposées *non-singulières* [HV12, BHR12]. Enfin, il existe également des résultats de W^* -superrigidité pour des algèbres de groupes [IPV13, BV12].

4 Groupes quantiques et algèbres d'opérateurs

4.1 Groupes quantiques compacts

Historiquement, la motivation initiale pour introduire des objets plus généraux que les groupes localement compacts était d'étendre l'analyse harmonique aux groupes non commutatifs, notamment la transformée de Fourier ainsi que la dualité de Pontrjagin. L'ensemble \widehat{G} des caractères d'un groupe localement compact abélien G est encore un groupe localement compact abélien, le groupe dual de G . La transformée de Fourier envoie les fonctions sur G sur des fonctions sur \widehat{G} , et le théorème de dualité de Pontrjagin assure que $\widehat{\widehat{G}}$ est isomorphe à G . Lorsque G n'est plus abélien, le dual de G n'est plus un groupe et le problème est d'introduire une catégorie plus large contenant à la fois les groupes localement compacts et leurs duaux.

Ce fut T. Tannaka [Tan38] qui, en 1938, donna un théorème de dualité pour les groupes compacts. Il fut capable de reconstruire un groupe compact à partir de ses représentations unitaires irréductibles. En 1949, M.G. Krein [Kre63] introduisit une définition intrinsèque du dual d'un groupe compact. En 1959, W.F. Stinespring [Sti59] montra un théorème de dualité pour les groupes localement compacts unimodulaires qui permit de retrouver un groupe localement compact unimodulaire à partir de son algèbre de von Neumann munie du coproduit standard et du poids de Plancherel. Il fut certainement le premier à souligner l'importance de l'unitaire fondamental d'un groupe. C'est finalement G.I. Kac [Kac61, Kac65] qui, en 1961, restaura la symétrie de la dualité de Pontrjagin en définissant la structure de *ring group*. Cette catégorie a une dualité et contient à la fois les groupes localement compacts unimodulaires et leurs duaux. Un théorème de dualité pour les groupes localement compacts généraux fut donné par P. Eymard [Eym64] en 1964 et par N. Tatsuuma [Tat66]. Cependant, dans ces deux travaux, la dualité, qui est dans l'esprit de Tannaka-Krein-Stinespring, n'est plus symétrique. Après d'importants travaux de M. Takesaki qui fournirent les outils nécessaires, le programme de G.I. Kac fut finalement achevé en 1973, indépendamment par L. Vainerman et G.I. Kac [KV73, KV74], et par M. Enock et J.M. Schwartz [ES73, ES75]. La catégorie qu'ils ont défini a une dualité et contient à la fois les groupes localement compacts et leurs duaux. Ces objets sont maintenant appelés *algèbres de Kac* (voir [ES92]). Cette théorie est formulée dans le langage des algèbres de von Neumann et sa reformulation C^* -algébrique fut donnée par J.M. Vallin et M. Enock [EV93, Val85].

L'histoire de la théorie des groupes quantiques localement compacts ne s'arrête pas là. A partir des années 80, de nouveaux groupes quantiques apparaissent, des exemples importants d'algèbres de Hopf obtenues par déformations d'algèbres universelles enveloppantes et d'algèbres de fonctions sur des groupes de Lie. Les exemples considérés par V.G. Drinfel'd et M. Jimbo en 1985 [Dri85, Jim85], ainsi que l'exemple analytique $SU_q(2)$, construit en 1987 par S.L. Woronowicz [Wor87b] comme un exemple de sa théorie des *compact matrix pseudo-groups* [Wor87a], ont montré que la théorie des algèbres de Kac était trop étroite pour inclure tous les groupes quantiques : dans la théorie des algèbres de Kac, le carré de l'antipode (qui est l'analogue quantique de l'opération d'inversion dans un groupe) est toujours égal à 1, mais dans les exemples de V.G. Drinfel'd, M. Jimbo et S.L. Woronowicz, ce n'est pas toujours le cas. L'exemple de Woronowicz montre également que l'antipode n'est pas toujours bornée et est en général seulement densément définie.

Dans cette section nous introduisons la théorie des groupes quantiques compacts de Woronowicz.

Définition 4.1 (Woronowicz [Wor98]). Une *groupe quantique compact* (GQC) est une paire $G = (C(G), \Delta)$, où $C(G)$ est une C^* -algèbre unifère et $\Delta : C(G) \rightarrow C(G) \otimes C(G)$ est un $*$ -morphisme unifère, telle que :

- $(\Delta \otimes \text{id})\Delta = (\text{id} \otimes \Delta)\Delta$.
- $\Delta(C(G))(1 \otimes C(G))$ et $\Delta(C(G))(C(G) \otimes 1)$ sont denses dans $C(G) \otimes C(G)$.

Les groupes quantiques compacts contiennent à la fois les groupes compacts et les duals de groupes discrets.

Soit G un groupe compact. Soient $C(G)$ la C^* -algèbre (commutative) des fonctions continues de G dans \mathbb{C} et $\Delta : C(G) \rightarrow C(G) \otimes C(G) = C(G \times G)$ le $*$ -morphisme défini par $\Delta(F)(g, h) = F(gh)$ pour $F \in C(G)$ et $g, h \in G$. La paire $(C(G), \Delta)$ est un GQC. De plus, tout GQC G avec $C(G)$ commutative est de ce type.

Soit Γ un groupe discret. Soit $\Delta : C^*(\Gamma) \rightarrow C^*(\Gamma) \otimes C^*(\Gamma)$, $\Delta(g) = g \otimes g$, $g \in \Gamma$. La paire $G = (C^*(\Gamma), \Delta)$ est un GQC, appelé *le dual de Γ* et noté $\hat{\Gamma}$. La *version maximale* de tout groupe quantique compact *co-commutatif* (tel que $\sigma\Delta = \Delta$ où σ est la volte sur $C(G) \otimes C(G)$) est de ce type.

Woronowicz a démontré l'existence de l'analogue de la mesure de Haar.

Théorème 4.2 (Woronowicz [Wor87a, Wor98]). Soit G un GQC. Il existe un unique état $h \in C(G)^*$, appelé état de Haar, tel que $(h \otimes \text{id})\Delta = (\text{id} \otimes h)\Delta = h(\cdot)1$.

Dans le cas d'un groupe compact, l'état de Haar est l'intégration suivant la mesure de Haar. Dans le cas du dual d'un groupe discret Γ , l'état de Haar est la trace canonique sur $C^*(\Gamma)$, qui n'est pas fidèle en général.

Nous noterons $C_r(G)$ (resp. $L^\infty(G)$) la C^* -algèbre (resp. l'algèbre de von Neumann) obtenue par construction GNS de l'état de Haar. Par la propriété d'invariance de l'état de Haar, le $*$ -morphisme Δ se factorise en un $*$ -morphisme, toujours noté Δ , de $C_r(G)$ vers $C_r(G) \otimes C_r(G)$. Ainsi $(C_r(G), \Delta)$ est un GQC appelé le *groupe quantique réduit de G* .

Définition 4.3 (Woronowicz [Wor87a, Wor98]). Soit G un GQC. Une *représentation unitaire de dimension n* est un unitaire $u = (u_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{C}) \otimes C(G)$ tel que, pour tous $1 \leq i, j \leq n$,

$$\Delta(u_{ij}) = \sum_{k=1}^n u_{ik} \otimes u_{kj}.$$

Soit u (resp. v) une représentation de dimension n (resp. m). L'espace des entrelaceurs de u vers v est

$$\text{Mor}(u, v) = \{T \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m) : (T \otimes 1)u = v(T \otimes 1)\}.$$

Les représentations u et v sont dites *équivalentes* s'il existe un opérateur inversible dans $\text{Mor}(u, v)$ (dans ce cas il existe aussi un unitaire dans $\text{Mor}(u, v)$ par décomposition polaire). Une représentation u est dite *irréductible* si $\text{Mor}(u, u) = \mathbb{C}1$. Le produit tensoriel de u et v est la représentation :

$$u \otimes v = u_{13}u_{23} \in M_n(\mathbb{C}) \otimes M_m(\mathbb{C}) \otimes C(G) \simeq M_{nm}(\mathbb{C}) \otimes C(G).$$

On définit également la somme directe de deux représentations de façon évidente.

Théorème 4.4 (Woronowicz [Wor87a, Wor98]). *Soit G un GQC. Toute représentation unitaire de G est équivalente à une somme directe de représentations unitaires irréductibles.*

Soit $\text{Irr}(G)$ l'ensemble des classes d'équivalences de représentations unitaires irréductibles de G et, pour $x \in \text{Irr}(G)$, soit u^x un représentant de x . L'espace vectoriel $\text{Pol}(G)$, engendré par les coefficients u_{ij}^x , pour $x \in \text{Irr}(G)$, est une sous-algèbre unifière involutive dense dans $C(G)$. Sa C^* -algèbre enveloppante est notée $C_m(G)$. Comme $\Delta(\text{Pol}(G)) \subset \text{Pol}(G) \odot \text{Pol}(G)$, Δ se prolonge, par universalité, en un $*$ -morphisme toujours noté Δ de $C_m(G)$ vers $C_m(G) \otimes C_m(G)$. Ainsi $(C_m(G), \Delta)$ est un GQC appelé le *groupe quantique maximal de G* . Par construction, on a un morphisme surjectif canonique $\lambda_G : C_m(G) \rightarrow C_r(G)$. Nous dirons que G est *co-moyennable* si λ_G est un isomorphisme.

La C^* -algèbre $C_m(G)$ admet une représentation de dimension 1, $\varepsilon : C_m(G) \rightarrow \mathbb{C}$, appelée la *représentation triviale* ou la *co-unité*, définie par $\varepsilon(u_{ij}^x) = \delta_{ij}$, pour tout $x \in \text{Irr}(G)$ et tous $1 \leq i, j \leq \dim(x)$. La co-unité est l'unique $*$ -morphisme $\varepsilon : C_m(G) \rightarrow \mathbb{C}$ tel que $(\varepsilon \otimes \text{id})\Delta = (\text{id} \otimes \varepsilon)\Delta = \text{id}$.

Nous dirons que G est de *co-type fini* ou bien que G est un *groupe quantique compact de matrices* si la catégorie des représentations de dimension finie de G est de type fini c'est-à-dire s'il existe une partie finie $E \subset \text{Irr}(G)$ telle que pour toute représentation unitaire de dimension finie u , il existe $n \geq 1$ et $b_1, \dots, b_n \in \text{Mor}(u_k, u)$, où u_k est un produit tensoriel d'éléments de E , tels que $\sum_k b_k b_k^* = \text{id}$.

En plus d'introduire de nouveaux exemples spectaculaires de groupes quantiques, de développer la théorie générale des groupes quantiques compacts, Woronowicz a aussi étudié et obtenu une description complète de la théorie des représentations des groupes quantiques compacts $\text{SU}_q(n)$ dans [Wor88]. Par la suite, de nouveaux exemples de groupes quantiques compacts ont été introduits par Wang : les groupes quantiques libres orthogonaux et unitaires [Wan95] ainsi que les groupes quantiques d'automorphismes de C^* -algèbres de dimension finie [Wan98]. Van Daele et Wang ont également introduit les versions non-unimodulaires des groupes quantiques libres orthogonaux et unitaires [VDW96]. La description de la théorie des représentations de tous ces groupes quantiques compacts a été obtenue par Banica [Ban96, Ban97, Ban99] ce qui a permis par la suite d'obtenir de nombreux résultats sur les algèbres d'opérateurs associées à ces groupes quantiques.

4.1.1 Propriété T

Dans [Fim10] nous étudions la propriété (T) dans le cadre des groupes quantiques.

Définition 4.5 ([Fim10]). Soit G un GQC. On dit que G a la *co-propriété (T)* si toute représentation de $C_m(G)$ qui contient faiblement ε contient ε .

Si $G = \widehat{\Gamma}$ est le dual d'un groupe discret Γ alors G a la co-propriété (T) si et seulement si Γ a la propriété (T) . Si G est un groupe compact alors G a la co-propriété (T) si et seulement si G est fini. Plus généralement, G est co-moyennable et a la co-propriété (T) si et seulement si $C(G)$ est de dimension finie.

Théorème 4.6 ([Fim10]). *Soit G a GQC tel que $C(G)$ soit séparable. Si G a la co-propriété (T) alors :*

1. *G est de co-type fini et son état de Haar est une trace.*
2. *Si H est un GQC tel qu'il existe un $*$ -morphisme surjectif de $C(G)$ vers $C(H)$ qui entrelace les multiplication alors H a la co-propriété (T) .*

De plus, si G est un GQC tel que $L^\infty(G)$ est un facteur de dimension infinie (G est "co-cci") alors G a la co-propriété (T) si et seulement si $L^\infty(G)$ est un facteur II_1 avec la propriété (T) de Connes-Jones [CJ85].

La première assertion du théorème généralise au cas non-commutatif le résultat de Kazhdan assurant qu'un groupe discret dénombrable avec la propriété (T) est de type fini. Le fait que l'état de Haar soit une trace n'est pas non plus surprenant car cela signifie que notre groupe quantique est *unimodulaire* ce qui est un résultat bien connu pour les groupes localement compact avec la propriété (T) .

Il découle de l'assertion 2 du théorème précédent que, sauf dans les cas de dimension finie, les groupes quantiques libres orthogonaux, unitaires et de permutations n'ont pas la co-propriété (T) . De plus, la dernière assertion du théorème ainsi que les résultats de la section 4.2.2 permettent de montrer le corollaire suivant.

Corollaire 4.7 ([Fim10]). *Soit G un GQC tel que $L^\infty(G)$ soit un facteur de dimension infinie. Supposons que K soit un co-sous-groupe abélien de G (section 4.2.2). Soient σ un bicaractère continu sur \widehat{K} et G^σ le groupe quantique compact tordu par σ . Si G a la co-propriété (T) alors G^σ l'a également.*

Ce corollaire permet de produire un exemple non co-commutatif et de dimension infinie de groupe quantique compact avec la co-propriété (T) par twisting de $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{Z})$ pour $n \geq 3$.

Exemple 4.8 ([Fim10]). Le groupe $\mathrm{SL}_{2n+1}(\mathbb{Z})$ est cci et a la propriété (T) pour tout $n \geq 1$. Considérons le sous-groupe \widehat{K}_n constitué des matrices diagonales dans $\mathrm{SL}_{2n+1}(\mathbb{Z})$ qui est un co-sous-groupe abélien de $G_{2n+1} = \widehat{\mathrm{SL}_{2n+1}(\mathbb{Z})}$ et que l'on peut identifier à $\mathbb{Z}_2^{2n} = \langle t_1, \dots, t_{2n} : t_i^2 = 1 \forall i, t_i t_j = t_j t_i \forall i, j \rangle$. Par le corollaire précédent, le groupe quantique tordu G_{2n+1}^σ de G_{2n+1} par l'unique bicaractère σ sur $\widehat{K}_n = K_n$ vérifiant $\sigma(t_i, t_j) = \begin{cases} -1 & \text{si } i \leq j \\ 1 & \text{si } i > j \end{cases}$ a la co-propriété (T) . Il n'est pas co-commutatif car σ n'est pas cohomologue au bicaractère trivial. Lorsque n est pair, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ n'est pas cci et l'on considère à la place le groupe $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})/\{I, -I\}$ qui est cci et a la propriété (T) pour tout $n \geq 2$. Le groupe des matrices diagonales dans $\mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{Z})$ est \mathbb{Z}_2^{2n-1} et contient $\{I, -I\}$. On peut donc considérer le sous-groupe abélien $L_n = \mathbb{Z}_2^{2n}/\{I, -I\} = \mathbb{Z}_2^{2n-2} = K_{n-1}$ de $\mathrm{PSL}_{2n}(\mathbb{Z})$. Le même bicaractère σ sur K_{n-1} permet alors de tordre le groupe quantique $G_{2n} = \widehat{\mathrm{PSL}_{2n}(\mathbb{Z})}$ pour obtenir un groupe quantique compact G_{2n}^σ qui a la co-propriété (T) pour tout $n \geq 2$.

La co-propriété (T) a depuis été étudié dans les articles [Kye11, KS12] mais aucun nouvel exemple de GQC ayant la co-propriété (T) n'a été découvert. Très récemment (octobre 2014), Y. Arano [Ara14] a montré que, pour tout $n \geq 1$, le double de Drinfeld de $SU_q(2n+1)$ a la propriété (T) en tant que groupe quantique localement compact. Ceci implique en particulier que, pour tout $n \geq 1$, le GQC $SU_q(2n+1)$ a la co-propriété (T) *centrale*, qui est une version plus faible de la co-propriété (T) .

Problème 4.9. Construire un exemple de groupe quantique compact avec la co-propriété (T) qui ne soit pas obtenu par une "déformation" d'un groupe discret avec la propriété (T) .

4.1.2 K-moyennabilité

Le plus célèbre problème ouvert dans la théorie des algèbres d'opérateurs est certainement celui sur l'isomorphisme des facteurs de groupes libres qui pose la question de savoir si oui ou non les facteurs II_1 de groupes libres $L(\mathbb{F}_n)$ et $L(\mathbb{F}_m)$ sont isomorphes pour $n \neq m$. Dans le cadres des C^* -algèbres pleines et réduites ce problème a été résolu depuis longtemps en calculant leurs groupes de K -théorie. En 1982, Cuntz [Cun82] a montré que $K_1(C^*(\mathbb{F}_n)) = \mathbb{Z}^n$ et Pimsner et Voiculescu [PV82] ont montré que $K_1(C_r^*(\mathbb{F}_n)) = \mathbb{Z}^n$. Il découle de ces calculs que les C^* -algèbres réduites (resp. pleines) des groupes \mathbb{F}_n sont deux à deux non-isomorphes pour $n \geq 1$. Le calcul de la K -théorie de la C^* -algèbre réduite est très difficile, à l'opposé du calcul de Cuntz de la C^* -algèbre maximal. De plus la méthode de Pimsner et Voiculescu ne s'applique pas au calcul de la K -homologie et des groupes de KK -théorie. Cuntz réalisa alors qu'il serait plus efficace et élégant de déduire le résultat sur la C^* -algèbre réduite à partir du résultat sur la C^* -algèbre maximale. C'est ainsi qu'il introduit dans [Cun83] la notion de K -moyennabilité.

Un groupe discret dénombrable Γ est dit *K -moyennable* si la surjection canonique $\lambda : C^*(\Gamma) \rightarrow C_r^*(\Gamma)$ est inversible dans $KK(C^*(\Gamma), C_r^*(\Gamma))$. En particulier $C^*(\Gamma)$ et $C_r^*(\Gamma)$ sont KK -équivalentes lorsque Γ est K -moyennable. Cuntz démontre dans [Cun83] que les groupes libres sont K -moyennables. Julg et Valette montrent dans [JV84] que les groupes agissant sur un arbre avec des stabilisateurs moyennables sont K -moyennables. Pimsner [Pim86] généralisa ensuite ce résultat dans le cas où les stabilisateurs sont seulement K -moyennables.

Dans le cadre des C^* -algèbres, Skandalis [Ska88] introduit une notion de K -nucléarité et Germain démontra [Ger96] que le produit libre réduit de deux C^* -algèbres nucléaires est K -nucléaire.

Dans le cadre des groupes quantiques, les travaux de Baaj et Skandalis [BS89] sur la KK -théorie équivariante pour les actions de C^* -algèbres de Hopf ont permis à Vergnioux [Ver04] d'introduire et d'étudier la K -moyennabilité pour les groupes quantiques localement compacts.

Un GQC G est dit *co- K -moyennable* si la surjection canonique $\lambda_G : C_m(G) \rightarrow C_r(G)$ est inversible dans $KK(C_m(G), C_r(G))$. Vergnioux démontre dans [Ver04] que le produit libre amalgamé de deux GQC co-moyennables est co- K -moyennable. La co- K -moyennabilité du groupe quantique libre orthogonal est démontré par Voigt dans [Voi11]. Le cas des groupes quantiques libres unitaires et de leurs produits libres avec des groupes quantiques libres orthogonaux est résolu par Vergnioux et Voigt dans [VV13]. Enfin Voigt démontre la co- K -moyennabilité du groupe quantique d'automorphismes d'une C^* -algèbre de dimension finie dans [Voi12, Voi14]

Rappelons que, par la théorie de Bass-Serre, un groupe agissant sans inversion sur un arbre non-trivial est une itération de produits libres amalgamés et d'extensions HNN. Afin de généraliser le théorème de Julg et Valette il faut donc commencer par considérer le cas d'une extension HNN de GQC co-moyennable. Nous introduisons dans [Fim13] les extensions HNN de GQC.

Commençons par les extensions HNN de C^* -algèbres introduites par Ueda [Ued05]. Soient A une C^* -algèbre unifère, $B \subset A$ une sous- C^* -algèbre unifère et $\theta : B \rightarrow A$ un $*$ -morphisme unifère injectif. Nous noterons :

$$B_\epsilon = \begin{cases} \theta(B) & \text{si } \epsilon = -1, \\ B & \text{si } \epsilon = 1. \end{cases}$$

L'*extension HNN maximale* est la C^* -algèbre unifère universelle engendrée par A et par un unitaire w tels que $wbw^* = \theta(b)$ pour tout $b \in B$. On la note $\text{HNN}_m(A, B, \theta)$.

Supposons maintenant qu'il existe, pour $\epsilon \in \{-1, 1\}$, une espérance conditionnelle GNS fidèle $E_\epsilon : A \rightarrow B_\epsilon$. Il est alors possible de construire une extension HNN réduite qui vérifie également une propriété universelle.

Théorème 4.10 ([Fim13]). *Il existe une unique, à isomorphisme canonique près, C^* -algèbre unifère P engendrée par A et un unitaire u et munie d'une espérance conditionnelle GNS fidèle $E : P \rightarrow A$ telle que*

1. $ubu^* = \theta(b)$ pour tout $b \in B$,
2. Pour tous $n \geq 1$, $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}$, $a_0, \dots, a_k \in A$ tels que $E_{\epsilon_k}(a_k) = 0$ dès que $\epsilon_k \neq \epsilon_{k+1}$ on a $E(a_0 u^{\epsilon_1} \dots u^{\epsilon_n} a_n) = 0$.

La C^* -algèbre du théorème précédent se note $\text{HNN}_r(A, B, \theta)$ et s'appelle l'*extension HNN réduite*.

Supposons maintenant que G et H soient deux GQC tels qu'il y ait une inclusion unifère $C_r(H) \subset C_r(G)$ et un $*$ -morphisme unifère et injectif $\theta : C_r(H) \rightarrow C_r(G)$ qui entrelacent les comultiplications. La théorie générale assure qu'il existe une espérance conditionnelle GNS fidèle de $C_r(G)$ sur $C_r(H)$ (resp. $\theta(C_r(H))$). De plus, l'inclusion et l' $*$ -morphisme θ définissent également une inclusion et un $*$ -morphisme injectif, toujours noté θ , au niveau des C^* -algèbres maximales qui entrelacent les comultiplications. On peut donc considérer les C^* -algèbres $P_r = \text{HNN}_r(C_r(G), C_r(H), \theta)$ et $P_m = \text{HNN}_m(C_m(G), C_m(H), \theta)$. Par la propriété universelle de P_m , il existe un unique $*$ -morphisme unifère $\Delta : P_m \rightarrow P_m \otimes P_m$ tel que

$$\Delta(u) = u \otimes u \quad \text{et} \quad \Delta(a) = \Delta_G(a) \quad \text{pour tout } a \in C_m(G).$$

La paire (P_m, Δ) est un GQC que l'on appelle l'*extension HNN* que l'on note G_H^θ . Nous noterons également $\lambda : P_m \rightarrow P_r$ l'unique $*$ -morphisme unifère tel que $\lambda(u) = u$ et $\lambda(a) = \lambda_G(a)$ pour tout $a \in C_m(G)$.

Théorème 4.11 ([Fim13]). *On a :*

1. L'état de Haar de G_H^θ est $h_G \circ E \circ \lambda$, où $h_G \in C_m(G)^*$ est l'état de Haar de G .
2. La catégorie des représentations de G_H^θ est engendrée par $\text{Irr}(G)$ et u .
3. La C^* -algèbre réduite de G_H^θ est P_r , la maximale est P_m .
4. Si G est co-moyennable alors G_H^θ est co- K -moyennable.

Par théorie de Bass-Serre, le théorème de Julg et Valette peut être énoncé de la façon suivante. Si Γ est le groupe fondamental d'un graphe de groupes $(\mathcal{G}, \Gamma_p, \Sigma_e)$ et si les Γ_p sont moyennables alors Γ est K -moyennable. Dans un travail en collaboration avec Freslon [FF14], nous construisons le groupe quantique fondamental d'un graphe de groupes quantiques.

Commençons par la construction de la C^* -algèbre fondamentale d'un graphe de C^* -algèbres. Soit \mathcal{G} un graphe connexe. Nous noterons $E(\mathcal{G})$ (resp. $V(\mathcal{G})$) l'ensemble des arêtes (resp. sommets), $s : E(\mathcal{G}) \rightarrow V(\mathcal{G})$ l'application source et \bar{e} l'arête opposée de $e \in E(\mathcal{G})$. L'application but est alors définie par $r(e) = s(\bar{e})$.

- Définition 4.12** ([FF14]). Un graphe de C*-algèbres est uplet $(\mathcal{G}, (A_p)_{p \in V(\mathcal{G})}, (B_e)_{e \in E(\mathcal{G})}, (s_e)_{e \in E(\mathcal{G})})$ où
- \mathcal{G} est un graphe connexe.
 - A_p et B_e sont des C*-algèbres unifières et $B_e = B_{\bar{e}}$ pour tout $e \in E(\mathcal{G})$.
 - $s_e : B_e \rightarrow A_{s(e)}$ est un *-morphisme unifière et fidèle.

On note $r_e : B_e \rightarrow A_{r(e)}$ l'application $r_e = s_{\bar{e}}$. Pour simplifier les notations nous désignerons un graphe de C*-algèbres par (\mathcal{G}, A_p, B_e) . Nous noterons également $B_e^s = s_e(B_e)$.

Fixons un sous-arbre maximal $\mathcal{T} \subset \mathcal{G}$. La C*-algèbre fondamentale maximale (relativement à \mathcal{T}) est la C*-algèbre unifière universelle engendrée par les A_p , $p \in V(\mathcal{G})$, et des unitaires w_e , $e \in E(\mathcal{G})$, avec les relations :

- pour tout $e \in E(\mathcal{G})$, $w_e^* = w_{\bar{e}}$,
- pour tous $e \in E(\mathcal{G})$, $b \in B_e$, $w_{\bar{e}} s_e(b) w_e = r_e(b)$,
- pour tout $e \in E(\mathcal{T})$, $w_e = 1$.

En utilisant la connexité de \mathcal{G} il est facile de vérifier que la C*-algèbre fondamentale ne dépend pas du choix du sous-arbre maximal.

Supposons maintenant qu'il existe, pour tout $e \in E(\mathcal{G})$, une espérance conditionnelle GNS fidèle $E_e^s : A_e \rightarrow B_e^s$. Il est alors possible de construire la C*-algèbre fondamentale réduite qui vérifie également une propriété universelle.

Fixons $p_0 \in V(\mathcal{G})$. Une famille $\mathcal{F} = \{(\pi_p)_{p \in V(\mathcal{G})}, (u_e)_{e \in E(\mathcal{G})}\}$ de représentations fidèles sur des A_{p_0} -modules Hilbertiens $\pi_p : A_p \rightarrow \mathcal{L}_{A_{p_0}}(\mathcal{H}_p)$ et d'unitaires $u_e \in \mathcal{L}_{A_{p_0}}(\mathcal{H}_{r(e)}, \mathcal{H}_{s(e)})$ est dite *admissible* si,

$$u_e^* = u_{\bar{e}} \quad \text{et} \quad u_{\bar{e}} \pi_{s(e)}(s_e(b)) u_e = \pi_{r(e)}(r_e(b)) \quad \text{pour tous } e \in E(\mathcal{G}), b \in B_e.$$

Soient $\mathcal{F} = \{(\pi_p)_{p \in V(\mathcal{G})}, (u_e)_{e \in E(\mathcal{G})}\}$ une famille admissible et $A_{\mathcal{F}}$ le sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}_{A_{p_0}}(\mathcal{H}_{p_0})$ engendré par $\pi_{p_0}(A_{p_0})$ et les opérateurs de la forme

$$\pi_{s(e_1)}(a_0) u_{e_1} \dots u_{e_n} \pi_{r(e_n)}(a_n),$$

où $n \geq 1$, (e_1, \dots, e_n) est un chemin dans \mathcal{G} de p_0 à p_0 , $a_0 \in A_{p_0}$ et, pour $1 \leq k \leq n$, $a_k \in A_{r(e_k)}$. Comme \mathcal{F} est admissible, $A_{\mathcal{F}}$ est une C*-algèbre. Un opérateur $a = \pi_{s(e_1)}(a_0) u_{e_1} \dots u_{e_n} \pi_{r(e_n)}(a_n) \in A_{\mathcal{F}}$ est dit *réduit* si, pour tout $1 \leq k \leq n-1$, $E_{e_{k+1}}^s(a_k) = 0$ dès que $e_{k+1} = \bar{e}_k$. Nous dirons que la famille \mathcal{F} est *réduite* s'il existe une espérance conditionnelle GNS fidèle $E : A_{\mathcal{F}} \rightarrow \pi_{p_0}(A_{p_0})$ telle que $E(a) = 0$ pour tout opérateur réduit $a \in A_{\mathcal{F}}$.

Deux familles admissibles $\mathcal{F} = \{(\pi_p)_{p \in V(\mathcal{G})}, (u_e)_{e \in E(\mathcal{G})}\}$ et $\mathcal{F}' = \{(\pi'_p)_{p \in V(\mathcal{G})}, (u'_e)_{e \in E(\mathcal{G})}\}$ sont dites *isomorphes* s'il existe un (unique) *-isomorphisme $\rho : A_{\mathcal{F}} \rightarrow A_{\mathcal{F}'}$ tel que $\rho(a) = \pi_{p_0}(a)$ pour tout $a \in A_{p_0}$ et,

$$\rho(\pi_{s(e_1)}(a_0) u_{e_1} \dots u_{e_n} \pi_{r(e_n)}(a_n)) = \pi'_{s(e_1)}(a_0) u'_{e_1} \dots u'_{e_n} \pi'_{r(e_n)}(a_n),$$

pour tout opérateur réduit $\pi_{s(e_1)}(a_0) u_{e_1} \dots u_{e_n} \pi_{r(e_n)}(a_n) \in A_{\mathcal{F}}$.

Théorème 4.13 ([FF14]). *Pour tout $p_0 \in V(\mathcal{G})$ fixé il existe une unique, à isomorphisme près, famille admissible réduite \mathcal{F}_{p_0} . De plus, $A_{\mathcal{F}_{p_0}}$ est exacte si et seulement si A_p est exacte pour tout $p \in V(\mathcal{G})$.*

La C*-algèbre $A_{\mathcal{F}_{p_0}}$ s'appelle la C*-algèbre fondamentale réduite. Elle ne dépend pas du choix de $p_0 \in V(\mathcal{G})$. Comme les représentations π_p sont fidèles, on supposera dans la suite que $A_p \subset \mathcal{L}_{A_{p_0}}(\mathcal{H}_p)$ et que $\pi_p = \text{id}$.

Plaçons nous maintenant dans le cadre des GQC.

- Définition 4.14** ([FF14]). Un graphe de GQC est un uplet $(\mathcal{G}, (G_p)_{p \in V(\mathcal{G})}, (G_e)_{e \in E(\mathcal{G})}, (s_e)_{e \in E(\mathcal{G})})$ où
- \mathcal{G} est un graphe connexe.
 - G_p et G_e sont des GQC et $G_e = G_{\bar{e}}$ pour tout $e \in E(\mathcal{G})$.
 - $s_e : C_m(G_e) \rightarrow C_m(G_{s(e)})$ est un *-morphisme unifière et fidèle qui entrelace les comultiplications.

Comme dans le cas des extensions HNN on obtient deux graphes de C*-algèbres $(\mathcal{G}, C_m(G_p), C_m(G_e))$ et $(\mathcal{G}, C_r(G_p), C_r(G_e))$ et, pour tout $e \in E(\mathcal{G})$, on a une espérance conditionnelle GNS fidèle canonique $E_e^s : C_r(G_{s(e)}) \rightarrow C_r(G_e)$. On peut donc considérer la C*-algèbre fondamentale maximale P_m du graphe de C*-algèbres $(\mathcal{G}, C_m(G_p), C_m(G_e))$ ainsi que la C*-algèbre fondamentale réduite P_r du graphe de C*-algèbres

$(\mathcal{G}, C_r(G_p), C_r(G_e))$. Par propriété universelle de P_m , il existe un unique $*$ -morphisme unifié $\Delta : P_m \rightarrow P_m \otimes P_m$ tel que

$$\Delta(u_e) = u_e \otimes u_e \text{ pour tout } e \in E(\mathcal{G}) \quad \text{et} \quad \Delta(a) = \Delta_{G_p}(a) \text{ pour tous } a \in C_m(G_p), p \in V(\mathcal{G}).$$

On obtient ainsi un GQC $G = (P_m, \Delta)$ que l'on appelle le *groupe quantique fondamental*. Nous noterons également $\lambda : P_m \rightarrow P_r$ l'unique $*$ -morphisme unifié obtenu par propriété universelle vérifiant :

$$\lambda(a_0 w_{e_1} \dots w_{e_n} a_n) = \lambda_{G_{p_0}}(a_0) u_{e_1} \dots u_{e_n} \lambda_{G_{p_0}}(a_n).$$

Nous dirons qu'un groupe GQC unimodulaire G est *co-hyperlinéaire* si $L^\infty(G)$ se plonge dans un ultraproduit \mathcal{R}^ω du facteur hyperfini $\text{II}_1 \mathcal{R}$.

Théorème 4.15 ([FF14]). *Soit (\mathcal{G}, G_p, G_e) un graphe de GQC et G le GQC fondamental en $p_0 \in V(\mathcal{G})$.*

1. *L'état de Haar de G est $h = h_{G_{p_0}} \circ E \circ \lambda$, où $h_{G_{p_0}}$ est la mesure de Haar sur G_{p_0} .*
2. *La catégorie des représentations de G est engendrée par $\text{Irr}(G_p)$, pour $p \in V(\mathcal{G})$ et les u_e pour $e \in E(\mathcal{G})$.*
3. *La C^* -algèbre réduite de G est P_r et la maximale est P_m .*
4. *G est unimodulaire si et seulement si G_p est unimodulaire pour tout $p \in V(\mathcal{G})$.*
5. *Si G est unimodulaire et G_e est co-moyennable pour tout $e \in E(\mathcal{G})$ alors G est co-hyperlinéaire si et seulement si G_p est co-hyperlinéaire pour tout $p \in V(\mathcal{G})$.*
6. *Si G est unimodulaire et $C(G_e)$ est de dimension finie pour tout $e \in E(\mathcal{G})$ alors G a la co-propriété de Haagerup (voir section 4.2.3) si et seulement si G_p a la co-propriété de Haagerup pour tout $p \in V(\mathcal{G})$.*
7. *Si G est unimodulaire et $C(G_e)$ est de dimension finie pour tout $e \in E(\mathcal{G})$ alors G est co-faiblement moyennable avec constante 1 si et seulement si G_p est co-faiblement moyennable avec constante 1 pour tout $p \in V(\mathcal{G})$.*

Le prochain théorème généralise le résultat de Julg et Valette au cas des groupes quantiques, modulo la théorie de Bass-Serre. Il n'existe pas de théorie de Bass-Serre pour les groupes quantiques. De plus, quelque soit la définition d'un groupe quantique agissant sans inversion sur un arbre, il est clair qu'il ne sera pas, en général, isomorphe à un groupe quantique fondamental d'un graphe de groupes quantiques car ce dernier admet beaucoup trop de représentations unitaire de dimension 1 (les u_e , $e \in E(\mathcal{G})$). Un groupe quantique fondamental est en quelque sorte "trop co-commutatif" pour décrire tous les groupes quantiques agissant sur un arbre. Le résultat suivant donne quand même de nouveau exemples de GQC co- K -moyennables : les itérations d'extensions HNN et de produits libres amalgamés où les GQC initiaux sont co-moyennables.

Théorème 4.16 ([FF14]). *Soit (\mathcal{G}, G_p, G_e) un graphe de GQC et G le GQC fondamental. Si G_p est co-moyennable pour tout $p \in V(\mathcal{G})$ alors G est co- K -moyennable.*

La preuve du théorème de Julg et Valette ne fonctionne pas dans le cas quantique. Pour démontrer le théorème précédent nous avons d'abord trouvé une autre preuve plus explicite pour les groupes puis nous l'avons adapté au cas quantique. Notre preuve ne fonctionne plus si l'on suppose que les G_p sont seulement co- K -moyennables.

Problème 4.17. Montrer que groupe quantique fondamental d'un graphe de groupes quantiques (\mathcal{G}, G_p, G_e) est co- K -moyennable si et seulement si G_p est co- K -moyennable pour tout $p \in V(\mathcal{G})$.

4.2 Groupes quantiques localement compacts

Après les exemples de Drinfel'd [Dri85], Jimbo [Jim85] et Woronowicz [Wor87b], il est devenu important de développer une catégorie plus grande contenant à la fois les algèbres de Kac et les groupes quantiques compacts de Woronowicz. Le premier succès dans cette direction fut obtenu par Baaj et Skandalis qui développèrent un nouveau point de vue sur les groupes quantiques analytiques, les *unitaires multiplicatifs* [BS93]. Ils introduirent la notion d'unitaire multiplicatif *régulier* et *irréductible*, et leur théorie permit d'unifier les algèbres de Kac et les groupes quantiques compacts. Cependant, S. Baaj découvrit [Baa95, Baa92] que l'unitaire multiplicatif du groupe quantique $E(2)$ construit par S.L. Woronowicz [Wor91] n'est pas régulier. En 1996, S.L. Woronowicz

[Wor96], proposa alors un axiome différent pour les unitaires multiplicatifs, appelé *maniabilité*. Tous les exemples connus de groupes quantiques analytiques semblaient posséder des unitaires multiplicatifs maniables. Les unitaires multiplicatifs maniables ne sont cependant pas la théorie finale des groupes quantiques localement compacts. En effet, les groupes usuels étant définis par un espace et une multiplication, il est naturel de définir les groupes quantiques par un espace quantique et une comultiplication. Une idée essentielle dans le développement de la théorie fut proposée par E. Kirchberg [Kir92] : une déformation de l'antipode par un *groupe d'échelle*, ce qui permit d'introduire une notion d'antipode non bornée et non définie partout. En utilisant cette idée, T. Masuda et Y. Nakagami [MN94] définirent en 1994 les *algèbres de Woronowicz*. Cette catégorie a une dualité et elle contenait à l'époque tous les exemples connus de groupes quantiques analytiques. Cependant, les axiomes sont très compliqués et beaucoup de propriétés que l'on aimerait obtenir comme théorèmes sont contenues dans les axiomes. En 1998, A. Van Daele [VD98] définit de façon purement algébrique une classe spéciale de groupes quantiques, appelé *groupes quantiques algébriques*, incluant tous les groupes quantiques compacts et discrets, et possédant une dualité. Contrairement à la théorie de T. Masuda et Y. Nakagami, les axiomes sont simples et beaucoup de propriétés attendues sont des théorèmes. Cependant, cette théorie est trop algébrique pour contenir tous les groupes quantiques localement compacts. L'un des axiomes de la théorie de T. Masuda et Y. Nakagami est l'invariance de la mesure de Haar par le groupe d'échelle. A. Van Daele [VD01] montra en 2001 que le groupe quantique $ax + b$ construit en 1999 par S.L. Woronowicz et S. Zakrzewski [WZ02], ainsi que le groupe quantique $az + b$ construit par Woronowicz [Wor01] en 2000, ne vérifient pas cet axiome : la mesure de Haar est seulement laissée relativement invariante par le groupe d'échelle. Ce fut au même moment que J. Kustermans et S. Vaes développèrent leur théorie des groupes quantiques localement compacts, aussi bien dans sa version C^* -algébrique [KV00], que dans sa version algèbre de von Neumann [KV03]. Cette théorie a une dualité, les axiomes sont simples, la plupart des propriétés attendues sont des théorèmes, et elle contient tous les exemples connus de groupes quantiques analytiques. Notamment, la mesure de Haar est laissée seulement relativement invariante par le groupe d'échelle. Bien que cette théorie ne soit pas totalement satisfaisante -l'existence de la mesure de Haar est un axiome et non un théorème- c'est, pour le moment, la théorie la plus largement acceptée des groupes quantiques localement compacts.

Soient M une algèbre de von Neumann et φ un poids normal fidèle semi-fini (nfs) sur M . Nous utiliserons les notations standards $\mathcal{N}_\varphi = \{x \in M : \varphi(x^*x) < \infty\}$ et $\mathcal{M}_\varphi = \mathcal{N}_\varphi^* \mathcal{N}_\varphi$.

Définition 4.18 (Kustermans-Vaes [KV03]). Un groupe quantique localement compact (GQLC) est un uplet $G = (M, \Delta, \varphi, \psi)$, où M est une algèbre de von Neumann munie de poids nfs φ et ψ et $\Delta : M \rightarrow M \otimes M$ est un $*$ -morphisme unifère normal, tel que

- Δ est co-associatif : $(\text{id} \otimes \Delta)\Delta = (\Delta \otimes \text{id})\Delta$,
- φ est invariant à gauche : $\varphi((\omega \otimes \iota)\Delta(a)) = \varphi(1)\varphi(a)$ pour tous $a \in \mathcal{M}_\varphi^+$, $\omega \in M_*^+$,
- ψ est invariant à droite : $\psi((\iota \otimes \omega)\Delta(a)) = \psi(1)\psi(a)$ pour tous $a \in \mathcal{M}_\psi^+$, $\omega \in M_*^+$.

Les GQLC contiennent à la fois les groupes localement compacts, leurs duaux ainsi que les GQC.

Soit G un groupe localement compact. Posons $M = L^\infty(G)$, $\Delta : M \rightarrow M \otimes M$, $\Delta(F)(g, h) = F(gh)$ pour $F \in L^\infty(G)$ et $g, h \in G$ et φ (resp. ψ) l'intégration contre la mesure de Haar à gauche (resp. à droite). On obtient ainsi un GQLC où M est commutative. Tout GQLC $G = (M, \Delta, \varphi, \psi)$ avec M commutative est de ce type.

Soit G un groupe localement compact. Posons $M = L(G)$, $\Delta(\lambda_g) = \lambda_g \otimes \lambda_g$, $g \in G$ et $\varphi = \psi$ le poids de Plancherel. On obtient ainsi un GQLC co-commutatif. Tout GQLC co-commutatif est de ce type. De plus, lorsque G est abélien on a, par transformation de Fourier, $L(G) \simeq L^\infty(\hat{G})$, où \hat{G} est le groupe dual de G . Lorsque G n'est plus commutatif, le groupe dual de G n'est plus un groupe, c'est un groupe quantique que l'on note $\hat{G} = (L(G), \Delta, \varphi, \psi)$.

Soit G un GQC. Posons $M = L^\infty(G)$. Par invariance de l'état de Haar, Δ se factorise en un $*$ -morphisme normal $\Delta : M \rightarrow M \otimes M$ co-associatif. Posons $\varphi = \psi = h$, où h est l'unique extension normale de l'état de Haar de G à $L^\infty(G)$. On obtient ainsi un GQLC. Tout GQLC avec $\varphi(1) < \infty$ est de ce type c'est pourquoi il est cohérent de définir un GQC comme un GQLC $G = (M, \Delta, \varphi, \psi)$ tel que $\varphi(1) < \infty$.

Lorsque $G = (M, \Delta, \varphi, \psi)$ est un GQLC nous noterons, par analogie avec les groupes localement compact et les GQC, $M = L^\infty(G)$.

Soit G un GQLC avec un poids invariant à gauche φ . Représentons $L^\infty(G)$ sur l'espace GNS de φ de telle sorte que $(L^2(G), \text{id}, \Lambda)$ soit une construction GNS pour φ . Cela signifie que $L^2(G)$ est un espace de Hilbert tel que $L^\infty(G) \subset \mathcal{B}(L^2(G))$, $\Lambda : \mathcal{N}_\varphi \rightarrow L^2(G)$ est une application linéaire, injective et d'image dense telle que $x\Lambda(y) = \Lambda(xy)$ et $\langle \Lambda(x), \Lambda(y) \rangle = \varphi(y^*x)$ pour tous $x, y \in \mathcal{N}_\varphi$.

Kustermans et Vaes ont démontré [KV03] qu'il existe un unique opérateur unitaire $W \in \mathcal{B}(L^2(G) \otimes L^2(G))$ vérifiant

$$W^*(\Lambda(x) \otimes \Lambda(y)) = (\Lambda \otimes \Lambda)(\Delta(y)(x \otimes 1)), \quad \forall x, y \in \mathcal{N}_\varphi.$$

W est appelé *l'unitaire multiplicatif de G* . C'est l'analogie quantique de la représentation régulière gauche d'un groupe localement compact. L'unitaire multiplicatif permet de reconstruire l'algèbre de von Neumann $L^\infty(G)$ et implémente la comultiplication :

$$L^\infty(G) = \{(\iota \otimes \omega)(W) \mid \omega \in \mathcal{B}(L^2(G))_*\}'' , \quad \Delta(x) = W^*(1 \otimes x)W \text{ pour tout } x \in L^\infty(G).$$

L'unitaire W permet de définir l'analogie des fonctions continues qui s'annulent à l'infini sur G : c'est la C^* -algèbre notée $C_0(G)$ qui est égale à la fermeture pour la norme dans $\mathcal{B}(L^2(G))$ de $\{(\iota \otimes \omega)(W) \mid \omega \in \mathcal{B}(L^2(G))_*\}$. On a en fait $W \in M(C_0(G) \otimes \mathcal{K}(L^2(G)))$.

Le GQLC G a une *antipode* qui est l'unique opérateur $*$ -ultrafortement fermé S de $L^\infty(G)$ dans $L^\infty(G)$ vérifiant :

- l'ensemble $\{(\iota \otimes \omega)(W) \mid \omega \in \mathcal{B}(L^2(G))_*\}$ est un cœur $*$ -ultrafort pour S ,
- $S((\iota \otimes \omega)(W)) = (\iota \otimes \omega)(W^*)$ pour tout $\omega \in \mathcal{B}(L^2(G))_*$.

L'antipode S a une *décomposition polaire* $S = R\tau_{-\frac{i}{2}}$, où R est un anti-automorphisme de $L^\infty(G)$, appelé *l'antipode unitaire* et $(\tau_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un groupe à un paramètre d'automorphismes de $L^\infty(G)$, appelé le *groupe d'échelle*. On a la relation $\sigma(R \otimes R)\Delta = \Delta R$, où σ est la volte sur $L^\infty(G) \otimes L^\infty(G)$. Ainsi, le poids nfs φR est invariant à droite et on supposera toujours que $\psi = \varphi R$.

Il existe de plus une unique constante $\nu > 0$, appelée la *constante d'échelle* et un unique opérateur positif auto-adjoint δ sur $L^2(G)$ affilié à $L^\infty(G)$, appelé *l'élément modulaire*, tels que $[D\psi : D\varphi]_t = \nu^{\frac{it^2}{2}} \delta^{it}$. La constante d'échelle est également caractérisée par la propriété d'*invariance relative de φ par le groupe d'échelle* $\varphi \circ \tau_t = \nu^{-t} \varphi$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

L'unitaire W permet également de construire le groupe quantique dual. En effet, si l'on pose $\widehat{W} = \Sigma W^* \Sigma$, où Σ est la volte sur $L^2(G) \otimes L^2(G)$ et

$$\widehat{M} := \{(\omega \otimes \text{id})(W) : \omega \in \mathcal{B}(L^2(G))_*\}'' , \quad \widehat{\Delta}(x) = \widehat{W}^*(1 \otimes x)\widehat{W} \text{ pour tout } x \in \widehat{M}.$$

On peut alors construire deux poids nfs $\widehat{\varphi}$ et $\widehat{\psi}$ sur \widehat{M} de telle sorte que $\widehat{G} = (\widehat{M}, \widehat{\Delta}, \widehat{\varphi}, \widehat{\psi})$ soit un GQLC, que l'on appelle le *groupe quantique dual de G* . L'opérateur \widehat{W} est l'unitaire multiplicatif de \widehat{G} et on a $W \in M(C_0(G) \otimes C_0(\widehat{G}))$. Lorsque G est un groupe localement compact, on retrouve le dual $\widehat{G} = (L(G), \Delta, \varphi, \psi)$.

De plus, le théorème de bidualité de Pontrjagin s'étend : $\widehat{\widehat{G}}$ est canoniquement isomorphe à G . Un GQLC est dit *discret* si \widehat{G} est compact.

Notons que $L^1(G) := L^\infty(G)_*$ est une algèbre de Banach pour le produit de convolution $\omega * \mu := (\omega \otimes \mu)\Delta$, $\omega, \mu \in L^\infty(G)_*$. Soient $\widehat{\lambda} : L^1(G) \rightarrow C_0(\widehat{G})$ le morphisme d'algèbre de Banach défini par $\widehat{\lambda}(\omega) = (\omega \otimes \text{id})(W)$ et $L_*^1(G) = \{\omega \in L^1(G) : \text{il existe } \theta \in L^1(G) \text{ tel que } \widehat{\lambda}(\omega)^* = \widehat{\lambda}(\theta)\}$. Alors $L_*^1(G)$ est une algèbre involutive pour l'involution $\omega^* = \theta$, où $\omega \in L_*^1(G)$ et θ est tel que $\widehat{\lambda}(\omega)^* = \widehat{\lambda}(\theta)$, et on montre qu'elle est $*$ -faiblement dense dans $L^1(G)$. C'est de plus une algèbre de Banach involutive lorsque qu'on la munit de la norme $\|\omega\|_* := \text{Max}\{\|\omega\|, \|\omega^*\|\}$. Par construction la restriction de $\widehat{\lambda}$ à $L_*^1(G)$ est un $*$ -morphisme. Soit $C_{0m}(\widehat{G})$ la C^* -algèbre enveloppante de $L_*^1(G)$. Soit $\widehat{\lambda} : C_{0m}(\widehat{G}) \rightarrow C_0(\widehat{G})$ la surjection canonique. L'unitaire W admet une version "semi-universelle à droite", que l'on note \mathbb{W} , telle que $\mathbb{W} \in M(C_0(G) \otimes C_{0m}(\widehat{G}))$ et $(\text{id} \otimes \widehat{\lambda})(\mathbb{W}) = W$.

La version duale de la construction précédente fournit la surjection canonique $\lambda : C_{0m}(G) \rightarrow C_0(G)$. Nous dirons que G est *co-moyennable* si λ est un isomorphisme. Nous dirons que G est *moyennable* si $L^\infty(G)$ possède une moyenne invariante, c-à-d. un état $m \in L^\infty(G)^*$ tel que

$$m((\omega \otimes \text{id})\Delta(x)) = m((\text{id} \otimes \omega)\Delta(x)) = \omega(1)m(x) \quad \text{pour tous } \omega \in L^1(G), x \in L^\infty(G).$$

Bédos et Tuset [BT03] ont montré que la co-moyennabilité de G implique la moyennabilité de \widehat{G} . L'équivalence est vraie pour les GQLC [Tom06]. C'est un problème ouvert pour les GQLC généraux.

4.2.1 Bifacteurs

Le but de cette section est d'expliquer la construction d'exemples explicites de groupes quantiques qui sont les plus éloignés possible des groupes classiques.

Soit G un GQLC. G provient d'un groupe si et seulement si l'une des deux algèbres $L^\infty(G)$ ou $L^\infty(\widehat{G})$ est commutative. A l'opposé, G est "le plus loin possible d'un groupe" si les deux algèbres $L^\infty(G)$ et $L^\infty(\widehat{G})$ sont des facteurs. Nous dirons que G est un *bifacteur* lorsque $L^\infty(G)$ et $L^\infty(\widehat{G})$ sont des facteurs. La formulation du problème que nous voulons résoudre est la suivante : étant donné une paire de types de facteurs (x_1, x_2) (au sens de la classification de Murray-von Neumann [MvN36] et de Connes [Con73]) existe-t-il un bifacteur G tel que $L^\infty(G)$ soit de type x_1 et $L^\infty(\widehat{G})$ soit de type x_2 (nous dirons dans ce cas que G est de type (x_1, x_2)) ? Il existe beaucoup d'exemples de type (I_∞, I_∞) : le groupe $az + b$ quantique de Woronowicz [Wor01] (voir section 4.2.2) ainsi que le biproduct croisé de tout couple assorti de groupes conjugués [BSV03]. Cependant, aucun n'exemple d'un autre type n'était connu avant notre travail [Fim07b].

Commençons par un résultat négatif.

Théorème 4.19 ([Fim07b]). *Soit G un GQLC tel que $L^\infty(G)$ soit un facteur fini. Alors l'unique trace τ sur $L^\infty(G)$ est l'état de Haar sur G . En particulier, G est compact et $L^\infty(\widehat{G})$ n'est pas un facteur (sauf dans le cas trivial $L^\infty(G) = L^\infty(\widehat{G}) = \mathbb{C}$).*

Nous construisons ensuite, pour tout $\lambda \in [0, 1]$, un bifacteur de type $(III_\lambda, III_\lambda)$. La même construction produit également des exemples de type (I_∞, II_∞) et (II_∞, II_∞) . Notre construction, basée sur le biproduct croisé de Vaes et Vainermann [VV03], est une sorte de "produit tensoriel infini" d'une version p -adique de l'exemple de Baaž et Skandalis (voir [VV03]).

Afin de décrire nos exemples, nous rappelons maintenant la construction du biproduct croisé d'un couple assorti de groupes localement compacts.

Soient G un groupe localement compact, μ une mesure de Haar à gauche et G_1, G_2 deux sous-groupes fermés de G . Nous dirons que (G_1, G_2) est un *couple assorti* si $G_1 \cap G_2 = \{e\}$ et $\mu(G - G_1 G_2) = 0$.

Lorsque (G_1, G_2) est un couple assorti, on peut écrire pour presque tout $g \in G_1, s \in G_2, gs = \alpha_g(s)\beta_s(g)$. On obtient ainsi deux applications définies presque partout et mesurables :

$$\begin{aligned} \alpha : G_1 \times G_2 &\rightarrow G_2 : & (g, s) &\rightarrow \alpha_g(s), \\ \beta : G_2 \times G_1 &\rightarrow G_1 : & (s, g) &\rightarrow \beta_s(g). \end{aligned}$$

On montre que α est une action de G_1 sur $L^\infty(G_2)$ et β est une action de G_2 sur $L^\infty(G_1)$. Vaes et Vainerman construisent dans [VV03] un GQLC G , appelé *biproduct croisé*, tel que :

$$L^\infty(G) = L^\infty(G_2) \rtimes_\alpha G_1 \quad \text{et} \quad L^\infty(\widehat{G}) = L^\infty(G_1) \rtimes_\beta G_2.$$

Passons maintenant à la description de nos exemples. Soit \mathcal{P} l'ensemble des nombres premiers. Lorsque p est un nombre premier, nous noterons \mathbb{Q}_p le corps des rationnels p -adiques et \mathbb{Z}_p l'anneau des entiers p -adiques. Soit \mathcal{S} un sous-ensemble infini de \mathcal{P} et $\mathcal{A}_\mathcal{S}$ le produit restreint, pour $p \in \mathcal{S}$, des \mathbb{Q}_p relativement aux sous-groupes compacts ouverts \mathbb{Z}_p :

$$\mathcal{A}_\mathcal{S} = \prod'_{p \in \mathcal{S}} (\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p).$$

$\mathcal{A}_\mathcal{S}$ est un anneau localement compact à base dénombrable d'ouverts. Le groupe des inversibles de $\mathcal{A}_\mathcal{S}$ est :

$$\mathcal{A}_\mathcal{S}^* = \prod'_{p \in \mathcal{S}} (\mathbb{Q}_p^*, \mathbb{Z}_p^*).$$

Le groupe $ax + b$ de $\mathcal{A}_\mathcal{S}$, $\mathcal{A}_\mathcal{S}^* \rtimes \mathcal{A}_\mathcal{S}$, contient les deux sous-groupes :

$$G_{\mathcal{S}}^1 = \{(a, 0) \in G_{\mathcal{S}}\} \quad \text{et} \quad G_{\mathcal{S}}^2 = \{((a_p), (b_p)) \in G, a_p + b_p p = 1 \forall p \in \mathcal{S}\}.$$

$G_{\mathcal{S}}^1$ est le sous-groupe qui fixe 0. $G_{\mathcal{S}}^2$ est, formellement, le sous-groupe qui fixe $\left(\frac{1}{p}\right)_{p \in \mathcal{S}}$. Nous montrons dans [Fim07b] que la paire $(G_{\mathcal{S}}^1, G_{\mathcal{S}}^2)$ est assortie. On obtient par biproduit croisé un GQLC que l'on note $G_{\mathcal{S}}$. La preuve du théorème suivant s'appuie sur les résultats de Boca et Zaharescu [BZ00].

Théorème 4.20 ([Fim07b]). *Pour tout sous-ensemble infini $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}$, $L^\infty(G_{\mathcal{S}})$ est un facteur et $L^\infty(\widehat{G}_{\mathcal{S}}) \simeq L^\infty(G_{\mathcal{S}}) \otimes \mathcal{R}$, où \mathcal{R} est le facteur hyperfini II_1 . De plus,*

1. $\sum_{p \in \mathcal{S}} \frac{1}{p} < +\infty \Leftrightarrow \mu^+(\mathcal{A}_{\mathcal{S}} - \mathcal{A}_{\mathcal{S}}^*) = 0 \Leftrightarrow G_{\mathcal{S}}$ est de type $(\text{I}_\infty, \text{II}_\infty)$.
2. $\sum_{p \in \mathcal{S}} \frac{1}{p} = +\infty \Leftrightarrow \mu^+(\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^*) = 0 \Leftrightarrow G_{\mathcal{S}}$ est de type (III, III) .

De plus,

- pour tout $\lambda \in [0, 1]$, il existe un sous-ensemble infini $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}$ tel que $G_{\mathcal{S}}$ soit de type $(\text{III}_\lambda, \text{III}_\lambda)$.
- pour tout sous-groupe dénombrable K de \mathbb{R} et pour tout sous-ensemble dénombrable Σ de $\mathbb{R} - K$, il existe un sous-ensemble \mathcal{S} de \mathcal{P} tel que l'invariant T de Connes $T(L^\infty(G_{\mathcal{S}}))$ contienne K et n'intersecte pas Σ .

Une légère modification de l'exemple précédent permet d'obtenir un GQLC *auto-dual* (tel que $G \simeq \widehat{G}$) vérifiant les mêmes propriétés. Notons $\mathcal{K}_{\mathcal{S}}$ le sous-groupe de $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^*$ défini par le produit restreint suivant :

$$\mathcal{K}_{\mathcal{S}} = \prod'_{p \in \mathcal{S}} (\mathbb{Q}_p^*, 1 + p\mathbb{Z}_p),$$

On considère alors les deux sous-groupes suivant de $\mathcal{K}_{\mathcal{S}} \times \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$:

$$H_{\mathcal{S}}^1 = \mathcal{K}_{\mathcal{S}} \times \{0\} \quad \text{et} \quad H_{\mathcal{S}}^2 = \left\{ \left(a_p, \frac{1 - a_p}{p} \right), (a_p) \in \mathcal{K}_{\mathcal{S}} \right\}.$$

Il est alors facile de vérifier que $(H_{\mathcal{S}}^1, H_{\mathcal{S}}^2)$ est un couple assorti. Soit $H_{\mathcal{S}}$ le biproduit croisé.

Proposition 4.21 ([Fim07b]). *Le groupe quantique $H_{\mathcal{S}}$ est auto-dual et vérifie $L^\infty(H_{\mathcal{S}}) \simeq L^\infty(G_{\mathcal{S}}) \otimes \mathcal{R}$.*

Il reste encore des paires de types de facteurs pour lesquels nous ne savons pas si un bifacteur existe.

Problème 4.22. Existe-t-il un bifacteur G avec $L^\infty(G)$ un facteur semi-fini et $L^\infty(\widehat{G})$ de type III ?

Problème 4.23. Construire pour tous $\lambda, \mu \in [0, 1]$ un bifacteur de type $(\text{III}_\lambda, \text{III}_\mu)$.

Enfin, tous les exemples que nous avons construits sont des produits tensoriels infinis de facteurs de type I, en particulier, les facteurs obtenus sont tous moyennables.

Problème 4.24. Construire un bifacteur G de type (III, III) avec $L^\infty(G)$ et/ou $L^\infty(\widehat{G})$ non-moyennables.

4.2.2 Torsions et déformations de Rieffel

La torsion (en anglais *twisting*) est une procédure consistant à tordre la comultiplication d'un groupe quantique par un 2-cocycle pour produire un nouveau groupe quantique. En général ceci permet, partant du dual d'un groupe classique non abélien d'obtenir un groupe quantique ni commutatif ni co-commutatif. L'idée remonte à Drinfel'd [Dri90]. En 1993, le point de vue dual a été étudié par M.A. Rieffel [Rie93b, Rie93a, Rie95]. En 1994, M.B. Landstad étudia la torsion des duals de groupes localement compacts [Lan94]. Une généralisation du point de vue de M.A. Rieffel à été donnée par S. Wang [Wan96]. Dans le cadre des algèbres de Kac, cette construction a été étudiée en 1998 par M. Enock et L. Vainerman [EV96]. Elle fut également beaucoup étudiée dans le cadre des algèbres de Hopf. Citons également J. Bichon, A. De Rijdt et S. Vaes [BDRV06] pour le cas des groupes quantiques discrets. Plus récemment, une généralisation des déformations de Rieffel a été étudiée par P. Kasprzak [Kas09]. Dans un travail en collaboration avec Vainermann [FV09] nous construisons la torsion et la déformation de Rieffel d'un GQLC dans un cadre très général. Il existe également de nombreux travaux

très récents et ultérieurs à [FV09] de notamment Belmonte, Beltita, Kaschek, Mantoiu, Neumaier, Neshveyev et Tuset sur les déformations de Rieffel mais qui concernent uniquement les déformations de C^* -algèbres et non les constructions de GQLC.

Soit G un GQLC muni de poids invariant à gauche et à droite φ et $\psi = \varphi \circ R$ ayant pour groupe modulaire σ et σ' respectivement. Soit $\Omega \in L^\infty(G) \otimes L^\infty(G)$ un 2-cocycle, c'est-à-dire un unitaire tel que

$$(\Omega \otimes 1)(\Delta \otimes \text{id})(\Omega) = (1 \otimes \Omega)(\text{id} \otimes \Delta)(\Omega).$$

Dans le cas commutatif, un 2-cocycle sur G est un 2-cocycle au sens classique c'est-à-dire une application mesurable $\Omega : G \times G \rightarrow \mathbb{S}^1$ telle que $\Omega(r, s)\Omega(rs, t) = \Omega(s, t)\Omega(r, st)$ pour presque tous $r, s, t \in G$.

Pour un GQLC général, l'équation de 2-cocycle assure que l'*-morphisme unifère normal $\Delta_\Omega = \Omega\Delta(\cdot)\Omega$ est co-associatif. Lorsque G est discret $(L^\infty(G), \Delta_\Omega)$ admet une structure de groupe quantique discret [BDRV06]. Lorsque G n'est plus discret, il n'était pas connu, en général, avant notre travail [FV09], si la paire $(L^\infty(G), \Delta_\Omega)$ admet une structure de GQLC. Dans [FV09] nous montrons que, sous certaines hypothèses, $(L^\infty(G), \Delta_\Omega)$ est un bien un GQLC et nous calculons explicitement tous les ingrédients de ce GQLC, notamment ses poids invariants, ainsi que tous les ingrédients de son dual, qui apparaît comme une généralisation d'une déformation à la Rieffel. Il a depuis été démontré par de Commer, dans l'excellent travail [dC11], que $(L^\infty(G), \Delta_\Omega)$ admet toujours une structure de GQLC. Cependant, le papier [dC11] ne contient aucune formule explicite pour les poids invariants ou les autres ingrédients de ce groupe quantique et de son dual.

Nous considèrerons dans la suite uniquement des 2-cocycles provenant d'un co-sous-groupe classique. Un groupe localement compact H est un *co-sous-groupe* d'un GQLC G si \widehat{H} est un sous-groupe quantique fermé de \widehat{G} c'est-à-dire s'il existe un *-morphisme unifère, normal et fidèle $\alpha : L^\infty(H) \rightarrow L^\infty(G)$ qui entrelace les comultiplications. Ainsi, tout 2-cocycle classique Ψ sur H produit un 2-cocycle $\Omega = (\alpha \otimes \alpha)(\Psi)$ sur G . Dans la suite nous supposerons que Ψ est un bicaractère continu sur H . En supposant de plus que σ agit trivialement sur l'image de α , Enock et Vainerman [EV96] ont démontré que φ est aussi Δ_Ω -invariant à gauche, ce qui permet de déduire que $(L^\infty(G), \Delta_\Omega)$ est un GQLC. Ici, nous supposerons que σ agit par *translations* sur l'image de α c'est-à-dire, nous supposons qu'il existe un morphisme de groupes continu $t \mapsto \gamma_t$ de \mathbb{R} vers H tel que $\sigma_t \circ \alpha(F) = \alpha(F(\cdot\gamma_t^{-1}))$ pour tous $F \in L^\infty(H), t \in \mathbb{R}$. Dans ce cas nous dirons que le co-sous-groupe H est *stable*. Pour un co-sous-groupe stable, σ' agit également par translations :

$$\sigma'_t \circ \alpha(F) = R \circ \sigma_{-t} \circ R \circ \alpha(F) = \alpha(F(\cdot\gamma_t^{-1})) = \sigma_t \circ \alpha(F) \quad \text{pour tous } F \in L^\infty(H), t \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lorsque $t \mapsto \gamma_t$ est non-trivial, φ n'est plus Δ_Ω -invariant à gauche et nous devons construire un nouveau poids sur $L^\infty(G)$. Notons que $(t, s) \mapsto \Psi(\gamma_t, \gamma_s)$ est un bicaractère continu sur \mathbb{R} . Ainsi, il existe $\lambda > 0$ tel que $\Psi(\gamma_t, \gamma_s) = \lambda^{its}$. On peut alors définir, pour tout $t \in \mathbb{R}$, les unitaires suivants de $L^\infty(G)$:

$$u_t = \lambda^{i\frac{t^2}{2}} \alpha(\Psi(\cdot, \gamma_t^{-1})) \quad \text{et} \quad v_t = \lambda^{i\frac{t^2}{2}} \alpha(\Psi(\gamma_t^{-1}, \cdot)).$$

L'équation (1) implique alors que $(u_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un σ -cocycle et $(v_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un σ' -cocycle. Ainsi, la réciproque du théorème de Connes fournit deux poids nfs φ_Ω et ψ_Ω sur $L^\infty(G)$ tels que :

$$u_t = [D\varphi_\Omega : D\varphi]_t \quad \text{et} \quad v_t = [D\psi_\Omega : D\psi]_t \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Nous noterons $W_\Omega^* = \Omega(\widehat{J} \otimes J)W\widetilde{\Omega}(\widehat{J} \otimes J)$ où J (resp. \widehat{J}) est la conjugaison modulaire de φ (resp. $\widehat{\varphi}$), W est l'unitaire multiplicatif de G et $\widetilde{\Omega} = (\alpha \otimes \alpha)(\widetilde{\Psi})$ avec $\widetilde{\Psi}(g, h) = \Psi(g^{-1}, gh)$ pour tous $g, h \in H$. Nous noterons également A (resp. B) le générateur infinitésimal du groupe à un paramètre $t \mapsto \alpha(\Psi(\cdot, \gamma_t^{-1}))$ (resp. $t \mapsto \alpha(\Psi(\gamma_t^{-1}, \cdot))$). Notons que A et B sont des opérateurs positifs, auto-adjoints et affiliés à $L^\infty(G)$.

Théorème 4.25 ([FV09]). *Le quadruplet $G_\Omega = (L^\infty(G), \Delta_\Omega, \varphi_\Omega, \psi_\Omega)$ est un GQLC. De plus,*

1. W_Ω est l'unitaire multiplicatif de G_Ω (suivant la construction de Vaes et Kustermans).
2. Le groupe d'échelle et la constante d'échelle sont $\tau_t^\Omega = \tau_t$, $\nu_\Omega = \nu$.

Enfin, si H est abélien, on a :

3. L'antipode unitaire est $R_\Omega = uR(\cdot)u^*$, où $u = \alpha(\Psi(\cdot^{-1}, \cdot))$.
4. L'élément modulaire est $\delta_\Omega = \delta A^{-1}B$.

5. L'antipode est $S_\Omega(x) = uS(x)u^*$ pour tout $x \in \mathcal{D}(S_\Omega) = \mathcal{D}(S)$.

Il est également facile de vérifier que la torsion est continue dans le sens suivant. Si $x \mapsto \Psi_x$ est une application *-ultrafortement continue de \mathbb{R} dans $L^\infty(H \times H)$ telle que Ψ_x soit un bicaractère continu pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors, en notant W_x l'unitaire multiplicatif du groupe quantique tordu, l'application $x \mapsto W_x$ de \mathbb{R} dans $\mathcal{B}(L^2(G) \otimes L^2(G))$ est ultrafaiblement continue.

Nous calculons ensuite explicitement le dual d'un GQLC tordu lorsque le co-sous-groupe stable H est abélien et nous l'identifions à une déformation de Rieffel généralisée. Cette construction, proposée initialement par Rieffel [Rie93b], permet, partant d'une action de \mathbb{R}^d sur une C*-algèbre A et d'un opérateur antisymétrique sur \mathbb{R}^d de définir un nouveau produit et donne ainsi une nouvelle C*-algèbre, appelée la *déformation de Rieffel* de A . Dans [Rie93a, Rie95] cette construction est appliquée à la C*-algèbre des fonctions continues s'annulant à l'infini sur un groupe de Lie et produit une nouvelle C*-algèbre non-commutative sur laquelle Rieffel introduit une comultiplication, une antipode et une co-unité.

La dualité entre le twisting et la déformation de Rieffel apparaît déjà en 1994 dans le travail de Landstad [Lan94] mais à cette période la théorie générale des GQLC n'est pas encore totalement aboutie. Il faudra attendre 2006, pour que Kasprzak [Kas09] clarifie le lien de dualité entre la déformation de Rieffel et la torsion. Bien qu'à ce moment le théorème de Kustermans-Vaes est terminée, le travail de Kasprzak ne sort toujours pas du cadre des algèbres de Kac car sa construction n'est valable que pour le dual d'un groupe classique localement compact G tordu par un 2-cocycle sur un co-sous-groupe abélien contenu dans le noyau de la fonction modulaire. Dans ce cas, le groupe modulaire σ agit trivialement sur l'image de α , c'est le cadre d'Enock-Vainerman [EV96]. Nous construisons dans [FV09] la déformation de Rieffel de n'importe quel GQLC G déformé par un 2-cocycle sur un co-sous-groupe abélien qui est seulement supposé stable. On peut ainsi sortir du cadre des algèbres de Kac même si l'on part du dual d'un groupe classique G .

Nous supposons dans la suite que H est un co-sous-groupe abélien stable d'un GQLC G et nous utiliserons les notations additives pour H . Pour $\gamma \in \widehat{H}$ on note $u_\gamma \in L^\infty(H)$ la fonction définie par $u_\gamma(h) = \gamma(h)$, $h \in H$, et $L_\gamma = \alpha(u_\gamma) \in L^\infty(G)$, $R_\gamma = JL_\gamma J \in L^\infty(G)'$. On obtient une action $\beta : \widehat{H}^2 \curvearrowright L^\infty(\widehat{G})$ en posant

$$\beta_{\gamma_1, \gamma_2}(x) = L_{\gamma_1} R_{\gamma_2} x R_{\gamma_2}^* L_{\gamma_1}^* \quad \text{pour tous } \gamma_1, \gamma_2 \in \widehat{H}, x \in L^\infty(\widehat{G}).$$

Soit $N = L^\infty(\widehat{G}) \rtimes_\beta \widehat{H}^2$ le produit croisé engendré par les unitaires $\lambda_{\gamma_1, \gamma_2}$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \widehat{H}$, et les $\pi(x)$, $x \in L^\infty(\widehat{G})$. On démontre qu'il existe un unique *-morphisme normal et unifié $\Gamma : N \rightarrow N \otimes N$ tel que

$$\Gamma(\lambda_{\gamma_1, \gamma_2}) = \lambda_{\gamma_1, 0} \otimes \lambda_{0, \gamma_2} \quad \text{et} \quad \Gamma(\pi(x)) = (\pi \otimes \pi) \widehat{\Delta}(x) \quad \text{pour tous } \gamma_1, \gamma_2 \in \widehat{H}, x \in L^\infty(\widehat{G}).$$

Soit Ψ un bicaractère continu sur H . Pour $g \in H$ on note $\Psi_g \in \widehat{H}$ l'élément $\Psi_g(h) = \Psi(h, g)$, $h \in H$. Notons θ l'action duale de H^2 sur N . On définit l'action l'action duale tordue θ^Ψ de H^2 sur N par :

$$\theta_{(g_1, g_2)}^\Psi(x) = \lambda_{\Psi_{g_1}, \Psi_{g_2}} \theta_{(g_1, g_2)}(x) \lambda_{\Psi_{g_1}, \Psi_{g_2}}^* \quad \text{pour tous } g_1, g_2 \in H, x \in N.$$

Notons N_Ω l'algèbre des points fixes pour l'action θ^Ψ et observons que \widehat{H}^2 agit sur N_Ω par conjugaison par les unitaires $\lambda_{\gamma_1, \gamma_2}$, $(\gamma_1, \gamma_2) \in \widehat{H}^2$. Nous noterons encore β cette action. Soient $\lambda_L : L^\infty(H) \rightarrow N$ (resp. λ_R) l'unique *-morphisme normal et unifié tel que $\lambda_L(u_\gamma) = \lambda_{\gamma, 0}$ (resp. $\lambda_R(u_\gamma) = \lambda_{0, \gamma}$) pour tout $\gamma \in \widehat{H}$ et $\Upsilon = (\lambda_R \otimes \lambda_L)(\widetilde{\Psi}^*)$. Nous démontrons que $\Gamma_\Omega = \Upsilon \Gamma(\cdot) \Upsilon^*$ est une comultiplication sur N_Ω .

Construisons maintenant un poids Γ_Ω -invariant à gauche sur N_Ω . Pour cela il nous faut d'abord observer que

$$\theta_{(g_1, g_2)}^\Psi(\lambda_{\gamma_1, \gamma_2}) = \theta_{(g_1, g_2)}(\lambda_{\gamma_1, \gamma_2}) = \overline{\langle \gamma_1, g_1 \rangle \langle \gamma_2, g_2 \rangle} \lambda_{\gamma_1, \gamma_2} \quad \text{pour tous } g_1, g_2 \in H, \gamma_1, \gamma_2 \in \widehat{H}.$$

Ainsi, il existe un isomorphisme canonique $N = L^\infty(\widehat{G}) \rtimes_\beta \widehat{H}^2 \rightarrow N_\Omega \rtimes_\beta \widehat{H}^2$ entretenant l'action duale tordue θ^Ψ de H^2 sur N avec l'action duale de H^2 sur $N_\Omega \rtimes_\beta \widehat{H}^2$. Nous montrons que $t \mapsto w_t = \lambda^{-it^2} \lambda_R(\Psi(-\gamma_t, \cdot))$ est un $\widetilde{\sigma}$ -cocycle, où $\widetilde{\sigma}$ est le groupe modulaire du poids dual sur N de $\widehat{\varphi}$. Ainsi, il existe un unique poids nfs $\widetilde{\mu}_\Omega$ sur N tel que $w_t = [D\widetilde{\mu}_\Omega : \widetilde{D}\widehat{\varphi}]_t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Nous montrons enfin que $\widetilde{\mu}_\Omega$ est θ^Ψ -invariant ce qui implique, par identification de N avec $N_\Omega \rtimes_\beta \widehat{H}^2$, qu'il existe un unique poids nfs μ_Ω sur N_Ω tel que le poids dual de μ_Ω soit $\widetilde{\mu}_\Omega$.

Théorème 4.26 ([FV09]). $(N_\Omega, \Gamma_\Omega)$ est un GQLC et μ_Ω est un poids invariant à gauche. De plus ce GQLC est canoniquement isomorphe à \widehat{G}_Ω .

Remarque 4.27. Dans [Fim07a] nous construisons la déformation de Rieffel dans le cadre C^* -algébrique que nous identifions à $C_0(\widehat{G}_\Omega)$. Nous déduisons également de notre construction que $C_0(\widehat{G})$ est nucléaire si et seulement si $C_0(\widehat{G}_\Omega)$ est nucléaire. Les preuves de ces résultats ne sont pas publiées mais l'article [FV08] contient une vue d'ensemble.

En appliquant cette construction de torsion/déformation de Rieffel, nous pouvons maintenant produire de nouveaux exemples très explicites de GQLC.

Soient H est un sous-groupe abélien fermé d'un groupe localement compact G et $\alpha : L^\infty(\widehat{H}) \rightarrow L(G)$ l'unique $*$ -morphisme unifère, normal et fidèle tel que $\alpha(u_h) = \lambda_h^G$, pour tout $h \in H \subset G$, où λ^G est la représentation régulière à gauche de G . Le morphisme α entrelace les comultiplications. Le poids invariant à gauche (et à droite) sur $L(G)$ est le poids de Plancherel pour lequel on a $\sigma_t(\lambda_g^G) = \delta_G^{it}(g)\lambda_g^G$, pour tout $g \in G$, où δ_G est la fonction modulaire de G . On obtient donc $\sigma_t \circ \alpha(u_g) = \alpha(u_g(\cdot - \gamma_t))$, où γ_t est le caractère de H défini par $\langle \gamma_t, g \rangle = \delta_G^{-it}(g)$. Comme l'espace vectoriel engendré par les u_h , pour $h \in H$, est ultrafaiblement dense dans $L^\infty(\widehat{H})$, on a $\sigma_t \circ \alpha(F) = \alpha(F(\cdot - \gamma_t))$, pour tout $F \in L^\infty(\widehat{H})$. On peut donc, étant donné un bicaractère Ψ sur \widehat{H} , appliquer la construction de la torsion. La déformation de la mesure de Haar est non triviale lorsque H n'est pas dans le noyau de la fonction modulaire de G . Nous appliquons maintenant cette situation à deux cas concrets.

Pour notre premier exemple, nous considérons le groupe G des matrices 2×2 à coefficients complexes triangulaires supérieures de déterminant 1. Pour $z \in \mathbb{C}^*$ et $\omega \in \mathbb{C}$, on note (z, ω) la matrice :

$$\begin{pmatrix} z & \omega \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}.$$

Le module de G est donné par :

$$\delta_G((z, \omega)) = |z|^{-2}.$$

On peut donc considérer le sous-groupe abélien fermé des matrices diagonales $H = \mathbb{C}^*$ dans G , qui n'est pas dans le noyau de la fonction modulaire. Le morphisme γ_t à valeurs dans $\widehat{\mathbb{C}^*}$ est donné par $\langle \gamma_t, z \rangle = |z|^{2it}$. Identifions $\widehat{\mathbb{C}^*}$ avec $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}_+^*$ de la façon suivante :

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \widehat{\mathbb{C}^*}, \quad (n, \rho) \mapsto \gamma_{n, \rho} = (r e^{i\theta} \mapsto e^{i \ln r \ln \rho} e^{in\theta}).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit un bicaractère sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}_+^*$ en posant :

$$\Psi_x((n, \rho), (k, r)) = e^{ix(k \ln \rho - n \ln r)}.$$

On obtient par torsion une famille de GQLC G_x avec constante d'échelle et groupe d'échelle triviaux. On montre de plus que l'antipode n'est pas déformée. On note φ_x le poids invariant à gauche et δ_x l'élément modulaire. On note également φ le poids de Plancherel sur $L(G)$. En utilisant les résultats sur la torsion ainsi que sur la déformation de Rieffel dans sa version C^* -algébrique, on obtient le théorème suivant.

Théorème 4.28 ([FV08]). On a :

$$- [D\varphi_x : D\varphi]_t = \lambda_{(e^{2ixt}, 0)}^G, \quad \delta_x^{it} = \lambda_{(e^{-4ixt}, 0)}^G.$$

- $G_{-x} \simeq G_x^{op}$ et si $x, y \geq 0$ avec $x \neq y$ alors G_x et G_y ne sont pas isomorphes.

Soit $q = e^{8x}$. La C^* -algèbre réduite duale $C_0(\widehat{G}_x)$ est engendrée par 2 opérateurs normaux $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ affiliés à $C_0(\widehat{G}_x)$ vérifiant $\hat{\alpha}\hat{\beta} = \hat{\beta}\hat{\alpha}$ et $\hat{\alpha}\hat{\beta}^* = q\hat{\beta}^*\hat{\alpha}$. La comultiplication $\hat{\Delta}_x$ sur $C_0(\widehat{G}_x)$ est donnée par

$$\hat{\Delta}_x(\hat{\alpha}) = \hat{\alpha} \otimes \hat{\alpha} \quad \text{et} \quad \hat{\Delta}_x(\hat{\beta}) = \hat{\alpha} \otimes \hat{\beta} + \hat{\beta} \otimes \hat{\alpha}^{-1}.$$

Le dual \widehat{G}_x de ce groupe quantique apparaît donc comme une déformation de l'algèbre des fonctions sur le groupe des matrices triangulaires supérieures de déterminant 1 : seule la relation de commutation entre les fonctions coordonnées est déformée, la comultiplication est formellement la même.

Pour notre second exemple, nous considérons $G = \mathbb{C}^* \rtimes \mathbb{C}$ le groupe $az + b$ et $H = \mathbb{C}^*$ le sous-groupe abélien fermé formé des éléments de la forme $(z, 0)$ avec $z \in \mathbb{C}^*$. On utilise le même bicaractère Ψ_x que précédemment sur $\widehat{H} = \widehat{\mathbb{C}^*}$ et l'on obtient par torsion une famille de GQLC G_x avec constante d'échelle et groupe d'échelle triviaux. On montre de plus que l'antipode n'est pas déformée.

Théorème 4.29 ([FV09]). *On a :*

- $[D\varphi_x : D\varphi]_t = \lambda_{(e^{itx}, 0)}^G, \delta_x^{it} = \lambda_{(e^{-2itx}, 0)}^G.$
- $G_{-x} \simeq G_x^{qp}$ et si $x, y \geq 0$ avec $x \neq y$ alors G_x et G_y ne sont pas isomorphes.

L'algèbre de von Neumann duale $L^\infty(\widehat{G}_x)$ est engendrée par deux opérateurs $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ affiliés tels que

- $\hat{\alpha}$ est normal, $\hat{\beta}$ est q -normal, c-à-d $\hat{\beta}\hat{\beta}^* = q\hat{\beta}^*\hat{\beta},$
- $\hat{\alpha}\hat{\beta} = \hat{\beta}\hat{\alpha}$ et $\hat{\alpha}\hat{\beta}^* = q\hat{\beta}^*\hat{\alpha},$ avec $q = e^{4x}.$

La comultiplication est donnée par $\hat{\Delta}_x(\hat{\alpha}) = \hat{\alpha} \otimes \hat{\alpha}$ et $\hat{\Delta}_x(\hat{\beta}) = \hat{\alpha} \otimes \hat{\beta} \dot{+} \hat{\beta} \otimes 1.$

Pour le dual \widehat{G}_x on a donc déformé, comme pour le groupe quantique $az + b$ de Woronowicz [Wor01], la relation de commutativité entre les deux fonctions coordonnées α et β . La différence majeure avec le groupe quantique $az + b$ de Woronowicz est que l'on a aussi déformé la normalité de la seconde fonction coordonnée. De plus, notre exemple est un cas particulier d'une construction générale et non, comme l'a fait Woronowicz, une construction isolée, à la main.

Rappelons rapidement ce qu'est le groupe quantique $az + b$ de Woronowicz de paramètre $0 < q < 1$. Ce groupe quantique G est auto-dual, son algèbre de von Neumann $L^\infty(G)$ est engendrée par deux opérateurs a et b normaux affiliés tels que $ab = q^2ba$ et $ab^* = b^*a$. Le spectre de a et b est $\mathbb{C}^q \cup \{0\}$, où $\mathbb{C}^q = \{z \in \mathbb{C}, |z| \in q^{\mathbb{Z}}\}$. La comultiplication est donnée par $\Delta(a) = a \otimes a$ et $\Delta(b) = a \otimes b \dot{+} b \otimes 1$. Le groupe modulaire σ du poids invariant à gauche φ est donné par $\sigma_t(a) = q^{-2it}a$ et $\sigma_t(b) = b$.

Notre dernier exemple est beaucoup plus original. C'est la torsion d'un objet qui est déjà non trivial : le groupe quantique $az + b$ de Woronowicz G de paramètre $0 < q < 1$.

Soit $\alpha : L^\infty(\mathbb{C}^q) \rightarrow L^\infty(G)$ le *-morphisme unital, normal et fidèle donné par $\alpha(F) = F(a)$. Comme $\Delta(a) = a \otimes a$, on a $\Delta \circ \alpha = (\alpha \otimes \alpha) \circ \Delta_{\mathbb{C}^q}$. De plus,

$$\sigma_t \circ \alpha(F) = \sigma_t(F(a)) = F(\sigma_t(a)) = F(q^{-2it}a) = \alpha(F(\cdot \gamma_t^{-1})),$$

où $\gamma_t = q^{2it} \in \mathbb{C}^q$. Effectuons la torsion en utilisant la famille de bicaractères sur \mathbb{C}^q :

$$\Psi_x(q^{k+i\varphi}, q^{l+i\psi}) = q^{ix(k\psi-l\varphi)} \quad \text{pour } x, k, l \in \mathbb{Z}.$$

On obtient des GQLC G_x . Notons $a = u|a|$ la décomposition polaire de a .

Théorème 4.30 ([FV09]). *On a*

- $\Delta_x(a) = a \otimes a$ et $\Delta_x(b) = u^{-x+1}|a|^{x+1} \otimes b \dot{+} b \otimes u^x|a|^{-x}.$
- $[D\varphi_x : D\varphi]_t = |a|^{-2ixt}, \delta_x = |a|^{4x+2}$ et l'antipode n'est pas déformée.
- Pour tout $x, y \in \mathbb{N}$, si $x \neq y$, alors G_x et G_y ne sont pas isomorphes; si $x \neq 0$, alors G_x et G_{-x} ne sont pas isomorphes.

L'algèbre de von Neumann duale $L^\infty(\widehat{G}_x)$ est engendrée par deux opérateurs affiliés $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ tels que

- $\hat{\alpha}$ est normal, $\hat{\beta}$ est p -normal, c-à-d, $\hat{\beta}\hat{\beta}^* = p\hat{\beta}^*\hat{\beta},$
- $\hat{\alpha}\hat{\beta} = q^2\hat{\beta}\hat{\alpha}$ et $\hat{\alpha}\hat{\beta}^* = p\hat{\beta}^*\hat{\alpha},$ avec $p = q^{-4x}.$

La comultiplication est donnée par $\hat{\Delta}_x(\hat{\alpha}) = \hat{\alpha} \otimes \hat{\alpha}$ et $\hat{\Delta}_x(\hat{\beta}) = \hat{\alpha} \otimes \hat{\beta} \dot{+} \hat{\beta} \otimes 1.$

Pour le dual on déforme de cette façon la relation de commutativité entre a et b^* ainsi que la normalité de la "seconde coordonnée" b . Par contre on ne change pas la relation $ab = q^2ba$.

4.2.3 Propriété de Haagerup

Après les résultats de Brannan [Bra12a, Bra12b] sur la propriété de Haagerup des algèbres de von Neumann des groupes quantiques libres orthogonaux, unitaires et de permutations ainsi que ceux de Lemeux [Lem13a, Lem13b] pour les produits en couronnes libres d'un groupe de permutations quantiques par un groupe fini,

il est devenu important d'entreprendre une étude systématique de la propriété de Haagerup pour les GQLC. C'est ce que nous faisons dans le papier [DF⁺13], écrit en collaboration avec Daws, Skalski et White.

Soit G un GQLC. Une représentation unitaire de G sur un espace de Hilbert H est un unitaire $U \in M(C_0(G) \otimes \mathcal{K}(H))$ tel que $(\Delta \otimes \text{id})(U) = U_{13}U_{23}$. Une représentation U est dite *mélangeante* si, pour tous $\xi, \eta \in H$, $(\text{id} \otimes \omega_{\xi, \eta})(U) \in C_0(G)$. On dit qu'une représentation unitaire U a des vecteurs presque invariants s'il existe une suite généralisée de vecteurs unitaires (ξ_α) dans H telle que $(\text{id} \otimes \omega_{\xi_\alpha})(U) \rightarrow 1$ *-faiblement dans $L^\infty(G)$.

La notion de propriété (T) s'étend naturellement aux GQLC. Nous dirons qu'un GQLC a la propriété (T) si toute représentation unitaire ayant des vecteurs presque invariants a un vecteur invariant non-nul (c-à-d un vecteur $\xi \in H$ non nul tel que $(\text{id} \otimes \omega_{\xi, \eta})(U) = \langle \xi, \eta \rangle 1$ pour tout $\eta \in H$). Cette définition est cohérente avec celle des GQC : un CQG G a la co-propriété (T) si et seulement si \widehat{G} a la propriété (T) dans le sens précédent.

Définition 4.31 ([DF⁺13]). Soit G un GQLC. On dit que G a la *propriété de Haagerup* s'il existe une représentation unitaire mélangeante avec des vecteurs presque invariants.

Remarque 4.32. Soit G un GQLC.

1. Si \widehat{G} est co-moyennable alors G a la propriété de Haagerup ([BT03]).
2. G est compact si et seulement si il possède à la fois la propriété (T) et la propriété de Haagerup (évident d'après la définition).

Nous ne savons pas si un GQLC moyennable a toujours la propriété de Haagerup. C'est vrai pour les groupes quantiques discrets. Ce serait vrai en général si la réponse au problème de l'équivalence entre la moyennabilité de G et la co-moyennabilité de \widehat{G} était positive.

Dans la suite nous supposons que $C_0(G)$ est séparable. Fixons un espace de Hilbert H séparable de dimension infinie. Soit $\text{Rep}_G(H) \subset \mathcal{U}(M(C_0(G) \otimes \mathcal{K}(H)))$ l'ensemble des représentations unitaires de G dans H . Comme $C_0(G) \otimes \mathcal{K}(H)$ est séparable, $\mathcal{U}(M(C_0(G) \otimes \mathcal{K}(H)))$ est un groupe Polonais pour la topologie stricte et, $\text{Rep}_G(H)$ étant fermé pour la topologie stricte, on déduit que $\text{Rep}_G(H)$ est un espace Polonais. Nous montrons dans [DF⁺13] que beaucoup de caractérisations classiques de la propriété de Haagerup sont encore valables dans le cas quantique.

Théorème 4.33 ([DF⁺13]). Soit G un GQLC. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. G a la propriété de Haagerup.
2. L'ensemble des représentations unitaires mélangeantes sur H est dense dans $\text{Rep}_G(H)$.
3. Il existe une suite généralisée d'états $(\omega_i)_{i \in \mathcal{I}}$ sur $C_{0m}(\widehat{G})$ telle que $((\text{id} \otimes \omega_i)(\mathcal{W}))_{i \in \mathcal{I}}$ soit une unité approchée de $C_0(G)$.

Nous démontrons également que la propriété de Haagerup passe aux sous-groupes quantiques fermés de G , lorsque G est co-moyennable. L'hypothèse de co-moyennabilité de G n'est pas excessive car elle est vérifiée pour G discret et G un groupe localement compact classique.

Soit M une algèbre de von Neumann (à préduel séparable) munie d'un poids nfs φ . Nous dirons que M a la propriété de Haagerup s'il existe une suite $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications normales complètement positives $\theta_n : M \rightarrow M$ telle que $\varphi \circ \theta_n \leq \theta_n$, l'extension $L^2 T_n : \Lambda_\varphi(x) \mapsto \Lambda_\varphi(\theta_n(x))$ est compacte pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la suite (T_n) converge fortement vers l'identité. La propriété de Haagerup ne dépend pas du choix de φ [CS13a, OR13] (voir également [Jol02] dans le cas fini et en ne considérant que des traces normales fidèles). Choda a montré qu'un groupe discret dénombrable Γ a la propriété de Haagerup si et seulement si $L(\Gamma)$ l'a également. Ce résultat est faux dans le cas d'un groupe localement compact non-discret. En effet, Connes [Con76] a montré que si G est un groupe localement compact connexe séparable alors $L(G)$ est injective et a donc la propriété de Haagerup [OR13]. Par exemple $L(\text{SL}_n(\mathbb{R}))$ est injective pour tout $n \geq 1$ mais $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ n'a pas la propriété de Haagerup dès que $n \geq 3$. Nous généralisons le résultat de Choda dans le cas unimodulaire.

Théorème 4.34 ([DF⁺13]). Soit G un groupe quantique discret. Si G a la propriété de Haagerup alors $L^\infty(\widehat{G})$ l'a également. La réciproque est vraie lorsque G est unimodulaire.

Nous ne savons pas si le résultat précédent est encore valable dans le cas non-unimodulaire. Le théorème précédent assure que les résultats de Brannan [Bra12a, Bra12b] et de Lemeux [Lem13a, Lem13b] impliquent que les duals des groupes quantiques unimodulaires libres orthogonaux, unitaires et de permutations ainsi que les duals des produits en couronnes libres d'un groupe de permutations quantiques avec un groupe fini ont la propriété de Haagerup au sens de la définition 4.31.

Dans les cas non-unimodulaires, l'algèbre de von Neumann $L^\infty(G)$, lorsque G est le dual d'un groupe quantique libre orthogonal, unitaire ou d'automorphisme d'une C^* -algèbre de dimension finie, a encore la propriété de Haagerup [dCFY13]. Ce résultat est obtenu en utilisant l'invariance par équivalence monoïdale d'une version plus forte, dite *centrale*, de la propriété de Haagerup. Un cas particulier d'équivalence monoïdale est la torsion. Comme pour la co-propriété (T) , un corollaire immédiat du théorème 4.34, est l'invariance par certaines torsions de la propriété de Haagerup.

Corollaire 4.35 ([DF⁺13]). *Soient G un groupe quantique discret unimodulaire et K un groupe abélien tel que $L^\infty(\widehat{K}) \subset L^\infty(\widehat{G})$ et que l'inclusion entrelace les comultiplications. Soient σ un bicaractère continu sur \widehat{K} et G_σ le groupe quantique (discret) tordu par σ . Si G a la propriété de Haagerup alors G_σ l'a également.*

Nous montrons également dans [DF⁺13] que la propriété de Haagerup est stable par produit libre de groupes quantiques discrets sans hypothèse d'unimodularité (le cas unimodulaire découle directement du théorème 4.34 et des résultats de [Boc93, Jol02]).

Nous donnons maintenant, dans le cas discret, la version quantique de la caractérisation de la propriété de Haagerup en termes d'existence d'une fonction propre conditionnellement de type négatif et de celle en termes d'existence d'une action affine isométrique et propre sur un espace de Hilbert réel.

Soit G un groupe quantique discret. Notons $\widehat{\varepsilon} : C_m(\widehat{G}) \rightarrow \mathbb{C}$ la co-unité. Un *semi-groupe d'états* sur $C_m(\widehat{G})$ est une famille $(\mu_t)_{t \geq 0}$ d'états sur $C_m(\widehat{G})$ telle que $\mu_0 = \widehat{\varepsilon}$, $\mu_{s+t} = \mu_s * \mu_t$ pour tous $s, t \geq 0$ et $\mu_t \rightarrow \widehat{\varepsilon}$ $*$ -faiblement quand $t \rightarrow 0$.

Nous dirons qu'une application linéaire $L : \text{Pol}(\widehat{G}) \rightarrow \mathbb{C}$ est une *fonctionnelle génératrice* sur G si L est auto-adjointe, $L(1) = 0$ et L est *conditionnellement de type négatif* c-à-d, $L(a^*a) \leq 0$ pour tout $a \in \text{Pol}(\widehat{G})$ tel que $\widehat{\varepsilon}(a) = 0$. Nous dirons de plus que L est *symétrique* si la matrice $L_x = (L(u_{ij}^x))_{ij}$ est auto-adjointe pour tout $x \in \text{Irr}(\widehat{G})$. Lorsque L est symétrique nous dirons que L est *propre* si, pour tout $C > 0$, il existe une partie finie $F \subset \text{Irr}(\widehat{G})$ telle que $L_x \geq C1$ pour tout $x \in \text{Irr}(\widehat{G}) \setminus F$.

Un *cocycle* sur G est une application linéaire $c : \text{Pol}(\widehat{G}) \rightarrow H$, où H est un espace de Hilbert muni d'une représentation (unifère) $\pi : C_m(\widehat{G}) \rightarrow \mathcal{B}(H)$ telle que

$$c(ab) = \pi(a)c(b) + c(a)\widehat{\varepsilon}(b) \quad \text{pour tous } a, b \in \text{Pol}(\widehat{G}).$$

Un cocycle c est dit *réel* si $\langle c(a), c(b) \rangle = \langle c(\widehat{S}(b^*)), c(\widehat{S}(a)^*) \rangle$ pour tous $a, b \in \text{Pol}(\widehat{G})$, où \widehat{S} est l'antipode sur $C_m(\widehat{G})$. Un cocycle est dit *propre* si, pour tout $C > 0$, il existe une partie finie $F \subset \text{Irr}(\widehat{G})$ telle que $c_x^*c_x \geq C1$ pour tout $x \in \text{Irr}(\widehat{G}) \setminus F$, où c_x est la matrice $c_x = (c(u_{ij}^x))_{ij}$.

Théorème 4.36 ([DF⁺13]). *Soit G un groupe quantique discret. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. G a la propriété de Haagerup.
2. Il existe un semi-groupe d'états $(\mu_t)_{t \geq 0}$ sur $C_m(\widehat{G})$ tel que $a_t = (\text{id} \otimes \mu_t)(\mathcal{W}) \in c_0(G)$ pour tout $t > 0$ et a_t converge vers 1 strictement quand t tend vers 0.
3. G admet une fonctionnelle génératrice symétrique et propre.
4. G admet un cocycle réel propre.

Index

- 2-cocycle, 20
- Action
 - à orbites infinies, 3
 - hautement transitive, 4
 - moyennable, 3
 - orbitalement superrigide, 8
 - presque libre, 4
 - W^* -superrigide, 7
- Algèbre de von Neumann
 - fortement solide, 7
 - robuste, 7
 - solide, 6
- Antipode
 - d'un groupe quantique localement compact, 17
 - unitaire, 17
- Bifacteur, 18
- Biproduit croisé, 18
- C^* -algèbre fondamentale
 - maximale, 14
 - réduite, 14
- cœur
 - d'un sous-groupe, 5
 - enfantin, 5
- Co-sous-groupe
 - d'un groupe quantique localement compact, 20
 - stable, 20
- Co-unité, 11
- Cocycle
 - propre, 25
 - réel, 25
 - sur groupe quantique discret, 25
- Constante d'échelle, 17
- Couple assorti, 18
- Etat de Haar, 10
- Extension HNN
 - de groupes quantiques, 13
 - maximale, 13
 - réduite, 13
- Facteur II_1
 - McDuff, 6
 - premier, 6
- Fonctionnelle génératrice
 - propre, 25
 - sur un groupe quantique discret, 25
 - symétrique, 25
- Groupe
 - K-moyennable, 12
 - moyennable, 3
- Groupe d'échelle, 17
- Groupe quantique
 - auto-dual, 19
 - co-hyperlinéaire, 15
 - co-K-moyennable, 13
 - co-moyennable, 11, 17
 - compact, 10
 - compact de matrices, 11
 - compact unimodulaire, 11
 - discret, 17
 - dual, 17
 - fondamental, 15
 - localement compact, 16
 - maximal, 11
 - moyennable, 17
 - réduit, 10
- Propriété
 - de Haagerup, 24
 - Gamma, 7
- Représentation
 - équivalente, 10
 - avec des vecteurs presque invariants, 24
 - de groupes quantiques compacts, 10
 - de groupes quantiques localement compacts, 24
 - irréductible, 10
 - mélangeante, 24
 - triviale, 11
- Semi-groupe d'états, 25
- Sous-algèbre
 - abélienne maximale, 6
 - de Cartan, 6
 - normalisateur d'une, 6
 - régulière, 6
- Unitaire multiplicatif, 17

Références

- [Ara14] Y. Arano, *Unitary spherical representations of Drinfeld doubles*, Prépublication arXiv :1410.6238 (2014).
- [Avs11] S. Avsec, *Strong solidity of the q -Gaussian Algebras for all $-1 < q < 1$* , Prépublication arXiv :1110.4918 (2011).
- [Baa92] S. Baaĵ, *Représentation régulière du groupe quantique $E_\mu(2)$* , C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I **314** (1992), 1021–1026.
- [Baa95] ———, *Représentation régulière du groupe quantique des déplacements de Woronowicz*, Astérisque **232** (1995), 11–48.
- [Ban23] S. Banach, *Sur le problème de la mesure*, Fund. Math. **4** (1923), 7–33.
- [Ban96] T. Banica, *Théorie des représentations du groupe quantique compact libre $O(n)$* , C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **322** (1996), no. 3, 241–244.
- [Ban97] ———, *Le groupe quantique compact libre $U(n)$* , Comm. Math. Phys. **190** (1997), no. 1, 143–172.
- [Ban99] ———, *Symmetries of a generic coaction*, Math. Ann. **314** (1999), no. 4, 763–780.
- [BDRV06] J. Bichon, A. De Rijdt, and S. Vaes, *Ergodic coactions with large multiplicity and monoidal equivalence of quantum groups*, Commun. Math. Phys. **262** (2006), 703–728.
- [BHR12] R. Boutonnet, C. Houdayer, and S. Raum, *Amalgamated free product type III factors with at most one Cartan subalgebra*, to appear in Compos. Math. (2012).
- [Boc93] F. Boca, *On the method of constructing irreducible finite index subfactors of Popa*, Pacific J. Math. **161** (1993), no. 2, 201–231.
- [Bou12] R. Boutonnet, *On solid ergodicity for Gaussian actions*, J. Funct. Anal. **263** (2012), no. 4, 1040–1063.
- [Bou13] ———, *W^* -superrigidity of mixing Gaussian actions of rigid groups*, Adv. Math. **244** (2013), 69–90.
- [Bra12a] M. Brannan, *Approximation properties for free orthogonal and free unitary quantum groups*, J. Reine Angew. Math. **672** (2012), 223–251.
- [Bra12b] ———, *Reduced operator algebras of trace-preserving quantum automorphism groups*, À paraître dans Documenta Mathematica. (2012).
- [BS89] S. Baaĵ and G. Skandalis, *C^* -algèbres de Hopf et théorie de Kasparov équivariante*, K-theory **2** (1989), no. 6, 683–721.
- [BS93] ———, *Unitaires multiplicatifs et dualité pour les produits croisés de C^* -algèbres*, Ann. Sci. École Norm. Supér. **26** (1993), no. 4, 425–488.
- [BSV03] S. Baaĵ, G. Skandalis, and S. Vaes, *Non-Semi-Regular Quantum Groups Coming from Number Theory*, Commun. Math. Phys. **235** (2003), 139–167.
- [BT03] E. Bédos and L. Tuset, *Amenability and co-amenable for locally compact quantum groups*, Int. J. Math. **14** (2003), no. 8, 865–884.
- [BV12] M. Berbec and S. Vaes, *W^* -superrigidity for group von Neumann algebras of left-right wreath products*, À paraître dans Proc. Lond. Math. Soc. (2012).
- [BZ00] F.P. Boca and A. Zaharescu, *Factors of type III and the distribution of prime numbers*, Proc. London Math. Soc. **80** (2000), no. 1, 145–178.
- [CFW81] A. Connes, J. Feldman, and B. Weiss, *An amenable equivalence relation is generated by a single transformation*, Ergodic Theory Dynam. Systems **1** (1981), 431–450.
- [CH12] I. Chifan and C. Houdayer, *Bass-Serre rigidity results in von Neumann algebras*, Duke Math. J. **153** (2012), no. 1, 23–54.
- [CIK13] I Chifan, A. Ioana, and Y. Kida, *W^* -superrigidity for arbitrary actions of central quotients of braid groups*, Prépublication arXiv :1307.5245 (2013).

- [CJ85] A. Connes and V. Jones, *Property T for von Neumann algebras*, Bull. London Math. Soc.. **17** (1985), no. 1, 57–62.
- [Con73] A. Connes, *Une classification des facteurs de type III*, Ann. Sci. ENS **6** (1973), 133–252.
- [Con76] ———, *Classification of injective factors*, Groups Geom. Dyn. **104** (1976), 73–115.
- [Cor09] Y. de Cornulier, *Infinite conjugacy classes in groups acting on trees*, Groups Geom. Dyn. **3** (2009), 267–277.
- [CP13] I. Chifan and J. Peterson, *Some unique group-measure space decomposition results*, Duke Math. J. **162** (2013), no. 11, 1923–1966.
- [CS13a] M. Caspers and A. Skalski, *The Haagerup property for arbitrary von Neumann algebras*, Prépublication arXiv :1312.1491 (2013).
- [CS13b] I Chifan and T. Sinclair, *On the structural theory of II_1 factors of negatively curved groups*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. **46** (2013), no. 1, 1–33.
- [CSU13] I Chifan, T. Sinclair, and B. Udea, *On the structural theory of II_1 factors of negatively curved groups, II : Actions by product groups*, Adv. Math. **245** (2013), 208–236.
- [Cun82] J. Cuntz, *The K -groups for free products of C^* -algebras*, Proc. Symp. Pure Math. **38** (1982), 81–83.
- [Cun83] ———, *K -theoretic amenability for discrete groups*, J. Reine Angew. Math. **344** (1983), 180–195.
- [Dab10] Y. Dabrowski, *A Free Stochastic Partial Differential Equation*, Prépublication arXiv :1008.4742 (2010).
- [dC11] K. de Commer, *Galois objects and cocycle twisting for locally compact quantum groups*, J. Operator Theory **66** (2011), no. 1, 59–106.
- [dCFY13] K. de Commer, A. Freslon, and M. Yamashita, *CCAP for universal discrete quantum groups*, À paraître dans Comm. Math. Phys. (2013).
- [DF⁺13] M. Daws, P. Fima, , A. Skalski, and S. White, *The Haagerup property for locally compact quantum groups*, À paraître dans Crelle’s journal (2013).
- [DI12] Y. Dabrowski and A. Ioana, *Unbounded derivations, free dilations and indecomposability results for II_1 factors*, Prépublication arXiv :1212.6425 (2012).
- [Dix90] J.D. Dixon, *Most finitely generated permutation groups are free*, Bull. Lond. Math. Soc. **22** (1990), 222–226.
- [Dri85] V.G. Drinfel’d, *Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation*, Sov. Math. Dokl. **32** (1985), 256–258.
- [Dri90] ———, *Quasi-Hopf algebras*, Leningrad. Math. J. **1** (1990), 1419–1457.
- [ES73] M. Enock and J.M. Schwartz, *Une dualité dans les algèbres de von Neumann*, C. R. Acad. Sc. Paris **277** (1973), 683–685.
- [ES75] ———, *Une dualité dans les algèbres de von Neumann*, Supp. Bull. Soc. Math. France Mémoire **44** (1975), 1–144.
- [ES92] ———, *Kac Algebras and Duality of Locally Compact Groups*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [EV93] M. Enock and J.M. Vallin, *C^* -algèbres de Kac et algèbres de Kac*, Proc. London Math. Soc. (3) **66** (1993), 619–650.
- [EV96] M. Enock and L. Vainerman, *Deformation of a Kac algebra by an abelian subgroup*, Commun. Math. Phys. **178** (1996), no. 3, 571–596.
- [Eym64] P. Eymard, *L’algèbre de Fourier d’un groupe localement compact*, Bull. Soc. Math. France **92** (1964), 181–236.
- [FF14] P. Fima and A. Freslon, *Graphs of quantum groups and K -amenability*, Adv. Math. **260** (2014), 233–280.
- [Fim07a] P. Fima, *Constructions et exemples de groupes quantiques localement compacts*, Ph.D. thesis, Université de Caen Basse-Normandie, 2007.
- [Fim07b] ———, *On locally compact quantum groups whose algebras are factors*, J. Funct. Anal. **244** (2007), no. 1, 78–94.

- [Fim10] ———, *Kazhdan's property T for discrete quantum groups*, *Internat. J. Math.* **21** (2010), no. 1, 47–65.
- [Fim11] ———, *A note on the von Neumann algebra of a Baumslag-Solitar group*, *C. R. Acad. Sci. Paris* **349** (2011), no. Ser. 1, 25–27.
- [Fim12] ———, *Amenable, transitive and faithful actions of groups acting on trees*, À paraître dans *Annales de l'Institut Fourier* (2012).
- [Fim13] ———, *K-amenability of HNN extensions of amenable discrete quantum groups*, *J. Funct. Anal.* **265** (2013), no. 4, 507–519.
- [FM77] J. Feldman and C.C. Moore, *Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras I and II*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **234** (1977), 289–324, 325–359.
- [FMS13] P. Fima, S. Moon, and Y. Stalder, *Highly transitive actions of groups acting on trees*, À paraître dans *Proceedings of the AMS* (2013).
- [Fur99] A. Furman, *Orbit equivalence rigidity*, *Ann. of Math.* **150** (1999), 1083–1108.
- [Fur11] ———, *A survey of measured group theory*, Eds. B. Farb and D. Fisher, The University of Chicago Press, 2011.
- [FV08] P. Fima and L. Vainerman, *A locally compact quantum group of upper triangular matrices*, *Ukrainian Math. J.* **60** (2008), no. 4, 564–577.
- [FV09] ———, *Twisting and Rieffel's deformations of locally compact quantum groups. Deformation of the Haar measure*, *Comm. Math. Phys.* **286** (2009), no. 3, 1011–1050.
- [FV12] P. Fima and S. Vaes, *HNN extensions and unique group measure space decomposition of II_1 factors*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **364** (2012), no. 5, 2601–2617.
- [Gab10] D. Gaboriau, *Orbit equivalence and Measured Group Theory*, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Hyderabad, 2010)*, vol. III, Hindustan Book Agency, 2010, pp. 1501–1527.
- [Ge98] L. Ge, *Applications of free entropy to finite von Neumann algebras, II*, *Ann. of Math.* **147** (1998), 143–157.
- [Ger96] E. Germain, *KK-theory of reduced free-product C^* -algebras*, *Duke Math. J.* **82** (1996), no. 3, 707–724.
- [GG13] S. Garion and Y. Glasner, *Highly transitive actions of $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$* , *Groups Geom. Dyn.* **7** (2013), no. 2, 357–376.
- [GJ03] S.R. Gal and Januszkiewicz, *New a - T -menable HNN-extension*, *J. Lie Theory* **13** (2003), no. 2, 383–385.
- [GM91] A. M. W. Glass and S. H. McCleary, *Highly transitive representations of free groups and free products*, *Bull. Austral. Math. Soc.* **43** (1991), no. 2, 19–36.
- [GM07] Y. Glasner and N. Monod, *Amenable action, free products and a fixed point property*, *Bull. Lond. Math. Soc.* **39** (2007), no. 1, 138–150.
- [GN05] R. Grigorchuk and V. Nekrashevych, *Amenable actions of non amenable groups*, *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg Otdel. Math. Inst. Steklov (POMI)* **326** (2005), 85–96.
- [Gre69] F. P. Greenleaf, *Invariants means on topological groups and their applications*, *Van Nostrand Mathematical Studies*, vol. 16, Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1969.
- [Gun92] S. V. Gunhouse, *Highly transitive representations of free products on the natural numbers*, *Arch. Math.* **58** (1992), no. 1, 435–443.
- [Hic92] K. K. Hickin, *Highly transitive Jordan representations of free products*, *J. London Math. Soc.* **46** (1992), 81–91.
- [Hou10a] C. Houdayer, *Strongly solid group factors which are not interpolated free group factors*, *Math. Ann.* **346** (2010), no. 4, 969–989.
- [Hou10b] ———, *Structural results for free Araki-Woods factors and their continuous cores*, *J. Inst. Math. Jussieu* **9** (2010), no. 4, 741–767.

- [HPV13] C. Houdayer, S. Popa, and V. Vaes, *A class of groups for which every action is W^* -superrigid*, Group Geom. Dyn. **7** (2013), no. 3, 577–590.
- [HR11] C. Houdayer and E. Ricard, *Approximation properties and absence of Cartan subalgebra for free Araki-Woods factors*, Adv. Math. **228** (2011), 764–802.
- [HS11] C. Houdayer and D. Shlyakhtenko, *Strongly solid II_1 factors with an exotic MASA*, Int. Math. Res. Not. (2011), no. 3, 1352–1380.
- [HSS14] U. Haagerup, T. Steenstrup, and R. Szwarc, *Grundzuge der Mengenlehre*, von Veit, Leipzig (1914).
- [HV12] C. Houdayer and S. Vaes, *Type III factors with unique Cartan decomposition*, À paraître dans J. Math. Pures Appl. (2012).
- [Ioa11a] A. Ioana, *Cocycle superrigidity for profinite actions of property (T) groups*, Duke Math. J. **157** (2011), no. 2, 337–367.
- [Ioa11b] ———, *W^* -superrigidity for Bernoulli actions of property (T) groups*, J. of the AMS **24** (2011), 1175–1226.
- [Ioa12a] ———, *Cartan subalgebras of amalgamated free product II_1 factors*, Prépublication arXiv :1207 :0054 (2012).
- [Ioa12b] ———, *Classification and rigidity for von Neumann algebras*, À paraître dans Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Krakow, 2012), 2012.
- [Ioa12c] ———, *Compact actions and uniqueness of the group measure space decomposition of II_1 factors*, J. Funct. Anal. **262** (2012), no. 10, 4525–4533.
- [IPV13] A. Ioana, S. Popa, and S. Vaes, *A class of super rigid group von Neumann algebras*, Ann. of Math. **178** (2013), no. 2, 231–286.
- [Iso12] Y. Isono, *Examples of factors which have no Cartan subalgebras*, Prépublication arXiv :1209.1728 (2012).
- [Iso13a] ———, *On bi-exactness of discrete quantum groups*, Prépublication arXiv :1308.5103 (2013).
- [Iso13b] ———, *Weak exactness for C^* -algebras and application to condition (AO)*, J. Funct. Anal. **264** (2013), no. 4, 964–998.
- [Jim85] M. Jimbo, *A q -difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **10** (1985), 63–69.
- [Jol02] P. Jolissaint, *Haagerup property for finite von Neumann algebras*, J. Operator Theory **48** (2002), no. 3, 549–571.
- [JV84] P. Julg and A. Valette, *K -theoretic amenability for $SL_2(Q_p)$, and the action on the associated tree*, J. Funct. Anal. **58** (1984), no. 2, 194–215.
- [Kac61] G.I. Kac, *Generalization of the group principle of duality*, Soviet Math. Dokl. **2** (1961), 581–584.
- [Kac65] ———, *Ring groups and the principle of duality*, I, II, Trans. Moscow Math. Soc. (1963, 1965), 291–339, 94–126.
- [Kas09] P. Kasprzak, *Rieffel deformation via crossed-product*, J. Funct. Anal. **257** (2009), no. 5, 1288–1332.
- [Kid10] Y. Kida, *Measure equivalence rigidity of the mapping class group*, Ann. of Math. **171** (2010), no. 3, 1851–1901.
- [Kid11] ———, *Rigidity of amalgamated free products in measure equivalence*, J. Topol. **4** (2011), no. 3, 687–735.
- [Kir92] E. Kirchberg, , Lecture at the conference Invariants in operator algebras, Copenhagen (1992).
- [Kit12] D. Kitroser, *Highly transitive actions of surface groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **140** (2012), 3365–3375.
- [Kre63] M.G. Krein, *Hermitian-positive kernels on homogeneous spaces*, I, II, Am. Math. Soc. Transl. **34** (1963), 69–108, 109–164.
- [Kri76] W. Krieger, *On ergodic flows and the isomorphism of factors*, Math. Ann. **223** (1976), 19–70.
- [KS12] D. Kyed and P.M. Soltan, *Property (T) and exotic quantum groups*, J. Noncommut. Geom. **6** (2012), no. 4, 773–800.

- [KV73] G.I. Kac and L.I. Vainerman, *Nonunimodular ring-groups and Hopf-von Neumann algebras*, Soviet Math. Dokl. **14** (1973), 1144–1148.
- [KV74] ———, *Nonunimodular ring-groups and Hopf-von Neumann algebras*, Math. USSR Sbornik **23** (1974), 185–214.
- [KV00] J. Kustermans and S. Vaes, *Locally compact quantum groups*, Ann. Sci. ENS **33** (2000), no. 6, 837–934.
- [KV03] ———, *Locally compact quantum groups in the von Neumann algebraic setting*, Math. Scand. **92** (2003), no. 1, 68–92.
- [Kye11] D. Kyed, *A cohomological description of property (T) for quantum groups*, J. Funct. Anal. **261** (2011), no. 6, 1469–1493.
- [Lan94] M.B. Landstad, *Quantization arising from abelian subgroups*, Int. J. Math. **5** (1994), 897–936.
- [Leb01] H. Lebesgue, *Sur une généralisation de l'intégrale définie*, C. R. Acad. Sci. Paris **132** (1901), 1025–1028.
- [Lem13a] F. Lemeux, *Haagerup property for quantum reflexion groups*, À paraître dans proceedings of the AMS. (2013).
- [Lem13b] ———, *The fusion rules of some free wreath product quantum groups and applications*, Prépublication arXiv :1311.6115 (2013).
- [McD77] T. P. McDonough, *A permutation representation of a free group*, Quart. J. Math. Oxford. **28** (1977), 353–356.
- [MN94] T. Masuda and Y. Nakagami, *A von Neumann algebra framework for the duality of the quantum groups*, Publ. RIMS, Kyoto University **30** (1994), 799–850.
- [Mol91] D.I. Moldavanskii, *On the isomorphisms of Baumslag-Solitar groups*, Ukrain. Mat. Zh. **43** (1991), 1684–1686.
- [Moo10] S. Moon, *Amenable actions of amalgamated free products*, Groups, Geometry and Dynamics **4** (2010), no. 2, 309–332.
- [Moo11a] ———, *Amenable actions of amalgamated free products of free groups over a cyclic subgroup and generic property*, Ann. Math. Blaise Pascal **18** (2011), no. 2, 287–296.
- [Moo11b] ———, *Permanent properties of amenable, transitive and faithful actions*, Bull. Belgian Math. Soc. Simon Stevin **18** (2011), no. 2, 287–296.
- [MS13] S. Moon and Y. Stalder, *Highly transitive actions of free products*, Algebr. Geom. Topol. **13** (2013), 589–607.
- [MvN36] F.J. Murray and J. von Neumann, *On rings of operators*, Ann. of Math. **37** (1936), 716–808.
- [MvN43] ———, *On rings of operators. IV.*, Ann. of Math. **44** (1943), 116–129.
- [OP04] N. Ozawa and S. Popa, *Some prime factorization results for type II_1 factors*, Invent. Math. **156** (2004), no. 2, 223–234.
- [OP10a] ———, *On a class of II_1 factors with at most one Cartan subalgebra*, Ann. of Math. **172** (2010), no. 1, 713–749.
- [OP10b] ———, *On a class of II_1 factors with at most one Cartan subalgebra II*, American J. Math. **132** (2010), no. 3, 841–866.
- [OR13] M. Okayasu and Tomatsu R., *The Haagerup approximation property for arbitrary von Neumann algebras*, Prépublication arXiv :1312.1033 (2013).
- [Oza04] N. Ozawa, *Solid von Neumann algebras*, Acta Math. **192** (2004), 111–117.
- [Oza06a] ———, *A Kurosh-type theorem for type II_1 factors*, Int. Math. Res. Not. (2006), Art. ID 97560.
- [Oza06b] ———, *Boundary amenability of relatively hyperbolic groups*, Topology Appl. **153** (2006), no. 14, 2624–2630.
- [Oza09] ———, *An example of a solid von Neumann algebra*, Hokkaido Math. J. **38** (2009), no. 3, 557–561.
- [Pet09a] J. Peterson, *Examples of group actions which are virtually W^* -superrigid*, Prépublication arXiv :1002.1745 (2009).

- [Pet09b] ———, *L²-rigidity in von Neumann algebras*, Invent. Math. **175** (2009), 417–433.
- [Pim86] M.V. Pimsner, *KK-groups of crossed products by groups acting on trees*, Invent. Math. **86** (1986), no. 3, 603–634.
- [Pop83] S. Popa, *Orthogonal pairs of *-algebras and finite von Neumann algebras*, J. Operator Theory **9** (1983), no. 2, 253–268.
- [Pop06] ———, *Strong rigidity of II₁ factors arising from malleable actions of w-rigid groups, I and II.*, Invent. Math. **165** (2006), 260–408, 409–452.
- [Pop07a] ———, *Cocycle and orbit equivalence superrigidity for malleable actions of w-rigid groups*, Invent. Math. **170** (2007), 243–295.
- [Pop07b] ———, *Deformation and rigidity for group actions on von Neumann algebras*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Madrid, 2006), vol. I, European Mathematical Society Publishing House, 2007, pp. 445–477.
- [Pop08] ———, *On the superrigidity of malleable actions with spectral gap*, J. Amer. Math. Soc. **21** (2008), 981–1000.
- [PS12] J. Peterson and T. Sinclair, *On cocycle superrigidity for Gaussian actions*, Erg. Th. and Dyn. Sys. **32** (2012), no. 1, 249–272.
- [PV82] M.V. Pimsner and D.V. Voiculescu, *K-groups of reduced crossed products by free groups*, J. Operator Theory **8** (1982), no. 1, 131–156.
- [PV10] S. Popa and S. Vaes, *Group measure space decomposition of II₁ factors and W*-superrigidity*, Invent. Math. **182** (2010), 371–417.
- [PV11] ———, *Cocycle and orbit superrigidity for lattices in SL(n, ℝ) acting on homogeneous spaces*, Geometry, rigidity, and group actions. Chicago lectures in Math. (2011), 419–451.
- [PV13a] ———, *Unique Cartan decomposition for II₁ factors arising from arbitrary actions of free groups*, À paraître dans Acta Math. (2013).
- [PV13b] ———, *Unique Cartan decomposition for II₁ factors arising from arbitrary actions of hyperbolic groups*, À paraître dans Crelle’s Journal (2013).
- [Rie93a] M. Rieffel, *Compact quantum groups associated with toral subgroups*, Contemp. Math. Phys. **145** (1993), 465–491.
- [Rie93b] ———, *Deformation quantization for actions of ℝ^d*, Memoirs A.M.S. **506** (1993).
- [Rie95] ———, *Non compact quantum groups associated with abelian subgroups*, Comm. Math. Phys. **171** (1995), no. 1, 181–201.
- [Sha05] Y. Shalom, *Measurable group theory*, Proceedings of the 4th European Congress of Mathematics (Stockholm, 2004), European Mathematical Society Publishing House, 2005, pp. 391–423.
- [Shl00] D. Shlyakhtenko, *Prime type III factors*, Proc. Nat. Acad. Sci. **97** (2000), 12439–12441.
- [Shl04] ———, *Some estimates for non-microstates free entropy dimension with applications to q-semicircular families*, Int. Math. Res. Not. **51** (2004), 2757–2772.
- [Shl09] ———, *Lower estimates on microstates free entropy dimension*, Anal. PDE **2** (2009), no. 2, 119–146.
- [Sin11] T. Sinclair, *Strong solidity of group factors from lattices in SO(n, 1) and SU(n, 1)*, J. Funct. Anal. **260** (2011), no. 11, 3209–3221.
- [Ska88] G. Skandalis, *Une notion de nucléarité en K-théorie (d’après J. Cuntz)*, K-theory **1** (1988), no. 6, 549–573.
- [Sta06] Y. Stalder, *Moyennabilité intérieure et extensions HNN*, Ann. Inst. Fourier **56** (2006), no. 2, 309–323.
- [Sti59] W.F. Stinespring, *Integration theorems for gauges and duality for unimodular locally compact groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **90** (1959), 15–56.
- [Tan38] T. Tannaka, *Über den Dualitätssatz der nichtkommutativen topologischen Gruppen*, Tohoku Math. J. **45** (1938), 1–12.

- [Tar29] A. Tarski, *Sur les fonctions additives dans les classes abstraites et leur application au problème de la mesure*, C. R. Soc. Sc. Varsovie **22** (1929), 114–117.
- [Tat66] N. Tatsuuma, *A duality theorem for locally compact groups*, I, II, Proc. Japan Acad. **41**, **42** (1965, 1966), 878–882, 46–47.
- [Tom06] R. Tomatsu, *Amenable discrete quantum groups*, J. Math. Soc. Japan **58** (2006), no. 4, 949–964.
- [Ued05] Y. Ueda, *HNN extensions of von Neumann algebras*, J. Funct. Anal. **225** (2005), no. 2, 383–426.
- [Vae07] S. Vaes, *Rigidity results for Bernoulli actions and their von Neumann algebras (after S. Popa)*, Séminaire Bourbaki, exposé 961. Astérisque **311** (2007), 237–294.
- [Vae10] ———, *Rigidity for von Neumann algebras and their invariants*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Hyderabad, 2010), vol. III, Hindustan Book Agency, 2010, pp. 1624–1650.
- [Vae13] ———, *One-cohomology and the uniqueness of the group measure space decomposition of a II_1 factor*, Mathematische Annalen **355** (2013), 661–696.
- [Val85] J.M. Vallin, *C^* -algèbres de Hopf et C^* -algèbres de Kac*, Proc. London Math. Soc. **50** (1985), no. 3, 131–174.
- [vD90] E. K. van Douwen, *Measures invariant under actions of \mathbb{F}_2* , Topology Appl. **34** (1990), no. 1, 53–68.
- [VD98] A. Van Daele, *An algebraic framework for group duality*, Adv. in Math. **140** (1998), 323–366.
- [VD01] ———, *The Haar measure on some locally compact quantum groups*, Preprint K.U.Leuven (2001).
- [VDW96] A. Van Daele and S. Wang, *Universal quantum groups*, Internat. J. Math. **7** (1996), 255–264.
- [Ver04] R. Vergnioux, *K -amenability for amalgamated free products of amenable discrete quantum groups*, J. Funct. Anal. **212** (2004), no. 1, 206–221.
- [vN29] J. von Neumann, *Zur allgemeinen theorie der massen*, Fund. Math. **13** (1929), 73–116.
- [Voi96] D.V. Voiculescu, *The analogues of entropy and of Fishers information measure in free probability theory, III*, GAFA, Geom. funct. Anal.. **6** (1996), 172–199.
- [Voi11] C. Voigt, *The Baum-Connes conjecture for free orthogonal quantum groups*, Adv. Math. **227** (2011), 1873 – 1913.
- [Voi12] ———, *Quantum $SU(2)$ and the Baum-Connes conjecture. Operator algebras and quantum groups*, Banach Center Publ. **98** (2012), 1.
- [Voi14] ———, *On the structure of quantum automorphism groups*, Prépublication arXiv :1411.1939 (2014).
- [VV03] S. Vaes and L. Vainerman, *Extensions of locally compact quantum groups and the bicrossed product construction*, Adv. in Math. **175** (2003), 1–101.
- [VV07] S. Vaes and R. Vergnioux, *The boundary of universal discrete quantum groups, exactness and factoriality*, Duke Math. J. **140** (2007), no. 1, 35–84.
- [VV13] R. Vergnioux and C. Voigt, *The K -theory of free quantum groups*, Math. Ann. (2013).
- [Wan95] S. Wang, *Free products of compact quantum groups*, Comm. Math. Phys. **167** (1995), no. 3, 671–692.
- [Wan96] ———, *Deformation of Compact Quantum Groups via Rieffel’s Quantization*, Commun. Math. Phys. **178** (1996), no. 3, 747–764.
- [Wan98] ———, *Quantum symmetry groups of finite spaces*, Comm. Math. Phys. **195** (1998), no. 1, 195–211.
- [Wor87a] S.L. Woronowicz, *Compact matrix pseudogroups*, Commun. Math. Phys. **111** (1987), 613–665.
- [Wor87b] ———, *Twisted $SU(2)$ group. An example of a non-commutative differential calculus*, Publ. RIMS, Kyoto University **23** (1987), 117–181.
- [Wor88] ———, *Tannaka-Krein duality for compact matrix pseudogroups. Twisted $SU(N)$ groups*, Invent. Math. **93** (1988), no. 1, 35–76.

- [Wor91] ———, *Quantum E(2) group and its Pontryagin dual*, Lett. Math. Phys. **23** (1991), 251–263.
- [Wor96] ———, *From multiplicative unitaries to quantum groups*, Int. J. Math. **7** (1996), no. 1, 127–149.
- [Wor98] ———, *Compact quantum groups*, in 'Symétries quantiques' (Les Houches, 1995). North-Holland, Amsterdam (1998), 845–884.
- [Wor01] ———, *Quantum 'az+b' group on complex plane*, Int. J. Math. **12** (2001), 461–503.
- [WZ02] S.L. Woronowicz and S. Zakrzewski, *Quantum 'ax+b' group*, Review in Mathematical Physics **14** (2002), 797–828.
- [Zim80] R.J. Zimmer, *Strong rigidity for ergodic actions of semisimple Lie groups*, Ann. of Math. **112** (1980), 511–529.
- [Zim84] ———, *Ergodic theory and semi simple Lie groups*, Monographs in Mathematics, vol. 81, Birkhauser Verlag, Basel, 1984.