

# Chapitre I

## Éléments de géométrie des espaces des modules des courbes

### I.0. Introduction

Dans ce chapitre, nous esquissons une approche élémentaire de l'espace des modules des courbes lisses (avec éventuellement des points marqués) qui permet d'en obtenir des descriptions "concrètes". Cette approche est élémentaire dans la mesure où il n'y a aucune géométrie algébrique, et que nous travaillons donc uniquement sur le corps des complexes, en considérant les courbes algébriques comme des surfaces de Riemann. Par description concrète, on entend en particulier la donnée de coordonnées qui permettent des calculs effectifs; nous décrivons essentiellement l'un de ces systèmes de coordonnées (coordonnées dites de Fenchel-Nielsen) et mentionnerons d'autres possibilités avec les références appropriées. On vise également une compréhension de la topologie de l'espace des modules, qui passe par une cellulation de celui-ci, c'est-à-dire une découpe en ces objets topologiquement triviaux que sont les cellules; ceci constitue un point de départ pour l'étude de la cohomologie de l'espace des modules ainsi qu'une théorie de l'intersection, et nous donnerons des références qui devraient être abordables après la lecture du présent texte. Ces coordonnées permettent également de donner une description géométrique des "bouts à l'infini" de l'espace des modules et de comprendre – pour le cas des courbes complexes – la compactification de Deligne-Mumford par l'adjonction de courbes à singularités bien contrôlées (courbes stables); nous décrivons le début de la théorie, ce qui devrait là encore permettre au lecteur d'aborder facilement la littérature plus spécialisée. Enfin, dans le cas des courbes de genre 0 (sphères avec des points marqués), qui ont beaucoup attiré l'attention ces dernières années, nous donnons une description combinatoire de l'"infini" des espaces des modules, qui se relie avec les thèmes abordés au chapitre II de ce livre.

Dans la suite de cette introduction, nous rappelons les principaux résultats relativement élémentaires que nous admettrons, et qui concernent essentiellement la topologie des surfaces et la géométrie hyperbolique plane. Ils sont classiques et se trouvent en de nombreux endroits; en particulier [H] ou [IT] contiennent tout ce qui est nécessaire, et bien au delà. On commence par la donnée d'une surface topologique orientée  $S$  de genre  $g$ , avec  $n$  ( $n \geq 0$ ) points marqués, que l'on pourra considérer ici comme enlevés. Cette surface de référence "standard"  $S$  munie des points marqués est unique à homéomorphisme non canonique près et les définitions des espaces des modules et de Teichmüller dépendent en

principe du choix de  $S$ , deux choix distincts conduisant à des espaces isomorphes mais non canoniquement isomorphes. Par un abus de langage courant et innocent sauf dans de rares cas, on indexera les objets non pas par  $S$  mais simplement par le couple  $(g, n)$ , en gardant à l'esprit ce qui précède (voir section I.1). Si  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$  désigne l'ensemble des points marqués, le groupe fondamental  $\pi_1(S - P; p_0)$  de  $S - P$  par rapport à un point base quelconque  $p_0$  est le groupe engendré par des lacets  $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g, c_1, \dots, c_n$ , avec la seule relation:

$$[a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] c_1 \dots c_n = 1,$$

où on note  $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ . Ici les  $a_i$  et  $b_j$  forment une base ‘‘symplectique’’ de l'homotopie de  $S$  basée en  $p_0$ ; autrement dit les indices d'intersection algébrique, déterminés par l'orientation de la surface, sont donnés par  $a_i \cdot a_j = 0$  ( $i \neq j$ ),  $b_i \cdot b_j = 0$  ( $i \neq j$ ),  $a_i \cdot b_j = \delta_{ij}$ . Les  $c_j$  sont des lacets basés en  $p_0$  qui font une fois le tour des  $p_j$  dans le sens positif et sont disjoints entre eux et également des  $a_i, b_j$ . On notera que si  $n \geq 1$ , le groupe  $\pi_1(S - P; p_0)$  est libre à  $2g + n - 1$  générateurs, ce qui est important pour certaines constructions.

On peut faire de  $S$  une surface de Riemann en la munissant d'une structure complexe, c'est-à-dire une structure conforme, ou encore un moyen de mesurer les angles des vecteurs tangents en chaque point (on suppose  $S$  munie d'abord d'une structure différentiable). L'espace des modules  $\mathcal{M}_{g,n}$  paramétrise en gros (voir plus loin) les structures conformes sur  $S$  – munie de  $n$  points marqués – à difféomorphisme près, et l'espace de Teichmüller  $\mathcal{T}_{g,n}$  ces mêmes structures à difféomorphisme isotope à l'identité près. On admettra ici deux résultats fondamentaux de topologie des surfaces: tout d'abord,  $S$  étant munie d'une structure différentiable, il est équivalent de travailler en topologie  $C^0$  ou en topologie  $C^1$ . Autrement dit, on démontre qu'*un difféomorphisme homotope à l'identité est également isotope à l'identité*. D'autre part, on a le théorème fondamental (dû à Nielsen) de classification des difféomorphismes de surfaces (théorème évidemment tout à fait propre à la dimension 2): soit  $S$  une surface compacte orientable; on note  $\pi_1(S; p_0)$  le groupe fondamental de  $S$  basé en  $p_0$ ,  $\text{Diff}(S)$  le groupe des difféomorphismes de  $S$  (préservant l'orientation), et  $\text{Diff}_0(S)$  la composante connexe de l'identité, c'est-à-dire le groupe des difféomorphismes librement isotopes à l'identité (‘‘librement’’ indique que l'isotopie ne préserve pas nécessairement le point base). Alors on a l'isomorphisme:

$$\text{Diff}(S)/\text{Diff}_0(S) \simeq \text{Aut}(\pi_1(S; p_0))/\text{Inn}(\pi_1(S; p_0)),$$

où  $\text{Inn}(\pi_1(S; p_0))$  est le sous-groupe des automorphismes intérieurs de  $\text{Aut}(\pi_1(S; p_0))$ . Autrement dit, avec une écriture plus compacte:  $\pi_0(\text{Diff}(S)) \simeq \text{Out}(\pi_1(S))$ . Pour ces théorèmes, en particulier le second, qui s'étend aux surfaces avec points marqués (i.e. enlevés), on pourra consulter [H, Chapitre 1] qui contient des références et un schéma de preuve.

Introduisons ensuite les surfaces de Riemann (structures complexes) et les structures hyperboliques (nous renvoyons en particulier à [B] et [Bo]). Soit donc  $X$  une surface de Riemann modélisée sur  $S$  de genre  $g$  avec  $n$  points marqués, ce qui équivaut à la donnée d’une structure complexe sur  $S$ , donc d’une surface de Riemann compacte  $\widehat{X}$  et de  $n$  points distingués  $x_1, \dots, x_n$ . On pose  $X = \widehat{X} - \{x_1, \dots, x_n\}$  et on suppose qu’on est dans le cas hyperbolique, c’est-à-dire que la caractéristique d’Euler-Poincaré de  $X$ , soit  $\chi(X) = \chi(S - P) = 2 - 2g - n$ , est strictement négative. Alors (théorème d’uniformisation), le revêtement universel de  $X$  est isomorphe au demi-plan de Poincaré  $\mathbb{H} (= \{z \in \mathbb{C}, \text{Im}(z) > 0\})$ , de sorte qu’on a  $X \simeq \mathbb{H}/\Gamma$ , où  $\Gamma$  est un sous-groupe discret de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ , le groupe des automorphismes de  $\mathbb{H}$  pour la structure conforme standard. Le groupe  $\Gamma$  est bien sûr, comme groupe abstrait, isomorphe à  $\pi_1(S - P; p_0)$ , et a donc la présentation décrite plus haut. Plus précisément,  $\Gamma$  est un groupe Fuchsien de première espèce sans élément elliptique; de première espèce parce que  $X = \widehat{X} - \{x_1, \dots, x_n\}$  est sans bord, et sans élément elliptique parce que les points marqués sont enlevés. Autrement dit,  $\Gamma$  ne contient que des éléments hyperboliques et paraboliques (si  $n \geq 1$ ); on pourra consulter [MH] pour des théorèmes de comparaison sur les espaces de Teichmüller et des modules pour des courbes avec points “marqués” – donnant lieu à des transformations elliptiques – et des points “enlevés” – correspondant à des transformations paraboliques.

Le théorème d’uniformisation permet également de définir sur  $X$ , par passage au quotient à partir du revêtement universel  $\mathbb{H}$ , une unique métrique complète à courbure constante  $-1$  qu’on appelle métrique de Poincaré de  $X$ . On regarde alors les éléments de  $\Gamma \subset \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  comme des isométries de  $\mathbb{H}$  pour la structure hyperbolique usuelle de  $\mathbb{H}$ . D’après la formule de Gauss-Bonnet, l’aire  $A(X)$  de  $X$  muni de la métrique de Poincaré est donnée par  $A(X) = -2\pi\chi(X) = 2\pi(2g - 2 + n)$ , et ne dépend donc que de  $g$  et  $n$ , ce qui sera très important dans la suite. Il existe plusieurs modèles en principe équivalents de géométrie hyperbolique plane (à courbure constante), dont chacun a son utilité propre, parce qu’en particulier les différents types d’isométries y sont plus ou moins commodément représentés. Nous utiliserons bien sûr le modèle du demi-plan  $\mathbb{H}$  (adapté aux transformations hyperboliques) et du disque  $D$  (adapté aux transformations elliptiques) reliés entre eux par une transformation homographique, mais aussi celui de l’hyperboloïde dont on rappellera certaines propriétés en temps voulu, et nous citerons brièvement celui, moins usité, de la bande, relié au demi-plan par une transformation logarithmique.

Rappelons encore ici pour terminer deux propriétés élémentaires et utiles. On considère de nouveau une surface hyperbolique sans bord  $X$  munie de sa métrique de Poincaré: alors *il existe dans chaque classe d’homotopie libre de courbes une et une seule géodésique pour cette métrique*. Il s’agit en fait là d’une propriété générale des variétés complètes à courbures sectionnelles strictement négatives, dont il est facile de voir que le revêtement universel est contractile. De plus, si on se donne deux classes d’isotopie de courbes et

que l'on peut trouver deux représentants de ces classes qui sont disjoints, les géodésiques correspondantes, qui existent et sont uniques d'après ce qui précède, sont alors disjointes.

Un mot sur les références bibliographiques, très nombreuses dans ce domaine. Nous en mentionnerons quelques unes dans le texte, mais nous recommandons dès à présent au lecteur l'ouvrage d'introduction [IT], à la fois pour son contenu et comme une mine bibliographique jusque 1990 (114 références à des ouvrages, 266 références à des articles). D'autre part, le livre [DFG] permet de se faire une idée des avancées récentes sur les espaces de modules de courbes, et constitue en même temps une bonne source bibliographique.

C'est avec grand plaisir que les trois auteurs remercient Adrien Douady pour leur avoir transmis, en particulier au fil d'un groupe de travail organisé à l'ENS, un peu de sa science (pour ne pas dire sa sagesse) des surfaces de Riemann, espaces des modules etc... Enfin nous remercions chaleureusement le rapporteur pour sa relecture très soignée du texte, ses nombreuses remarques, et pour nous avoir signalé la formule élémentaire pour les quantités  $b_n$ , qui apparaît au paragraphe I.2.5.

## I.1. Espaces de Teichmüller et espaces des modules

Dans cette première section, nous introduisons d’abord plusieurs définitions des objets principaux, à savoir les espaces de Teichmüller et des modules (§§1 à 3). Ces différentes définitions correspondent à différents points de vue et nous montrons dans les grandes lignes pourquoi elles décrivent effectivement les mêmes objets, vus sous des angles différents. Nous donnerons le moment venu des références plus spécifiques, mais on peut déjà renvoyer aux ouvrages de base [A], [B], [H], [IT] et [T] pour tout ce qui concerne ces définitions et leurs équivalences. Les titres de certains de ces livres indiquent d’ailleurs par eux-mêmes le point de vue adopté par leurs auteurs.

Nous introduisons ensuite, au I.1.4, une des manières classiques de mettre des coordonnées sur l’espace de Teichmüller, et par là-même sur l’espace des modules; ce sont les coordonnées dites de Fenchel-Nielsen, qui fournissent une bonne description globale de la structure *réelle* de ces espaces.

Enfin, dans le dernier paragraphe (I.1.5), nous illustrons l’emploi de ces coordonnées en démontrant une des propositions clefs quand il s’agit d’étudier l’espace des modules “à l’infini” et de le compactifier. Bien que ce résultat figure depuis longtemps dans le “folklore” du domaine et soit couramment utilisé (comme expliqué brièvement ici-même au I.2.1), il est difficile d’en trouver une démonstration détaillée et effective (c’est-à-dire avec une évaluation explicite des constantes mises en jeu), et c’est ce que nous faisons ici.

### I.1.1. L’espace de Teichmüller $\mathcal{T}_{g,n}$

Comme expliqué dans l’introduction, les espaces de Teichmüller et les espaces des modules sont définis à partir d’une surface topologique (qu’on suppose munie d’une structure différentiable) de référence  $S$  compacte orientée de genre  $g$  et d’un ensemble  $P = \{x_1, \dots, x_n\} \subset S$  de points marqués de  $S$ . La paire  $(S, P)$  définit une surface de type  $(g, n)$ . Changer  $(S, P)$  en  $(S', P')$ , également de type  $(g, n)$ , induit dans la plupart des constructions un isomorphisme (non canonique) et l’on peut souvent se contenter de préciser le type  $(g, n)$  des surfaces considérées. La caractéristique d’Euler de la surface ouverte  $S - P$  est donnée par  $\chi(S - P) = 2 - 2g - n$ , et la surface est hyperbolique si et seulement si  $\chi < 0$ ; nous nous bornerons dans ce qui suit à ce cas.

L’espace de Teichmüller  $\mathcal{T}(S, P) \simeq \mathcal{T}_{g,n}$ , est grosso modo l’ensemble des surfaces de Riemann munies d’un *marquage*, à isomorphisme respectant le marquage près. Il y a – au moins – trois approches possibles pour définir le marquage: par les propriétés conformes ou métriques, ou par l’uniformisation, c’est-à-dire en utilisant les groupes Fuchsien. On en tire trois définitions de  $\mathcal{T}_{g,n}$  qui ont chacune leur charme propre, et nous esquisserons les preuves des équivalences, en renvoyant à la littérature pour des précisions.

– Approche analytique:

Étant donnée une surface  $S$  (compacte orientée) de référence et un ensemble  $P \subset S$  de points marqués, un moyen de “marquer” une surface de Riemann est de se donner un difféomorphisme  $\Phi$  de  $S$  dans celle-ci. Considérons maintenant deux surfaces de Riemann  $\hat{X}$  et  $\hat{X}'$  compactes avec des ensembles de points marqués  $P_X$  et  $P_{X'}$ . On les suppose munies de marquages  $\Phi$  et  $\Phi'$ , savoir deux difféomorphismes  $\Phi : S \rightarrow \hat{X}$  et  $\Phi' : S \rightarrow \hat{X}'$  tels que  $\Phi(P) = P_X$  et  $\Phi'(P) = P_{X'}$ . On dira qu’un isomorphisme analytique (i.e. conforme)  $\alpha$  respecte le marquage, si on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (S, P) & \xrightarrow{\Phi} & (\hat{X}, P_X) \\ \downarrow h & & \downarrow \alpha \\ (S, P) & \xrightarrow{\Phi'} & (\hat{X}', P_{X'}) \end{array}$$

où  $h$  est un difféomorphisme de  $S$  qui fixe  $P$  et qui est *isotope à l’identité* dans  $S - P$ .

**Définition 1.1.** L’espace de Teichmüller  $\mathcal{T}(S, P)$  est l’ensemble des classes d’équivalence de surface de Riemann munies d’un marquage, modulo les isomorphismes qui respectent les marquages.

Nous reviendrons ci-dessous (en particulier au I.1.4) sur la ou les définitions de la topologie sur cet espace. On peut noter aussi que la définition ci-dessus vaut encore pour les surfaces non hyperboliques.

– Approche métrique:

Nous avons vu dans l’introduction que chaque surface de Riemann  $X$  homéomorphe à  $S - P$  peut être munie de sa métrique de Poincaré. Un difféomorphisme  $\Phi : S \rightarrow \hat{X}$  permet de remonter cette métrique sur  $S - P$ . On munit ainsi  $S - P$  d’une métrique hyperbolique, c’est-à-dire complète, d’aire finie, et de courbure  $-1$ . Il est donc naturel de définir l’ensemble  $\mathcal{H}$  des métriques hyperboliques sur  $S - P$  et de voir les surfaces de Riemann munies d’un marquage comme les éléments  $m \in \mathcal{H}$ . On peut ensuite traduire la notion d’isomorphisme respectant le marquage: le groupe  $\text{Diff}_0(S - P)$  (difféomorphismes isotopes à l’identité) agit à droite sur  $\mathcal{H}$  par la formule :  $h \in \text{Diff}_0(S - P) \mapsto h^*m \in \mathcal{H}$ . Nous dirons que deux métriques  $m$  et  $m'$  dans  $\mathcal{H}$  sont équivalentes s’il existe  $h$  dans  $\text{Diff}_0(S - P)$  qui envoie  $m$  sur  $m'$ , c’est-à-dire tel que  $h^*(m') = m$ . On définit alors naturellement l’espace de Teichmüller suivant la

**Définition 1.2.** L’espace de Teichmüller  $\mathcal{T}(S, P)$  est l’espace quotient  $\mathcal{H}/\text{Diff}_0(S - P)$ .

L’équivalence entre cette définition et la précédente est une conséquence du théorème d’uniformisation (cf. par ex. [IT], Théorème 1.8). Comme rappelé dans l’introduction, ce théorème dit que toute surface de Riemann hyperbolique  $X$  est isomorphe à  $\mathbb{H}/\Gamma$ , où  $\mathbb{H}$

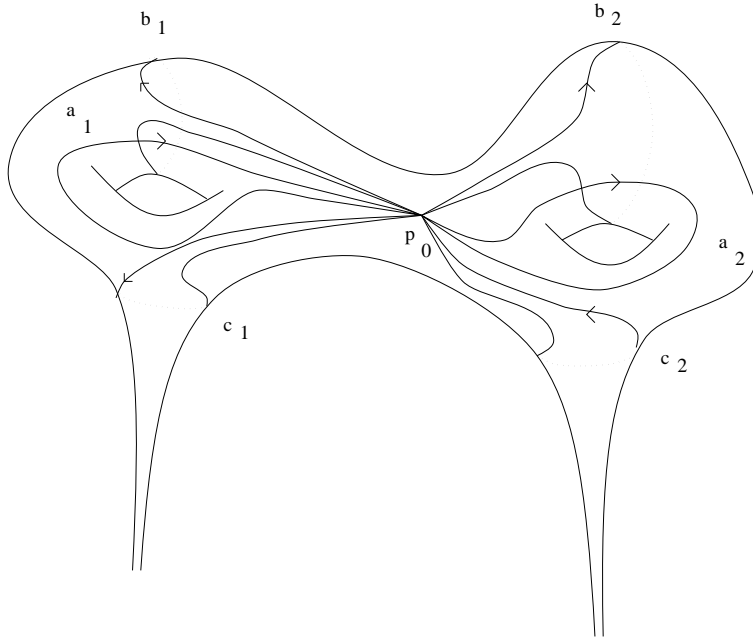
est le demi-plan de Poincaré, et où  $\Gamma$  est un sous-groupe discret (Fuchsien, de première espèce et sans élément elliptique) de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . On peut alors aussi réinterpréter la notion de marquage en termes de représentations du groupe fondamental, un marquage étant essentiellement la donnée d'une "base" du groupe fondamental de la surface, soit encore très concrètement la donnée de lacets (à isotopie près) telle que la surface découpée suivant ceux-ci soit simplement connexe (voir figure 1.1 ci-dessous). Précisons ceci brièvement:

– Représentations du groupe fondamental:

D'après le théorème de Nielsen rappelé dans l'introduction, on peut identifier  $\mathrm{Diff}(S - P)/\mathrm{Diff}_0(S - P)$  à  $\mathrm{Aut}(\pi_1(S - P; p_0))/\mathrm{Inn}(\pi_1(S - P; p_0))$ . Cette identification permet de voir un marquage comme la donnée d'un isomorphisme entre  $\pi_1(S - P; p_0)$  et un groupe Fuchsien  $\Gamma$ , qui sera dit orienté si les difféomorphismes correspondants de  $S - P$  préservent l'orientation. Le groupe fondamental  $\pi_1(S - P; p_0)$  par rapport à un point base quelconque  $p_0$  (cf. figure 1.1), est engendré par,  $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g, c_1, \dots, c_n$ , avec une relation:

$$\prod_{1 \leq i \leq g} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} \prod_{1 \leq j \leq n} c_j = 1$$

(on peut noter que si  $n \geq 1$ , ce groupe est libre à  $2g + n - 1$  générateurs).



**Figure 1.1**

Par conséquent, se donner un isomorphisme entre  $\pi_1(S - P; p_0)$ , et un groupe  $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ , c'est se donner une famille génératrice  $A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g, C_1, \dots, C_n$  de  $\Gamma$ , les  $A_i$  et  $B_i$  étant d'ailleurs hyperboliques, et les  $C_j$  paraboliques. Par ailleurs, deux surfaces de Riemann  $X$  et  $X'$  sont isomorphes si les groupes  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  correspondants sont conjugués par un élément  $\alpha \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ :  $\Gamma' = \alpha \Gamma \alpha^{-1}$ . Cet isomorphisme respecte le

marquage si on a une conjugaison “élément par élément”, c’est-à-dire si pour tout  $i \in [1, g]$  et tout  $j \in [1, n]$ :

$$A'_i = \alpha \circ A_i \circ \alpha^{-1}, \quad B'_i = \alpha \circ B_i \circ \alpha^{-1}, \quad C'_j = \alpha \circ C_j \circ \alpha^{-1};$$

Autrement dit les familles génératrices sont conjuguées par  $\alpha$ . Cette discussion amène à la définition suivante, et permet de montrer facilement son équivalence avec les définitions 1.1 et 1.2 (cf. la contribution de W.J.Harvey dans [H], §9).

**Définition 1.3** L’espace de Teichmüller est l’ensemble des familles

$$\{A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g, C_1, \dots, C_n\}$$

qui engendrent un groupe Fuchsien orienté de première espèce et sans élément elliptique, à conjugaison près dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ .

Nous n’avons pas parlé de topologie jusqu’ici. Le moyen le plus simple de munir l’espace de Teichmüller  $\mathcal{T}_{g,n}$  d’une topologie utilise la définition algébrique 1.3 (cf [IT], §2): un point de l’espace  $\mathcal{T}_{g,n}$  peut être représenté par une famille de  $2g + n$  éléments de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  et on met sur ce dernier groupe la topologie évidente, un voisinage d’une matrice contenant celles dont tous les coefficients sont voisins. En munissant l’ensemble des familles finies de matrices de la topologie produit, et en passant au quotient par la relation d’équivalence par conjugaison (cf. définition 1.3), on munit  $\mathcal{T}_{g,n}$  d’une topologie naturelle (cf. la contribution de W.J.Harvey dans [H]). Il est également possible de définir une topologie sur  $\mathcal{T}_{g,n}$  en utilisant la définition métrique (cf. l’exposé de A.Douady dans [FLP]); il suffit pour ce faire de munir l’espace  $\mathcal{H}$  des métriques hyperboliques sur  $S - P$  de la topologie  $C^\infty$ . L’espace de Teichmüller est ensuite muni de la topologie quotient (cf. définition 1.2). Cette définition est peut-être a priori moins naturelle que la précédente et l’équivalence des deux topologies est loin d’être évidente; elle résulte cependant des constructions résumées au I.1.4 ci-dessous.

### I.1.2. L’espace des modules $\mathcal{M}_{g,n}$

Nous passons maintenant aux trois définitions correspondantes de l’espace des modules  $\mathcal{M}(S, P)$ , qui s’obtiennent essentiellement des précédentes en “oubliant” la notion de marquage. On verra au paragraphe suivant comment cela se traduit en termes de revêtement (ramifié) de  $\mathcal{M}_{g,n}$  par  $\mathcal{T}_{g,n}$ . Ceci permet également de décrire la topologie sur  $\mathcal{M}_{g,n}$ , en “passant au quotient” à partir de celle de  $\mathcal{T}_{g,n}$  (voir brièvement ci-dessous, ainsi que les références déjà citées).

– Approche analytique:

La définition analytique permet de définir l’espace  $\mathcal{M}_{g,n}$  de manière directe, sans utiliser de surface de référence:



**Définition 1.4.** L'espace des modules  $\mathcal{M}_{g,n}$  est l'ensemble des surfaces de Riemann  $X$  de type  $(g, n)$ , à isomorphisme près.

Comme d'habitude,  $X$  est de type  $(g, n)$  si  $X = \hat{X} - P_X$  où  $\hat{X}$  est une surface compacte de genre  $g$  et  $P_X$  contient  $n$  points. Il faut préciser ce qu'est un isomorphisme entre surfaces de type  $(g, n)$ . Deux surfaces de Riemann,  $X = \hat{X} - P_X$  et  $X' = \hat{X}' - P_{X'}$  représentent le même point de l'espace des modules s'il existe un isomorphisme analytique  $\alpha : \hat{X} \rightarrow \hat{X}'$  qui envoie  $P_X$  sur  $P_{X'}$ . Ici on "colorie" les points marqués, c'est-à-dire que les ensembles  $P_X = \{x_1, \dots, x_n\}$  et  $P_{X'} = \{x'_1, \dots, x'_n\}$  sont ordonnés, et on demande que  $\alpha(x_i) = x'_i$ .

– Approche métrique:

**Définition 1.5.** L'espace des modules  $\mathcal{M}(S, P) \simeq \mathcal{M}_{g,n}$  est l'ensemble des métriques hyperboliques sur  $S$ , à difféomorphisme près:  $\mathcal{M}(S, P) = \mathcal{H}/\text{Diff}_+(S, P)$ .

Rappelons que l'on s'est donné une surface de référence  $(S, P)$ , et que  $\text{Diff}_+(S, P)$  désigne le groupe des difféomorphismes de  $S$  qui préservent l'orientation et fixe  $P$ .

– Représentations du groupe fondamental:

**Définition 1.6.** L'espace des modules  $\mathcal{M}(S, P) \simeq \mathcal{M}_{g,n}$  est l'ensemble des groupes Fuchsien de première espèce, sans élément elliptique, isomorphes à  $\pi_1(S - P; p_0)$  et orientés, à conjugaison près par un élément de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  qui préserve les sous-groupes cycliques engendrés par les éléments paraboliques.

En d'autres termes, deux groupes  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont équivalents s'il existe un élément  $\alpha \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  qui les conjugue ( $\Gamma' = \alpha \circ \Gamma \circ \alpha^{-1}$ ). La dernière condition assure que les points marqués sont bien fixés. Insistons sur le fait qu'ici la conjugaison est globale, c'est-à-dire que l'on ne singularise pas de famille génératrice, contrairement au cas de l'espace de Teichmüller. Notons aussi que la surface de référence ne joue pas de rôle sérieux dans cette définition.

Bien entendu, ces trois définitions de l'espace des modules sont équivalentes, essentiellement pour les mêmes raisons que les équivalences correspondantes pour l'espace de Teichmüller.

### I.1.3. Le groupe de Teichmüller modulaire $\Gamma_{g,n}$

D'après les définitions qui précèdent, l'espace des modules apparaît comme un quotient de l'espace de Teichmüller par l'action d'un groupe discret, appelé le groupe de Teichmüller modulaire (ou "mapping class group", d'après la définition 1.7 ci-dessous), et noté  $\Gamma_{g,n}$  (ou  $\text{Mod}_{g,n}$ , ou  $\text{Mod}(S, P)$ ...). Les définitions précédentes impliquent que ce groupe possède lui-même deux descriptions; et l'équivalence des définitions qui précèdent implique l'équivalence de ces deux descriptions, laquelle est en fait donnée par le théorème

fondamental de Nielsen déjà plusieurs fois mentionné.

Du point de vue topologique, le groupe modulaire est le groupe des composantes connexes du groupes des difféomorphismes (supposés ici orientés) de la surface de référence (c'est bien un groupe, la structure étant héritée de celle des difféomorphismes eux-mêmes). Autrement dit, on a la

**Définition 1.7.**

$$\Gamma_{g,n} \simeq \text{Mod}(S, P) = \text{Diff}_+(S, P)/\text{Diff}_0(S, P)$$

La définition algébrique qui suit ne dépend pas de la donnée d'une surface de référence, mais plutôt d'un groupe Fuchsien de référence  $\Gamma$ .

**Définition 1.8.**

$$\Gamma_{g,n} \simeq \text{Mod}(\Gamma) = \text{Aut}_+^*(\Gamma)/\text{Inn}(\Gamma).$$

Nous avons défini plus haut une notion d'orientation sur les sous-groupes Fuchiens de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  et  $\text{Aut}_+^*(\Gamma)$  désigne ici le sous-groupe de  $\text{Aut}(\Gamma)$  qui préserve l'orientation et les sous-groupes cycliques engendrés par les éléments paraboliques.

Ces deux définitions dépendent d'objets de références, mais si  $S - P$  ou  $\mathbb{H}/\Gamma$  est une surface de type  $(g, n)$ , il existe une identification non canonique. C'est de nouveau un abus de langage bien innocent en général que de noter  $\Gamma_{g,n}$  ce groupe de Teichmüller modulaire de type  $(g, n)$ .

Le groupe modulaire  $\Gamma_{g,n}$  agit sur l'espace de Teichmüller  $\mathcal{T}_{g,n}$  avec comme quotient l'espace des modules  $\mathcal{M}_{g,n}$ . Nous laissons au lecteur le soin d'écrire les formules pour cette action (ce qui est immédiat à partir des définitions ci-dessus); la description ci-dessus est rendue possible par l'importante et classique proposition suivante

**Proposition 1.9.** *L'action du groupe de Teichmüller modulaire  $\Gamma_{g,n}$  sur l'espace de Teichmüller  $\mathcal{T}_{g,n}$  est propre et discontinue.*

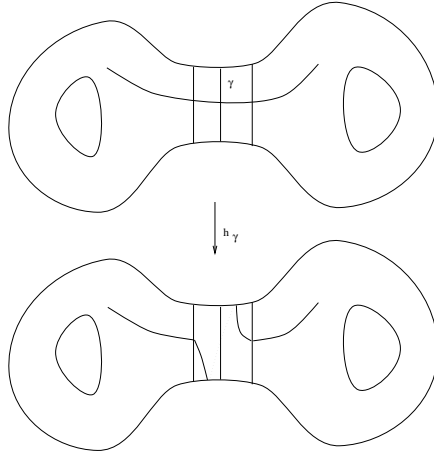
Nous renvoyons par exemple le lecteur à [IT] (Chapitre 6) pour une démonstration. L'espace de Teichmüller  $\mathcal{T}_{g,n}$  est donc un revêtement ramifié au dessus de l'espace des modules  $\mathcal{M}_{g,n}$ . Les points de ramification sont les points fixes des éléments de  $\Gamma_{g,n}$  et le stabilisateur de chaque point de l'espace de Teichmüller est fini (par la propreté de l'action) et génériquement trivial sauf si  $g = n = 1$  ou  $g = 2, n = 0$  (involutions elliptique et hyperelliptique respectivement). En fait, presque par définition, ces stabilisateurs sont les automorphismes des surfaces de Riemann correspondantes et leur finitude, et même une borne sur leur ordre, est donc aussi donnée par le classique théorème de Hurwitz.

Les éléments du groupe de Teichmüller modulaire sont par définition les classes d'isotopie de difféomorphismes de  $S - P$ . On introduit alors une famille génératrice pour  $\Gamma_{g,n}$ :

les twists de Dehn, définis comme suit. Étant donnée une courbe fermée simple  $\gamma$  de  $S - P$  paramétrée par  $t \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , choisissons un voisinage tubulaire  $A_\gamma$  de  $\gamma$ . Considérons alors l'homéomorphisme  $h_\gamma$  de  $S - P$  qui est l'identité en dehors de  $A_\gamma$ , et qui sur  $A_\gamma \simeq [0, 1] \times \mathbb{T}$  est donné par:  $h_\gamma(u, t) = (u, t + u)$ .

**Définition 1.10.** Le twist de Dehn autour de  $\gamma$  est la classe d'isotopie de  $h_\gamma$ .

Sur la figure 1.2, on a représenté la surface  $S$ , la courbe  $\gamma$  et l'image d'une courbe qui coupe  $\gamma$  par un twist de Dehn autour de  $\gamma$ .



**Figure 1.2**

Il est possible de montrer (cf. [Bi]) que le groupe  $\Gamma_{g,n}$  est engendré par les twists de Dehn. Humphries a montré qu'il est même engendré par  $2g + 1$  twists (ici nous prenons  $g \geq 3$  et  $n = 0$  pour simplifier) et que ce nombre est minimal. Ce groupe a fait l'objet de nombreuses recherches ces dernières années, et on pourra consulter entre autres l'article de J.Harer dans [S] à ce sujet.

#### I.1.4. Coordonnées de Fenchel-Nielsen

Dans ce paragraphe, nous utiliserons essentiellement la définition métrique de  $\mathcal{T}_{g,n}$ . Les éléments de l'espace de Teichmüller seront donc interprétés comme des métriques hyperboliques sur la surface de référence  $S - P$ , à l'action de  $\text{Diff}_0(S - P)$  près. La topologie sur  $\mathcal{T}_{g,n}$  est a priori celle définie en passant au quotient à partir de la topologie  $C^\infty$  sur les métriques (cf. l'exposé de A.Douady dans [FLP]), mais nous allons en donner une description concrète, qui montre aussi l'équivalence avec la métrique définie à partir des groupes Fuchsien.

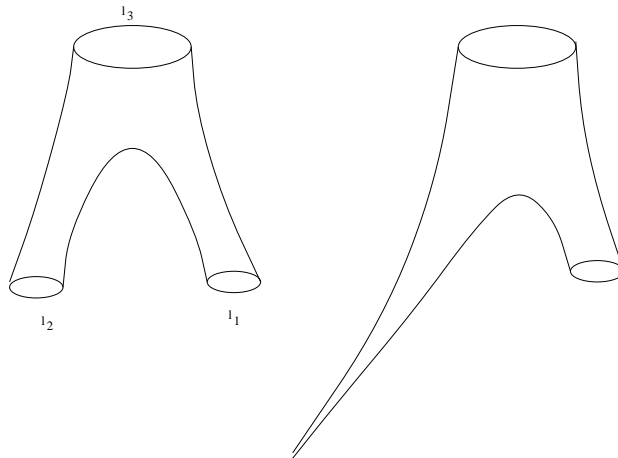
Considérons  $C_1 \subset S - P$  une courbe simple fermée dans  $S - P$ . En coupant  $S - P$  le long de  $C_1$ , on obtient une surface  $S'$ , connexe ou non. La surface  $S'$  est elle-même réunion de surfaces  $S_i$  (ici on a ou bien une ou bien deux surfaces), où chaque  $S_i$  est une surface à bord et à points marqués. On voit qu'ici les surfaces à bord s'introduisent inévitablement

et il y a lieu d'étendre les définitions précédentes à ce cas. Nous avons préféré nous borner ci-dessus aux surfaces sans bord pour ne pas trop alourdir la présentation et nous laisserons au lecteur le soin de généraliser les définitions. Nous le faisons ci-dessous explicitement dans le cas des "pantalons" (sphères avec trois trous). Ceci dit, recommençons à découper la ou les surfaces obtenue(s) en choisissant dans l'une des  $S_i$  une courbe  $C_2$  fermée simple et non homotope à une composante du bord ni à un point (marqué ou non), et en coupant de nouveau le long de cette courbe. En itérant ce processus, on obtient évidemment qu'à chaque étape:

- soit le nombre de composantes connexes augmente de 1;
- soit le nombre de composantes connexes ne change pas mais dans ce cas il y a une composante dont le genre diminue.

On vérifie facilement que dans chacun des deux cas la caractéristique d'Euler totale de la surface, c'est-à-dire la somme des caractéristiques des composantes connexes, est invariante. Autrement dit, avec des notations évidentes,  $\sum_i(2g_i - 2 + n_i)$ , où on somme suivant les composantes, est invariant lorsqu'on découpe. Par contre, la quantité  $\sum_i(3g_i - 3 + n_i)$  diminue dans les deux cas d'une unité. Partant d'une surface connexe de type  $(g, n)$ , on voit alors qu'après  $3g - 3 + n$  opérations (on verra que ce nombre donne la dimension de l'espace des modules  $\mathcal{M}_{g,n}$ ), on obtient une découpe de  $S - P$  en  $S_i$  ( $S = \bigcup S_i$ ), où chaque  $S_i$  est une surface à bords et à points marqués de genre 0 et de caractéristique d'Euler  $-1$  (valeur maximale pour une surface hyperbolique), c'est-à-dire un pantalon, suivant la définition classique

**Définition 1.11.** Un pantalon (topologique) est une surface à bord, dont l'intérieur est homéomorphe à une sphère moins trois points.



**Figure 1.3**

Sur la figure 1.3, on a représentés deux pantalons, dont l'un est dégénéré (c'est-à-dire que le bord est constitué de moins de trois composantes connexes).

Nous allons dans un premier temps étudier l'espace de Teichmüller du pantalon. Comme les pantalons sont des surfaces à bord, il nous faut tout d'abord donner une définition de cet espace. Soit  $S = \overline{D_1} \setminus (D_2 \cup D_3)$  avec  $D_i$  homéomorphe à un disque ouvert, et  $D_2$  et  $D_3$  relativement compacts dans  $D_1$ . Nous pouvons définir l'espace  $\mathcal{H}(S)$  des métriques hyperboliques sur  $S$  qui rendent les bords  $\partial D_i$  géodésiques. Considérons de plus le groupe des difféomorphismes de  $S$  qui laissent chaque  $\partial_i = \partial D_i$  globalement invariant, et qui préservent l'orientation, soit  $\text{Diff}_+(S, \partial_1, \partial_2, \partial_3)$ . Le groupe de ceux qui sont isotopes à l'identité est noté avec un indice 0 comme ci-dessus. On a alors naturellement la

**Définition 1.12.** L'espace de Teichmüller  $\mathcal{T}(S)$  du pantalon est l'espace quotient:

$$\mathcal{T}(S) = \mathcal{H}(S)/\text{Diff}_0(S, \partial_1, \partial_2, \partial_3);$$

l'espace des modules  $\mathcal{M}(S)$  du pantalon est l'espace quotient

$$\mathcal{M}(S) = \mathcal{H}(S)/\text{Diff}_+(S, \partial_1, \partial_2, \partial_3).$$

Dans [FLP] (Exposé 2), V.Poénaru rappelle que l'espace  $\text{Diff}_+(S, \partial_1, \partial_2, \partial_3)$  est contractile. Par conséquent,  $\text{Diff}_+(S, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \text{Diff}_0(S, \partial_1, \partial_2, \partial_3)$ , et donc l'espace de Teichmüller et l'espace des modules du pantalon coïncident:  $\mathcal{T}(S) = \mathcal{M}(S)$ . Pour paramétrer cet espace, on commence par définir l'application  $L : \mathcal{H}(S) \rightarrow (\mathbb{R}_+^*)^3$  qui à une métrique  $\mu \in \mathcal{H}(S)$  associe les longueurs  $l_\mu(\partial_i)$  des géodésiques  $\partial_i$  pour  $\mu : L(\mu) = (l_\mu(\partial_1), l_\mu(\partial_2), l_\mu(\partial_3))$ .

Remarquons tout d'abord que cette application est bien définie. En effet, si deux métriques  $\mu$  et  $\mu'$ , appartiennent à la même classe d'équivalence, c'est-à-dire s'il existe un difféomorphisme  $h \in \text{Diff}_0(S, \partial_1, \partial_2, \partial_3)$  tel que  $h^*(\mu') = \mu$ , alors  $l_\mu(\partial_i) = l_{\mu'}(h(\partial_i)) = l_{\mu'}(\partial_i)$ , car  $h$  laisse  $\partial_i$  globalement invariant. Dans [FLP] (Exposé 3), V.Poénaru montre la proposition suivante:

**Proposition 1.13.** *L'application  $L$  induit un homéomorphisme de  $\mathcal{T}(S)$  dans  $(\mathbb{R}_+^*)^3$ .*

Autrement dit un pantalon est entièrement déterminé par la longueur des trois composantes de son bord, et l'application qui à un pantalon hyperbolique associe la longueur des composantes de son bord est une application continue. Nous venons de paramétrer l'espace de Teichmüller du pantalon. L'homéomorphisme ci-dessus s'étend aux pantalons dégénérés en remplaçant simplement  $(\mathbb{R}_+^*)^3$  par  $(\mathbb{R}_+)^3$ .

Esquissons la démonstration de l'injectivité, car la construction qui y est faite sera utilisée plus loin. Les arcs de géodésiques qui minimisent la distance entre les bords du pantalon sont appelés les coutures du pantalon et sont naturellement orthogonales aux composantes du bord du pantalon (rappelons que nous travaillons avec une métrique de Poincaré, c'est-à-dire de courbure constante -1). Si nous découpons le pantalon le long de ses coutures, nous obtenons donc deux hexagones rectangles. Le problème se ramène alors à

montrer qu'un hexagone rectangle est entièrement déterminé par la longueur de trois côtés non adjacents, qui elles peuvent être choisies arbitrairement. En effet, en supposant comme nous le ferons ce fait acquis (cf. [FLP] par exemple), on remarque que les deux hexagones rectangles recousus pour obtenir un pantalon (cf. figure 1.5 ci-dessous) sont isométriques, puisque tous les deux sont déterminés par la longueur commune des coutures. Un pantalon est donc déterminé à isomorphisme près par la longueur de ses coutures. D'autre part les hexagones étant isométriques, ils découpent les bords du pantalon en deux arcs de même longueur et les hexagones sont aussi déterminés par ces demi-longueurs. Finalement, un pantalon est bien déterminé par les longueurs des composantes de son bord, qui sont elles arbitraires.

Dans le cas où le pantalon est dégénéré, un élément de l'espace de Teichmüller de  $S$  est encore déterminé par la longueur des composantes connexes de son bord. Remarquons que l'espace de Teichmüller de la sphère moins trois *points* se réduit à un point, qui est le point origine  $(0, 0, 0)$  dans la paramétrisation ci-dessus. Cela revient aussi au fait bien connu qu'il existe toujours un isomorphisme de  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$  qui envoie trois points quelconques sur trois points fixés.

Revenons à la surface  $S - P$  de départ. On va montrer que – de même que pour l'espace de Teichmüller du pantalon – il est possible de paramétrer l'espace de Teichmüller  $\mathcal{T}(S, P)$  par la longueur hyperbolique de certaines courbes, ainsi que certains autres paramètres supplémentaires. Découpons comme plus haut la surface  $S - P$  en pantalons. Il est facile de compter que cette découpe comprend  $3g - 3 + n$  courbes, délimitant  $2g - 2 + n$  pantalons.

**Définition 1.14.** On dira que les courbes simples  $(C_1, \dots, C_{3g-3+n})$  forme une multicourbe maximale – ou encore une découpe en pantalons – de  $S - P$ , si les  $C_i$  découpent  $S - P$  en pantalons.

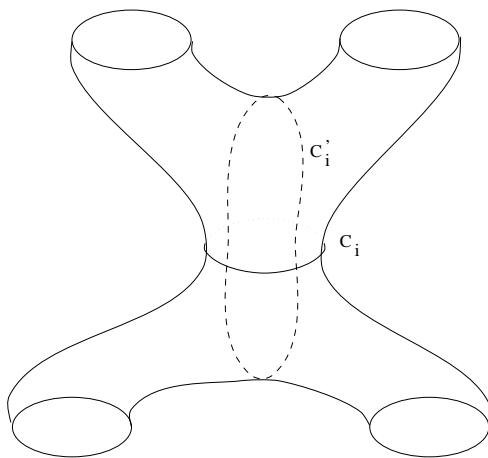
Munissons  $S - P$  d'une métrique hyperbolique, ce qui revient à regarder un élément de  $\mathcal{T}(S, P)$ . Alors étant donnée une multicourbe maximale  $(C_1, \dots, C_{3g-3+n})$  dans  $S - P$ , il existe une multicourbe maximale  $(\gamma_1, \dots, \gamma_{3g-3+n})$  où chaque  $\gamma_i$  est une géodésique simple et fermée, homotope à  $C_i$  (cf. l'introduction). En effet, puisque  $S - P$  est munie d'une métrique hyperbolique, dans chaque classe d'homotopie de courbe fermée simple, il existe une unique géodésique qui est elle aussi fermée et simple. De plus, si on choisit deux courbes fermées simples et disjointes, les géodésiques correspondantes sont elles aussi disjointes.

Si nous découpons  $S - P$  le long de cette multicourbe géodésique, nous obtenons une réunion de pantalons, où chaque pantalon est muni d'une métrique de courbure  $-1$  rendant les bords géodésiques. Or on a vu qu'un tel pantalon est déterminé de manière unique, à isomorphisme près, par la donnée des longueurs hyperboliques des composantes de son bord. Il est donc naturel d'introduire ces longueurs comme premières coordonnées pour

repérer un élément de  $\mathcal{T}(S, P)$ .

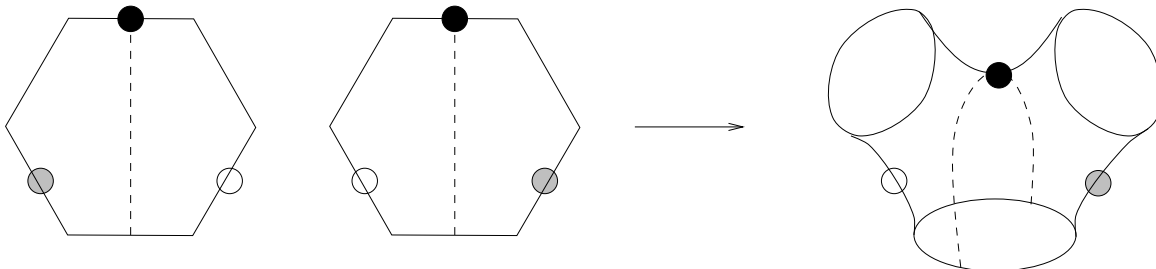
**Définition 1.15.** Soit  $(C_1, \dots, C_{3g-3+n})$  une multicourbe maximale de  $S - P$ . L'application  $l_i : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  associée à une métrique hyperbolique  $\mu$  la longueur de l'unique géodésique homotope à  $C_i$ .

Pour obtenir un autre élément de  $\mathcal{T}(S, P)$ , on peut d'une part changer la métrique sur chaque pantalon, c'est-à-dire changer les longueurs  $l_i$  des géodésiques  $\gamma_i$ , et d'autre part la manière de les recoller. Le second ensemble de coordonnées, ou coordonnées de torsion ("twist") paramètre précisément les recollements possibles. Le recollement doit être isométrique, afin d'obtenir une métrique sur la surface  $S - P$  toute entière. Par conséquent il faut bien sûr que les deux cercles géodésiques à recoller aient même longueur. Ceci dit, le recollement le long d'un cercle géodésique  $\gamma_i$  ne dépend que d'un seul paramètre de torsion  $\theta_i$ . Pour le définir, on commence par tracer sur  $S - P$  une courbe fermée  $C'_i$ , non nécessairement simple, telle que  $C'_i$  coupe deux fois  $C_i$  et passe par l'entrejambe des deux pantalons qui touche  $C_i$  (voir figure 1.4; nous laissons au lecteur le soin de tracer la figure dans le cas où les deux pantalons coïncident).



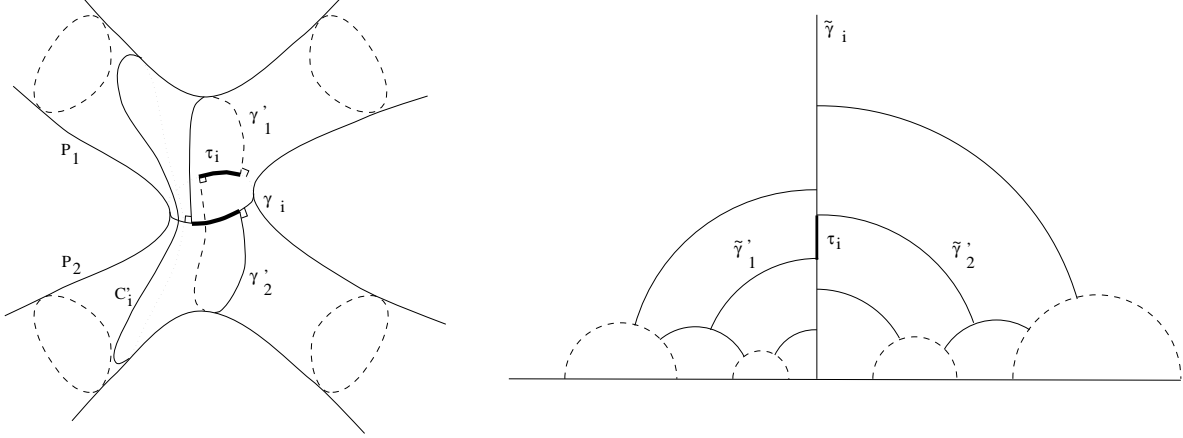
**Figure 1.4**

Un pantalon géodésique  $\mathcal{P}$  est donné par le recollement de deux hexagones rectangles. On considère alors la perpendiculaire commune,  $\gamma'_P$ , à  $\gamma_i$  et à la couture opposée.



**Figure 1.5**

La géodésique  $\gamma'_P$  apparaît en pointillés sur la figure 1.5. Une fois  $S - P$  découpée en pantalons géodésiques, il y a deux pantalons (éventuellement confondus) qui touchent  $\gamma_i$ . Nous pouvons donc définir deux arcs de géodésiques  $\gamma'_1$  et  $\gamma'_2$  dans chacun de ces pantalons, qui sont les perpendiculaires communes entre la géodésique  $\gamma_i$  et la couture opposée. En général, la réunion de  $\gamma'_1$  et  $\gamma'_2$  ne forme pas une courbe fermée. Cependant il existe un unique moyen de les relier par deux arcs de  $\gamma_i$  de sorte à obtenir une courbe fermée homotope à  $C'_i$  (cf. figure 1.6, sur laquelle on trouvera également le dessin sur le revêtement universel  $\mathbb{H}$ ).



**Figure 1.6**

Ces arcs peuvent s'enrouler plusieurs fois autour de  $\gamma_i$ . On appelle  $\tau_i$  la longueur d'un tel arc. Nous pouvons maintenant définir le paramètre de torsion, qui mesure de quel angle il faut tourner avant de recoller les deux bords le long de la géodésique  $\gamma_i$ .

**Définition 1.16.** La torsion  $\theta_i \in \mathbb{R}$  qui paramètre le recollement le long de la géodésique  $\gamma_i$  est donné par  $\theta_i = \pm 2\pi\tau_i/l_i$ . Le signe est conventionnel: par exemple positif si on tourne à droite en traversant la géodésique  $\gamma_i$ .

Soulignons que la mesure de  $\theta_i$  dépend du choix de la classe d'isotopie de la courbe  $C'_i$ . En particulier, on voit que si l'on effectue un twist de Dehn autour de  $\gamma_i$  et qu'on prend la nouvelle courbe comme référence, la mesure de  $\theta_i$  augmente de  $2\pi$ . On peut maintenant définir des coordonnées sur l'espace de Teichmüller:

**Définition 1.17.** On appellera coordonnées de Fenchel-Nielsen la donnée d'une application  $L : \mathcal{T}_{g,n} \rightarrow (\mathbb{R}_+^*)^{3g-3+n} \times (\mathbb{R})^{3g-3+n}$ , qui à un élément de  $\mathcal{T}_{g,n}$  associe les  $3g - 3 + n$  longueurs  $l_i$  et les  $3g - 3 + n$  paramètres de torsion  $\theta_i$ .

Ces coordonnées dépendent donc de la donnée (topologique) d'une multicourbe maximale ( $C_i$ ) et de courbes de référence ( $C'_i$ ) (en tout  $6g - 6 + 2n$  courbes), et on a montré ci-dessus que  $L$  définit une bijection entre  $\mathcal{T}_{g,n}$  et  $(\mathbb{R}_+^*)^{3g-3+n} \times (\mathbb{R})^{3g-3+n}$ . On peut montrer que cette application est un homéomorphisme (cf. [IT], Théorème 3.10):



**Proposition 1.18.** *L'application  $L : \mathcal{T}_{g,n} \rightarrow (\mathbb{R}_+^*)^{3g-3+n} \times (\mathbb{R})^{3g-3+n}$  est un homéomorphisme.* ■

Ces coordonnées permettent de montrer l'équivalence des deux topologies que nous avons définies sur  $\mathcal{T}_{g,n}$ . La démonstration se ramène en fait au lemme élémentaire suivant (cf. par ex. [IT] Proposition 3.3) qui traduit le fait que lorsque le groupe Fuchsien change continument, il en est de même des longueurs hyperboliques (le cas des paramètres de torsion se traite de manière similaire):

**Lemme 1.19.** *Soit  $X$  une surface de Riemann isomorphe à  $\mathbb{H}/\Gamma$ ; soit  $\gamma \in \Gamma$ , et  $C_\gamma$  la géodésique fermée de  $X$  correspondant à  $\gamma$ . Alors la trace de  $\gamma$  et la longueur hyperbolique  $\ell(C_\gamma)$  de  $C_\gamma$  sont liées par la relation :*

$$\mathrm{tr}(\gamma) = 2\mathrm{ch}^2\left(\frac{\ell(C_\gamma)}{2}\right).$$

Notons pour terminer que lorsque l'on utilise les coordonnées de Fenchel-Nielsen pour paramétrer l'espace des modules  $\mathcal{M}_{g,n}$ , et non plus l'espace de Teichmüller, les paramètres de torsion prennent leurs valeurs dans le cercle  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ , du fait de l'invariance par rapport à l'action des twists de Dehn sur les courbes  $C_i$  de la découpe utilisée (voir ci-dessus la définition 1.16 et la remarque qui la suit).

### I.1.5. Découpe minimale d'une surface

Soient maintenant  $S$  une surface de genre  $g$  et  $P$  un ensemble de  $n$  points de  $S$ . On munit  $S - P$  d'une métrique hyperbolique. Ce paragraphe est consacré à la démonstration du résultat suivant, qui est crucial quand il s'agit d'étudier les compactifications des espaces de modules  $\mathcal{M}_{g,n}$  (voir brièvement ci-dessous I.2.1):

**Proposition 1.20.** *Pour tout genre  $g$  et tout nombre de points marqués  $n$  avec  $\chi = 2 - 2g - n < 0$ , il existe une constante  $C_{g,n}$  ne dépendant que de  $g$  et de  $n$ , telle que toute surface de Riemann  $X$  de type  $(g,n)$  admette une multicourbe géodésique maximale  $(\gamma_1, \dots, \gamma_{3g-3+n})$ , dans laquelle la longueur de chaque  $\gamma_i$  est inférieure à  $C_{g,n}$ .*

DÉMONSTRATION. La preuve de cette proposition passe par plusieurs lemmes de géométrie hyperbolique qui ont leur intérêt propre.

– Manchons standards et trompettes

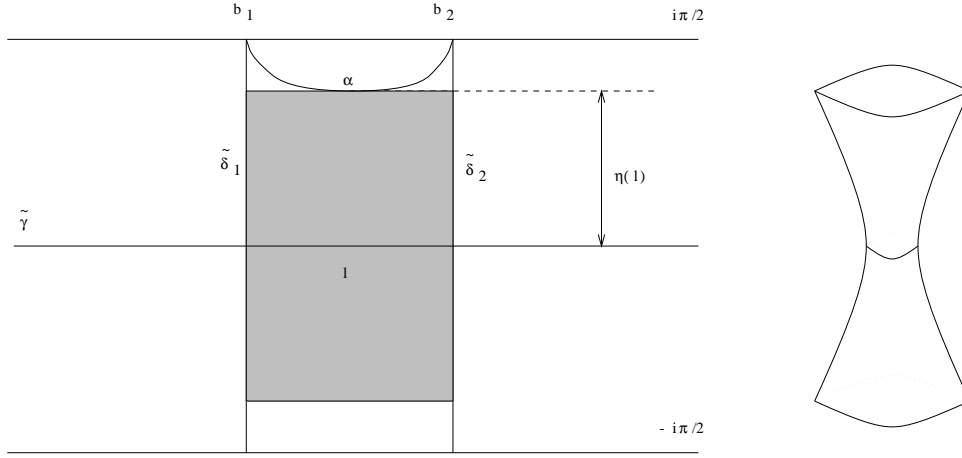
Soit  $A_l$  un anneau de module  $\pi/2l$ , de sorte que, pour sa métrique de Poincaré, la longueur de l'unique géodésique simple fermée  $\gamma$  est égale à  $l$ . Pour  $\eta > 0$ , on définit:

$$A_l(\eta) = \{z \in A_l \mid d_{A_l}(z, \gamma) \leq \eta\}.$$

On a alors le:

**Lemme 1.21.** *Il existe un nombre  $\eta(l)$ , tel que toute géodésique  $\gamma'$  de  $A_l$  qui rentre dans  $A_l(\eta(l))$ , soit coupe  $\gamma$ , soit n'est pas simple. La fonction  $\eta(l)$  est strictement décroissante.*

DÉMONSTRATION DU LEMME 1.21. En effet, on note d'abord que  $A_l$  est isomorphe au quotient de la bande  $\mathbb{B}$  par le groupe engendré par la translation  $z \rightarrow z + l$ :  $A_l = \mathbb{B} / \langle z + l \rangle$  (voir figure 1.7). Soit alors  $\delta$  une géodésique de  $A_l$  perpendiculaire à  $\gamma$ , et soient  $\tilde{\delta}_1$ , et  $\tilde{\delta}_2$  deux relèvements successifs de  $\delta$  dans  $\mathbb{B}$ , intersectant la droite  $y = \pi/4$  en  $b_1$  et  $b_2$ . On considère la géodésique  $\alpha$  joignant  $b_1$  et  $b_2$ . Étant donné que deux géodésiques ont au plus un point d'intersection (hyperbolicité), on a  $\alpha \cap \mathbb{R} = \emptyset$ , et l'image de  $\alpha$  dans  $A_l$  est simple (voir figure 1.7).



**Figure 1.7**

Pour démontrer le lemme 1.21, il suffit de voir que  $\eta(l) = d(\alpha, \tilde{\gamma})$  convient. En effet, si  $\beta$  est une géodésique de  $\mathbb{B}$  qui est plus proche de la droite réelle  $\mathbb{R}$  que  $\eta$ , et disjointe de  $\mathbb{R}$ , alors ses extrémités sont à une distance euclidienne l'une de l'autre supérieure à  $l$ , et donc  $\beta$  ne peut pas être disjointe de sa translatée par  $l$ . Par conséquent, son image dans  $A_l$  n'est pas simple. De plus, il est évident, par construction, que  $\eta(l)$  décroît lorsque  $l$  croît. Un calcul explicite relie  $\eta$  et  $l$ ; on a:

$$\text{ch}(\eta(l)) = \frac{1}{\text{th}(l/2)} .$$

On peut descendre la métrique hyperbolique de  $\mathbb{B}$  sur  $A_l(\eta)$ . Le collier  $A_l(\eta)$  est donc une surface de Riemann munie d'une métrique de courbure  $-1$ .

**Définition 1.22.** Un manchon est une surface à bords, munie d'une métrique de courbure  $-1$ , isométrique à un collier  $A_l(\eta(l))$ . L'unique géodésique simple fermée de  $A_l(\eta)$  est appelée l'équateur du manchon.

Le bord du manchon est à distance constante  $\eta$  de l'équateur (ce n'est pas une géodésique).

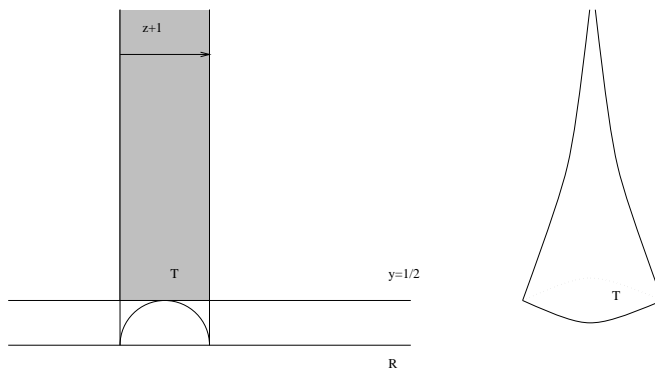
Soit  $S$  un cylindre infini d'un seul côté. Le revêtement universel de  $S$  est isomorphe à  $\mathbb{H}$ . En fait,  $S$  est isomorphe à  $\mathbb{H}/\langle z \rightarrow z + 1 \rangle$ . Soit  $z$  un point de  $S$ ; tous ses relevés  $\tilde{z}$  ont la même partie imaginaire. On considère alors  $T = \{z \in S/\text{Im}(\tilde{z}) > 1/2\}$ . La surface  $T$  est un anneau infini d'un seul côté, muni d'une métrique de courbure  $-1$  qui est le modèle du "cusp" (ici encore le bord n'est pas géodésique ; il s'agit d'un horocycle).

**Définition 1.23.** Une trompette est une surface de Riemann, munie d'une métrique de courbure  $-1$ , isométrique à  $T$ .

La surface  $T$  est isomorphe à un disque pointé en un point  $z$ ; on dit que la trompette est centrée en  $z$ . On a un résultat analogue à celui obtenu pour les manchons:

**Lemme 1.24.** Une géodésique qui rentre dans une trompette centrée en  $z$  soit aboutit en  $z$ , soit n'est pas simple.

La démonstration est la même que pour les manchons (voir figure 1.8).

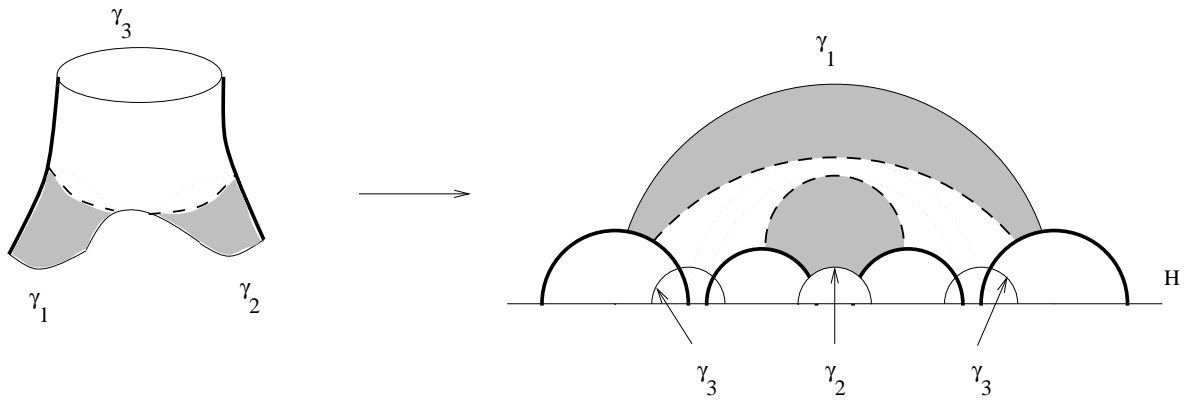


**Figure 1.8**

– Plongement des manchons et des trompettes dans une surface de Riemann:

**Lemme 1.25.** Soit  $X$  une surface de Riemann et soient  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  deux géodésiques fermées simples de  $X$ . Considérons les surfaces à bords :  $A(\gamma_i) = \{z \in X \mid d(z, \gamma_i) < \eta(l(\gamma_i))\}$ . Alors les deux surfaces  $A(\gamma_1)$  et  $A(\gamma_2)$  sont des manchons disjoints.

**DÉMONSTRATION DU LEMME 1.25.** Elle tient sur la figure 1.9: Étant données  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , nous avons choisi une courbe simple les reliant, puis découpé  $X$  le long des  $\gamma_i$  et de cette courbe. Il existe dans  $X$  une géodésique  $\gamma_3$  simple fermée homotope à la composante de bord obtenue. Si on coupe  $X$  le long de  $\gamma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), on obtient un pantalon géodésique qui contient une moitié de chaque  $A(\gamma_i)$ . Découpons alors le long des deux coutures qui partent de  $\gamma_3$ . La figure 1.9 montre le résultat obtenu. On constate que ces moitiés de  $A(\gamma_i)$  sont disjointes, et qu'elles sont isomorphes à des moitiés de manchon standard.



**Figure 1.9**

On a un résultat analogue pour les trompettes:

**Lemme 1.26.** *Soient  $\hat{X}$  une surface de Riemann compacte, et  $X = \hat{X} - P_X$  une surface à points marqués. Soit  $x$  un point marqué, alors l'ensemble  $T(x)$  des points  $z$  de  $X$  tels qu'il existe un chemin fermé dans  $X$ , contenant  $z$ , homotope à  $x$ , et de longueur hyperbolique inférieure à 2 est une trompette disjointe de toute autre trompette ou de tout manchon  $A(\gamma_i) \subset X$ .*

– Une constante universelle:

Il existe une valeur particulière  $\lambda$  telle que  $\eta(\lambda) = \lambda/2$ . Étant donné le calcul de la fonction  $\eta(l)$ , on trouve  $\lambda = \ln(\sqrt{2} + 1)$ . Soit maintenant une géodésique  $\gamma$  de  $X$ , fermée, simple, de longueur inférieure à  $\lambda$ . Alors autour de  $\gamma$ , d'après le résultat précédent, on peut injecter le manchon  $A(\gamma)$ . Maintenant toute géodésique simple qui rentre dans  $A(\gamma)$  coupe  $\gamma$ , et donc sa longueur est supérieure à  $2\eta(l) > \lambda$ . Par conséquent, on obtient le résultat surprenant suivant:

**Lemme 1.27.** *Si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont deux géodésiques simples fermées de longueurs inférieures à  $\lambda$ , elles sont disjointes. De plus, on peut plonger autour de ces géodésiques les manchons  $A(\gamma_i)$ , qui seront eux aussi disjointes.*

Les lemmes 1.25, 1.26 et 1.27 se rattachent à ce qui est généralement appelé “lemme du collier” (en particulier le lemme 1.25). On pourra comparer à [T], Appendice D, et aux références qui y figurent.

– Parties grasses et parties maigres:

Elles sont définies de la manière suivante, à partir du lemme 1.27:

**Définition 1.28.** Soit  $X = \hat{X} - \{x_1, \dots, x_n\}$  une surface de Riemann à points marqués. Considérons toutes les géodésiques  $\gamma_i$  fermées simples de longueur inférieure à  $\lambda$ , ainsi que les manchons  $A(\gamma_i)$  autour de  $\gamma_i$  et les trompettes  $T(x_i)$ . La partie maigre  $X_m$  est la réunion disjointe de ces manchons et de ces trompettes, et la partie grasse  $X_g$  est le

complémentaire de  $X_m$  ( $X_g$  est donc fermée).

– Longueur des composantes de bord de la partie grasse:

Le bord d'une trompette est un horocycle dont la longueur hyperbolique est égale à 2, quelle que soit la trompette, comme il découle directement de la définition d'une trompette. On peut également calculer la longueur du bord du manchon standard d'équateur de longueur  $l$ . En notant  $\xi(l)$  cette longueur, on obtient:

$$\xi(l) = \frac{l}{\text{th}(l/2)}.$$

Il est facile de voir que  $\xi(l)$  est une fonction croissante (avec un minimum  $\xi(0) = 2$ ). Par conséquent, la longueur des composantes de bords de la partie grasse est uniformément bornée par  $\xi(\lambda) = \lambda e^\lambda$ . On a donc montré le

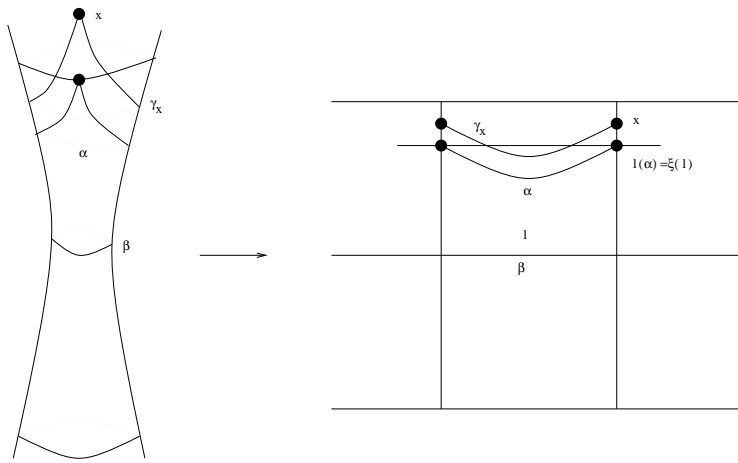
**Lemme 1.29.** *Soit  $X$  une surface de Riemann décomposée en partie grasse et partie maigre. Soit  $A$  une composante connexe du bord de la partie grasse. Alors la longueur de  $A$  pour la métrique hyperbolique de  $X$  vérifie  $l(A) \leq \lambda e^\lambda$ .*

– Rayon d'injectivité dans la partie grasse:

Il est minoré par le

**Lemme 1.30.** *L'ensemble des points de  $X$  à distance inférieure à  $\lambda$  d'un point de  $X_g$  est isométrique à un disque hyperbolique de rayon  $\lambda$ .*

DÉMONSTRATION. En d'autres termes, on veut montrer que le disque hyperbolique de rayon  $\lambda$  centré en un point de la partie grasse, s'injecte dans  $X$ . Pour cela, on choisit  $x \in X_g \subset X$  un point de la partie grasse et  $\gamma_x$  un lacet de  $X$  contenant  $x$  et non homotope à un point. On veut montrer que  $l(\gamma_x) > \lambda$ . Soit  $\beta$  la géodésique simple fermée dans la classe d'homotopie (libre) de  $\gamma_x$ . Alors  $l(\gamma_x) \geq l(\beta)$  et il y a alors deux cas: soit  $l(\beta) \geq \lambda$  et donc  $l(\gamma_x) \geq \lambda$  et c'est fini; soit  $l(\beta) < \lambda$ . Alors  $\beta$  est l'équateur d'un manchon, et  $x$  n'est pas dans ce manchon puisqu'il se trouve dans la partie grasse. Par conséquent,  $l(\gamma_x) > \xi(l) \geq 2\lambda$  (cf. figure 1.10).



**Figure 1.10**

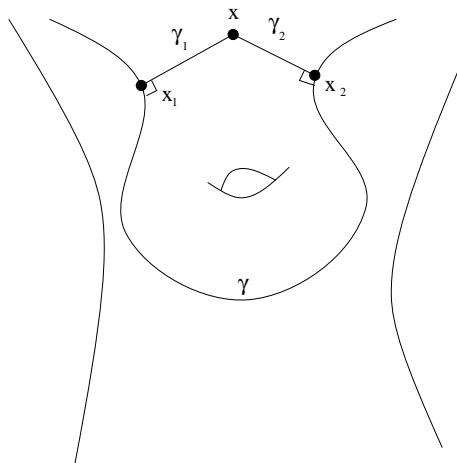
– Longueur d’un arc de géodésique minimal dans la partie grasse:

**Définition 1.31.** Nous dirons qu’un arc géodésique  $\gamma \subset X_g$  est un arc de géodésique minimal si pour tous points  $x$  et  $y$  de cet arc, le chemin le plus court dans  $X$  entre  $x$  et  $y$  est inclus dans cet arc.

Nous allons montrer que la bande de hauteur  $\lambda/2$  centrée autour d’un tel arc s’injecte dans  $X$ , c’est-à-dire que  $\{z \in X \mid d(z, \gamma) < \lambda/4\}$  est isomorphe à une bande (voir la preuve après le lemme 1.32). En particulier son aire est inférieure à l’aire de la surface  $X$  qui vaut  $-2\pi\chi(X)$  (Gauss-Bonnet). On en déduit alors le lemme suivant:

**Lemme 1.32.** *La longueur d’un arc géodésique minimal est majoré par une constante qui ne dépend que de  $g$  et de  $n$ , soit  $L_{g,n} = 8\pi(2g - 2 + n)/\lambda$ .*

**DÉMONSTRATION.** Pour montrer que la bande s’injecte bien dans  $X$ , on raisonne par l’absurde, en supposant que ce n’est pas le cas. Il existe alors un point  $x \in X$  avec deux projetés orthogonaux  $x_1$  et  $x_2$  sur  $\gamma$ . Considérons la portion  $\gamma_{1,2}$  de  $\gamma$  comprise entre  $x_1$  et  $x_2$ , et les deux bouts de géodésiques  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  joignant  $x$  à  $x_1$  et  $x_2$ . Le lacet  $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_{1,2}$  est un triangle géodésique avec deux angles droits (représentés sur la figure 1.11). Il ne peut donc être homotope à un point. D’autre part, l’arc  $\gamma$  étant minimal, la longueur de  $\gamma_{1,2}$  est inférieure à  $l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$ , qui est inférieure à  $\lambda/2$ . Ceci contredit la minoration du rayon d’injectivité dans la partie grasse (lemme 1.30).



**Figure 1.11**

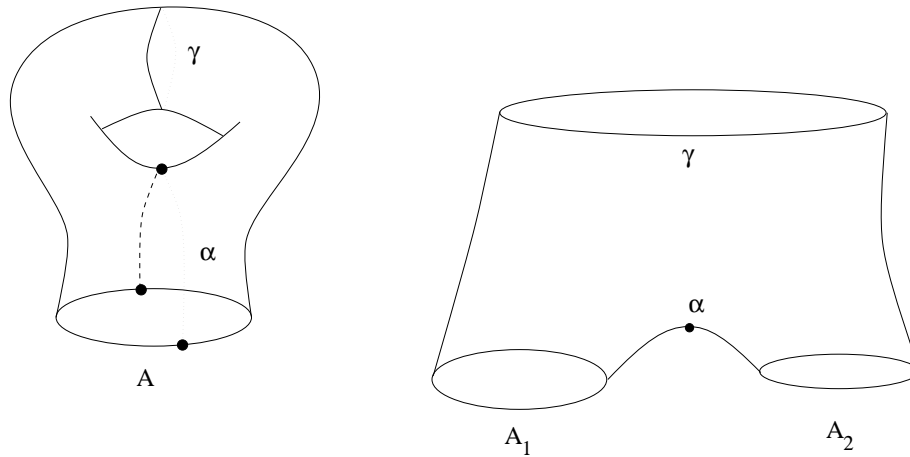
On en vient à la

– Conclusion de la preuve de la proposition 1.20:

La démonstration de l'existence de  $C_{g,n}$  découle de ces différents résultats. Pour obtenir une multicourbe maximale comme dans l'énoncé de la proposition 1.20, on commence par découper la surface  $X$  le long de toutes les géodésiques simples fermées de longueur inférieure à  $\lambda$ , dont on sait par le lemme 1.27 qu'elles sont disjointes. Si l'ensemble de ces géodésiques forme une multicourbe, on a terminé. Sinon on est amené à découper dans la partie grasse, et il faut montrer que ceci peut se faire de manière à ce que la longueur des composantes de bord reste contrôlée. Si l'ensemble de ces géodésiques est vide, c'est que  $X = X_g$  et il n'y a pas de partie maigre. Considérons alors la plus courte (ou une des plus courtes) géodésique simple fermée  $\gamma$ , et découpons-la en deux arcs de même longueur. Ces arcs de géodésique sont nécessairement minimaux et contenus dans  $X_g$ . Leur longueur est donc majorée par  $L_{g,n}$  (lemme 1.32) et la longueur de  $\gamma$  est par conséquent inférieure à  $2L_{g,n}$ . On coupe  $X$  le long de  $\gamma$ .

Soit  $S$  une composante connexe de  $X$  après cette découpe; alors  $S$  possède au moins une composante de bord. Dans le cas où  $S$  a plus d'une composante de bord, choisissons les deux composantes de bord les plus proches:  $A_1$  et  $A_2$ . Soit  $\alpha$  l'arc géodésique de  $S$  de longueur minimale, joignant ces deux composantes. Dans le cas où  $S$  possède une seule composante de bord  $A$ , nous pouvons encore trouver un tel arc  $\alpha$ , non homotope à un point, joignant  $A$  à elle-même. Si nous découpons  $\alpha$  en deux arcs de même longueur, nous obtenons de nouveaux deux arcs minimaux de  $X_g$ , et donc encore  $l(\alpha) < 2L_{g,n}$ . Si maintenant nous découpons  $X_g$  le long de  $\alpha$ , nous obtiendrions une nouvelle composante de bord. Il existe dans  $X_g$  une géodésique fermée simple  $\gamma$  homotope à cette nouvelle composante de bord. Si  $S$  n'est pas un pantalon, alors  $\gamma$  n'est pas homotope à une composante de bord de  $S$ . Par conséquent, on peut couper  $X_g$  le long de  $\gamma$  et la longueur de  $\gamma$  est inférieure à  $l(A_1) + l(A_2) + 4L_{g,n}$ . Ces différentes courbes sont représentées sur la figure

1.12.



**Figure 1.12**

En procédant ainsi, la longueur des composantes de bords augmente à chaque étape d'une quantité contrôlée qui ne dépend que de  $g$  et de  $n$ . Comme on ne découpe que  $3g - 3 + n$  fois, ceci montre l'existence de la constante  $C_{g,n}$ . Plus précisément, si  $l_k$  est le maximum des longueurs des composantes de bord après avoir découpé le long de  $k$  courbes, on a les relations de récurrence :  $l_0 \leq 2L_{g,n}$  et  $l_{i+1} \leq 2l_i + 4L_{g,n}$ . On peut alors expliciter une valeur possible pour la constante  $C_{g,n}$ , à savoir que l'on peut prendre

$$C_{g,n} = 2^{3g-3+n}(6L_{g,n}) - 4L_{g,n},$$

avec  $L_{g,n} = 8\pi(2g - 2 + n)/\ln(\sqrt{2} + 1)$ .



## I.2. Dégénérescence de surfaces de Riemann; voisinages de l'infini des espaces de modules en genre 0

On a démontré dans la section précédente l'énoncé suivant:

*Si une famille de surfaces de Riemann  $\{X_i\}, i \in I$ , n'est pas bornée dans l'espace des modules, il existe une sous famille  $\{X_i\}, i \in J, J \subset I$ , et une classe d'isotopie de courbes telle que la longueur de la géodésique correspondante tende vers 0 le long de cette sous-famille.*

C'est là le phénomène essentiel de dégénérescence qui se produit lorsque l'on s'éloigne à l'infini dans l'espace des modules. Dans cette partie, nous précisons d'abord ce point en esquissant comment les résultats de la section 1 permettent de construire une compactification des espaces de modules  $\mathcal{M}_{g,n}$ . Il s'agit là seulement d'une introduction à ces problèmes d'un point de vue analytique. Nous renverrons le lecteur à la littérature pour plus de précisions, et aussi un point de vue plus algébrique.

Nous nous tournerons ensuite vers la situation en genre 0, c'est-à-dire pour les sphères avec des points marqués, situation notablement plus simple et pourtant déjà très riche. Nous donnerons une description essentiellement combinatoire du voisinage de l'infini des espaces de modules dans ce cas, en particulier des points de dégénérescence maximale de ces espaces (et de leurs voisinages), qui correspondent au cas où *toutes* les géodésiques d'une découpe en pantalons dégènèrent simultanément. On verra également comment cette ou ces descriptions combinatoires sont liées à des thèmes qui apparaissent ailleurs dans ces notes (voir le chapitre II).

### I.2.1. Surfaces de Riemann avec nœuds et compactification

Que nous apprennent les résultats de la section 1 sur une possible compactification de l'espace des modules? Comme indiqué ci-dessus nous nous en tiendrons à quelques indications. D'après la section précédente et en particulier l'énoncé rappelé ci-dessus, on voit que pour obtenir un compactifié  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  de  $\mathcal{M}_{g,n}$ , la première chose à faire consiste à rajouter les surfaces obtenues lorsque certaines géodésiques simples fermées dégènèrent en des points. Les théorèmes de complétude que l'on démontre, y compris dans des contextes plus algébriques, reviennent à montrer qu'il *suffit* effectivement de rajouter ces surfaces ou leurs analogues en termes de courbes algébriques (à savoir des courbes dont les seules singularités sont des points doubles ordinaires) pour obtenir une compactification de l'espace des modules, lisse qui plus est.

Les surfaces obtenues par dégénérescence sont des *surfaces de Riemann avec nœuds*, où on définit une telle surface  $X$  de type  $(g, n)$  comme un espace muni d'une structure complexe avec singularités tel que:

i) Tout point  $x \in X$  possède un voisinage isomorphe, soit au disque unité de  $\mathbb{C}$  soit – et c'est

alors un noeud de la surface – à l’ensemble  $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}, |z_1| < 1, |z_2| < 1, z_1 z_2 = 0\}$ , le point  $x$  s’envoyant sur l’origine de cette carte.

ii)  $X$  est munie de  $n$  points marqués  $(x_1, \dots, x_n)$ , et on a  $X = \widehat{X} - (x_1, \dots, x_n)$  avec  $\widehat{X}$  compacte.

iii) Si on enlève les noeuds, chaque composante  $X_i$  de la surface obtenue est hyperbolique (i.e. de caractéristique d’Euler-Poincaré négative), où on considère la trace des noeuds comme donnant lieu à des points marqués supplémentaires.

iv) Si  $m$  est le nombre de noeuds,  $p$  le nombre de composantes connexes une fois enlevés les noeuds, et  $(g_i)$  les genres de ces composantes, on a  $\sum_i g_i + m - p + 1 = g$ .

Comme on l’aura compris, un “noeud” n’est rien d’autre qu’un point double ordinaire; cette terminologie, commune lorsqu’il s’agit de surfaces de Riemann, a simplement l’avantage de la brièveté. Soit  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  l’union de  $\mathcal{M}_{g,n}$  et de l’ensemble des surfaces à noeuds de type  $(g, n)$  avec au moins un noeud. Il s’agit de mettre une topologie sur cet ensemble, puis d’esquisser la preuve de ce que  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  muni de cette topologie est un espace compact.

La topologie sur  $\mathcal{M}_{g,n}$  étant connue, il suffit de définir une base de voisinages d’une surface  $X_0$  avec  $m$  noeuds ( $m \geq 1$ ). Pour ce faire, on remarque que  $X_0$  est obtenue par dégénérescence de surfaces lisses  $X_\epsilon \in \mathcal{M}_{g,n}$  ( $0 < \epsilon < 1$ ), qui sont obtenues en “ouvrant les noeuds” de  $X_0$ . Schématiquement, on procède ainsi: si  $x \in X_0$  est un noeud de  $X_0$  avec une carte locale comme en i) ci-dessus, on se donne deux anneaux  $A_j = \{z_j \in \mathbb{C}, \epsilon < |z_j| < 1\}$ ,  $j = 1, 2$ . Chacun des anneaux correspond dans la carte locale en  $x$  à un anneau dans  $X_0$ ; on coupe la partie de  $X_0$  définie dans cette carte par  $|z_j| \leq \epsilon$  ( $j = 1, 2$ ), et on recoud les images des anneaux suivant l’identification  $z_1 z_2 = \epsilon$ . Ceci étant fait pour chacun des  $m$  noeuds, on obtient pour  $\epsilon > 0$  une surface lisse  $X_\epsilon$ . On considère ensuite une découpe en pantalons de  $X_\epsilon$  par des géodésiques  $\gamma_1, \dots, \gamma_{3g-3+n}$  telles que les  $m$  premières soient celles qui dégèrent lorsque  $\epsilon$  tend vers 0; autrement dit chaque  $\gamma_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) est l’équateur d’un manchon de la partie maigre (pour  $\epsilon$  assez petit);  $\gamma_i$  est homotope au bord de l’anneau  $A_j$  ( $j = 1$  ou  $2$ ) dans la construction ci-dessus pour le noeud  $i$ . On introduit ensuite les coordonnées de Fenchel-Nielsen  $(\ell, t) \in (\mathbb{R}_+)^{3g-3+n} \times \mathbb{R}^{3g-3+n}$  correspondant à la découpe de  $X_\epsilon$  par les  $\gamma_i$ , étendues ici au cas où certaines longueurs  $\ell_i$  s’annulent. La surface à noeuds initiale  $X_0$  est définie par  $\ell_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Etant donné  $\mu > 0$  et  $\tau > 0$  assez petits, on définit les voisinages  $U_{\mu,\tau}$  de  $X_0$  par:

$$U_{\mu,\tau} = \{X \in \overline{\mathcal{M}}_{g,n}, |\ell_i(X) - \ell_i(X_0)| < \mu \text{ pour tout } i, |t_i(X) - t_i(X_0)| < \tau \text{ pour } i > m\}.$$

Par définition, les  $U_{\mu,\tau}$  forment une base de voisinage de  $X_0$  dans  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ . Il reste à voir que *cette topologie fait de  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  un espace compact*; en fait on obtient ainsi une structure d’orbifold  $\mathbb{R}$ -analytique que l’on peut munir d’une structure complexe pour en faire un espace analytique. Notons que la théorie analytique (réelle et complexe) est largement l’œuvre de L.Bers et nous renvoyons en particulier à [Be] (§15 sqq.) pour un résumé et

des références (on trouvera également quelques indications et des références dans [IN], Appendice B).

Un des ingrédients importants de la preuve est le résultat démontré dans la section précédente (Proposition 1.20) et dont on a rappelé une conséquence ci-dessus, qui dit que les longueurs des courbes d'une découpe minimale sont uniformément bornées sur  $\mathcal{M}_{g,n}$ . Ce résultat va permettre de recouvrir  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  par un nombre fini de compacts, et donc de montrer la compacité de l'espace lui-même. Considérons pour cela l'ensemble  $\mathcal{D}_{g,n}$  des découpes en pantalons de la surface topologique  $S$  de type  $(g, n)$ , modulo l'action des difféomorphismes de cette surface. Cet ensemble est fini, chaque élément étant donné combinatoirement par un graphe trivalent de type  $(g, n)$ . Nous ne développerons pas ce point ici, qui sera détaillé plus bas dans le cas du genre 0 (voir aussi le chapitre II). Du point de vue géométrique, un élément  $P$  de  $\mathcal{D}_{g,n}$  correspond à un type de découpe, et en pinçant les courbes de celle-ci, on obtient une unique surface à noeuds de dégénérescence maximale; la structure conforme est bien unique, puisque chaque composante de la surface obtenue en coupant suivant les noeuds n'est autre qu'une sphère à trois points marqués, qui possède une unique structure conforme. Les points  $P \in \mathcal{D}_{g,n}$  sont donc les *points de dégénérescence maximale* de  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ . On veut maintenant définir des compacts  $K_P$  qui recouvrent  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  lorsque  $P$  parcourt l'ensemble fini  $\mathcal{D}_{g,n}$ .

Soit  $C_{g,n}$  une constante telle que toute surface de Riemann de type  $(g, n)$  admet une découpe en pantalons dont toutes les géodésiques sont de longueur  $< C_{g,n}$ . Une telle constante existe d'après la proposition 1.20 – qui fournit même une estimation de cette constante. On définit  $K_P$  comme l'ensemble des surfaces de Riemann  $X$  de type  $(g, n)$  telle qu'il existe une découpe de  $X$  du type topologique défini par  $P$  telle que la longueur de la géodésique dans la classe d'homotopie de chaque lacet est  $\leq C_{g,n}$ . La définition même de  $C_{g,n}$  implique que les  $K_P$ ,  $P \in \mathcal{D}_{g,n}$ , forment un recouvrement de  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ .

Il reste à voir que  $K_P$  est compact pour tout  $P$ , ce qui devrait être intuitivement clair au point où nous en sommes. Le point est que l'on ne peut définir des coordonnées globales sur  $K_P$ , mais qu'on peut par contre définir un *espace de déformations*  $\mathcal{D}(P)$  associé à  $P$  dont une partie compacte se projette sur  $K_P$  suivant une application continue et ouverte (cf. [Be]). La situation est exactement parallèle à celle des espaces de Teichmüller  $\mathcal{T}_{g,n}$  et des modules  $\mathcal{M}_{g,n}$ ; pour décrire une partie compacte de  $\mathcal{M}_{g,n}$ , on peut chercher simplement une partie compacte de  $\mathcal{T}_{g,n}$  qui s'envoie dessus par la projection canonique. De même l'espace des déformations  $\mathcal{D}(P)$  joue ici le rôle de l'espace de Teichmüller. L'analogie devient même une identité en élargissant légèrement le cadre: on définit en fait pour toute surface à noeuds  $X$  un espace de déformations  $\mathcal{D}(X)$ , tel que si  $X$  est maximale dégénérée, on a  $\mathcal{D}(X) = \mathcal{D}(P)$  pour le point  $P$  correspondant à  $X$ , tandis que si au contraire  $X$  est lisse, on a  $\mathcal{D}(X) = \mathcal{T}(X) \simeq \mathcal{T}_{g,n}$ . L'espace  $\mathcal{D}(P) \simeq \mathbb{C}^{3g-3+n}$  est topologiquement trivial, et paramétré globalement par des coordonnées de Fenchel-Nielsen (toujours comme

espace  $\mathbb{R}$ -analytique). Lorsque l'on veut décrire l'espace des modules, les paramètres de torsion peuvent être choisis dans un domaine borné, parce qu'il y a invariance par rapport à l'action des twists de Dehn, qui induisent des translations sur ces paramètres (voir ci-dessus les dernières lignes du paragraphe I.1.4). Maintenant, du fait que la longueur de la découpe de type  $P$  est bornée sur  $K_P$ , on trouve immédiatement un compact de  $\mathcal{D}(P)$  (une boule fermée) dont l'image par la projection canonique  $\mathcal{D}(P) \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  recouvre  $K_P$ , ce qui achève la démonstration.

Donnons pour finir quelques indications, bibliographiques en particulier, sur la liaison avec la géométrie algébrique. Même si le langage est très différent, les concepts et les démarches sont souvent parallèles. Aux surfaces de Riemann à nœuds correspondent les courbes algébriques semi-stables, c'est-à-dire les courbes dont les singularités sont au plus des points doubles ordinaires. Au théorème sur la longueur des découpes minimales et la théorie de la déformation de Bers correspondent la déformation des singularités quadratiques (semi-stables) et le théorème de réduction semi-stable. C'est ce dernier qui "explique" le privilège des courbes à points doubles ordinaires et permet d'appliquer le critère valuatif de propreté pour s'assurer que l'espace obtenu en "adjoignant" ces courbes aux courbes lisses est bien complet. On en trouvera une version analytique dans [AC] et une version algébrique dans [DM], qui est bien sûr l'article fondateur, du point de vue algébrique; on pourra également consulter [Kn]. On recommandera aussi [PJ] (en particulier la section 2) pour des énoncés de comparaison entre structures analytiques et algébriques.

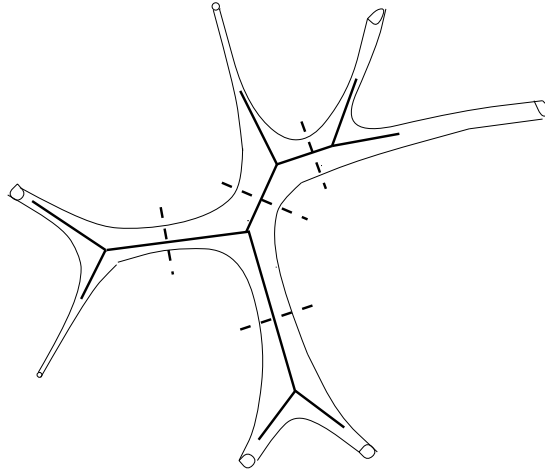
### I.2.2. Cas du genre 0; voisinages des points de dégénérescence maximale

Nous nous restreignons maintenant au cas du genre 0 pour étudier le voisinage de l'infini de l'espace des modules  $X_n = \mathcal{M}_{0,n}$  des sphères à  $n$  points ( $n \geq 3$ ) marqués *ordonnés*. Si  $\mathcal{T}_{0,n}$  est l'espace de Teichmüller correspondant,  $\mathcal{M}_{0,n}$  est le quotient de  $\mathcal{T}_{0,n}$  par l'action du groupe modulaire de Teichmüller (mapping class group), noté  $\Gamma_{0,n}$  ou ici  $K(0,n)$ . Cette action est propre et discontinue, comme c'est le cas pour tout  $(g,n)$ , et la notation  $K(0,n)$  rappelle qu'en genre 0, ce groupe est relativement bien connu, puisqu'il s'agit du quotient du groupe de tresses colorées à  $n$  brins sur la sphère par son centre (qui est d'ordre 2). On trouvera des précisions là-dessus ici-même, au chapitre II.

Reprenons brièvement d'abord la situation topologique dans ce cas particulier; on note  $S = S^2$  la 2-sphère standard et  $C = \{p_1, \dots, p_n\}$  un ensemble de  $n$  points ordonnés de  $S$  (on supposera toujours par la suite que  $n \geq 3$ ). Une découpe en pantalons de  $S - C$  comprend  $n - 3$  courbes simples définies à isotopie près. Le groupe de Teichmüller  $K(0,n)$  agit sur l'ensemble des découpes et le quotient par cette action est un ensemble fini. Chaque élément est un *graphe trivalent* dont chacun des  $n - 3$  sommets représente un pantalon, deux sommets étant liés par une arête si et seulement si les deux pantalons correspondants ont un bord en commun. Cette construction topologique est valable pour tout  $(g,n)$ ,

mais le fait qu'ici  $g = 0$  implique que l'on obtient ainsi des graphes simplement connexes, c'est-à-dire des *arbres*. Notons que pour tout type  $(g, n)$  de courbes, c'est un problème purement combinatoire que d'énumérer les graphes trivalents de ce type (en nombre fini) formés avec  $2g - 2 + n$  "pantalons", c'est-à-dire arbres élémentaires ayant la forme d'un Y (cf. brièvement le I.2.5 ci-dessous).

On a représenté sur la figure 2.1 ci-dessous une sphère avec 7 points marqués, munie de sa métrique de Poincaré et "presque maximale dégénérée", c'est-à-dire qu'elle est munie d'une découpe, obtenue en "découpant suivant les pointillés", le long de géodésiques courtes, qui se trouvent dans la partie maigre de la surface (voir section I.1). Le graphe trivalent associé apparaît simplement comme le "squelette" de la surface. Nous reviendrons ci-dessous à ce codage de la situation à l'aide de graphes (I.2.5).



**Figure 2.1**

On note  $X_n = \mathcal{M}_{0,n}$  et  $\overline{X}_n$  le compactifié décrit précédemment en ajoutant des surfaces à noeuds (courbes algébriques stables de genre arithmétique nul); on note  $D_\infty = \overline{X}_n - X_n$  le diviseur à l'infini – qui du point de vue algébrique est un diviseur à croisements normaux. L'espace  $X_n$  est de dimension réelle  $2(n - 3)$ ; étant donnée une découpe  $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-3}$ , un élément de  $X_n$  est repéré par ses coordonnées de Fenchel-Nielsen  $(\ell_i, t_i)$ ,  $i = 1, \dots, n - 3$ ,  $\ell_i > 0$ ,  $t_i \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ , où  $\ell_i$  est la longueur hyperbolique de  $\gamma_i$  et  $t_i$  le twist associé. Le diviseur à l'infini  $D_\infty$  est donc lui de dimension réelle  $2(n - 4)$ , correspondant à l'annulation de l'un au moins des  $\ell_i$  (pour une découpe convenablement choisie), le ou les twists associés prenant alors des valeurs arbitraires. Notons que l'annulation d'une seule longueur fait baisser la dimension réelle de deux, car l'on travaille dans un domaine cône (homéomorphe à une boule), obtenu à partir de  $\mathbb{R}_+^{n-3} \times \mathbb{T}^{n-3}$  en identifiant tous les points de la section  $0 \times \mathbb{T}^{n-3}$ . Nous nous restreindrons essentiellement ici à la description combinatoire de la distribution des points de dégénérescence *maximale* de  $\overline{X}_n$ , et à leurs voisinages; il s'agit donc des points obtenus par pincements de *toutes* les courbes d'une découpe. On a vu que chacun d'eux est associé à un graphe, qui ici en genre 0 est un arbre.

Localement, on peut décrire ainsi la situation, et cette description locale est d'ailleurs essentiellement valable pour tout  $(g, n)$ : on fixe une découpe de  $S - C$  à difféomorphisme près, soit  $(\gamma_1, \dots, \gamma_{n-3})$ , avec donc des coordonnées de Fenchel-Nielsen associées,  $(\ell, t) \in \mathbb{R}_+^{n-3} \times \mathbb{T}^{n-3}$ . Soit  $P$  le point de dégénérescence maximale associé, donné par  $\ell = 0$ . Dans  $\overline{X}_n$ ,  $P$  possède une base de voisinages donnés simplement par des boules  $\mathcal{U} \simeq D^{n-3}$  où  $D$  est le disque ouvert unité. La trace  $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cap X_n$  de  $\mathcal{U}$  sur  $X_n$  est de la forme  $D_*^{n-3}$  où  $D_*$  est le disque privé de l'origine. Pour le dire un peu autrement,  $P$  est à l'intersection des composantes irréductibles  $D_i$  de  $D_\infty$ , où  $D_i$  est défini par  $\ell_i = 0$  et ces diviseurs sont à croisements normaux (de nouveau cette description vaut essentiellement en genre quelconque).

Les "points base à l'infini", utilisés entre autres pour étudier l'action du groupe de Galois et plus généralement les automorphismes du (complété profini du) groupe fondamental  $K(0, n)$  de  $X_n$  (voir chapitre II) sont définis comme des régions simplement connexes de  $X_n$  asymptotes aux points de dégénérescence maximale. Plus précisément, soit  $\mathcal{V} \simeq D_*^{n-3}$  comme ci-dessus. Puisque  $\mathcal{V}$  se rétracte sur le tore  $\mathbb{T}^{n-3}$ , on peut recouvrir  $\mathcal{V}$  par exactement  $2^{n-3}$  ouverts simplement connexes. Pour cela, il suffit de recouvrir  $D_* = \{(r, \theta), 0 < r < 1, \theta \in \mathbb{T}\}$  par deux ouverts  $D_*^\pm$ , donnés par exemple par  $D_*^+ = D_* \cap \{\theta \neq \pi \pmod{2\pi}\}$  et  $D_*^- = D_* \cap \{\theta \neq 0 \pmod{2\pi}\}$ , puis de considérer les produits  $D_*^{\epsilon_1} \times \dots \times D_*^{\epsilon_{n-3}}$ , pour toutes les possibilités de signes ( $\epsilon_i = \pm$ ).

Cette partition est moins arbitraire qu'elle peut paraître, puisque les points base sont obtenus en découpant suivant le lieu réel, comme dans la situation de dimension 1 pour définir  $D_*^\pm$ , une fois  $X_n$  muni de sa structure complexe naturelle. Ici, en genre 0, la structure complexe est très simple à définir, puisque l'on peut écrire:

$$X_n = (\mathbb{P}^1\mathbb{C} - \{0, 1, \infty\})^{n-3} - \Delta,$$

où la grande diagonale  $\Delta$  est définie comme l'ensemble des  $(n-3)$ -uplets de points tels que deux au moins coïncident. En effet, toute classe d'isomorphismes de sphères à  $n$  points marqués ordonnés est uniquement donnée par un  $(n-3)$ -uplet  $x = (x_1, \dots, x_{n-3})$ , les trois autres points – par exemple les trois derniers – étant ramenés au triplet  $(0, 1, \infty)$  par une transformation homographique. De plus les  $x_i$  sont tous distincts et donc  $x$  n'appartient pas à  $\Delta$ . Ceci munit  $X_n$  d'une structure complexe, et la découpe ci-dessus respecte les lieux réels, mais cette représentation très asymétrique est peu éclairante. Si par exemple on considère  $X_n$  comme plongé dans  $(\mathbb{P}^1\mathbb{C} - \{0, 1, \infty\})^{n-3}$ , il n'est pas facile de reconnaître  $\overline{X}_n$  (sauf bien sûr pour  $n = 4$ ). Nous revenons plus bas sur une paramétrisation complexe "naturelle". Retenons pour l'instant que chaque point  $P$  de dégénérescence maximale dans  $\overline{X}_n$  possède un voisinage  $\mathcal{U}$  (en fait une base de tels voisinages) dont la trace  $\mathcal{V}$  sur  $X_n$  est recouverte par  $2^{n-3}$  ouverts simplement connexes. On notera ici (pour  $g = 0$ )  $\mathcal{B}_n$  l'ensemble de ces régions simplement connexes,  $n$  étant fixé et  $P$  parcourant l'ensemble

fini des points de dégénérescence maximale. Avant de donner une description combinatoire plus globale, nous nous arrêterons un instant aux deux cas de dimensions minimales ( $X_3$  est réduit à un point), à savoir  $n = 4, 5$ . Ce dernier cas fait déjà preuve d'ailleurs d'une richesse géométrique remarquable (sans même parler d'arithmétique).

### I.2.3. Exemples en petites dimensions: sphères à 4 et 5 points marqués

*i) Le cas  $n = 4$ :*

Rappelons d'abord que  $X_4$  est naturellement isomorphe à  $\mathbb{P}^1\mathbb{C} - \{0, 1, \infty\}$ : étant donnés 4 points distincts  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , on peut ramener les trois premiers sur  $\{0, 1, \infty\}$  par une unique transformation de  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ , l'image du dernier caractérisant le quadruplet (cette image est le birapport des 4 points). La compactification stable  $\overline{X}_4$  n'est autre que  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$  et  $D_\infty$  est donné par les trois points  $\{0, 1, \infty\}$ . On peut prendre un voisinage  $\mathcal{U}$  de chacun de ces points qui soit un disque  $D$  et dont la trace sur  $X_4$  est bien un disque pointé. On recouvre chacun de ces 3 disques pointés par deux secteurs  $D_*^\pm$  comme au paragraphe précédent et on constate donc que  $\mathcal{B}_4$  est un ensemble à 6 éléments, permutés d'ailleurs sous l'action du groupe  $S_3 = \text{Aut}(X_4)$ .

On peut redire ce qui précède d'une manière qui se prête mieux à généralisation. Les 3 points ajoutés à  $X_4$  pour obtenir la compactification  $\overline{X}_4$  correspondent aux trois manières de partitionner un ensemble à 4 éléments en deux paires; en fait une découpe en pantalons d'une sphère avec 4 points enlevés comprend une seule courbe, et il y a trois orbites de découpes sous l'action du groupe  $K(0, 4)$  (qui est libre à 2 générateurs), déterminées par les points qui se trouvent dans un pantalon donné. Rappelons que le groupe de permutations  $S_4$  sur 4 lettres agit sur  $X_4$  à travers son quotient  $S_4/V \simeq S_3$ , où  $V$  est le "Vierergruppe" de Klein ( $V = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ ). Autrement dit toute transposition  $(ab)$  agit comme la transposition complémentaire  $(cd)$ . On peut alors noter les 3 points de  $\overline{X}_4 - X_4$  comme  $P_{12} = P_{34}$ ,  $P_{13} = P_{24}$ ,  $P_{23} = P_{14}$  où  $P_{ab}$  correspond à la partition de 4 points en deux paires dont l'une est  $(a, b)$  (évidemment  $P_{ab} = P_{ba}$ ). On retrouve ainsi les 3 points de  $\overline{X}_4 - X_4$  (voir ci-dessous pour la généralisation).

*ii) Le cas  $n = 5$ :*

Décrivons d'abord la compactification stable  $\overline{X}_5$ . L'espace  $X_5$  lui-même est donné par les quintuplets  $(x_1, \dots, x_5) \in (\mathbb{P}^1\mathbb{C})^5$  de points distincts de  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ , modulo l'action de  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ ; le compactifié  $\overline{X}_5$  est donné lui – ensemblistement – par les quintuplets tels que 3 valeurs ne coïncident pas, toujours modulo l'action de  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ . Autrement dit, à  $X_5$  on ajoute les quintuplets admissibles (stable) de types  $(a, a, b, c, d)$  et  $(a, a, b, b, c)$ . Ceci se voit de la manière suivante: une découpe est donnée par 2 courbes simples, qui déterminent 3 pantalons. Dans la réalisation géodésique, si l'on pince l'une seulement des deux courbes, on obtient une dégénérescence partielle (courbes à 1 noeud), et des points de

la forme  $(a, a, b, c, d)$  avec  $a, b, c, d$  distincts. En pinçant ensuite la seconde géodésique, on atteint la dégénérescence maximale (courbes à 2 noeuds) et des points de type  $(a, a, b, b, c)$  avec  $a, b, c$  distincts. Cette description rapide devrait devenir transparente – si elle ne l’est déjà – après lecture du prochain paragraphe.

Pour décrire  $\overline{X}_5$  géométriquement, et spécialement le diviseur à l’infini, on notera ici  $D_{ij}$  ( $1 \leq i, j \leq 5, i \neq j$ ), l’ensemble des quintuplets  $(x_1, \dots, x_5)$  avec  $x_i = x_j$  et les autres  $x_k$  distincts entre eux et de  $x_i = x_j$ ; on a donc  $D_{ij} \simeq \mathbb{P}^1 \setminus \{3 \text{ pts}\} \simeq X_4$ , ce qui est un exemple très particulier d’un phénomène général important (et non restreint au cas du genre 0), à savoir que l’on retrouve à l’infini des espaces de modules des exemplaires d’espaces de modules de dimensions inférieures. Lorsque les 4 indices  $i, j, k$  et  $l$  sont distincts, les adhérences de  $D_{ij}$  et  $D_{kl}$  s’intersectent en 1 point, noté  $Q_{ij,kl}$ , correspondant à la dégénérescence maximale  $i = j, k = l$ . On a donc une décomposition (stratification):

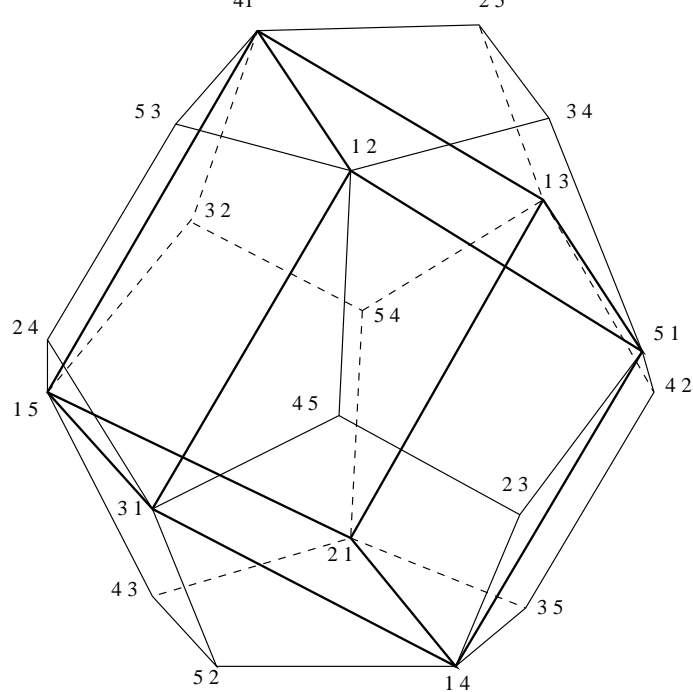
$$\overline{X}_5 = X_5 \bigcup_{i,j} D_{ij} \bigcup_{i,j,k,l} Q_{ij,kl},$$

où l’union sur les  $i, j$  parcourt les 10 couples  $1 \leq i < j \leq 5$  et l’union sur les  $i, j, k, l$  parcourt les 15 possibilités de quadruplets tels que  $1 \leq i, j, k, l \leq 5$  avec  $i < j, k < l$  et  $i < k$ . Pour résumer, le diviseur à l’infini  $\overline{X}_5 - X_5$  consiste en 10 exemplaires  $D_{ij}$  de  $X_4$  et 15 exemplaires  $Q_{ij,kl}$  de  $X_3$ , qui se réduit à un point.

Localement, comme expliqué ci-dessus, si l’on se place près d’un point  $Q_{ij,kl}$ , la trace sur  $X_5$  d’un voisinage de ce point (à savoir le complémentaire de  $D_{ij} \cup D_{kl} \cup Q_{ij,kl}$ ) se rétracte sur un 2-tore et donne lieu à 4 points base à l’infini. Puisqu’il y a 15 points  $Q_{ij,kl}$  de dégénérescence maximale, on obtient ainsi un ensemble  $\mathcal{B}_5$  de 60 points base à l’infini.

Dans son *Esquisse d’un programme*, A.Grothendieck écrit à propos de l’espace  $X_5 = \mathcal{M}_{0,5}$  que “c’est un véritable joyau, d’une géométrie très riche, étroitement liée à celle de l’icosaèdre”. La figure 2.2 ci-dessous, dans laquelle au lieu d’un icosaèdre, on a représenté le solide dual, à savoir le dodécaèdre, constitue une interprétation possible de cette phrase.





**Figure 2.2**

On fera les remarques suivantes, en laissant au lecteur le plaisir de découvrir d'autres propriétés:

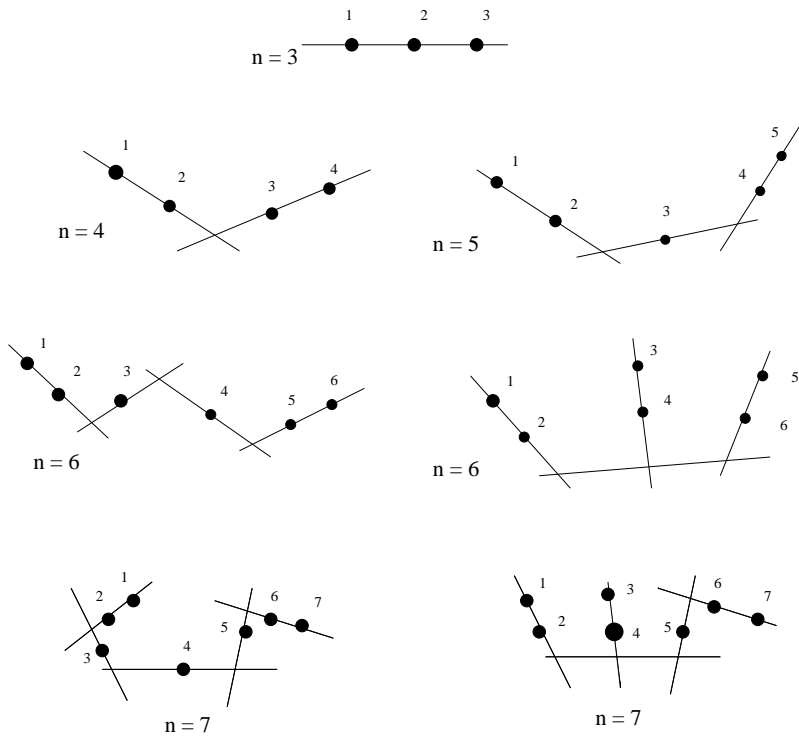
- Chaque paire ordonnée  $(i, j)$  se rencontre une fois et une seule;
- $(i, j)$  et  $(j, i)$  sont opposées (antipodales);
- Chacun des 5 cubes inscrits est associé à un point; on a représenté en gras celui qui est associé au point 1;
- Chacune des 10 copies de  $X_4$  correspond à un octaèdre inscrit, déterminé par les sommets dont l'étiquette ne contient aucun parmi 2 chiffres prescrits;
- Chacune des 30 arêtes correspond à une découpe, c'est-à-dire un point de dégénérescence maximale, et chacun de ces points apparaît exactement 2 fois, sur deux arêtes opposées.
- On peut retrouver une description combinatoire des 60 points base à l'infini de la manière suivante: en prolongeant chaque arête à l'intérieur des deux faces pentagonales adjacentes, on trace les "médiannes" de ces faces, joignant les sommets au milieu du côté opposé. Ceci triangule chaque face en dix triangles, et on obtient donc une triangulation du dodécaèdre en 120 triangles. Cette triangulation est d'ailleurs bicolorable, des triangles antipodaux portant des couleurs opposées. On voit alors que les points base à l'infini sont en bijection naturelle avec les paires de triangles antipodaux (je remercie Jan Stienstra de m'avoir signalé cette interprétation). Autrement dit, les points base sont associés à des *drapeaux*, formés d'un sommet, une arête orientée et un triangle coloré, deux données antipodales étant équivalentes.
- Chacune des faces pentagonales est liée (les faces sont permutées sous  $A_5$ , et il suffit de considérer l'une d'entre elles, par exemple la face avant droite qui possède la numérotation

la plus naturelle) aux “relations pentagonales” qui apparaissent depuis quelques années en théorie des catégories (S.MacLane) et dans les groupes quantiques (V.G.Drinfeld), comme dans les théories conformes (G.Moore, N.Seiberg) et les représentations du groupe de Galois (Y.Ihara), sans oublier bien sûr l’*Esquisse d’un programme* d’A.Grothendieck (où ces relations sont implicites). On pourra se reporter au chapitre II pour plus de précisions. Il s’agit simplement ici de signaler le lien entre la géométrie de cet espace, à la définition presque enfantine, avec des thèmes contemporains, auxquels ce volume voudrait introduire.

– Le dodécaèdre dont nous venons d’énumérer certaines propriétés peut être vu comme le graphe d’intersection du diviseur à l’infini de l’espace des modules  $\overline{X}_5$ , autrement dit le graphe d’intersection des  $D_{ij}$  définis au-dessus. Mais d’autre part le lieu réel  $X_5(\mathbb{R})$  est lui aussi très proche d’un dodécaèdre. Nous ne connaissons pas exactement le pourquoi de cette “coïncidence”.

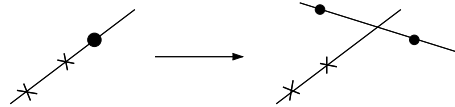
#### **1.2.4. Courbes rationnelles presque singulières et arbres de droites projectives**

Nous reprenons ici la description du voisinage de l’infini, cette fois en termes de courbes algébriques, la situation étant alors bien plus accessible en genre 0 que dans le cas général. Le cas de genre quelconque a fait l’objet de nombreuses études, et l’on se reportera en particulier à [IN]. Par ailleurs, le lecteur intéressé par une approche en genre 0 en termes de géométrie algébrique pourra consulter [GHP], où cependant seuls les points du diviseur à l’infini sont décrits, et non leurs voisinages, ce qui nécessiterait de la théorie de la déformation. Enfin la théorie de l’intersection et l’homologie de ces espaces (toujours en genre 0) a été récemment étudiée, dans [K]. Soit de nouveau  $P$  un point de dégénérescence maximale dans  $\overline{X}_n - X_n$ , correspondant au pincement de toutes (i.e.  $n - 3$ ) les courbes d’une découpe. On appellera points *distingués* les points qui sont soit des points marqués, soit des noeuds. Si l’on coupe suivant les noeuds, on obtient  $n - 2$  composantes disjointes dont chacune est une sphère à 3 points distingués, chaque noeud donnant naissance à 2 points distingués (cf. par exemple la figure 2.1, en pinçant les 4 géodésiques courtes). La situation est alors rigide ( $X_3 = \{*\}$ ), c’est-à-dire combinatoire: à tout point de dégénérescence maximale est associé un arbre de droites projectives à 3 points distingués, et la correspondance est biunivoque. Autrement dit, on peut considérer  $n - 2$  exemplaires de la droite projective  $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$  (ou en fait sur un autre corps), et construire un arbre qui représente la courbe singulière  $C_P$  correspondant à  $P \in \overline{X}_n$ ; les copies de la droite s’intersectent suivant des points doubles ordinaires (voir les équations ci-dessous), et chacune est munie d’exactly 3 points distingués. La stabilité correspond au fait d’avoir *au moins* 3 points (et donc un groupe d’automorphismes fini), et le fait que  $P$  est maximale dégénéré entraîne qu’il y a *exactement* 3 points. La figure 2.3 ci-dessous donne tous les types possibles pour  $n \leq 7$ , à permutation des points près.



**Figure 2.3**

On note que pour passer de  $n$  à  $n + 1$ , on remplace un point marqué par un exemplaire de la droite projective, muni de 2 points marqués, avec comme troisième point distingué le point d'intersection. Localement, on a donc la situation de la figure 2.4, où les croix figurent des points distingués et les ronds des points marqués.



**Figure 2.4**

L'opération inverse (de droite à gauche) de contraction ("clutching") permet de descendre de  $n$  à  $n - 1$ . Considérons un point de  $X_n$  proche de  $P$ ; il est représenté par une courbe rationnelle non singulière  $C$  obtenue en "ouvrant" tous les noeuds de  $C_P$ . Pour écrire des équations, ce qui n'est possible explicitement qu'en genre 0 (cf. [IN] pour le cas général), on assigne comme dans la figure 2.5 ci-dessous les valeurs  $\{0, 1, \infty\}$  aux points distingués de  $C_P$ , de sorte que les trois points distingués de chaque composante correspondent à ces trois valeurs; cette assignation est rendue possible par le fait que  $C_P$  est un *arbre* (i.e. un graphe simplement connexe).

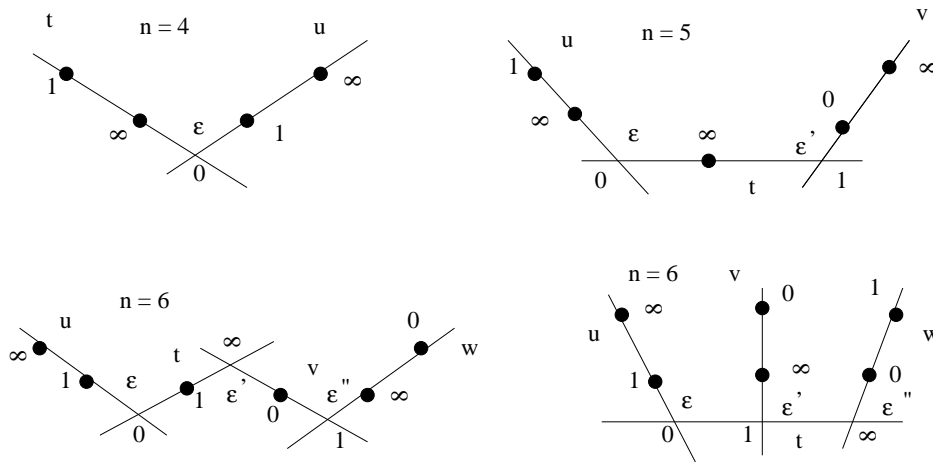


Figure 2.5

On introduit ensuite un paramètre de déformation à chaque point d'intersection. Si  $t$  et  $t'$  sont les paramètres courants de deux droites  $L$  et  $L'$  qui s'intersectent en un point, et si  $\epsilon$  (ici dans  $\mathbb{C}$ ) est le paramètre correspondant, la situation locale est décrite par l'équation  $tt' = \epsilon$  (resp.  $(1-t)(1-t') = \epsilon$ ,  $tt' = 1/\epsilon$ ) si  $L$  et  $L'$  s'intersectent en 0 (resp. 1,  $\infty$ ). On peut considérer que  $\epsilon \in D_*$ , le disque pointé unité. On obtient ainsi les équations des courbes rationnelles lisses qui décrivent la trace sur  $X_n$  d'un voisinage de  $P$ . Un changement de distribution des valeurs  $\{0, 1, \infty\}$  aux points distingués de  $C_P$  produit un changement de variables (dans  $S_3 \simeq \text{Aut}(\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\})$  sur chaque composante de  $C_P$ ). En basses dimensions, et avec les notations de la figure 2.5, on obtient ainsi:

- $n = 4$ :  $tu = \epsilon$ ;
- $n = 5$ :  $tu = \epsilon, (1-t)(1-v) = \epsilon'$ ;
- $n = 6$ , premier cas:  $tu = \epsilon, tv = 1/\epsilon', (1-v)(1-w) = \epsilon''$ ;
- $n = 6$ , deuxième cas:  $tu = \epsilon, (1-t)(1-v) = \epsilon', tw = 1/\epsilon''$ .

A partir de cette description, on retrouve la description du I.2.2 des points de dégénérescence maximale. En reprenant les notations de ce paragraphe, on a  $\mathcal{V} \simeq D_*^{n-3}$ , où  $\epsilon_i \in D_*$ ,  $i = 1, \dots, n-3$ , sont les paramètres de déformation associés aux noeuds de la courbe maximale dégénérée. On peut de plus découper  $\mathcal{V}$  en  $2^{n-3}$  régions simplement connexes (points base à l'infini), définies par les valeurs réelles des paramètres  $\epsilon_i$ . Les points base sont donc indexés par les signes des  $\epsilon_i$ , c'est-à-dire par  $\{\pm 1\}^{n-3}$ .

On peut également décrire directement les sphères avec points marqués correspondant aux courbes. Pour ce faire, si on note  $C_\epsilon$  la courbe donnée par la valeur  $\epsilon \in D_*^{n-3}$  des paramètres, on voit que chacun des paramètres courants d'une composante de  $C_P$  peut servir d'uniformisante rationnelle sur  $C_\epsilon$ . Choisisant une telle composante  $L$  avec son paramètre courant  $t$ , on obtient ainsi la position des points marqués de  $C_\epsilon$  sur la droite paramétrée par  $t$ , ce qui fournit la sphère à  $n$  points marqués définie par  $C_\epsilon$ . Un autre choix d'une composante  $L$  de la courbe singulière  $C_P$  induit un changement de variable

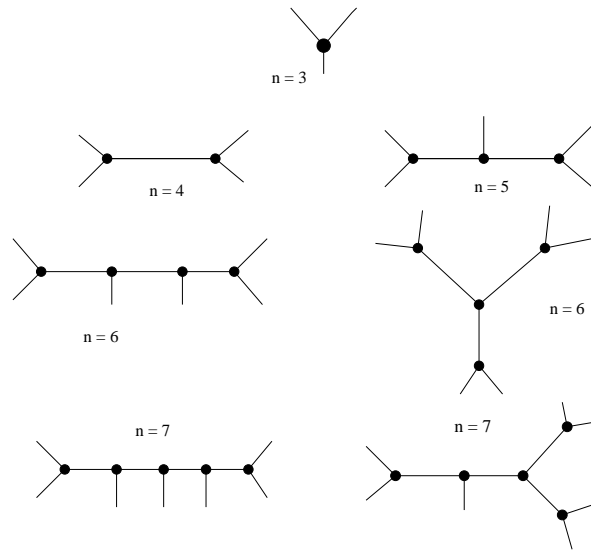
dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ , et définit donc la même sphère conforme à points marqués. Enfin le lieu réel, décrit par des valeurs réelles des  $\epsilon_i$ , correspond à des sphères à points marqués réels. On réobtient ainsi la description des points base à l'infini directement en termes de sphères avec points marqués (voir aussi le I.2.6 ci-dessous). Plutôt que de donner une description formelle, que le lecteur reconstituera sans peine, on s'en tiendra encore ici aux exemples de basses dimensions, qui donnent l'idée de la situation générale. On reprend de nouveau les notations de la figure 2.5 et les équations correspondantes données ci-dessus, et on utilise systématiquement la composante paramétrée par  $t$  pour donner la position des points marqués, c'est-à-dire que l'on élimine les variables  $u, v, w$ .

Pour  $n = 4$ , on obtient donc les points  $t = 0, \epsilon, 1, \infty$ , les deux premiers provenant de la composante  $u$ . De même, pour  $n = 5$ , on obtient les points  $t = 0, \epsilon, 1, 1 - \epsilon', \infty$ . Enfin pour  $n = 6$ , on obtient dans le premier cas les points  $t = 0, 1, 1 - \epsilon'', 1/\epsilon', 1/(\epsilon\epsilon'), \infty$ , et dans le second  $t = 0, \epsilon, 1, 1 - \epsilon', 1/\epsilon'', \infty$ . Lorsque  $n = 6$ , on voit comment les deux types d'arbres se reflètent dans la distribution asymptotique des points sur le cercle (considérer  $\epsilon, \epsilon'$  et  $\epsilon''$  comme réels et "petits"); ce point est repris au I.2.5, et de nouveau au chapitre II.

Rassemblons les conclusions de ce paragraphe: un point de dégénérescence maximale de  $X_n$  est donné par un arbre stable de droites projectives avec  $n$  points marqués. On peut ensuite assigner les valeurs  $\{0, 1, \infty\}$  aux points distingués et obtenir une description des points base en termes de paramètres de déformation. Dans la construction ci-dessus, la dépendance par rapport au choix d'une composante est seulement apparente, comme indiqué plus haut; un autre choix induit un changement de variable dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ . Un changement de de la distribution des valeurs  $\{0, 1, \infty\}$  aux points distingués est à peine moins innocent. On vérifie en effet immédiatement que l'on obtient une autre indexation des  $2^{n-3}$  points base attachés à l'arbre par l'ensemble  $\{\pm 1\}^{n-3}$ . Cette indexation dépend donc de l'assignation des valeurs aux points distingués.

### I.2.5. Représentation duale; arbres trivalents

Comme le titre l'indique, il s'agit simplement de la représentation duale de la précédente, les rôles des arêtes et des sommets étant permutés. On obtient ainsi des arbres trivalents à  $n$  arêtes terminales (feuilles). Les arêtes non terminales sont associées à des géodésiques courtes pour la métrique hyperbolique (métrique de Poincaré) de la courbe, alias surface de Riemann. Visuellement, on récupère la surface munie de sa métrique en habillant le graphe, comme sur la figure 2.1. Voici de nouveau les exemples de basses dimensions, vus sous ce jour:



**Figure 2.6**

En oubliant les feuilles, on obtient des graphes à  $n - 3$  arêtes, avec des sommets de valences 1, 2 et 3. Un graphe  $G$  est ici considéré de manière combinatoire (et non pas comme graphe plongé), et décrit un type de découpe en pantalons d'une surface. Une *numérotation* d'un graphe  $G$  est défini par l'assignation d'un (resp. 2) numéro(s) à chaque sommet de valence 2 (resp. 1). Dans le second cas, il s'agit d'une paire non ordonnée. Il est entendu que chacun des nombres entre 1 et  $n$  est utilisé une et une seule fois. Un graphe numéroté spécifie un point de dégénérescence maximale, alias une découpe en pantalons modulo action du groupe de Teichmüller coloré  $K(0, n)$ .

Notons  $\mathcal{D}_n$  (resp.  $\mathcal{B}_n$ ) l'ensemble des points de dégénérescence maximale de  $\overline{X}_n$  (resp. des points base à l'infini), et soit  $d_n = \#\mathcal{D}_n$  (resp.  $b_n = \#\mathcal{B}_n$ ). On a  $b_n = 2^{n-3}d_n$ . On peut donner de ce point de vue une expression du nombre  $b_n$ : soit  $p(G)$  le nombre des numérotations possibles d'un graphe  $G$  (associé à un arbre à  $n$  feuilles), soit  $v_t(G)$  (resp.  $v_c(G)$ ) le nombre de sommets de  $G$  de valence 1 (resp. au moins 2). On voit facilement que  $p(G) = n! 2^{-v_t(G)}$ . Chaque graphe numéroté donne un point de dégénérescence maximale, et deux graphes numérotés donnent le même point si ils se correspondent par un automorphisme du graphe sous-jacent. Autrement dit, on peut écrire:

$$b_n = \#\mathcal{B}_n = 2^{n-3} \sum_G \frac{p(G)}{\#\text{Aut}(G)} = 2^{n-3}n! \sum_G \frac{2^{-v_t(G)}}{\#\text{Aut}(G)} = \frac{1}{2}n! \sum_G \frac{2^{v_c(G)}}{\#\text{Aut}(G)}.$$

La dernière égalité est conséquence du fait que  $n - 3 - v_t(G) = v_c(G) - 1$  (par la caractéristique d'Euler).

Évaluons ainsi  $b_4$ ,  $b_5$  et  $b_6$ . Pour  $n = 4$ , il y a un seul graphe  $G$ , réduit à un segment.  $G$  n'a pas d'arête non terminale ( $v_c(G) = 0$ ) et possède un automorphisme non trivial, d'où  $b_4 = 12/2 = 6$ , comme il se doit. De même pour  $n = 5$ , il y a un seul graphe  $G$  avec cette

fois  $v_c(G) = 1$  et toujours un automorphisme non trivial; d'où on tire  $b_5 = 60 \times 2/2 = 60$ , en accord avec l'énumération du I.2.3. Enfin pour  $n = 6$ , il y a deux graphes  $G_1$  et  $G_2$ ; on a  $v_c(G_1) = 2$  et  $G_1$  possède 2 automorphismes (dont l'identité), tandis que  $v_c(G_2) = 1$  et  $G_2$  admet 6 ( $= \#\mathfrak{S}_3$ ) automorphismes. D'où  $b_6 = 360(4/2 + 2/6) = 840$ .

Nous verrons cependant au paragraphe suivant, qu'en utilisant une autre correspondance combinatoire pour les points base, on obtient une formule fermée élémentaire pour les nombres  $b_n$  (et par là-même une formule pour les sommes ci-dessus, où apparaissent les automorphismes des graphes), à savoir:

$$b_n = \frac{(2n - 4)!}{2(n - 2)!}.$$

Venons-en à une description des points base en termes de graphes de ce type. Nous avons considéré ici des graphes combinatoires, duaux de ceux du paragraphe précédent. Un point base était alors spécifié par des signes attachés aux points d'intersection des arbres de droites projectives, c'est-à-dire par un élément de  $\{\pm 1\}^{n-3}$ ; on peut reprendre cette indexation, mais par dualité les signes sont maintenant attachés aux arêtes non terminales des graphes. On remarque alors que ces signes paramétrisent les *plongements* du graphe dans le plan. En effet, si  $G$  est un graphe (arbre) combinatoire, on peut considérer un plongement arbitraire et décrire les autres ainsi: on assigne des signes sur les arêtes et, partant du plongement initial, on effectue un retournement sur chaque arête marquée d'un signe  $-$ . On obtient ainsi les plongements de l'arbre à isotopie près, le plongement initial correspondant au  $n - 3$ -uplet  $(+1, +1, \dots, +1)$ . On a une bijection canonique entre points base et *arbres plongés* dans le plan non orienté, ou bien dans le plan orienté, mais modulo la symétrie miroir. En revanche la bijection construite ici avec les graphes munis de signes sur les arêtes internes n'est pas canonique, puisqu'on choisit un plongement de référence. De même qu'au paragraphe précédent le paramétrage des points base par les signes dépend de l'assignation des valeurs aux points distingués, de même ici le paramétrage dépend d'un choix initial pour les signes des arêtes. Ces notions sont reprises au II.5.

Pour conclure ce paragraphe, rappelons que nous nous sommes bornés ici aux points de dégénérescence *maximale* et leurs voisinages, et donc à des arbres trivalents. La représentation arboricole permet plus généralement une bonne représentation graphique et combinatoire de la structure stratifiée de  $\overline{X}_n$ . Nous ne pouvons entrer ici dans le détail de l'étude et proposerons simplement au lecteur, en forme de suggestion, la figure 2.7 ci-dessous, qui représente les différents types de chemins entre un point de  $X_6$  (non dégénéré donc) et un point de dégénérescence maximale sur le bord, dans  $\overline{X}_6 - X_6$ .

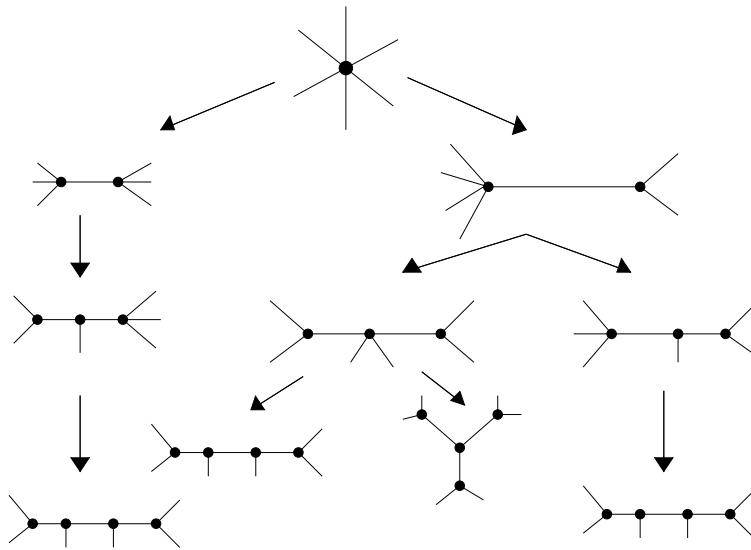


Figure 2.7

### I.2.6. Constellations et parenthésages

Une courte pause sera peut-être la bienvenue, pour motiver encore ces traductions incessantes entre différents types d’objets “équivalents”. Ces notes aimeraient convaincre le lecteur de l’ubiquité – souvent implicite – de cette structure stratifiée étonnamment riche qu’est la “tour” de tous les espaces de modules  $X_n$  de genre 0, avec  $n$  variable. Tant du point de vue des surfaces de Riemann que de celui des courbes algébriques, le genre 0 est bien sûr en un sens un cas très particulier, même si une partie des descriptions du voisinage de l’infini des espaces de modules qu’on a tracées ci-dessus peut se transposer en genres supérieurs. Même si dans son *Esquisse d’un programme*, Grothendieck considère la tour de *tous* les espaces de modules, beaucoup de travaux contemporains qui ont à voir, de près ou de loin, avec ces objets, sont pour l’instant restreints à la considération du genre 0; on pense en particulier aux invariants de noeuds (et des variétés de basses dimensions), à la cohomologie quantique (qui a affaire avec les courbes rationnelles), et aux quasi-algèbres de Hopf et leur déformations. Dans ce dernier domaine, l’article fondateur est celui de Drinfeld ([D]) et les deux “traductions” supplémentaires évoquées par le titre de ce paragraphe sont toutes deux liées à des idées introduites ou mises à profit dans cet article. La première apparaît en filigrane dans le traitement asymptotique des équations de Knizhnik-Zamolodchikov (cf. [D], p.833-835) qui gouvernent le calcul de l’associateur de Drinfeld. La deuxième réalisation, en termes de parenthésages, est elle omniprésente dans [D], qui utilise des catégories quasi-tensorielles (dites aussi tressées) et la généralisation à ce cadre des théorèmes de cohérence de MacLane; on trouvera plus de détails à ce sujet au chapitre II.

On a vu au I.2.4 comment la description des points base à l’infini en termes de courbes rationnelles permettait de retrouver des configurations de points sur la sphère.



Reprenant les notations de ce paragraphe, on va considérer ici des sous-régions des points base à l'infini, qui suffisent à les caractériser. Précisément, on se restreindra au cas où les paramètres de déformation  $\epsilon_i$ ,  $i = 1, \dots, n - 3$ , sont réels, tous égaux en module, et petits; autrement dit on se donne  $\epsilon > 0$  petit, et on pose  $\epsilon_i = \pm\epsilon$ , chaque choix des  $n - 3$  signes équivalent à la donnée d'un point base. Fixant un tel choix de signes on obtient, comme au I.2.4, des configurations de points  $x = (x_1, \dots, x_n)$  sur le cercle  $S^1 = \mathbb{P}^1\mathbb{R}$ , les configurations se distinguant par les distances entre les  $x_i$ , qui conservent le même ordre cyclique. Chaque configuration représente un point réel  $x \in X_n(\mathbb{R})$  (le cercle étant vu comme l'équateur de la sphère de Riemann), et la donnée d'un ordre cyclique est la donnée d'une région *simplement connexe*, y compris pour des distances arbitraires entre les points  $x_i$  qui se meuvent sur le cercle sans se croiser. On fera attention ici à une petite subtilité: la situation est à considérer modulo l'action des éléments de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  qui préservent l'axe réel. Or ceux-ci sont de deux types; d'une part les éléments de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ , qui préservent l'orientation de l'axe réel, d'autre part ces mêmes éléments composés avec la symétrie ( $z \mapsto 1 - z$ ), qui inversent l'orientation de l'axe réel (tout en préservant celle du plan complexe).

Ceci dit, on peut maintenant fixer un choix de signes, qui fixe un ordre cyclique, et regarder ce qui se passe lorsque  $\epsilon$  tend vers 0. Le point associé  $x = x_\epsilon \in X_n$  tend alors vers l'infini dans  $X_n$  et se présente comme une "constellation" sur le cercle, avec des estimations asymptotiques  $|x_j - x_i| \sim c_{ij}\epsilon^{d_{ij}}$ , où  $|\cdot|$  désigne la distance ordinaire sur le cercle,  $\sim$  désigne une égalité asymptotique quand  $\epsilon$  tend vers 0 et  $c_{ij}$  est une constante réelle. On a ici identifié la droite (projective) réelle et le cercle unité par la transformation de Cayley ( $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ ). Des exemples dans les cas  $n = 4, 5, 6$  sont donnés à la fin du I.2.4, en faisant  $\epsilon' = \epsilon'' = \epsilon$ ; on peut voir les figures 5 et 15 du chapitre II pour un exemple plus général.

Les "exposants critiques"  $d_{ij} \in \mathbb{Z}_+$  qui gouvernent les distances asymptotiques entre les points sont indépendants du choix des signes. Autrement dit ils ne dépendent que du point de dégénérescence maximale et non du choix d'un point base associé à ce point. Nous donnerons maintenant un algorithme qui, étant donné précisément un graphe trivalent (combinatoire, non plongé) associé à un élément de  $\mathcal{D}_n$ , produit un ensemble d'exposants  $d_{ij} \in \mathbb{Z}_+$ . On commence par noter que tout arbre est muni d'un *centre*  $c$ , qui est soit un sommet soit une arête (les arbres sont considérés combinatoirement). On peut le caractériser comme suit; on commence par définir le ou les diamètres d'un arbre comme les chemins de longueur maximale entre deux feuilles. Par longueur on entend ici la longueur combinatoire, les deux extrémités d'une même arête étant considérées comme distantes d'une unité, et les chemins étant supposés simples, c'est-à-dire qu'ils ne reviennent pas sur leurs pas. Tous les diamètres de l'arbre ont alors un point en commun, qu'on définit comme étant le centre de l'arbre. Que ce "point" (pour la topologie appropriée, à savoir

discrète, combinatoire) soit bien défini est de nouveau une conséquence facile de la simple connexité. Comme indiqué plus haut, ce peut être soit un sommet soit une arête (cf. la figure 2.6; les deux cas se produisent par exemple pour les deux arbres avec  $n = 6$ ).

Utilisant maintenant le centre  $c$  de l'arbre comme point de référence, on définit ensuite une fonction poids  $w$  sur les arêtes comme suit:

- i) Si  $c$  est un sommet, on pose  $w(e) = 0$  pour toutes les arêtes  $e$  attachées à  $c$ ;
- ii) Si  $c = e_0$  est une arête, on pose  $w(e_0) = 0$ ;
- iii) On procède ensuite par induction, en posant  $w = w_0$  pour les arêtes qui ont un sommet en commun avec une arête de poids  $w_0 - 1$  et ne sont pas de poids  $w_0 - 2$ .

Étant donnés maintenant deux points  $x_i$  et  $x_j$  distincts (on confond dans la notation les points  $x_k$  et leurs étiquettes  $k$ ), deux cas sont à distinguer suivant que  $i$  et  $j$  numérotent ou non des feuilles attachées au même sommet. Dans la première éventualité, au sommet commun aux feuilles  $i$  et  $j$  est attachée une arête  $e$  (on suppose  $n > 3$ ), et on pose  $d_{ij} = w(e) + 1$ ; dans la seconde on considère un chemin  $\gamma_{ij}$  minimal joignant  $i$  à  $j$  et on définit  $d_{ij} := \min_{e \in \gamma_{ij}} w(e)$ , c'est-à-dire que l'on assigne à la paire  $(i, j)$  le poids minimal des arêtes traversées par  $\gamma_{ij}$ . Ceci définit donc un ensemble d'exposants  $(d_{ij})$ , attaché à un point de  $\mathcal{D}_n$ . On peut ensuite reconstituer les constellations sur le cercle associées à ce point en se donnant les plongements du graphe, c'est-à-dire comme on a vu au paragraphe précédent, en spécifiant les points base. Les signes qui définissent un point base correspondent alors aux positions relatives des points sur le cercle.

On a donc vu qu'un graphe (point de dégénérescence maximale) permet de spécifier un ensemble d'exposants, et qu'un plongement de ce graphe (point base) permet de reconstituer une constellation sur le cercle (encore une fois, voir les figures 5 et 15 du chapitre II pour un exemple). Celle-ci n'est d'ailleurs rien d'autre que la partie réelle du point base. L'opération inverse est également possible, et plus simple. Étant donnée une constellation sur le cercle, on reconstitue un graphe plongé dans le disque en reliant petit à petit les points de la constellation suivant les échelles de distances qui apparaissent.

Nous en venons enfin au dernier type d'objets combinatoires associés au voisinage de l'infini des espaces  $X_n$ , à savoir les parenthésages; comme indiqué ci-dessus, ces objets nous ramènent à l'article [D] et plus précisément au formalisme des catégories quasi-tensorielles. Un parenthésage est une expression bien formée (voir ci-dessous le sens exact de cette expression) comprenant  $n$  objets simples, notés ici  $1, \dots, n$  (ces objets pourraient être des espaces vectoriels, comme dans [D], aussi bien que des points géométriques); ainsi  $(12)(34)$ ,  $((12)3)4$ ,  $((12)(34))(56)$  sont des parenthésages.

Formellement, si  $\{1, \dots, n\}$  sont les objets simples, on définit récursivement les objets composés en disant que si  $A$  et  $B$  sont deux objets,  $(AB)$  en est un également. À partir de là on forme des expressions comme ci-dessus en demandant que chaque paire de parenthèses contienne exactement deux objets. De plus, on décide de ne *pas* ajouter une

paire de parenthèses contenant tous les objets, puisqu'elle n'apporterait pas d'information supplémentaire. Avec cette convention, un parenthésage sur  $n$  objets simples comprend  $n - 2$  paires de parenthèses. Donnons encore quelques exemples:

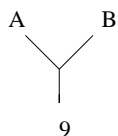
$n = 5$ :  $((((12)3)4)5)$ ,  $((13)5)(42)$ ,  $((12)5)(34)$ ;

$n = 6$ :  $(((((12)3)4)5)6)$ ,  $(3(61))(2(45))$ ,  $((42)3)((61)5)$ ;

$n = 7$ :  $((((((12)3)4)5)6)7)$ ,  $((((13)5)(7(42)))6)$ ,  $((((42)(73))6)(51)$ .

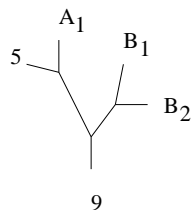
Le premier parenthésage dans chacun de ces exemples est dit *standard*, du type  $(\dots(12)3)\dots(n-2)(n-1)n$ , et correspond (cf. Figure 2.7) au graphe rectiligne formé de  $n - 3$  segments mis bout à bout.

Il est d'ailleurs facile de compter le nombre de parenthésages, qui sur  $n$  objets est donné par le  $(n - 1)$ -ième nombre de Catalan, soit  $\frac{1}{n}C_{2n-2}^{n-1}$ ; on doit ensuite multiplier ce nombre par  $n!$  pour obtenir le nombre de parenthésages sur  $n$  objets distincts dans un ordre quelconque. On va décrire rapidement une bijection (que le lecteur devine peut-être visuellement) qui associe à un parenthésage sur  $n$  objets un *arbre planaire enraciné* à  $n + 1$  feuilles, c'est-à-dire un arbre muni d'un plongement dans le plan orienté et d'un sommet distingué (appelé racine même s'il s'agit d'une feuille, ce qui est botaniquement curieux). Chaque objet simple correspond à une feuille de l'arbre et on reconstitue celui-ci à partir de ses feuilles, qui apparaîtront in fine dans l'ordre cyclique spécifié par l'ordre du parenthésage. Les paires de parenthèses permettent de spécifier les arêtes de l'arbre. Si l'on considère les paires extérieures de parenthèses d'un parenthésage donné de  $n$  éléments, on constate qu'il y a soit une telle paire, soit deux paires; le parenthésage se décompose comme  $(A)(B)$  où  $A$  et  $B$  sont aussi des parenthésages, ou alors, dans le cas d'une seule paire de parenthèses extérieures  $A$  ou  $B$  peut être un seul objet. Par exemple, si on veut construire l'arbre enraciné à 9 feuilles associé au parenthésage  $(5(1(34)))(68)(27)$  on commence par le considérer comme  $(A)(B)$  avec  $A = 5(1(34))$  et  $B = (68)(27)$  et on dessine l'arbre associé:



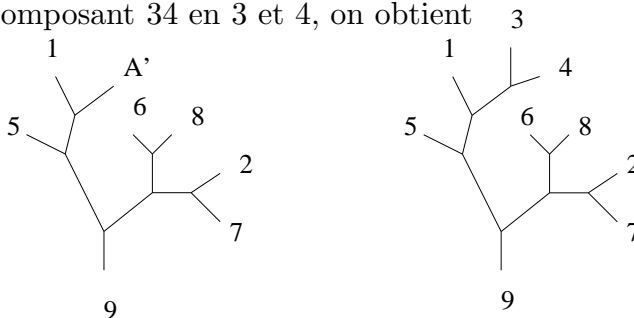
**Figure 2.8**

On recommence maintenant en décomposant  $A$  en  $A_1 = 5$  et  $A_2 = 1(34)$ , et  $B$  en  $B_1 = 68$  et  $B_2 = 27$ ; l'arbre devient



**Figure 2.9**

La suite se devine: en décomposant  $A_2$  en 1 et  $A' = 34$ ,  $B_1$  en 6 et 8 et  $B_2$  en 2 et 7, puis finalement en décomposant 34 en 3 et 4, on obtient



**Figure 2.10**

On laisse au lecteur intéressé le soin de formaliser davantage cette procédure dans le cas général; on verra au II.2 qu'elle s'interprète comme produit tensoriel dans une catégorie tensorielle tressée dont les objets sont précisément ces arbres (elle se ramène, m'a-t-on fait observer, à une variante de la notation dite "polonaise inversée"). Montrons maintenant comment une correspondance entre arbres et parenthésages mène à la formule explicite pour le nombre  $b_n$  de points base, mentionnée au paragraphe précédent. Cette procédure donne une bijection canonique entre les arbres planaires (i.e. arbres plongés dans le plan orienté) enracinés à  $n + 1$  feuilles (dont la racine), et les parenthésages sur  $n$  objets. Cette bijection permet de calculer les nombres  $b_n$ . En effet, elle implique la relation  $2b_{n+1}/n! = p_n$ , où  $p_n$  désigne le nombre de parenthésages sur  $n$  objets ordonnés. Le facteur  $n!$  a permis de se ramener aux objets ordonnés, et le facteur 2 prend en compte la symétrie miroir. Il reste à évaluer  $p_n$ , ce qui est classique: on a, quasiment par définition,  $p_n = c_{n-1}$  où  $c_n = C_{2n}^n/(n+1)$  est le  $n$ -ième nombre de Catalan. D'où finalement  $b_n = (n-1)! c_{n-2}/2$ , qui est la formule du paragraphe précédent.

On peut également définir une correspondance directe entre parenthésages et constellations (sans passer par les arbres). On commence alors par retrouver ce qui correspond au centre de l'arbre, et est reflété par la procédure décrite ci-dessus; si on définit la profondeur  $d$  d'un parenthésage comme le nombre d'étapes dans cette procédure, on voit que  $d$  correspond au rayon de l'arbre, c'est-à-dire la distance maximale du centre à une feuille. De plus  $d$  et les exposants  $(d_{ij})$  de la constellation associée sont reliés, pour un choix convenable, par  $d = \max(d_{ij})$ . Le lecteur intéressé n'aura pas de mal à compléter cette correspondance. Pour terminer, on notera qu'il serait possible, en utilisant moins que  $n - 2$  paires de parenthèses pour fabriquer des parenthésages de  $n$  objets, de ne pas se borner à des arbres trivalents et donc de coder des points à l'infini de  $X_n$  qui ne sont pas nécessairement de dégénérescence maximale.

### I.3. Cellulation de l'espace de Teichmüller décoré

Dans cette troisième partie, nous reprenons l'étude géométrique des espaces de Teichmüller et des modules pour tout type  $(g, n)$ , sous la forme de découpages en cellules (donc d'objets topologiquement "triviaux") qui permettent d'en étudier concrètement les invariants algébriques, en premier lieu leur cohomologie. Nous nous appuyerons sur les articles originaux de B.Bowditch and D.Epstein ([BE]) et R.C.Penner ([P]; voir aussi [P1] et les références de ce dernier article). Pour l'étude de ces cellulations au bord, c'est-à-dire leurs extensions aux compactifiés des espaces de modules, on pourra consulter [L] et [Pi]. L'article de M.Kontsevitch ([Ko]) fournit une application frappante de ces techniques "combinatoires". Nous utiliserons dans un premier temps (comme dans [P]) le modèle de l'hyperboloïde pour la géométrie hyperbolique plane, ce qui justifie quelques "rappels". Après avoir introduit la notion de décoration, on construit une partition équivariante (par rapport à l'action du "mapping class group") de l'espace de Teichmüller décoré, suivant la méthode de [P]. On vérifie ensuite qu'il s'agit bien d'une cellulation en se ramenant à la situation de [BE], après avoir comparé les deux constructions.

#### I.3.1. Rappels de géométrie de l'hyperboloïde

L'espace de Minkowski  $\mathbf{M}$  est défini comme  $\mathbb{R}^3$  muni de la forme quadratique standard de signature  $(-, +, +)$ . Les points seront notés  $x = (x_0, x_1, x_2)$  et pour deux vecteurs tangents  $u$  et  $v$ , on a donc  $u \cdot v = -u_0v_0 + u_1v_1 + u_2v_2$ ; on identifiera le plus souvent  $\mathbf{M}$  et son fibré tangent. L'hyperboloïde est défini comme l'ensemble des éléments de norme -1; c'est un hyperboloïde de révolution à deux feuillet et nous prendrons le feuillet supérieur  $\mathcal{H}$  comme modèle pour la géométrie hyperbolique plane:

$$\mathcal{H} = \{u \in \mathbf{M} \mid u \cdot u = -1 \text{ et } u_0 > 0\}.$$

Si  $\mathbb{D}$  désigne le disque unité (ouvert) muni de la métrique hyperbolique, un isomorphisme entre  $\mathcal{H}$  et  $\mathbb{D}$  est donné par la projection stéréographique à partir du point  $(-1, 0, 0)$  sur le plan  $x_0 = 0$ , c'est-à-dire par l'application:

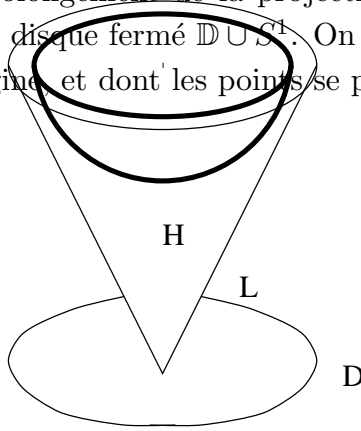
$$(u_0, u_1, u_2) \longrightarrow \left(0, \frac{u_1}{1 + u_0}, \frac{u_2}{1 + u_0}\right).$$

Enfin le cône de lumière  $L$  est le cône asymptote à  $\mathcal{H}$ :

$$L = \{u \in \mathbf{M} \mid u \cdot u = 0 \text{ et } u_0 > 0\}.$$

On appellera intérieur de  $L$  l'ensemble des  $u$  avec  $u \cdot u < 0$  et  $u_0 > 0$ . On convient de projeter chaque point de  $L$  sur le point du cercle unité  $S^1 = \partial\mathbb{D}$  de même direction

angulaire, ce qui fournit un prolongement de la projection stéréographique ci-dessus en une application de  $\mathcal{H} \cup L$  sur le disque fermé  $\mathbb{D} \cup S^1$ . On appellera *rayon* une demi-droite contenue dans  $L$ , issue de l'origine et dont les points se projettent sur un même point du cercle  $S^1$ .



**Figure 3.1**

Nous donnons maintenant trois lemmes techniques qui précisent la correspondance entre  $\mathcal{H}$  et  $\mathbb{D}$  et seront utilisés par la suite. On note d'abord que les géodésiques de  $\mathcal{H}$  sont données par les traces sur  $\mathcal{H}$  des plans passant par l'origine (le point de coordonnées  $(0, 0, 0)$ ). Plus précisément, soient  $w$  et  $z$  deux points de  $L$  qui ne sont pas situés sur le même rayon et soient  $\bar{w}$  et  $\bar{z}$  leurs projetés sur  $\mathbb{D}$ . On a alors:

**Lemme 3.1.** *Le plan euclidien passant par  $w$ ,  $z$  et l'origine intersecte  $\mathcal{H}$  suivant une géodésique qui se projette sur la géodésique de  $\mathbb{D}$  joignant les projetés  $\bar{w}$  et  $\bar{z}$ .*

DÉMONSTRATION. On observe que le résultat est vrai si  $\bar{w}$  et  $\bar{z}$  sont diamétralement opposés et que le groupe  $SO^+(1, 2)$  des isométries de  $\mathbf{M}$  agit de manière triplement transitive sur les rayons de  $L$ , ce qui permet de se ramener à ce cas.

Les horocycles de  $\mathcal{H}$  sont en correspondance avec ceux de  $\mathbb{D}$  et sont paramétrés par les points du cône de lumière. On a en effet le

**Lemme 3.2.** *Les horocycles de  $\mathcal{H}$  (qui correspondent par projection à ceux de  $\mathbb{D}$ ) sont en bijection avec les points de  $L$ , via la dualité donnée par le produit scalaire; si  $w \in L$  alors:*

$$h = \{x \in \mathcal{H} \mid w \cdot x = 1\}$$

*est un horocycle de  $\mathcal{H}$ . Son projeté  $\bar{h}$  est un horocycle de  $\mathbb{D}$  qui a pour centre (hyperbolique) le projeté  $\bar{w} \in \partial\mathbb{D}$  de  $w$  et pour rayon (euclidien)  $1/(1 + w_0)$ .*

DÉMONSTRATION. Soient  $x_0$  un point de  $h$  défini comme dans l'énoncé, et  $y$  un vecteur tangent à  $h$  en  $x_0$ . On a alors  $w \cdot y = x_0 \cdot y = 0$  (en se souvenant que tous les points de  $\mathcal{H}$  sont de norme -1), d'où l'on conclut que  $h$  est orthogonal au plan contenant  $w$  et  $x_0$ , lequel correspond à la géodésique de  $\mathcal{H}$  joignant  $w$  et  $x_0$ ; autrement dit  $h$  est bien par définition un horocycle. Pour calculer le rayon euclidien du projeté stéréographique de cet horocycle, il suffit de trouver le point de l'horocycle diamétralement opposé à  $\bar{w}$ . On fait

alors explicitement le calcul pour un point  $w$  de coordonnées  $(w_0, w_0, 0)$ , cas auquel on se ramène par une rotation. On notera aussi qu'un calcul élémentaire montre que  $h$  est l'ensemble des points de contact des tangentes à  $\mathcal{H}$  issues du point  $w$ .

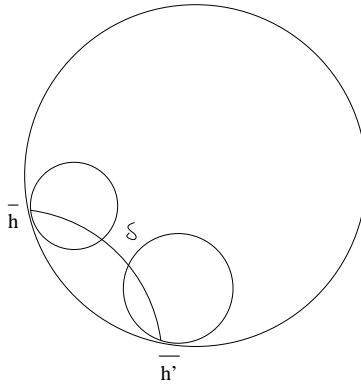
Nous donnons maintenant un lemme géométrique particulièrement important pour relier la construction de [BE] et celle [P].

**Lemme 3.3.**

i) Soient  $u \in L$  et  $v \in \mathcal{H}$ ; on note  $\delta$  la distance (hyperbolique) du point  $v$  à l'horocycle défini par  $u$ , comptée positivement si  $v$  est à l'intérieur de l'horocycle et négativement sinon. On a alors l'égalité:  $u \cdot v = -e^\delta$ .

ii) Soient  $u$  et  $u'$  deux points de  $L$  situés sur des rayons distincts; on note  $h$  et  $h'$  les horocycles associés. On appelle  $\delta$  la distance de Poincaré entre les projetés  $\bar{h}$  et  $\bar{h}'$  sur  $\mathbb{D}$ , comptée positivement si ces deux horocycles sont disjoints et négativement sinon. On a l'égalité:  $u \cdot u' = -2e^\delta$ .

DÉMONSTRATION. Notons que i) peut bien sûr s'énoncer sur  $\mathbb{D}$ . L'assertion ii) donne une interprétation du produit scalaire entre les points situés sur le cône de lumière. On a la disposition suivante, lorsque les horocycles sont disjoints:



**Figure 3.2**

Pour montrer l'égalité dans i), on se ramène au cas où  $v = (1, 0, 0)$  par transitivité de l'action du groupe des isométries et  $u = (u_0, u_0, 0)$  par invariance par rotation autour de l'axe vertical. L'horocycle associé à  $u$  se projette en un horocycle de  $\mathbb{D}$  de rayon euclidien  $(1 + u_0)^{-1}$ , et  $v$  se projette au centre de  $\mathbb{D}$ . Il vient donc:

$$\delta = \int_0^{1 - \frac{2}{1+u_0}} \frac{2dt}{1-t^2} = \ln u_0 = \ln(-u \cdot v).$$

On en déduit une démonstration de ii) en ajoutant un point intermédiaire: soient  $u$  et  $u'$  comme dans l'énoncé,  $\bar{u}$  et  $\bar{u}'$  leurs projetés sur  $\mathbb{D}$ ; soit  $v \in \mathcal{H}$  au-dessus de la géodésique joignant  $\bar{u}$  et  $\bar{u}'$ , donc  $v \in \mathbb{R}u + \mathbb{R}u'$ , soit  $v = \alpha u + \beta u'$ . La condition que  $v$  appartienne à

$\mathcal{H}$  se traduit par  $v \cdot v = -1$ , ou  $2\alpha\beta u \cdot u' = -1$ . On note  $\delta$  et  $\delta'$  les distances de  $v$  aux horocycles définis par  $u$  et  $u'$ . D'après i), on a  $u \cdot v = -\exp \delta$  et  $u' \cdot v = -\exp \delta'$ , d'où l'on tire:

$$\exp(\delta + \delta') = (u \cdot v)(u' \cdot v) = \alpha\beta(u \cdot u')^2 = -\frac{1}{2}u \cdot u'.$$

### I.3.2. Espace de Teichmüller décoré $\tilde{\mathcal{T}}_{g,n}$ et partition de cet espace

On définit ici d'abord l'espace de Teichmüller *décoré* d'une surface. Puis on construit une partition de cet espace qui, on le verra par la suite, est constituée de cellules. Pour plus de détails, nous renvoyons à [P]. On considère comme dans l'introduction à ce chapitre une surface de référence  $S$ , fermée de genre  $g$ , avec un ensemble  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$  de  $n$  points marqués. On suppose que la surface  $S - P$  est hyperbolique (c'est-à-dire que  $2g - 2 + n > 0$ ) et qu'il y a au moins un point marqué ( $n \geq 1$ ). On note  $\mathcal{T}_{g,n} = \mathcal{T}(S, P)$  l'espace de Teichmüller associé. À tout point de cet espace correspond une surface de Riemann de genre  $g$  munie de  $n$  points marqués  $x_1, \dots, x_n$  et d'un marquage du groupe fondamental de la surface (cf. l'introduction). L'espace décoré  $\tilde{\mathcal{T}}_{g,n}$  paramétrise la donnée de ces surfaces marquées, munies en outre d'horocycles  $h_i$  autour de chaque point  $x_i$ . Chaque horocycle est uniquement déterminé par son "rayon" et on a simplement  $\tilde{\mathcal{T}}_{g,n} \simeq \mathcal{T}_{g,n} \times \mathcal{H}_1 \times \dots \times \mathcal{H}_n$  avec  $\mathcal{H}_i \simeq \mathbb{R}_+^*$ . Donnons une définition en forme dans notre contexte. Tout d'abord un point de l'espace de Teichmüller  $\mathcal{T}_{g,n}$  est déterminé par:

- Un sous-groupe fuchsien de première espèce sans élément elliptique  $\Gamma$  du groupe  $\text{SO}^+(1, 2)$  des isométries de l'hyperboloïde  $\mathcal{H}$ ;
- Un isomorphisme de marquage  $m : \pi_1(S - P; p_0) \rightarrow \Gamma$ . Le groupe  $\Gamma$  (et donc le marquage  $m$ ) sont définis à conjugaison près dans  $\text{SO}^+(1, 2)$ .

Nous utilisons ici le groupe  $\text{SO}^+(1, 2)$ , mais on se souviendra qu'il est en fait isomorphe à  $PSL(2, \mathbb{R})$ , ce qui autorise à transposer simplement les termes (et donc à parler de groupe fuchsien etc.). Le point  $p_0$  est un point base fixé de  $S - P$ . On notera donc (en suivant [P])  $\Gamma_m$  un point de  $\mathcal{T}_{g,n}$ , cette notation étant formellement redondante puisque  $\Gamma$  n'est autre que l'image de  $m$ .

À  $\Gamma_m$  est associée une surface de Riemann  $X_m \simeq \mathcal{H}/\Gamma$  hyperbolique de genre  $g$  (plus précisément son compactifié est de genre  $g$ ) avec  $n$  points marqués. Chaque point marqué  $x_i$  correspond à une transformation parabolique de  $\Gamma$  qui fixe un rayon du cône de lumière  $L$ . D'après le lemme 3.2, la donnée d'un horocycle  $h_i$  autour de  $x_i$  est équivalente à la donnée d'un point sur le rayon de  $L$  associé à  $x_i$ ; enfin ces données doivent être considérées modulo l'action du groupe  $\Gamma$ . En identifiant  $x_i$  à une orbite sous  $\Gamma$  de rayons de  $L$ ,  $h_i$  est donc donné par une orbite  $B_i = \Gamma z_i$ , où  $z_i$  est un point du rayon  $x_i$  (ou plutôt de l'un quelconque des rayons représentant  $x_i$ ). On aboutit finalement à la définition suivante:

$$\tilde{\mathcal{T}}_{g,n} = \{(\Gamma_m, B_1, \dots, B_n) \mid \Gamma_m \in \mathcal{T}_{g,n}, B_i = \Gamma z_i \subset L\} / \text{SO}^+(1, 2).$$



On a divisé (comme pour définir  $\mathcal{T}_{g,n}$ ) par l'action de  $SO^+(1, 2)$  par conjugaison, et il est entendu que chaque  $z_i \in L$  est choisi comme expliqué plus haut. Géométriquement, il s'agit simplement de choisir un horocycle autour de chaque point enlevé de la surface. Du point de vue hyperbolique, ces points se trouvent à l'infini, mais la donnée d'horocycles permet de mesurer des distances en utilisant le lemme 3.3 ci-dessus. On notera  $\tilde{\Gamma}_m$  les éléments de l'espace décoré.

On met sur  $\mathcal{T}_{g,n}$  la topologie naturelle, obtenue en décrétant que deux groupes marqués sont proches si les images d'un système de générateurs de  $\pi_1(S - P; p_0)$  sont proches pour la topologie de  $SO^+(1, 2) \simeq PSL(2, \mathbb{R})$ . Pour obtenir une topologie sur  $\tilde{\mathcal{T}}_{g,n}$ , on dit de plus que deux décorations sont proches si on peut choisir des représentants  $z_i \in L$  qui le sont. Comme indiqué plus haut, on voit facilement que l'on a  $\tilde{\mathcal{T}}_{g,n} \simeq \mathcal{T}_{g,n} \times (\mathbb{R}_*^+)^n$ .

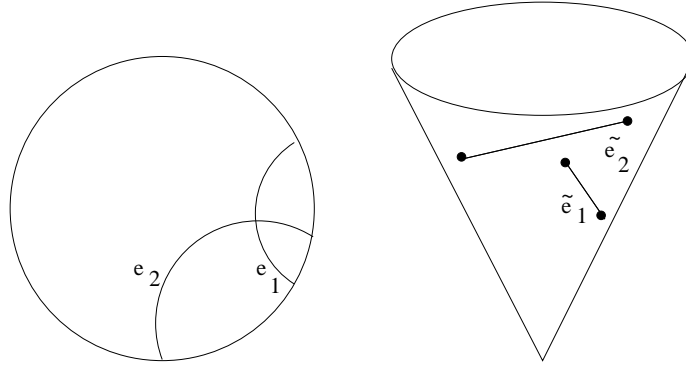
Pour construire une partition de l'espace décoré, on associe à un élément  $\tilde{\Gamma}_m$  une collection  $\Delta$  d'arcs dans  $S - P$ , joignant les points marqués  $P$ , et définis à isotopie près. On se permettra dans la suite le léger abus consistant à confondre  $\Delta$  avec le graphe que cette collection d'arcs détermine. Pour définir  $\Delta$  à partir d'un point de l'espace de Teichmüller, on utilise la construction de l'enveloppe convexe (euclidienne) suivante. Soit  $\tilde{\Gamma}_m = (\Gamma_m, B_1, \dots, B_n)$ ; on note  $\mathcal{B} = \bigcup B_i$  et  $C$  l'enveloppe convexe euclidienne de  $\mathcal{B}$ . C'est une partie de l'espace de Minkowski intérieure au cône  $L$  et invariante sous l'action de  $\Gamma$ . Pour plus de détails sur la géométrie de  $C$  et de son bord  $\partial C$ , nous renvoyons à [P], §4. Chaque face de  $\partial C$  peut-être considérée, d'après le lemme 3.1, comme une géodésique de  $\mathcal{H}$ . On appelle  $\mathcal{G}(\tilde{\Gamma}_m)$  l'ensemble des géodésiques de  $\mathcal{H}$  (ou de  $\mathbb{D}$ ) obtenues de cette façon, en projetant les faces de  $\partial C$ .

Une géodésique de  $\mathcal{G}(\tilde{\Gamma}_m)$  joignant deux points  $z$  et  $w$  de  $\mathcal{B}$  se projette sur un chemin de  $X_m$  reliant deux points marqués, qui est une géodésique pour la métrique de Poincaré associée. On note  $\Delta(\tilde{\Gamma}_m)$  la collection des géodésiques obtenues. On peut considérer  $\Delta(\tilde{\Gamma}_m)$  comme un ensemble d'arcs tracés sur  $S - P$  et joignant des points de  $P$ . Ces arcs sont géodésiques si on munit  $S - P$  de la métrique correspondant par l'application de marquage à la métrique de Poincaré sur  $X_m$ . On a alors la propriété essentielle suivante:

**Proposition 3.4.**  *$\Delta(\tilde{\Gamma}_m)$  est une collection finie d'arcs simples de  $S - P$  deux à deux disjoints qui relient des points marqués (c'est-à-dire des points de  $P$ ). De plus, les composantes connexes de  $S - \Delta(\tilde{\Gamma}_m)$  sont simplement connexes.*

Nous justifierons seulement le fait qu'on obtient bien des arcs simples deux à deux disjoints. Supposons que deux arcs  $c_1$  et  $c_2$  de  $\Delta(\tilde{\Gamma}_m)$  s'intersectent (ou qu'un arc possède un point double; ce cas est une variante du précédent et nous ne le mentionnerons plus). On considère deux relèvements  $e_1$  et  $e_2$  de ces arcs dans  $\mathbb{D}$ , choisis de sorte que les extrémités  $\partial e_1$  et  $\partial e_2$  sont entrelacées, ce qui est possible puisque les arcs s'intersectent (cf. figure 3.3 ci-dessous). Les géodésiques  $e_1$  et  $e_2$  sont les projections de deux segments euclidiens  $\tilde{e}_1$  et

$\tilde{e}_2$  dans l'espace de Minkowski, qui sont des segments "saillants" de  $C$ , d'après la définition même de l'ensemble  $\mathcal{G}(\tilde{\Gamma}_m)$ . Or ceci est en contradiction avec le fait que les extrémités sont entrelacées, et le fait que  $C$  contient des points de hauteur arbitrairement grande, étant invariant sous l'action de  $\Gamma$ .



**Figure 3.3**

On appellera *arc idéal* de  $(S, P)$  une classe d'isotopie de chemins joignant deux points marqués  $p_i$  et  $p_j$  dans  $S - P$ ; le cas  $i = j$  n'est pas exclu mais on suppose alors que le chemin n'est pas homotope au chemin constant. La collection  $\Delta$  définit ainsi une collection d'arcs idéaux de  $(S, P)$  qui admettent d'après la proposition précédente des représentants deux à deux disjoints décomposant  $S$  en cellules. Une telle collection d'arcs idéaux est appelée *décomposition cellulaire idéale* de  $(S, P)$ . Si de plus les cellules sont des triangles, ce qui équivaut au fait que la collection est maximale (pour la relation d'inclusion évidente), on dira qu'il s'agit d'une *triangulation idéale*. Une triangulation idéale comporte  $6g - 6 + 3n$  arêtes, et décompose la surface en  $4g - 4 + 2n$  triangles.

A chaque élément  $\tilde{\Gamma}_m$  de l'espace de Teichmüller décoré, on a donc associé de façon constructive une décomposition cellulaire idéale  $\Delta(\tilde{\Gamma}_m)$ . Il est alors naturel de regrouper les éléments de  $\tilde{\mathcal{T}}_{g,n}$  en fonction de la décomposition qui leur est associée. Soit  $\Delta$  une décomposition cellulaire idéale; on définit donc

$$\mathring{\mathcal{C}}(\Delta) = \{\tilde{\Gamma}_m \in \tilde{\mathcal{T}}_{g,n} \mid \Delta(\tilde{\Gamma}_m) = \Delta\} \quad \text{et} \quad \mathcal{C}(\Delta) = \{\tilde{\Gamma}_m \in \tilde{\mathcal{T}}_{g,n} \mid \Delta(\tilde{\Gamma}_m) \subseteq \Delta\}.$$

Il est clair que  $\{\mathring{\mathcal{C}}(\Delta)\}_\Delta$  définit une partition de  $\tilde{\mathcal{T}}_{g,n}$  lorsque  $\Delta$  parcourt l'ensemble des décompositions cellulaires idéales. C'est cette partition que nous allons étudier, et dont on donnera au I.3.5 une autre description, en suivant [BE]. On verra entre autres que l'une et l'autre méthode permettent de montrer (théorème 3.9 et théorème 3.15) que la cellule  $\mathcal{C}(\Delta)$  est non vide pour toute triangulation idéale  $\Delta$ . Au I.3.6, on vérifiera que les objets définis des deux manières coïncident bien (ce qui n'est pas fait dans les articles originaux).

### I.3.3. Triangulations et paramétrisation de $\tilde{\mathcal{T}}_{g,n}$

Dans cette partie nous exposons succinctement un premier résultat assez facile, à

savoir qu'il est possible de paramétrer l'espace de Teichmüller décoré à l'aide d'une triangulation fixée arbitrairement. Il s'agit donc d'un analogue des coordonnées de Fenchel-Nielsen, obtenues, on l'a vu dans le I.1, en fixant une décomposition en pantalons. Nous reviendrons au prochain paragraphe sur la construction précédente, qui à *chaque* point de l'espace de Teichmüller décoré associe naturellement une décomposition cellulaire idéale (génériquement une triangulation) qui varie avec le point.

Soit donc  $c$  un arc idéal de  $(S, P)$  joignant  $p_i$  à  $p_j$  et soit  $\tilde{\Gamma}_m = (\Gamma_m, B_1, \dots, B_n) \in \tilde{\mathcal{T}}_{g,n}$ ; soit  $\gamma$  le représentant de  $c$  qui est une géodésique pour la métrique associée à  $\Gamma_m$ . Soit  $z \in B_i$  dans  $L$ ,  $\bar{z}$  sa projection sur  $\partial\mathbb{D}$ . En remontant  $\gamma$  dans  $\mathbb{D}$  à partir de  $\bar{z}$  on obtient une géodésique de  $\mathbb{D}$  qui aboutit en  $\alpha \in \partial\mathbb{D}$ . Il y a un et un seul point de  $B_j$  au-dessus de  $\alpha$ , que l'on note  $w$ .

**Définition 3.5.** On appelle  $\lambda$ -longueur de l'arc idéal  $c$  pour le point  $\tilde{\Gamma}_m$  la quantité

$$\lambda(c, \tilde{\Gamma}_m) = \sqrt{-z \cdot w}.$$

On vérifie facilement que cette valeur ne dépend pas du choix de  $z$  dans  $B_i$ . Une interprétation géométrique de  $\lambda$  se déduit du lemme 3.3 (assertion ii)): la  $\lambda$ -longueur de l'arc idéal  $c$  est égale à  $\sqrt{2e^\delta}$ , où  $\delta$  est la longueur pour la métrique de Poincaré de la portion de la géodésique  $\gamma$  interceptée entre les deux horocycles  $h_i$  et  $h_j$  autour de  $p_i$  et  $p_j$ . La définition ci-dessus en termes d'espace de Minkowski peut paraître artificielle mais elle permet d'utiliser la structure affine de cet espace pour montrer certains résultats, comme on le verra dans les lemmes qui suivent.

Si on se donne une collection d'arcs idéaux  $c_1, \dots, c_q$ , on a une application naturelle :

$$\prod_{i=1}^q \lambda(c_i, \cdot) : \tilde{\mathcal{T}}_{g,n} \rightarrow (\mathbb{R}_+^*)^q.$$

La situation intéressante est celle d'une triangulation idéale ( $q = 6g - 6 + 3n$ ) comme en témoigne le

**Théorème 3.6.** (cf.[P], §3) *Soit  $\Delta = \{c_1, \dots, c_q\}$  une triangulation idéale. Alors*

$$\lambda_\Delta = \prod_{i=1}^q \lambda(c_i, \cdot) : \tilde{\mathcal{T}}_{g,n} \longrightarrow (\mathbb{R}_+^*)^q$$

*est un homéomorphisme.*

ESQUISSE DE DÉMONSTRATION. Pour montrer que  $\lambda_\Delta$  est une bijection, nous allons exhiber l'application réciproque en construisant un élément de  $\tilde{\mathcal{T}}_{g,n}$  réalisant des  $\lambda$ -longueurs données. Le fait qu'il s'agit d'un homéomorphisme résulte directement des définitions des

topologies. Soit donc  $(\lambda_1, \dots, \lambda_q) \in (\mathbb{R}_+^*)^q$  un  $q$ -uplet de réels positifs non nuls. On considère  $\mathbb{D}$  comme le revêtement universel de  $S$ , triangulé par les relèvements topologiques des arcs idéaux  $c_1, \dots, c_q$ . Il s'agit d'envoyer cette triangulation sur une triangulation géodésique de  $\mathbb{D}$ , en associant à chaque sommet un point de  $L$ , et donc un point de  $\partial\mathbb{D}$  grâce à l'extension de la projection stéréographique. Cette triangulation géodésique sera munie d'horocycles en chaque sommet grâce au lemme 3.2. Finalement on montre comment l'action de  $\pi_1(S - P; p_0)$  sur cette triangulation permet de définir une injection  $\pi_1(S - P; p_0) \hookrightarrow \text{SO}^+(1, 2)$  ainsi que  $n$  orbites de points de  $L$ . La possibilité (et l'unicité) de cette construction repose essentiellement sur les deux lemmes suivants:

**Lemme 3.7.** *Soient  $r_1, r_2, r_3$  trois rayons distincts de  $L$ . Alors il existe un unique triplet de points  $u_1, u_2, u_3$ , avec  $u_i \in r_i$  tel que  $u_i \cdot u_j = -1$  pour  $i \neq j$ .*

De manière analogue, on a le

**Lemme 3.8.** *Soient  $u_1, u_2 \in L$ ,  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3 \in \mathbb{R}_+^*$ , avec  $u_1 \cdot u_2 = -\lambda_3^2$ . Alors il existe un unique  $u_3 \in L$  de chaque côté du plan  $\Pi(0, u_1, u_2)$ , qui passe par  $0, u_1, u_2$ , tel que  $u_2 \cdot u_3 = -\lambda_1^2$  et  $u_1 \cdot u_3 = -\lambda_2^2$ .*

DÉMONSTRATION DU LEMME 3.7. On choisit des  $v_i \in r_i$  arbitraires et on cherche les  $u_i$  sous la forme  $v_i = k_i u_i$  ( $k_i > 0$ ). Notons  $v_2 \cdot v_3 = -\alpha_1$ ,  $v_1 \cdot v_3 = -\alpha_2$  et  $v_1 \cdot v_2 = -\alpha_3$ ; les  $\alpha_i$  sont alors positifs. Résoudre le système  $u_i \cdot u_j = -1$  pour  $i \neq j$  revient à résoudre  $k_i k_j = \alpha_k$  pour  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ , ce qui donne une solution unique sous la forme

$$k_i^2 = \frac{\alpha_j \alpha_k}{\alpha_i}, \quad \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}.$$

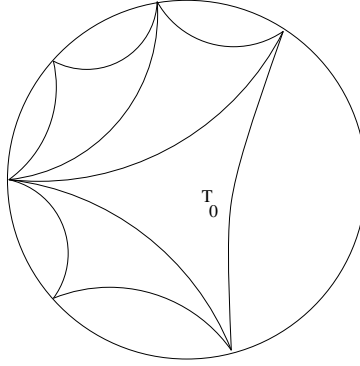
DÉMONSTRATION DU LEMME 3.8. Considérons l'ensemble des  $u_3 \in L$  vérifiant  $u_1 \cdot u_3 = -\lambda_2^2$  et  $u_2 \cdot u_3 = -\lambda_1^2$ . C'est une droite orthogonale au plan engendré par  $u_1$  et  $u_2$ , et qui contient un élément de la forme  $\alpha u_1 + \beta u_2$ , avec  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ . En effet, le système d'équations:

$$u_1 \cdot (\alpha u_1 + \beta u_2) = -\lambda_2^2, \quad u_2 \cdot (\alpha u_1 + \beta u_2) = -\lambda_1^2$$

a pour solution  $\alpha = -\lambda_2^2 (u_1 \cdot u_2)^{-1}$ ,  $\beta = -\lambda_1^2 (u_1 \cdot u_2)^{-1}$  et ces deux nombres sont positifs (on peut d'ailleurs noter que si  $u_1$  et  $u_2$  sont deux points de  $L$ , on a  $u_1 \cdot u_2 \leq 0$  avec égalité si et seulement si  $u_1$  et  $u_2$  sont sur le même rayon). Finalement, l'ensemble en question est une droite affine orthogonale au plan engendré par  $u_1$  et  $u_2$ , et qui passe par un point intérieur au cône de lumière  $L$ ; elle coupe donc celui-ci en deux points, situés de part et d'autre du plan  $\Pi$ , et qui sont les points dont l'existence (et l'unicité) est affirmée dans le lemme.

Reprenons la construction d'une triangulation du disque  $\mathbb{D}$  qui réalise des  $\lambda$ -longueurs données, pour une triangulation donnée. Pour commencer, on considère un triangle  $T_0$  dont

les côtés correspondent à trois arcs idéaux  $c_{I(1)}, c_{I(2)}, c_{I(3)}$  (pas nécessairement distincts). On fixe trois rayons distincts  $r_1, r_2, r_3$  de  $L$ . Une extension immédiate du lemme 3.7 fournit trois points  $z_1, z_2, z_3$  tels que  $z_i \in r_i$  et  $z_i \cdot z_j = -\lambda_{I(k)}^2$  pour  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ .



**Figure 3.4**

On procède ensuite inductivement pour construire l'image géodésique de la triangulation topologique: supposons qu'on ait construit l'image d'une arête d'un triangle  $T$ , c'est-à-dire les images de deux de ses sommets, données par  $u_1$  et  $u_2$ , deux points de  $L$ . Il s'agit de déterminer l'image  $u_3$  du troisième sommet, de sorte que  $u_i \cdot u_j = -\lambda_{I(k)}^2$ . Le lemme 3.8 donne deux possibilités pour  $u_3$ , mais un des côtés du plan  $\mathbb{H}$  contient les points construits aux étapes précédentes. Comme on doit construire une collection de triangles de  $\mathbf{M}$  qui se projettent injectivement sur  $\mathbb{D}$ , on doit choisir  $u_3$  du côté encore "libre", ce qui le détermine uniquement. On vérifie alors facilement que les projetés des triangles ainsi construits forment bien une triangulation de  $\mathbb{D}$ , c'est-à-dire qu'ils ne s'intersectent pas et remplissent  $\mathbb{D}$  de manière localement discrète.

En fait, on a construit de la sorte une triangulation décorée, c'est-à-dire non seulement un ensemble de rayon de  $L$  ou de points de  $\partial\mathbb{D}$ , mais des points bien déterminés sur  $L$ , qui déterminent donc des horocycles autour des cusps associés. Pour construire explicitement l'élément de  $\tilde{\mathcal{T}}_{g,n}$  associé à la donnée des  $\lambda$ -longueurs  $(\lambda_1, \dots, \lambda_q)$ , il reste à déterminer un morphisme de  $\pi_1(S - P; p_0)$  dans  $\mathrm{SO}^+(1, 2)$ , injectif et d'image discrète. Or un élément  $g$  du groupe fondamental de  $S - P$  définit une transformation topologique (simpliciale) de la triangulation du disque induite par les courbes  $c_i$  et définit donc une transformation combinatoire  $\tilde{g}$  de la triangulation métrique de  $\mathbb{D}$  dont on a esquissé la construction. L'application  $\tilde{g}$  envoie tout triangle  $\tau$  sur un autre  $\tilde{g}(\tau)$  et il existe une unique isométrie de  $\mathbb{D}$  qui fait la même chose (envoie  $\tau$  sur  $\tilde{g}(\tau)$ ); d'autre part il est facile de vérifier que cette isométrie ne dépend pas du triangle  $\tau$  choisi. On a donc associé à tout élément de groupe fondamental de  $(S - P)$  une isométrie du disque (à laquelle correspond une unique isométrie de  $\mathbf{M}$ ) et on vérifie que cette application est un morphisme de groupes. Notons enfin que l'action de  $\mathrm{SO}^+(1, 2)$  par laquelle on quotiente dans la définition des espaces  $\mathcal{T}_{g,n}$  et  $\tilde{\mathcal{T}}_{g,n}$  correspond au fait que le triangle de départ  $T_0$  est choisi arbitrairement dans la

construction précédente. On obtient ainsi un élément de  $\mathcal{T}_{g,n}$ , et on a vu que la construction donnait en outre des horocycles autour des points  $p_i$ , sous la forme d'une orbite de points de  $L$  associés à  $p_i$ . Finalement, on a bien défini une application de  $(\mathbb{R}_+^*)^g$  vers  $\tilde{\mathcal{T}}_{g,n}$  inverse de celle dont on était parti. Les continuités dans un sens et dans l'autre se vérifient sans difficulté.

### I.3.4. La partition est une cellulation; énoncé et conditions de faces

Nous venons de voir comment associer une paramétrisation de l'espace de Teichmüller décoré à chaque triangulation idéale de la surface de référence  $(S, P)$ . Reprenons maintenant les objets  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Delta)$  définis à la fin du I.3.2. Le théorème principal énoncé ici affirme que ce sont des cellules:

**Théorème 3.9.** *Si  $\Delta$  est une décomposition cellulaire idéale de  $(S, P)$ , alors  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Delta)$  est une cellule ouverte de  $\tilde{\mathcal{T}}_{g,n}$ , de dimension  $\text{card}(\Delta)$ . En particulier cette cellule est de dimension maximale  $6g - 6 + 3n$  si et seulement si  $\Delta$  est une triangulation idéale.*

*La partition  $\{\overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Delta)\}_\Delta$ , où  $\Delta$  varie dans les décompositions cellulaires idéales de  $(S, P)$  est une décomposition cellulaire de  $\tilde{\mathcal{T}}_{g,n}$ , équivariante par rapport à l'action du groupe de Teichmüller modulaire ("mapping class group"): si  $\psi$  est un élément de ce groupe, on a  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}(\psi\Delta) = \psi\overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Delta)$ .*

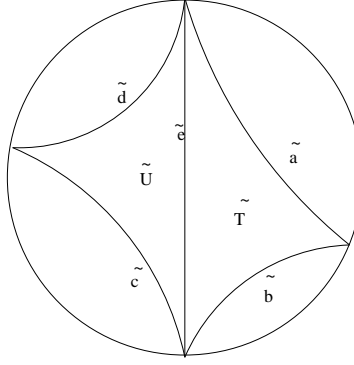
Notons que dans cette dernière égalité,  $\psi\Delta$  est l'image de  $\Delta$  par  $\psi$  considéré comme difféotopie de  $S$  (préservant  $P$ ), tandis que  $\psi\overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Delta)$  se réfère à l'action naturelle des éléments du groupe sur l'espace de Teichmüller.

Ce théorème a été démontré dans [P] sous cette forme, et sous une forme différente dans [BE]. L'équivalence des constructions employées par ces auteurs, qui n'est ni évidente ni explicitée par eux, est par elle-même intéressante. Dans ce paragraphe, après avoir explicité une condition sur les  $\lambda$ -longueurs pour qu'un élément de l'espace de Teichmüller décoré appartienne à une cellule donnée  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Delta)$ , nous introduirons une autre notion de [P] ( $h$ -longueur) qui permettra plus loin de faire le lien entre la construction de [P] et celle de [BE]. Auparavant, arrêtons-nous le temps d'une remarque sur un corollaire évident de l'énoncé ci-dessus.

Fixons autour de chaque point marqué un horocycle de longueur  $l$ , la même pour tous les points marqués, par exemple  $l = 1$ , ou  $l = 1/n$  si on veut que les horocycles soient disjoints. Ceci définit une application  $s : \mathcal{T}_{g,n} \rightarrow \tilde{\mathcal{T}}_{g,n}$  qui est une section de la fibration (triviale) naturelle  $\tilde{\mathcal{T}}_{g,n} \rightarrow \mathcal{T}_{g,n}$  (obtenue en oubliant la décoration). À un élément  $\Gamma_m \in \mathcal{T}_{g,n}$  on associe donc  $s(\Gamma_m) = \tilde{\Gamma}_m$  en munissant la surface correspondant à  $\Gamma_m$  de la décoration formée par des horocycles de longueur  $l$ . La section  $s$  est invariante sous l'action du groupe de Teichmüller et la trace de la partition (dont le théorème affirme qu'elle est une cellulation) de  $\tilde{\mathcal{T}}_{g,n}$  sur  $s(\mathcal{T}_{g,n}) \simeq \mathcal{T}_{g,n}$  définit une partition en cellules de

$\mathcal{T}_{g,n}$ . De plus, celle-ci est elle-même invariante sous l'action du groupe de Teichmüller et descend donc en une décomposition en cellules de l'espace des modules  $\mathcal{M}_{g,n}$  lui-même, ce qui en donne une description qui se prête bien à certains calculs explicites.

Revenons maintenant à la caractérisation des éléments de  $\mathcal{C}(\Delta)$  et de  $\mathring{\mathcal{C}}(\Delta)$  dans le cas –générique– où  $\Delta$  est une *triangulation* idéale de  $(S, P)$ . On note  $E(\Delta)$  l'ensemble des arêtes de  $\Delta$  et soit  $e \in E(\Delta)$ . On considère un arc idéal  $\tilde{e}$  au-dessus de  $e$  dans le disque, qui sépare deux triangles  $\tilde{T}$  et  $\tilde{U}$  de  $\tilde{\Delta}$ , le relevé au disque de  $\Delta$ , comme dans la figure 3.5 ci-dessous, dont on adopte les notations.



**Figure 3.5**

Les arcs  $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d}, \tilde{e}$  se projettent sur  $S$  en  $a, b, c, d, e$  qui sont des arcs de la triangulation idéale  $\Delta$ , non nécessairement distincts. Soit  $\Lambda \in (\mathbb{R}_+^*)^{E(\Delta)}$ ; on dit que  $\Lambda$  satisfait la *condition de face stricte* sur  $e$  pour  $\Delta$  si:

$$\Lambda(a)\Lambda(b)(\Lambda(c)^2 + \Lambda(d)^2 - \Lambda(e)^2) + \Lambda(c)\Lambda(d)(\Lambda(a)^2 + \Lambda(b)^2 - \Lambda(e)^2) > 0.$$

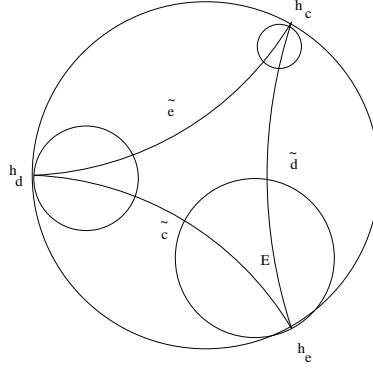
On parle aussi de l'*égalité de face* et de la *condition de face large* si on remplace  $>$  par  $=$ , respectivement  $\geq$ . Si  $\Delta'$  est une décomposition cellulaire idéale avec  $\Delta' \subset \Delta$ , on dit que  $\Lambda \in (\mathbb{R}_+^*)^{E(\Delta)}$  satisfait les *relations de face pour  $\Delta$  relativement à  $\Delta'$*  si la condition de face stricte vaut pour tout  $e \in \Delta'$  et l'égalité de face vaut pour tout  $e \in \Delta - \Delta'$ . On dit aussi que  $\Lambda$  satisfait les *relations de face pour  $\Delta$*  si la condition de face stricte vaut pour tout  $e \in \Delta$ . La caractérisation de  $\mathring{\mathcal{C}}(\Delta)$  en termes de  $\lambda$ -longueurs est alors donnée par la

**Proposition 3.10.** *Soit  $\Delta$  une triangulation idéale. Soit  $\tilde{\Gamma}_m \in \tilde{\mathcal{T}}_{g,n}$  et  $\Lambda \in (\mathbb{R}_+^*)^{E(\Delta)}$  associé à  $\tilde{\Gamma}_m$ . Alors  $\tilde{\Gamma}_m$  est dans  $\mathring{\mathcal{C}}(\Delta)$  si et seulement si  $\Lambda$  satisfait les relations de face pour  $\Delta$ .*

*Si de plus  $\Delta'$  est une décomposition cellulaire idéale telle que  $\Delta' \subset \Delta$  alors  $\tilde{\Gamma}_m$  est dans  $\mathring{\mathcal{C}}(\Delta')$  si et seulement si  $\Lambda$  satisfait les relations de face pour  $\Delta$  relativement à  $\Delta'$ .*

Cette caractérisation devient plus transparente quand on l'exprime en termes des  $h$ -longueurs que nous allons introduire à présent. La proposition 3.10 deviendra alors une conséquence immédiate de la proposition 3.11 ci-dessous. Pour introduire les  $h$ -longueurs,

considérons de nouveau  $\Delta$  une triangulation idéale de  $(S, P)$  et soit  $\mathcal{E}(\Delta)$  l'ensemble des coins de  $\Delta$ , c'est-à-dire l'ensemble des orbites des coins de la triangulation  $\tilde{\Delta}$ , relevée de  $\Delta$  au disque  $\mathbb{D}$ . Un coin de  $\tilde{\Delta}$  n'est autre que la donnée de deux arcs idéaux adjacents comme sur la figure 3.6 ci-dessous (cf. également la figure 3.7).

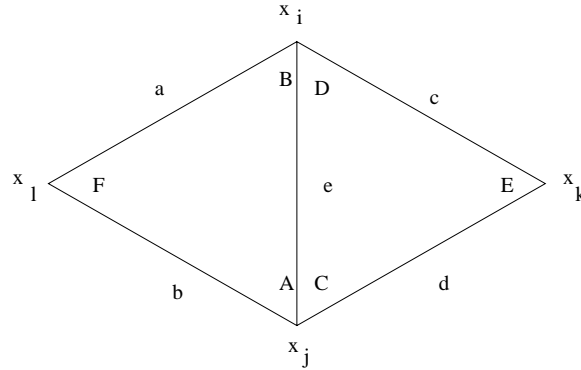


**Figure 3.6**

On définit une application  $I : \mathbb{R}^{E(\Delta)} \rightarrow (\mathbb{R}_+^*)^{\mathcal{E}(\Delta)}$  qui à  $[\lambda : E(\Delta) \rightarrow \mathbb{R}_+^*]$  associe l'application  $[h : \mathcal{E}(\Delta) \rightarrow \mathbb{R}_+^*]$  donnée par:

$$h(E) = \frac{\Lambda(e)}{\sqrt{2}\Lambda(c)\Lambda(d)},$$

dès que la situation est celle de la figure 3.6 (et 3.7).



**Figure 3.7**

La quantité  $h(E)$  est appelée *h-longueur* du coin  $E$ ; nous donnons ci-dessous, au lemme 3.12, la signification géométrique de cette quantité. L'application  $I$  est injective, et son image est l'ensemble des applications  $h : \mathcal{E}(\Delta) \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  vérifiant

$$h(A)h(B) = h(C)h(D) \quad (= \frac{1}{2\Lambda(e)^2}),$$

pour tout ensemble de coins disposés comme sur la figure 3.7. Il s'agit donc d'un ensemble de contraintes quadratiques sur les valeurs des *h-longueurs* associées à une triangulation



donnée. Le fait remarquable est que la condition de face, qui est, on l'a vu, quadratique dans les  $\lambda$ -longueurs, devient linéaire dans les  $h$ -longueurs. Il suffit pour s'en convaincre de reporter dans cette condition la formule de définition ci-dessus pour les  $h$ -longueurs. Finalement la proposition 3.10 se traduit en terme de  $h$ -longueurs sous la forme suivante:

**Proposition 3.11.** *Soit  $\Lambda \in (\mathbb{R}_+^*)^{E(\Delta)}$  et  $\tilde{\Gamma}_m \in \tilde{\mathcal{T}}_{g,n}$  associé à  $\Lambda$  (cf. Théorème 3.6). Alors,  $\tilde{\Gamma}_m \in \mathring{\mathcal{C}}(\Delta)$  si et seulement si  $h = I(\Lambda)$  vérifie les conditions de face en termes de  $h$ -longueurs, à savoir:*

$$h(A) + h(B) + h(C) + h(D) > h(E) + h(F),$$

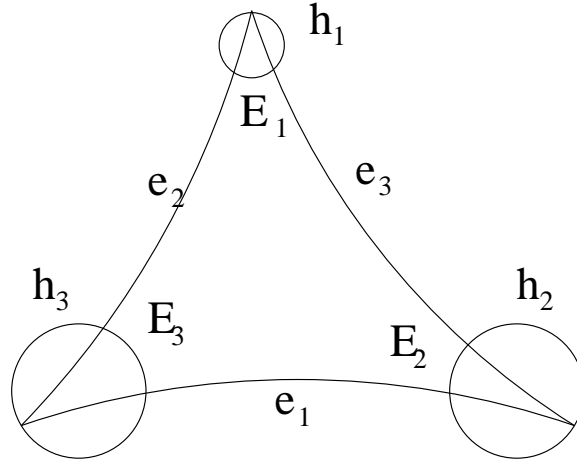
dès que les coins considérés sont disposés comme sur la figure 3.7.

On a ainsi traduit la condition de face quadratique en termes de  $\lambda$ -longueurs en une condition linéaire sur les  $h$ -longueurs (dont les valeurs vérifient elles des contraintes quadratiques). Nous donnons maintenant une caractérisation des  $h$ -longueurs qui éclaire leur signification et sera nécessaire pour montrer la proposition 3.11.

**Lemme 3.12.** *On considère un hexagone horogéodésique, c'est-à-dire un triangle (hyperbolique) de  $\mathbb{D}$ , dont les sommets sont des points à l'infini (des points de  $\partial\mathbb{D}$ ) et sont munis d'horocycles. On adopte les notations de la figure 3.8 ci-dessous. Soit  $\lambda(e_1)$ ,  $\lambda(e_2)$  et  $\lambda(e_3)$  les  $\lambda$ -longueurs des arêtes. Si on définit*

$$h(E_i) = \frac{\lambda(e_i)}{\sqrt{2\lambda(e_j)\lambda(e_k)}}$$

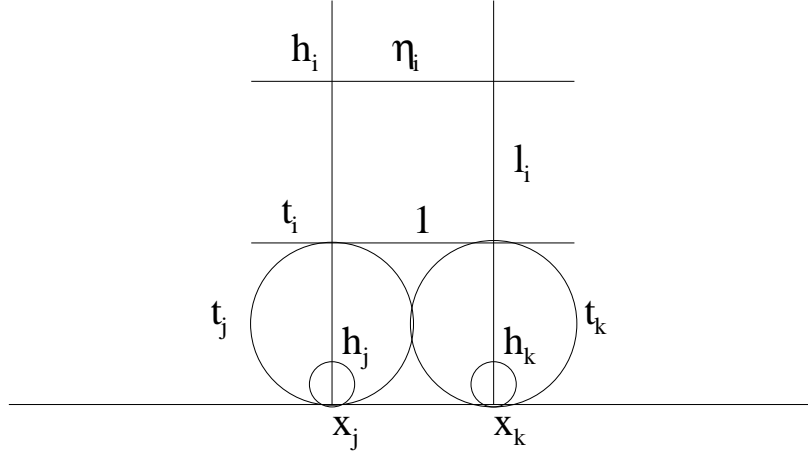
lorsque  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ , alors  $2h(E_i)$  est la longueur de l'arc d'horocycle intercepté entre les géodésiques  $e_j$  et  $e_k$ .



**Figure 3.8**

DÉMONSTRATION DU LEMME 3.12. Soient  $r_1, r_2, r_3$  trois rayons distincts de  $L$ . D'après le lemme 3.7 (ou plutôt une extension triviale de celui-ci) il existe de façon unique des

$u_i \in r_i$  tels que  $u_i \cdot u_j = -2$  pour  $i \neq j$ . Cela signifie que, étant donnés trois points  $x_1, x_2, x_3 \in \partial\mathbb{D}$ , il existe de manière unique trois horocycles  $t_1, t_2, t_3$  autour des  $x_i$  qui sont tangents deux à deux. La longueur d'arc d'horocycle interceptée entre les géodésiques est alors égale à 1. Ceci se vérifie facilement dans le modèle du demi-plan, comme dans la figure 3.9 ci-dessous, où l'on a envoyé le point  $x_i$  à l'infini et les  $t_i$  correspondent au cas de tangence décrit ci-dessus.



**Figure 3.9**

On considère maintenant l'horocycle  $h_i$  autour de  $x_i$ , on note  $\eta_i$  la longueur d'arc d'horocycle  $h_i$  interceptée et  $l_i$  la distance (hyperbolique) entre  $h_i$  et  $t_i$ . On voit alors que  $\delta_i = l_j + l_k$  est la longueur de la portion de la géodésique joignant  $x_j$  à  $x_k$  interceptée entre les horocycles. Un calcul très simple montre alors l'égalité importante  $\eta_i = e^{-l_i}$ .

On en déduit  $\eta_i \eta_j = \exp(-l_i - l_j) = \exp(-\delta_k)$ . Or  $\lambda_i^2 = 2 \exp \delta_i$ , d'après la définition des  $\lambda$ -longueurs et le lemme 3.3 (assertion ii)). D'où l'on tire:

$$\left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{2}\lambda_j\lambda_k}\right)^2 = \frac{2 \exp(\delta_i)}{8 \exp(\delta_j) \exp(\delta_k)} = \frac{\eta_i \eta_k \eta_i \eta_j}{4 \eta_j \eta_k} = \left(\frac{\eta_i}{2}\right)^2.$$

Donc si l'on définit  $h(E_i)$  comme dans l'énoncé du lemme (et sur la figure 3.8), on voit que  $2h(E_i) = \eta_i$  est bien la longueur d'arc horocyclique interceptée.

Munis de cette caractérisation géométrique des  $h$ -longueurs, nous revenons maintenant à la démonstration de la proposition 3.11 – et du même coup de la proposition 3.10. Rappelons que l'on est parti d'un ensemble de points  $\mathcal{B}$  sur le cône de lumière  $L$ , défini comme l'union des orbites des points correspondant à la décoration, dont on a pris l'enveloppe convexe  $C$ . Pour démontrer la proposition 3.11, il faut justifier le fait que les arêtes de  $\Delta$  qui sont saillantes pour  $\mathcal{B}$  sont celles qui vérifient la condition de face (exprimée en termes de  $h$ -longueurs). Pour cela, nous allons démontrer qu'une condition de saillance locale équivaut à la condition de face en termes de  $h$ -longueurs; nous renvoyons à [P] pour la démonstration (facile) du fait que si toutes les arêtes d'une triangulation vérifient les

conditions de saillance locale, alors elles sont effectivement saillantes globalement, donc déterminent l’enveloppe convexe et l’appartenance de la surface décorée à  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Delta)$ . Commençons par énoncer le

**Lemme 3.13.** *Soit  $u_1, u_2, u_3, u_4$  des points du cône de lumière  $L$  dont les projetés sur  $S^1 = \partial\mathbb{D}$  respectent cet ordre cyclique. Appelons respectivement  $h_1, h_2, h_3, h_4$  les demi-longueurs d’arcs d’horocycle interceptés. Alors le point  $u_4$  se trouve au-dessous du plan défini par les points  $u_1, u_2, u_3$  si et seulement si les  $h_i$  vérifient l’inégalité  $h_1 + h_3 < h_2 + h_4$  (avec une interprétation évidente pour l’inégalité large correspondante).*

Il est facile de voir que la proposition 3.11 est essentiellement un corollaire du lemme 3.13. En effet, la condition “ $u_4$  se trouve au-dessous du plan défini par  $u_1, u_2, u_3$ ” équivaut à dire que le segment euclidien  $[u_2 u_4]$  est au-dessous du segment  $[u_1 u_3]$ . Convenons de dire que l’arête  $e$  de  $\Delta$  vérifie la *condition de saillance locale* si  $e$  est au-dessous de l’arête  $e'$  qui est l’autre diagonale du quadrilatère défini par  $e$ . Comme  $\mathcal{B}$  contient une infinité de points de hauteurs arbitrairement grandes et dont les projetés sont denses dans  $\partial\mathbb{D}$  (cf. [P] pour cette dernière propriété), on voit que si  $e$  est saillante, alors  $e$  vérifie la condition de saillance locale. Comme noté plus haut la réciproque est vraie également (et facile). Le lemme 3.13 achève alors la démonstration des propositions 3.10 et 3.11.

**DÉMONSTRATION DU LEMME 3.13.** Nous allons d’abord chercher une condition de coplanarité des points  $u_i$ . Soit  $r_i$  le rayon de  $L$  contenant  $u_i$ . Quitte à appliquer d’abord une isométrie on peut supposer que les  $\bar{u}_i$  définissent un rectangle euclidien dans  $\mathbb{D}$ . On considère alors des points  $u'_i \in r_i$  coplanaires et qui définissent un plan horizontal. En notant  $h'_i$  la portion interceptée de l’horocycle défini par  $u'_i$ , on a par raison de symétrie les égalités  $h'_1 = h'_2 = h'_3 = h'_4$ . Posons  $u'_i = k_i u_i$ . En revenant aux définitions on voit que

$$h_i^2 = \frac{-(u_{i+1} \cdot u_{i-1})}{2(u_i \cdot u_{i+1})(u_i \cdot u_{i-1})},$$

et donc  $h_i = k_i h'_i$ . Or  $u'_1 + u'_3 = u'_2 + u'_4$ , d’où  $k_1 u_1 + k_3 u_3 = k_2 u_2 + k_4 u_4$ , et c’est là la seule relation de liaison à multiplication près entre ces vecteurs. Or les points  $u_i$  sont coplanaires si et seulement si il existe une relation de liaison du type  $\sum_i \mu_i u_i = 0$  avec  $\sum_i \mu_i = 0$ . Donc les  $u_i$  sont coplanaires si et seulement si  $k_1 + k_3 = k_2 + k_4$ , ce qui équivaut à  $h_1 + h_3 = h_2 + h_4$ , qui donne la condition de coplanarité recherchée. Le lemme suit immédiatement puisque,  $u_1, u_2, u_3$  étant fixés, quand  $u_4$  “monte” en restant sur le même rayon,  $h_1, h_2$  et  $h_3$  restent fixes tandis que  $h_4$  diminue.

### I.3.5. Le squelette d’une surface décorée

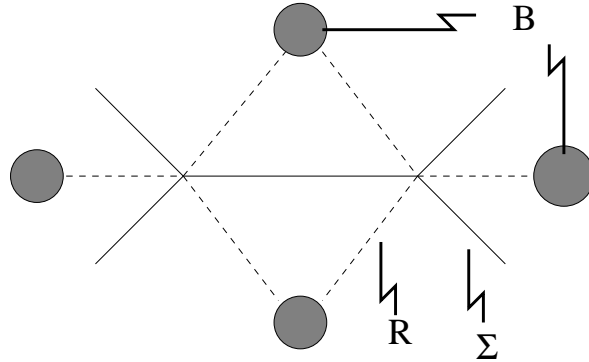
Notre objectif est d’esquisser la démonstration du théorème 3.9, ce qui revient essentiellement à comprendre pourquoi  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Delta)$  est une cellule, pour toute triangulation idéale  $\Delta$

de  $(S, P)$ . La démonstration originale de Penner dans ce contexte est compliquée et peu éclairante. Nous préférons introduire maintenant la construction de [BE], qui conduit à une démonstration plus naturelle et suggestive, moyennant l'identification des objets introduits, qui semble intéressante par elle-même et non écrite dans la littérature. Notons que la construction de [BE] est purement plane et n'utilise donc pas l'espace de Minkowski, la géométrie de l'hyperboloïde etc. Cette géométrie permet par contre d'interpréter la définition des cellules en termes de la construction de l'enveloppe convexe, comme ci-dessus. De plus cette dernière construction n'est pas a priori restreinte à la dimension 1 (surfaces de Riemann) et peut dans une certaine mesure se généraliser à l'étude d'autres variétés hyperboliques.

À chaque surface décorée, on va associer un squelette (“spine”); l'ensemble des surfaces décorées ayant un squelette fixé est une cellule – c'est là le résultat principal de [BE], dont la preuve est esquissée au I.3.7. Nous vérifierons auparavant (I.3.6) que ces ensembles coïncident avec les ensembles  $\mathring{C}(\Delta)$  définis ci-dessus en suivant [P].

Soit  $P\tilde{\mathcal{T}}_{g,n} = \{\tilde{\Gamma}_m \in \tilde{\mathcal{T}}_{g,n} \mid \sum_i l(h_i) < 1\}$ , les  $h_i$  étant les horocycles de  $\tilde{\Gamma}_m$  et  $l(h_i)$  désignant la longueur hyperbolique de l'horocycle  $h_i$ . A  $\tilde{\Gamma}_m \in P\tilde{\mathcal{T}}_{g,n}$  correspond une surface décorée  $\tilde{X}$ , et on définit  $B$  comme l'union des horoboules de  $X$  (régions autour des points marqués limitées par les horocycles) définies par la décoration considérée.

On définit ensuite une application  $w : X - B \rightarrow \mathbb{N}$  qui associe à chaque point de  $X - B$  le nombre de géodésiques les plus courtes allant de ce point à  $B$ ; génériquement  $w$  vaut simplement 1. Le *squelette* de  $\tilde{X}$  est par définition l'ensemble critique de  $w$ , autrement dit  $\Sigma_{\tilde{X}} = \{u \in X - B \mid w(u) > 1\}$ . On note  $E(\Sigma) = E(\Sigma_{\tilde{X}})$  l'ensemble des arêtes de  $\Sigma_{\tilde{X}}$ . L'ensemble des sommets de  $\Sigma_{\tilde{X}}$ , noté  $V$  est donné par  $V = \{u \in X - B \mid w(u) > 2\}$ . Enfin l'ensemble  $R$  des *côtes* de  $X$  est l'ensemble des géodésiques qui vont des sommets de  $\Sigma_{\tilde{X}}$  aux horoboules les plus proches (cf. figure 3.10).

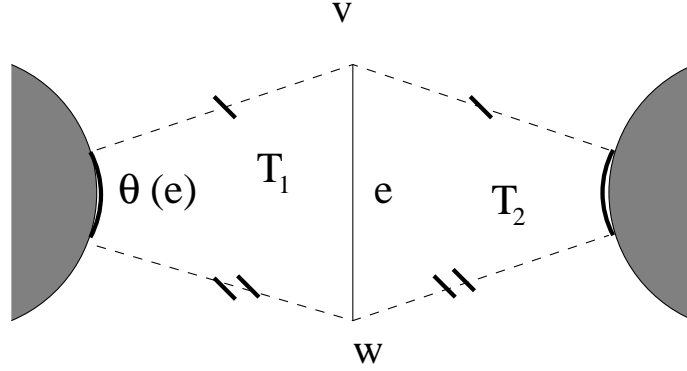


**Figure 3.10**

L'ensemble des points équidistants à deux horocycles donnés est une géodésique, comme on le vérifie facilement en passant au revêtement universel. Les arêtes de  $\Sigma_{\tilde{X}}$  sont donc des arcs géodésiques, et de plus on a le

**Lemme 3.14.** *Soit  $e$  une arête de  $\Sigma_{\tilde{X}}$ . La région limitée par les quatre côtes adjacentes à  $e$  et les portions d'horocycles correspondantes est symétrique par réflexion par rapport à  $e$ .*

La situation est résumée sur la figure suivante:



**Figure 3.11**

DÉMONSTRATION. On se place sur le revêtement universel  $\mathbb{D}$ . On appelle  $\tilde{e}$  un relevé de  $e$ ,  $\tilde{v}$  et  $\tilde{w}$  les deux extrémités de  $\tilde{e}$ . Les côtes issues de  $\tilde{v}$  et  $\tilde{w}$  sont asymptotes, et définissent deux triangles  $\tilde{T}_1$  et  $\tilde{T}_2$  de  $\mathbb{D}$  ayant chacun un sommet à l'infini (sur  $\partial\mathbb{D}$ ). Les deux triangles sont symétriques l'un de l'autre, car ils ont une arête en commun et le troisième sommet à l'infini, et de plus la symétrie fait se correspondre les deux arcs d'horocycles, ce qui termine la démonstration.

En particulier, étant donnée une arête  $e$ , les arcs d'horocycles interceptés par les côtes adjacentes à  $e$  ont la même longueur, que l'on note  $\theta_{\tilde{X}}(e)$ , ou simplement  $\theta(e)$ . On définit ainsi une application:

$$\theta_{\tilde{X}} : E(\Sigma_{\tilde{X}}) \longrightarrow [0, 1].$$

On remarque que  $\sum_{e \in E(\Sigma)} 2\theta(e) = \sum_i l(h_i) < 1$ . L'égalité vient du fait que la longueur de l'horocycle autour du point  $x_i$  est  $\sum \theta(e)$ , la somme étant prise sur toutes les arêtes  $e$  telles que  $x_i$  est l'un des points les plus proches de  $e$ , chaque arête  $e$  intervenant deux fois lorsque l'on somme sur les points  $x_i$ .

Considérons  $\Sigma^*$  le graphe dual de  $\Sigma_{\tilde{X}}$ , c'est-à-dire un graphe formé d'arêtes joignant les points  $x_i$  entre eux, ayant exactement une arête transverse à chaque arête de  $\Sigma_{\tilde{X}}$ . Les composantes connexes de  $\tilde{X} - \Sigma^*$  sont des cellules (cf. [BE]), et la classe d'isotopie de  $\Sigma^*$  définit donc une décomposition cellulaire idéale de la surface de référence  $(S, P)$ , que l'on notera  $\Delta_{BE}(\tilde{\Gamma}_m)$ . On peut alors définir en utilisant ces données une partition de  $P\tilde{\mathcal{T}}_{g,n}$ , en posant:

$$\mathcal{D}(\Delta) = \{\tilde{\Gamma}_m \in P\tilde{\mathcal{T}}_{g,n} \mid \Delta_{BE}(\tilde{\Gamma}_m) = \Delta\},$$

pour toute décomposition cellulaire idéale  $\Delta$  de la surface  $(S, P)$ .

Inversement, fixons une décomposition cellulaire idéale  $\Delta$  et notons  $\Sigma$  le graphe dual, défini sur  $S$  à isotopie près. On a alors une application:

$$\Theta : \mathcal{D}(\Delta) \longrightarrow [0, 1]^{\#E(\Sigma)},$$

définie en envoyant  $\tilde{\Gamma}_m$  sur  $(\theta_{\tilde{X}}(e))_{e \in E(\Sigma)}$ .

Cette application est une injection, dont l'image est l'ensemble des collections de réels positifs de somme plus petite que  $\frac{1}{2}$  d'après le

**Théorème 3.15.** *Considérons une décomposition cellulaire idéale  $\Delta$  de la surface de référence  $(S, P)$ , notons  $E = \{e\}$  l'ensemble de ses arêtes et soit  $(\delta(e))_{e \in E}$  une collection de réels positifs vérifiant  $\sum_e \delta(e) \leq \frac{1}{2}$ .*

*Alors il existe une unique surface hyperbolique marquée  $X_m$  telle que, si on la décore avec des horocycles de longueur  $\sum_{x_i \prec e} \delta(e)$  autour du point  $x_i$  (où le symbole  $x_i \prec e$  signifie que le point  $x_i$  est une extrémité de l'arête  $e$ ) on a  $\Sigma_{\tilde{X}} = \Delta^*$  ( $\Delta^*$  étant le graphe dual de  $\Delta$ ), et pour toute arête  $e^*$  de  $\Delta^*$ ,  $\theta_{\tilde{X}}(e^*) = \delta(e)$  ( $e$  et  $e^*$  étant duales l'une de l'autre).*

Nous donnons au I.3.7 une esquisse de démonstration de ce théorème, qui constitue le résultat principal de [BE]. Comme l'ensemble des collections de réels positifs de somme plus petite que  $\frac{1}{2}$  est une cellule (c'est même le simplexe standard) et que  $\Theta$  réalise une bijection entre cet ensemble et  $\mathcal{D}(\Delta)$ , on en déduit, en admettant la bicontinuité de  $\Theta$ , le

**Corollaire 3.16.** *Si  $\Delta$  est une décomposition cellulaire idéale,  $\mathcal{D}(\Delta)$  est une cellule.*

Au paragraphe suivant, nous étudions le rapport entre  $\mathcal{D}(\Delta)$  et  $\mathring{\mathcal{C}}(\Delta)$ , de sorte à faire le lien entre les théorèmes 3.9 et 3.15.

### I.3.6. Identification des constructions

Nous avons défini une partition de  $P\tilde{\mathcal{T}}_{g,n}$ , dont le théorème 3.15 affirme qu'il s'agit d'une cellulation. Nous allons maintenant vérifier que les  $\mathcal{D}(\Delta)$  coïncident avec les intersections  $\mathring{\mathcal{C}}(\Delta) \cap P\tilde{\mathcal{T}}_{g,n}$ , ce qui montrera (moyennant le théorème 3.15) que ces ensembles sont également des cellules. L'ingrédient essentiel est la

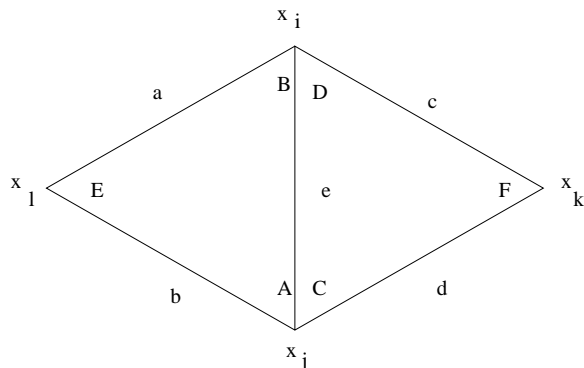
**Proposition 3.17.** *Soit  $\Delta$  une décomposition cellulaire idéale de  $(S, P)$  et  $\tilde{\Gamma}_m \in \mathcal{D}(\Delta)$ . Alors  $\tilde{\Gamma}_m \in \mathring{\mathcal{C}}(\Delta)$ .*

DÉMONSTRATION. Notons  $\tilde{X}_m$  la surface décorée correspondant à  $\tilde{\Gamma}_m$ . On oriente tous les horocycles de façon compatible, c'est-à-dire dans le même sens (à l'aide de l'orientation de la surface). On note  $\Delta_g$  la réalisation de  $\Delta$  par des géodésiques de  $X_m$ .

Supposons d'abord que  $\Delta$  est une triangulation idéale. Nous allons utiliser la caractérisation de la proposition 3.11, en démontrant que pour toute arête  $e$  de  $\Delta_g$ , la condition de faces en  $h$ -longueurs est vérifiée pour  $e$ . Si  $e$  joint  $x_i$  à  $x_j$  et si  $\tilde{\Gamma}_m \in \mathcal{D}(\Delta)$ ,

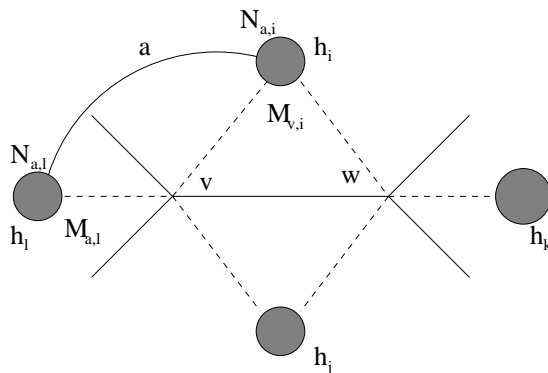
cela signifie qu'une arête  $e^*$  de  $\Sigma_{\tilde{X}}$ , ainsi que les quatre côtes adjacentes, délimitent deux triangles  $T_1$  et  $T_2$  limités par les horocycles  $h_i$  et  $h_j$  (cf. figure 3.11) et que  $e$  est dans la classe d'isotopie des courbes joignant  $x_i$  à  $x_j$  en restant dans  $T_1 \cup T_2$  (c'est même le représentant géodésique de cette classe). Notons d'ailleurs qu'il y a par définition dans la classe d'isotopie de  $e$  es courbes joignant  $x_i$  à  $x_j$  en restant dans  $T_1 \cup T_2$  mais que le représentant géodésique de cette classe, à savoir  $e$  lui-même, peut très bien sortir de  $T_1 \cup T_2$ .

On considère les deux triangles de  $\Delta_g$  limités par  $e$ , et on adopte les notations de la figure 3.12 (semblable à la figure 3.7); les lettres capitales désignent désormais les longueurs d'arcs horocycliques interceptés – ce sont les valeurs absolues des longueurs algébriques de ces arcs.



**Figure 3.12**

On considère également le squelette et les côtes de  $\tilde{X}_m$ , comme sur la figure 3.13.



**Figure 3.13**

Autrement dit:

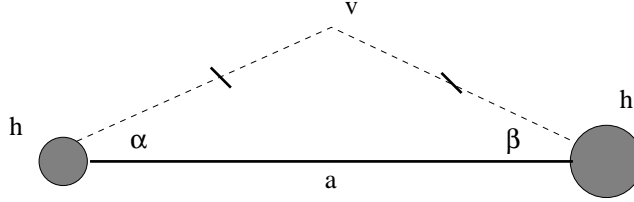
- $M_{v,l}$  désigne le point d'intersection de l'horocycle  $h_l$  et de la côte allant de  $v$  à  $h_l$  et on définit de manière analogue  $M_{v,i}, M_{v,j}, M_{w,i}, M_{w,j}, M_{w,k}$ .
- $N_{a,i}$  désigne le point d'intersection de l'horocycle  $h_i$  avec la géodésique  $a$  et on définit de manière analogue  $N_{a,l}, N_{b,j}, N_{b,l}, N_{c,i}, N_{c,k}, N_{d,j}, N_{d,k}$ .

On note  $l(\overline{NM})$  la longueur algébrique d'arc horocyclique intercepté entre le point  $N$  et le point  $M$  (dans cet ordre), les horocycles étant orientés dans le sens positif. Nous

aurons besoin du lemme simple suivant:

**Lemme 3.18.** *On considère un polygone hyperbolique limité par: une géodésique  $a$  joignant deux points à l'infini  $x_i$  et  $x_j$ , deux arcs d'horocycles  $h_i$  et  $h_j$  et deux arcs de géodésiques joignant un point  $v$  respectivement à  $x_i$  et  $x_j$  (cf figure 3.14). On suppose que  $v$  est équidistant de  $h_i$  et  $h_j$ . Alors les arcs d'horocycles interceptés ont mêmes longueurs (c'est-à-dire que  $\alpha = \beta$  sur la figure 3.14).*

DÉMONSTRATION DU LEMME 3.18. Si on appelle  $w$  le milieu de l'arc  $a$  intercepté entre  $h_i$  et  $h_j$ , alors les deux triangles situés de part et d'autre du segment géodésique  $[v, w]$  sont symétriques, comme au lemme 3.14, ce qui montre la propriété voulue.



**Figure 3.14**

On applique maintenant ce lemme au triangle  $(x_i, x_l, v)$  (cf. figure 3.13), dont deux points sont à l'infini, ce qui fournit l'égalité:

$$l(\overline{N_{a,i}M_{v,i}}) = -l(\overline{N_{a,l}M_{v,l}}).$$

On prouve de la même manière les égalités suivantes:

$$l(\overline{N_{b,j}M_{v,j}}) = -l(\overline{N_{b,l}M_{v,l}}), \quad l(\overline{N_{c,i}M_{w,i}}) = -l(\overline{N_{c,k}M_{w,k}}), \quad l(\overline{N_{d,j}M_{w,j}}) = -l(\overline{N_{d,k}M_{w,k}}).$$

Or la définition des longueurs d'arcs horocycliques interceptés donne:

$$A + C = -l(\overline{N_{b,j}N_{d,j}}), \quad B + D = l(\overline{N_{a,i}N_{c,i}}),$$

$$E = l(\overline{N_{b,l}N_{a,l}}), \quad F = l(\overline{N_{c,k}N_{d,k}}).$$

On en déduit finalement:

$$A + B + C + D - E - F = -\overline{M_{v,j}N_{w,j}} + \overline{M_{v,i}N_{w,i}} = 2\theta_{\tilde{X}}(e^*) > 0,$$

ce qui, d'après la proposition 3.11, montre que la condition de face pour  $e$  est vérifiée. Ceci étant vrai pour toute arête  $e$ , on a bien démontré la proposition 3.17 dans le cas où  $\Delta$  est une triangulation idéale.

La démonstration s'adapte au cas où  $\Delta$  est une décomposition cellulaire idéale quelconque: si  $\tilde{X}_m - \Delta_g$  comporte un  $k$ -gone décoré ( $k > 3$ ), cela signifie qu'il y a un point



de  $X$  équidistant des  $k$  horocycles qui sont aux sommets de ce  $k$ -gone. Une construction analogue à celle que nous venons de faire montre que chaque diagonale du  $k$ -gone vérifie l'égalité de face. La caractérisation de la proposition 3.11 permet de nouveau de conclure.

Nous avons donc montré que  $\mathcal{D}(\Delta) \subset \overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Delta) \cap P\tilde{\mathcal{T}}_{g,n}$ , ce qui nous donne deux partitions de  $P\tilde{\mathcal{T}}_{g,n}$ , l'une étant définie par  $\mathcal{D}$  et l'autre par la trace de  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$ , qui sont toutes deux indexées par le même ensemble des décompositions cellulaires idéales de la surfaces de référence  $(S, P)$ . Enfin, on vient de voir que chaque partie de la première est incluse dans la partie de l'autre de même indice. Il s'en suit qu'en fait  $\mathcal{D}(\Delta)$  et  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Delta) \cap P\tilde{\mathcal{T}}_{g,n}$  coïncident, et que donc  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Delta) \cap P\tilde{\mathcal{T}}_{g,n}$  est une cellule, si on admet le théorème 3.15 (et donc son corollaire immédiat 3.16). Or  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Delta)$  est homéomorphe au produit de  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Delta) \cap P\tilde{\mathcal{T}}_{g,n}$  par un intervalle, car les conditions de face sont invariantes par multiplication de toute la décoration par une constante. Donc  $\overset{\circ}{\mathcal{C}}(\Delta)$  est aussi une cellule, ce qui achève de ramener la première assertion du théorème 3.9 à l'assertion correspondante du théorème 3.15. L'équivariance des deux constructions par rapport à l'action du groupe de Teichmüller (cf. la deuxième assertion du théorème 3.9) est évidente par construction et nous ne nous étendrons pas là-dessus.

### I.3.7. Esquisse de la preuve des théorèmes principaux

Nous donnons ici une esquisse de la démonstration du théorème 3.15, dont on a vu au paragraphe précédent qu'il était essentiellement équivalent au théorème 3.9. Nous nous restreindrons au cas générique où la décomposition cellulaire idéale envisagée  $\Delta$  de la surface de référence  $(S, P)$  est une triangulation. L'adaptation au cas général ne pose pas de problème vraiment nouveau (cf. [BE]). Étant donné ce qui a déjà été fait, la démonstration est naturelle et constructive: elle est purement plane (i.e. n'utilise pas l'espace de Minkowski) et il s'agit, à partir des données de l'énoncé du thórème 3.15, de reconstruire effectivement une surface de Riemann, avec des pièces triangulaires élémentaires dont l'existence est garantie par le lemme très simple 3.19 ci-dessous. En cela elle se rapproche de la démonstration du théorème 3.6, dans laquelle il s'agissait de reconstruire une triangulation métrique du disque hyperbolique.

On considère donc une triangulation idéale  $\Delta$  de  $(S, P)$  dont l'ensemble des arêtes est noté  $E(\Delta)$  ( $\text{card}(E(\Delta)) = 6g - 6 + 3n$ ), et une collection de nombres positifs  $\{\delta(e)\}_{e \in E(\Delta)}$  associés à chaque arête. Notons ici  $P = \{x_1 \dots x_n\}$  l'ensemble des points marqués de  $S$  (plutôt que  $(p_i)$ ; on anticipe sur la structure conforme à construire).

Soit  $\Delta^*$  le graphe de dual de  $\Delta$  (ou plutôt une réalisation topologique de ce graphe), destiné à devenir le squelette  $\Sigma$ ;  $\Delta^*$  a un sommet  $\xi_j$  dans chaque face de  $S - \Delta$ , et une arête de  $\Delta^*$  traverse chaque arête de  $\Delta$ , en joignant les deux sommets  $\xi_j$  des deux faces correspondantes. Il y a donc un point marqué  $x_i$  dans chaque composante connexe du complémentaire de  $\Delta^*$ . La situation locale est résumée sur la figure 3.15.

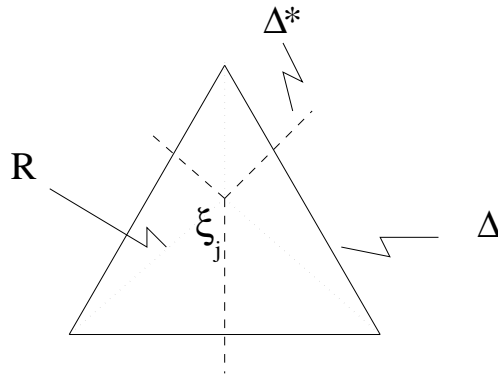


Figure 3.15

Soit  $R$  le graphe, destiné à fournir les côtes de  $\Sigma$ , formé d'arêtes joignant chaque  $\xi_j$  aux sommets du triangle de  $S - \Delta$  auquel appartient  $\xi_j$  (il y a trois telles arêtes par point  $\xi_j$ ); soit enfin  $G = \Delta^* \cup R$ . Il s'agit d'abord de construire une structure hyperbolique décorée sur  $(S, P)$ , de telle sorte que les arêtes de  $G$  deviennent des géodésiques et que pour toute arête  $e^*$  de  $\Delta^*$  l'intersection de la décoration avec les deux triangles du complémentaire de  $G$  bordés par  $e^*$  définisse les longueurs  $\delta(e)$ ,  $r(\xi_1)$  et  $r(\xi_2)$  comme indiqué sur la figure 3.16. Ici les  $\delta(e)$  sont bien sûr ceux qui sont prescrits dans l'énoncé du théorème, tandis que les  $r(\xi_j)$  sont a priori libres; en fait il va s'avérer (proposition 3.20 ci-dessous) qu'il existe un et un seul choix possible pour les paramètres  $(\xi_j)$ , et c'est là le point-clef. On aura alors montré qu'il y a une et une seule surface décorée qui convient, et la fin (facile) de la démonstration consiste à vérifier que la surface ainsi construite est bien dans  $\mathcal{D}(\Delta)$ , c'est-à-dire que son squelette est donné par  $\Delta^*$  (et alors ses côtes seront les arêtes de  $R$ ). Nous laisserons ici de côté cette vérification.

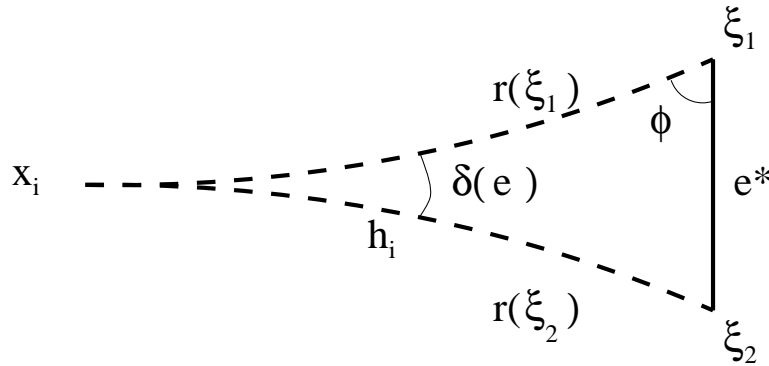


Figure 3.16

La pièce de construction élémentaire est fournie par le lemme facile suivant:

**Lemme 3.19.** *On considère un polygone hyperbolique comme sur la figure 3.16, délimité par: une portion de géodésique  $e^*$  d'extrémités  $\xi_1$  et  $\xi_2$ , un arc d'horocycle  $h_i$  autour de  $x_i$ , et les deux géodésiques joignant  $\xi_1$  et  $\xi_2$  à  $x_i$ . Alors il existe une et une seule structure hyperbolique (à isomorphisme près) réalisant des longueurs données  $\delta(e), r(\xi_1), r(\xi_2)$ . En*

*particulier, l'angle  $\phi$  est déterminé par la donnée de ces longueurs.*

La preuve de ce lemme revient à remarquer qu'il devient évident dans le modèle du demi-plan, en plaçant le point  $x_i$  à l'infini.

On note de plus que  $\phi$  est une fonction strictement décroissante de  $r(\xi_1)$ , les paramètres  $\delta(e)$  et  $r(\xi_2)$  étant fixés, et une fonction strictement croissante de  $r(\xi_2)$ , à  $\delta(e)$  et  $r(\xi_1)$  fixés (on peut d'ailleurs obtenir une formule explicite pour  $tg(\phi)$  en fonction de  $\delta(e)$ ,  $r(\xi_1)$  et  $r(\xi_2)$ ).

Le problème se pose finalement ainsi: on se donne une triangulation  $\Delta$  et une collection de réels positifs  $\{\delta(e)\}_{e \in E(\Delta)}$ . A partir de  $\Delta$  on construit le graphe  $G$  comme réunion de  $\Delta^*$ , le dual de  $\Delta$ , et du graphe  $R$  formé d'arêtes joignant les sommets de  $\Delta^*$  aux points marqués  $P$  de  $S$ . Pour chaque sommet  $\xi_j$  de  $\Delta^*$  on se donne un réel  $r(\xi_j)$ , et on munit chaque triangle de  $S - G$  de la structure hyperbolique décorée (unique) qui impose les longueurs indiquées sur la figure 3.16. On recolle ensuite ces triangles, et on obtient une structure hyperbolique décorée sur  $(S, P)$  toute entière, sauf peut-être aux points  $\xi_j$  où il peut y avoir une singularité. La présence (ou l'absence) de cette singularité est mesurée par la fonction  $\Phi(\xi_j)$  définie comme la *somme des mesures des angles au point  $\xi_j$* . La structure hyperbolique (ou conforme) est régulière, c'est-à-dire s'étend à une structure hyperbolique sur  $(S, P)$  toute entière (les points de  $P$  étant "à l'infini" pour cette structure), si et seulement si  $\Phi(\xi_j) = 2\pi$  pour tout indice  $j$ . On est donc ramené à montrer la propriété suivante:

**Proposition 3.20.** *A chaque collection de valeurs  $\{r(\xi_j)\}$  (indexée par les sommets de  $\Delta^*$ , dual de  $\Delta$ , autrement dit par les faces de  $\Delta$ ; cet ensemble est de cardinal  $4g - 4 + 2n$ ), on peut associer une structure hyperbolique unique sur  $(S - \bigcup_j \xi_j, P)$  ainsi que des mesures d'angles aux sommets  $\{\Phi(\xi_j)\}$ .*

*De plus il existe un et un seul choix de réels positifs  $\{r(\xi_j)\}$  tel que pour tout  $j$  on ait  $\Phi(\xi_j) = 2\pi$ .*

Seule la dernière assertion reste à démontrer. Pour ce faire, on utilise (cf. [BE]) le fait que si on fixe les valeurs  $\{r(\xi_j)\}$  pour tous les points  $\xi_j$  sauf l'un d'eux  $\xi_{j_0}$ , l'angle  $\Phi(\xi_{j_0})$  est une fonction décroissante de  $r(\xi_{j_0})$ , dérivable avec une dérivée strictement négative. Cette propriété découle immédiatement de la situation locale, plus précisément de la remarque qui suit la démonstration du lemme 3.19 ci-dessus.

Partant de cette observation, on montre successivement que l'application  $f : \{r(\xi)\} \rightarrow \{\Phi(\xi)\}$  ( $\xi = \{\xi_j\}_j$ ) vérifie :

- $f$  est une application de  $\mathbb{R}^{4g-4+2n}$  à valeurs dans un *convexe* ouvert  $Q$  de  $(\mathbb{R}_+^*)^{4g-4+2n}$ , le convexe  $Q$  étant obtenu comme intersection de demi-espaces affines;
- $f$  est une immersion de rang maximum (ce qui se voit en utilisant l'observation men-

tionnée ci-dessus);

- $f$  est propre et surjective sur  $Q$  (ce qui se voit facilement en montrant directement que si  $\{r\}$  tend vers l'infini alors  $\{\Phi\}$  tend vers le bord de  $Q$ );
- La valeur constante  $(2\pi, \dots, 2\pi)$  est dans  $Q$  (ce qui est presque immédiat).

Nous renvoyons bien sûr le lecteur à [BE] pour la démonstration détaillée. On a vu que la preuve de cette proposition achève aussi la démonstration du théorème 3.15 (au moins pour les triangulations), et également celle du théorème 3.9, vue l'équivalence des deux énoncés, étudiée au paragraphe précédent.

## Références

- [A] W.Abikoff, *The real analytic theory of Teichmüller space*, LN **820**, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [AC] E.Arbarello, M.Cornalba, P.A.Griffiths and J.Harris, *Geometry of algebraic curves*, vol. II, à paraître chez Springer-Verlag.
- [B] A.F.Beardon, *The geometry of discrete groups*, GTM, Springer-Verlag, 1983.
- [Be] L.Bers, Finite dimensional Teichmüller spaces and generalizations, *Bull. AMS* **5** (1981), 131-172.
- [Bi] J.S.Birman, *Braids, Links, and Mapping Class Groups*, Annals of Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1974.
- [BE] B.Bowditch, D.Epstein, Natural triangulations associated to a surface, *Topology* **27** (1988), 91-117.
- [Bo] J.B.Bost, Introduction to compact Riemann surfaces etc., in *From number theory to physics*, M.Waldschmidt et al. eds, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [De] P.Deligne, Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points, in *Galois Groups over  $\mathbb{Q}$* , MSRI Publ. **16**, Springer-Verlag (1989), 79-297.
- [DH] A.Douady and J.H.Hubbard, A proof of Thurston's topological characterization of rational functions, *Acta Mathematica* **171** (1993), 263-297.
- [DM] P.Deligne and D.Mumford, The irreducibility of the space of curves of given genus, *Publ. Math. IHES* **36** (1969), 75-109.
- [D] V.G. Drinfel'd, On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ , *Leningrad Math. J.* **2** (1991), 829-860.
- [DFG] R.Dijkgraaf, C.Faber and G. van der Geer eds, *The moduli space of curves*, Progress in Math. **129**, Birkhäuser, 1995.
- [FLP] A.Fathi, F.Laudenbach et V.Poenaru, *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Astérisque **66-67** (1979).
- [GHP] L. Gerritzen, F. Herrlich, M. van der Put, Stable  $n$ -pointed trees of projective lines, *Indag. Math.* **50** (1988), 131-163.
- [H] W.J.Harvey ed., *Discrete groups and automorphic forms*, Academic Press, 1977.
- [IN] Y.Ihara and H.Nakamura, On deformation of maximally degenerate table marked curves and Oda's problem, *J. reine angew. Math.* **487** (1997), 125-151.
- [IT] Y.Imayoshi and M.Taniguchi, *An introduction to Teichmüller spaces*, Springer Verlag, Berlin, 1992.
- [K] S.Keel, Intersection theory of moduli space of stable  $N$ -pointed curves of genus 0, *Trans. of the AMS* **330** (1992), 545-574.
- [Kn] F.F.Knudsen, The projectivity of moduli spaces of stable curves, II: the stacks  $M_{g,n}$ , *Math. Scand.* **52** (1983), 161-199.

- [Ko] M.Kontsevitch, Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function, *Commun. Math. Phys.* **147** (1992), 1-23.
- [L] E.Looijenga, Cellular decompositions of compactified moduli spaces of pointed curves, in [DFG], 369-400.
- [M] D.Mumford, Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves, in *Arithmetic and Geometry* (dedicated to I.R.Shafarevitch), volume II, Progress in Math. **36**, Birkhäuser Verlag, 1983, 271-328.
- [MH] C.MacLachlan and W.J.Harvey, On mapping class groups and Teichmüller spaces, *Proc. London Math. Soc.* **30** (1975), 496-512.
- [N] S. Nag, *The Complex Analytic Theory of Teichmüller spaces*, Wiley-Interscience, 1988.
- [P] R.C.Penner, The decorated Teichmüller space of punctured surfaces, *Commun. Math. Phys.* **113** (1987), 299-339.
- [P1] R.C.Penner, An arithmetic problem in surface geometry, in [DFG].
- [Pi] M.Pikaart, An orbifold partition of  $\overline{M}_g^n$ , in [DFG], 467-482.
- [PJ] M.Pikaart and A.J. de Jong, Moduli of curves with non-abelian level structure, in [DFG], 483-509.
- [S] *Theory of Moduli*, E.Sernesi ed., Springer LN **1337**, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [T] A.J.Tromba, *Teichmüller Theory in Riemannian Geometry*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, 1992.