DIX ANS DE RECHERCHES FRANÇAISES

SUR L'ENSEIGNEMENT DE L'ALGEBRE LINEAIRE

EN PREMIERE ANNEE D'UNIVERSITE

SCIENTIFIQUE

DIAGNOSTICS, ANALYSES, INGENIERIES

Marc Rogalski

PLAN

I. DIAGNOSTICS

1/ 1987 : Aline ROBERT et Jacqueline ROBINET, enquête sur 379 étudiants de Lille I, Paris VI et Paris VII
2/ 1990 : La thèse de Jean-Luc DORIER, une section ordinaire de DEUG et l'algèbre linéaire
3/ 1997 : Une enquête à l'entrée du Capes

II. ANALYSES

A. CONSTATS

1/ Les concepts d'algèbre linéaire sont de type FUGS
2/ Il n'y a pas de bons problèmes d'introduction
3/ Un "langage universel" des mathématiciens
4/ Une histoire à l'opposé de l'enseignement

B. HYPOTHESES

1/ Prendre en compte la nature FUGS des concepts
2/ Des prérequis sont nécessaires

III. UNE INGENIERIE ENSEIGNEE A LILLE

1/ Principes généraux
2/ Des choix particuliers
3/ Déroulement chronologique
4/ Quelques exemples
5/ Synthèse
6/ Problèmes d'évaluation

I. DIAGNOSTICS

1/ 1987 : Aline ROBERT et Jacqueline ROBINET,
enquête sur 379 étudiants de Lille I, Paris VI et Paris VII

146 étudiants de Paris VII, 50 de Paris VI, 183 de Lille I, entrant en Deug A deuxième année

Quelques exemples :

	Thèmes	Taux de succès
(a)	Résolution d'un système linéaire 4x4 simple	< 50 %
(b)	Détermination de la matrice d'une application linéaire dans l'espace des polynômes de d° ≤ 2	65 %
(c)	Manipulation de l'image et du noyau d'une application linéaire	< 25 %

Les étudiants se disent "débordés par les notions abstraites"

2/ 1990 : La thèse de Jean-Luc DORIER, une section ordinaire de DEUG et l'algèbre linéaire

Dépouillement et analyse de toutes les productions en algèbre linéaire des étudiants d'une section "ordinaire" de Deug à Paris VI pendant une année universitaire

Prétest d'algèbre et logique à l'entrée

(a) Etude des prérequis en logique et algèbre
- * "L'hypothèse des blocs" confirmée
- * Ce n'est pas la logique "pure" qui pose problème

(b) Les tâches données aux étudiants : deux dichotomies très fortes :

1/ * tâches extérieures à l'algèbre linéaire, où celle-ci sert d'outil
   * tâches internes à l'algèbre linéaire

2/ * tâches calculatoires ou algorithmiques
   * tâches conceptuelles

(c) Les problèmes des étudiants
- * Incompréhension du "jeu" auquel on joue
- * Difficultés techniques avec les équations
- * Dans le cadre formel : pas de moyen de contrôle, "pertes de sens", absurdités, sauf si les tâches sont algorithmiques

(d) Conséquences sur l'enseignement et les contrôles : la négociation à la baisse

(e) Une confrontation à l'histoire de l'algèbre linéaire

3/ 1997 : Une enquête à l'entrée du Capes

(a) 160 étudiants de Lille I et 50 de Versailles, entrant en préparation au Capes, et titulaires d'une licence (et certains de tout ou partie d'une maîtrise)

Une question d'algèbre linéaire :

" On considère un système de k équations linéaires et homogènes à n inconnues réelles. Que peut-on dire de la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ formé par les solutions ?" Un taux de bonnes réponses voisin de ZERO

(b) Deux ans avant, dans un test passé par 14 étudiants étrangers (de différentes origines) recrutés sur dossier à l'Ecole Polytechnique, avec un niveau d'études souvent supérieur à la licence :

même question, même taux de réponses correctes.

II. ANALYSES

A. CONSTATS

1/ Les concepts d'algèbre linéaire sont de type FUGS

FUGS
=
formalisateur, unificateur, généralisateur, simplificateur

Espaces vectoriels, indépendance, applications linéaires, bases, sommes directes, noyaux, formes linéaires, rang …

La question de la "nature" des concepts…

2/ Il n'y a pas de bons problèmes d'introduction

Peut-on faire fonctionner une dialectique outil/objet ?
Peut-on trouver des situations fondamentales ?

On a cherché … on n'a pas trouvé !

Comparaison avec des domaines de l'analyse …

Tout problème de niveau raisonnable (Deug 1° année) qu'on peut résoudre avec l'algèbre linéaire peut se résoudre sans elle, donc avec une forte économie de concepts (même s'il y a plus de calculs…).

Comment imaginer un problème qui va forcer l'étudiant à formaliser, unifier, … bref, "fugser" ?

3/ Un "langage universel" des mathématiciens

Les mathématiciens parlent, pensent, vivent dans le linéaire.

Pour eux, l'algèbre linéaire est "naturelle". Cette "naturalisation" les empêche de voir qu'elle n'est pas naturelle pour les étudiants.

Les rapports à l'algèbre linéaire d'un enseignant de math. et d'un étudiant sont très éloignés. Efficacité, situations de référence, …

Qu'est-ce qui justifie le prix à payer, le détour théorique, de la construction de l'algèbre linéaire, pour un "matheux", qu'est-ce qui peut le justifier pour un étudiant ?

4/ Une histoire à l'opposé de l'enseignement

La thèse de Jean-Luc Dorier contient un panorama détaillé de l'évolution de l'algèbre linéaire.

Processus long et complexe
Une convergence de multiples problèmes
Des changements de points de vue
Des apports extérieurs
Des phases volontairement abstraites
Une acceptation tardive

Quatre aspects principaux (en simplifiant à l'excès)

1/ Le linéaire : les équations, mais aussi : courbes algébriques, déterminants, formes quadratiques, transformations linéaires, matrices
2/ La géométrie analytique
3/ Le calcul vectoriel, issu de la géométrie, en formalisant certains aspects
4/ L'algèbre linéaire proprement dite, d'abord dans le cadre des espaces R^n, le langage algébrique éliminant le recours aux déterminants, puis dans le cadre axiomatique, accepté par les mathématiciens seulement lorsque l'utilisation "forcée" d'espaces de dimension infinie en analyse l'impose (1925-30)

Des concepts centraux ont eu du mal à se dégager :
les vecteurs en géométrie
le rang (d'abord pour des équations)

La formalisation a eu des causes variées, en particulier les nouvelles préoccupations qu'ont été la clarification des structures algébriques, mais aussi des soucis d'exposition, de généralisation, de simplification

Aucune de ces problématiques n'apparaît dans l'enseignement classique de l'algèbre linéaire :

on part des axiomes, il n'est pas rare qu'on n'ait pas le temps d'arriver à des applications, alors que la démarche de l'algèbre linéaire a souvent été l'unification et la convergence de problèmes particuliers résolus sans elle : un mouvement FUGS, bien sûr !

J.-L. Dorier montre bien que, du coup, les problèmes donnés aux étudiants ne leur permettent pas de se construire une problématique de l'algèbre linéaire.

B. HYPOTHESES

1/ Prendre en compte la nature FUGS des concepts

* disposer de connaissances préalables qu'on va <u>unifier</u> par l'algèbre linéaire ;
* faire comprendre l'intérêt qu'il y a à <u>formaliser</u> des concepts, à <u>généraliser</u> des connaissances ;
* faire prendre conscience du gain <u>simplificateur</u> ainsi obtenu.

Pour cela, trois idées :

* le recours au "levier méta" ;
* la construction d'une "ingénierie longue" ;
* l'utilisation des "changements de points de vue"

2/ Des prérequis sont nécessaires

(a) Une compréhension des enjeux de vérité en math., une pratique élémentaire de la LTE (logique et théorie des ensembles)

(b) Une acceptation de la démarche algébrique et axiomatique

(c) Une pratique de la géométrie des droites et plans dans l'espace, et de la géométrie cartésienne

Mais ces "prérequis" sont aussi un des enjeux de l'algèbre linéaire, il n'est pas nécessaire de les supposer acquis, on peut les construire en même temps que les débuts de l'algèbre linéaire.

III. UNE INGENIERIE ENSEIGNEE A LILLE

Une rencontre entre une section naïvement expérimentale, une reconversion partielle et des recherches théoriques

1/ Principes généraux

Trois grands principes :

(a) Le recours au "levier méta"
(b) La construction d'une "ingénierie longue"
(c) L'utilisation du jeu sur la diversité des cadres, des points de vue, et des changements de points de vue

(a) <u>Le "levier méta"</u>

Développer pour les étudiants :

* des connaissances générales sur les mathématiques et leur apprentissage (fonctionnement, utilisation, distinction général/particulier, notion de cadre, rôle des détours théoriques, importance des situations de référence, …) ;

* des connaissances sur les mathématiques particulières enseignées (problématiques, questionnements, méthodes, différents points de vue, … "pourquoi ? comment ? d'où ça vient ? ça sert à quoi ?", …).

Cela peut (doit ?) se faire de deux façons :
* des discours de l'enseignant, en différentes occasions et selon des modalités spécifiques ;

* la création de situations "réflexives" à faire vivre aux étudiants, ayant pour rôle de les faire réfléchir sur leurs connaissances et les moyens de s'en servir.

Nous choisissons trois cadres privilégiés pour l'intervention du "méta" :

1/ travailler l'activité FUGS avec les étudiants ;

2/ l'algèbre linéaire est un "cadre de modélisation" pour d'autres domaines mathématiques (c'est l'un des aspects du "détour théorique" que constitue l'algèbre linéaire) ;

3/ il y a en algèbre linéaire des "méthodes" pour la résolution de problèmes, qui permettent de guider la recherche, mais qui ne sont pas des algorithmes

(b) La construction d'une "ingénierie longue"

Il s'agit d'organiser dans le temps :

* la construction des prérequis évoqués plus haut ;

* un changement du contrat didactique (valoriser les réflexions méta, l'apprentissage de méthodes, l'acceptation du détour théorique, …) ;

* la création de problématiques ;

* la mise en place d'enseignements préalables à certaines étapes de l'algèbre linéaire, et qui vont permettre d'unifier, généraliser, formaliser, bref organiser une convergence de thèmes d'origines différentes (par ex. : équations linéaires en : arithmétique, équations numériques, équations différentielles, théorie des polynômes, équations fonctionnelles,…) ;

* la reprise et la relecture de connaissances antérieures dans le nouveau formalisme, et le réinvestissement de celui-ci avec preuve de son efficacité ;

* l'enseignement de méthodes.

(c) <u>L'utilisation du jeu sur la diversité des cadres, des points de vue, et des changements de points de vue</u>

Les concepts FUGS fonctionnent dans des cadres différents, sous des points de vue différents.

Changer de point de vue peut être un moteur pour l'activité d'unification et de formalisation : sous des points de vue différents, on retrouve …

Deux exemples :

* voir une équation linéaire

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$$

comme un vecteur

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$$

permet de transférer la pratique des combinaisons linéaires d'équations vers la recherche d'un invariant formel dans cette pratique (le rang des vecteurs associés) ;

* le changement de points de vue équations/paramétrage, vu en géométrie cartésienne, se réinvestit dans les deux visions duales des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$.

2/ Des choix particuliers

5 principes particuliers d'organisation de l'ingénierie :

$\boxed{1}$ Démarrer parallèlement sur :

* les équations linéaires, avec dégagement d'un questionnement :
  - de combien d'équations ai-je vraiment besoin ?
  - combien de paramètres faut-il pour décrire les solutions ?

* la géométrie cartésienne dans l'espace, avec le double point de vue pour décrire les objets géométriques : équations/paramétrage.

$\boxed{2}$ Dégager, de manière centrale, la notion de rang (comme recherche d'un invariant)

$\boxed{3}$ Mettre en valeur des méthodes de résolution de problèmes en algèbre linéaire

$\boxed{4}$ Faire travailler les étudiants en ateliers : travail autonome en petits groupes de 4, sur des problèmes assez ouverts, sans indication, en particulier pour des prises de conscience "méta" ou méthodologiques

$\boxed{5}$ Donner 6 grands objectifs, progressivements précisés, et bien mis en évidence :

(1) Une technique de base : la méthode de Gauss
- résoudre des systèmes
- trouver le nombre minimum d'équations …
- déterminer le rang d'une famille de vecteurs
- trouver des bases
- identifier l'image d'une application

(2) Un concept central : le rang
de vecteurs, d'équations, d'un tableau, d'une application
Avec ce concept : indépendance, sous-espace engendré, base, dimension, …

(3) Un double point de vue permanent :
équations/paramétrage

(4) Un modèle central de problématique :
l'équation linéaire générale $T(x) = y$

(5) Une préoccupation constante : choisir des bases adaptées à la résolution des problèmes étudiés

(6) Un outil efficace :
quand l'unicité implique l'existence

3/ Déroulement chronologique

Première étape : création d'une problématique

Algèbre linéaire	Autres
Systèmes d'équations linéaires $\mathbf{R}^n$ comme simplement le cadre où on cherche les solutions	LTE Arithmétique Droites et plans dans l'espace Géométrie analytique : équations et paramétrage

Les questions qu'on met en valeurs :
"ai-je trop, pas assez, juste ce qu'il faut d'équations …?"
"de combien de paramètres ai-je besoin pour décrire l'ensemble des solutions ?"

Point charnière de la problématique :

∗ Si rajouter une équation $f = 0$ à un système $e_i = 0$, $i = 1,\ldots, m$, possédant des solutions, ne change pas l'ensemble des solutions, alors $f = \sum_{1}^{m} \lambda_i e_i$.

∗ Faisceau d'hyperplans vectoriels

∗ On ôte des équations inutiles jusqu'à ce qu'on ne puisse plus …

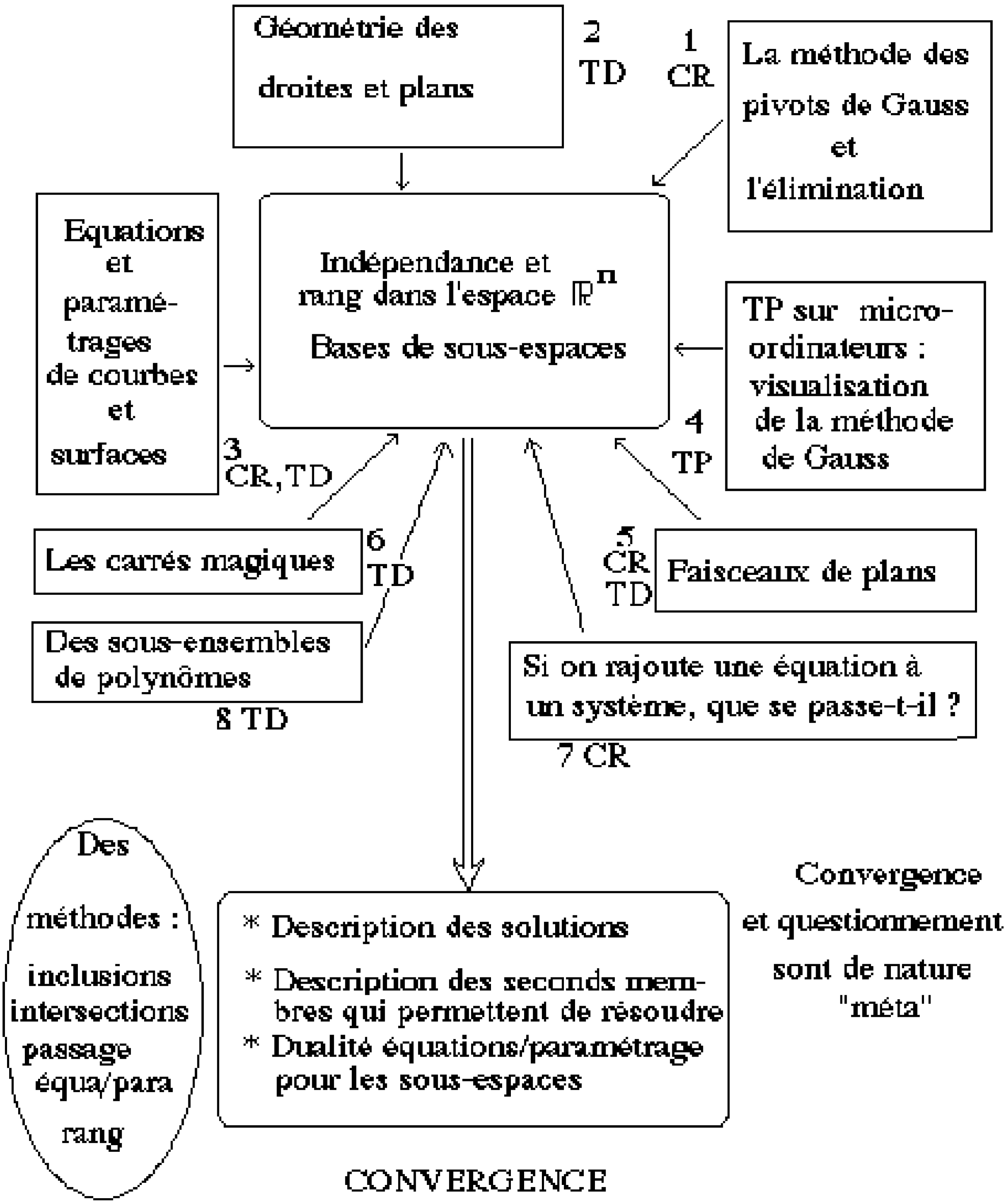
→Transition vers la deuxième étape…

Deuxième étape : passage des équations aux vecteurs de R^n, le rang, les sous-espaces vectoriels et la dualité associée

Algèbre linéaire	Autres
* Indépendance linéaire et rang dans $\mathbf{R}^n$ * Sous-espaces de $\mathbf{R}^n$, équations et dimension/paramétrage * Un peu de base	* Polynômes et fractions rationnelles * Suites récurrentes linéaires * Equations différentielles linéaires $\Downarrow$ Vers la troisième étape $\Downarrow$ Un peu de théorie des groupes (pour la notation symbolique)

Dans cette étape, on ne développe pas "l'algèbre linéaire dans $\mathbf{R}^n$ " de façon intensive (contrairement à l'option anglo-saxonne), à cause de l'absence du langage intrinsèque de l'algèbre linéaire générale :

sans lui, il apparaît de nombreuses confusions entre vecteurs et représentations des vecteurs, applications linéaires et représentations des applications linéaires


Géométrie des
droites et plans
2
TD
1
CR
La méthode des
pivots de Gauss
et
l'élimination
Equations
et
paramé-
trages
de courbes
et
surfaces
Indépendance et
rang dans l'espace $\mathbb{R}^n$
Bases de sous-espaces
TP sur micro-
ordinateurs :
visualisation
de la méthode
de Gauss
4
TP
3
CR,TD
Les carrés magiques
6
TD
5
CR
TD
Faisceaux de plans
Des sous-ensembles
de polynômes
8 TD
Si on rajoute une équation à
un système, que se passe-t-il ?
7 CR
Des
méthodes :
inclusions
intersections
passage
équa/para
rang
* Description des solutions
* Description des seconds mem-
bres qui permettent de résoudre
* Dualité équations/paramétrage
pour les sous-espaces
Convergence
et questionnement
sont de nature
"méta"
CONVERGENCE

Troisième étape : l'algèbre linéaire générale

Activités sur des groupes concrets, éléments de théorie des groupes	Atelier : quelles sont les règles du "calcul linéaire" dans divers domaines mathématiques

Les axiomes des espaces vectoriels

* 3 notions clés : - combinaison linéaire
  - sous-espace vectoriel
  - application linéaire, isomorphisme
* indépendance, rang, bases, dimension

Le modèle de l'équation linéaire générale $T(u) = v$

5 exemples fondamentaux (situations de référence) :

* suites récurrentes linéaires
* équations différentielles linéaires
* systèmes d'équations numériques linéaires
* décomposition d'un vecteur sur des vecteurs donnés
* une équation fonctionnelle

Le rôle des bases

* L'isomorphisme avec $\mathbf{R}^n$
* Matrice d'une application linéaire
* Choix adaptés de bases (polynômes, fractions, …)

Comment résoudre $T(u) = v$?

* Noyau, image, rang et théorème de la dimension
* Méthodes : travailler sur les vecteurs-colonnes,
  travailler sur les "lignes-équations"

Quand l'unicité implique l'existence

L'équivalence entre injectivité et surjectivité (quand la dimension est la même) donne des solutions simples à des problèmes difficiles dans divers domaines mathématiques.

Quatrième étape : le calcul matriciel

Cette étape est brève et assez technique. Nous la mettons tard et y insistons peu, pour que l'attrait de la virtuosité calculatoire ne remplace pas les enjeux conceptuels.

4/ Quelques exemples

(1) Un exemple de situation "méta" en devoir

"Trouver les polynômes de d° ≤ 13 valant 2 en 0, -1 en 1, 4 en 2, …, 7 en 13."

On amène d'abord les étudiants à être obligés de choisir entre 2 stratégies :

* résoudre un système de 14 équations linéaires à 14 inconnues ;
* faire un effort théorique pour trouver une base adaptée de l'espace des polynômes dans laquelle une formule théorique (Newton-Grégory) permet une solution simple, et même une solution simple de tous les problèmes analogues.

Puis on leur demande de commenter ce choix. Il s'agit d'utiliser le "principe d'économie" pour faire comprendre l'avantage du détour théorique.

(2) Un exemple de situation "méta" en ateliers

On donne d'abord à réfléchir sur une loi de composition qui n'est ni commutative ni associative : $(x, y) \rightarrow x^y$.

Puis on donne l'énoncé de 5 problèmes élémentaires de calculs linéaires pour résoudre des équations, et on demande aux étudiants de noter soigneusement toutes les règles de calcul qu'ils ont utilisées inconsciemment.

Cet atelier précède le cours d'introduction de la troisième partie, introduisant les axiomes des espaces vectoriels.

L'énoncé :

1/ Trouver, si c'est possible, une fonction f sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ vérifiant

$$\frac{3}{2}\ f - f_0 = f + \frac{3}{2}\ [2f - 4f_0] + f + 4f_0\ ,$$

où f_0 est la fonction définie par $f_0(x) = \tan x$.

2/ Trouver, si c'est possible, un vecteur u de ″ 4 vérifiant

$$\sqrt{2}\ u - u = u + 3[2u - u_0] + u + 4u_0\ ,$$

où u_0 est le vecteur $(1,-2,6,\pi)$.

3/ Trouver, si c'est possible, un polynôme P à coefficients rationnels, vérifiant

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\ P - P = P + \frac{4}{7}\ [2P - P_0] + 5P_0\ ,$$

où $P_0(x) = 3x^3 - \frac{6}{5}\ x + 4$.

4/ Même énoncé que 3/, en remplaçant $\frac{\sqrt{3}}{2}$ par $\frac{3}{2}$.

5/ Même énoncé que 3/, en remplaçant "rationnels" par "complexes" et $\frac{\sqrt{3}}{2}$ par $1+ i$.

(3) Un exemple de discussion "méta" : « peut-on dire qu'une fonction est un vecteur ? »

(4) Un atelier sur le changement de cadres : déterminer des ensembles de polynômes de d° **≤ 2**

E_1 P(0) = 0
E_2 P'(1) + P(0) = 1
E_3 P'(1) + P(0) = 1 et P(0) = 0
E_4 P''(0) = P(0)
E_5 P'(0) = $\frac{1}{2}$
E_6 P'(1) + P(0) = 1 et P''(0) = P(0)
E_7 2P(0) + P'(0) = 1
E_8 2P(0) + P'(0) = 1 et P''(0) = P(0) et P'(1) + P(0) = 1
E_9 2P(0) + P'(0) = 2
E_{10} 2P(0) + P'(0) = 1 et P''(0) = P(0) et P'(1) + P(0) = 1 et P'(0) = $\frac{1}{2}$
E_{11} 2P(0) + P'(0) = 2 et P''(0) = P(0) et P'(1) + P(0) = 1
E_{12} Å x P(x) = P(3-x)

Définition dans P_2	Equations dans $\mathbf{R}^3$	Dessin dans $\mathbf{R}^3$	Paramétrage de l'ensemble de polynômes

(5) Des situations de références pour la modélisation intramathématique par l'algèbre linéaire

* L'équation différentielle $y' = a(x)\,y + b(x)$

* Les suites récurrentes $u_{n+1} = au_n + b_n$

* Les fonctions continues sur **R** vérifiant $f(x+1) = 2f(x) + 2^x$

* L'équation différentielle $y'' + ay' + by =$ une exp-polynôme

* Les bases $1, (x - a), \ldots, \dfrac{(x - a)^n}{n!}$ (Taylor) ou

$1, x, x(x - 1), \ldots \dfrac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{n!}$ (Grégory-Newton) ou

$\dfrac{\pi(x-x_i)}{\pi(x_j-x_i)}$ (Lagrange) de l'espace des polynômes de d°$\leq$ **n**

* Les bases $1/P, x/P, \ldots, x^{17}/P$ ou $x^{12}, x^{11}, \ldots, x, 1, \dfrac{1}{x+1}$, $\dfrac{1}{x-2}$, $\dfrac{1}{(x-2)^2}$, $\dfrac{1}{x^2+x+1}$, $\dfrac{x}{x^2+x+1}$ de l'espace des fractions $\dfrac{Q}{P}$ avec d°Q **≤ 17 et P(x) = (x+1)(x-2)**$^2(x^2+x+1)$

* L'unicité d'un polynôme y de d°**≤ n vérifiant**

$y(x+1) = 3y(x) + P(x)$ (P donné de d°**≤ n)**

implique son existence

(6) Des méthodes en algèbre linéaire

Quelques titres :

* Six idées centrales

* Les types de problèmes fréquents, internes et externes (de modélisation)

* Les différents cadres et points de vue, selon les objets : vecteurs, applications linéaires, sous-espaces, matrices

ou selon les types de problèmes : recherche de rang, recherche d'image, recherche d'une matrice, comparaison de sous-espaces.

Exemple :

Inclusion et égalité de sous-espaces

Trois points de vue peuvent être adoptés, selon le problème.

@ <u>*Un point de vue global*</u> , utilisant des *arguments d'équations* (si E est défini par une partie des équations qui définissent F, alors $F\subset E$); ou bien des *arguments de dimension* (si $F\subset E$, et si $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F=E$); ou en utilisant *une application linéaire* (si $G\subset H$ et si $F = T(G)$ et $E = T(H)$, alors $F\subset E$).

@ <u>*Un point de vue semi-global*</u> , utilisant des *générateurs:* si tous les vecteurs d'une famille engendrant F appartiennent à E, alors $F\subset E$.

@ <u>*Un point de vue ponctuel*</u> , raisonnant sur les vecteurs pris individuellement: si tout vecteur de F est combinaison de vecteurs de E, ou vérifie les équations de E, alors $F\subset E$.

5/ Synthèse

Nous avions décidé de nous appuyer sur 3 idées :
*** le recours au levier du "méta" ;**
*** la construction d' une ingénierie longue ;**
*** l'utilisation des changements de points de vue comme moteur d'unification, d'abord, de résolution ensuite.**

L'organisation qui a découlé de ce choix peut se résumer ainsi par un jeu sur plusieurs plans, dont l'articulation temporelle convenable est essentielle :

* construire des savoirs préalables qui vont être effectivement unifiés par la théorie que l'on veut enseigner, et construire ces savoirs dans des cadres différents ;

* dégager un ensemble de questions "qui se ressemblent" et sont "mal résolues" dans l'ensemble de ces savoirs préalables ;

* utiliser des changements de points de vue entre ces savoirs et entre ces questions comme raison pour vouloir unifier, voire comme déclencheurs de l'unification ;

* relire ensuite ces connaissances anciennes dans la théorie unificatrice, y réinterpréter des objets et des problèmes, y résoudre des problèmes nouveaux, inaccessibles dans les connaissances anciennes ;

* expliciter pour les étudiants, au niveau du discours, ces allers et retours, l'enjeu des changements de points de vue, des unifications ;

* mettre en scène des situations dont le but sera une prise de conscience "méta" sur les nouvelles connaissances et leur rôle, plus que ces savoirs eux-mêmes, déjà introduits.

6/ Problèmes d'évaluation

…………………………

Références

DORIER J.L. : Contribution à l'étude de l'enseignement à l'université des premiers concepts d'algèbre linéaire. Approches historique et didactique, Thèse de doctorat de l'Université J.Fourier-Grenoble 1.

DORIER J.L. : Sur l'enseignement des concepts élémentaires d'algèbre linéaire à l'université, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 11/2.3, Ed. La pensée sauvage, Grenoble.

DORIER J.L. : Illustrer l'aspect unificateur et généralisateur de l'algèbre linéaire, Cahier Didirem n°14 IREM de Paris 7.

DORIER J.L., ROBERT A., ROBINET J. et ROGALSKI M. : L'enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG première année, essai d'évaluation d'une ingénierie longue et questions, dans : Vingt ans de didactique des mathématiques en France, Ed. : M. Artigue, R. Gras, C. Laborde et P. Tavignot.

DORIER J.L., ROBERT A., ROBINET J. et ROGALSKI M. : The teaching of linear algebra in first year of french science university : epistemological difficulties, use of the "méta lever", long-term organization , Proceedings of the XVIII° International conference for the Psychology of Mathematics Education (PME XVIII), Lisbonne 1994, vol IV., p.137-144.

DORIER J.L., édit. : L'enseignement de l'algèbre linéaire en question , 1997, La Pensée Sauvage, Grenoble.

ROBERT A. : Projets longs et ingénieries pour l'enseignement universitaire : questions de problématique et de méthodologie. Un exemple : un enseignement annuel de licence en formation continue, dans Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 12/2.3, Ed. La pensée sauvage, Grenoble.

ROBERT A. : Prise en compte du "méta" en didactique des Mathématiques, Cahier de DIDIREM n° 21, IREM de Paris 7.

ROBERT A. et ROBINET J. : Quelques résultats sur l'enseignement de l'algèbre linéaire, Cahier de didactique des Mathématiques n°53 IREM de Paris 7.

ROGALSKI M. : "Enseigner des méthodes en mathématiques", dans: Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année, brochure de la Commission Inter-IREM Université, IREM de Lyon, 1990.

ROGALSKI M. : Un enseignement d'algèbre linéaire en DEUG A première année, Cahier Didirem n°11 IREM de Paris 7.

ROGALSKI M. : Rôle de la logique et de la théorie des ensembles dans l'apprentissage de l'algèbre linéaire, dans les Actes du Colloque Franco-Maghrébin 1996 de Didactique des Mathématiques de Fès, Université de Fès, Maroc.