1992 г. ноябрь — декабрь *т. 47, вып. 6(288)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 517.983.28

КАНОНИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ: ПОДХОД, ОСНОВАННЫЙ НА СОВМЕСТНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ

П. Лошак

В этой статье мы предлагаем новый метод, применимый к некоторым важным задачам канонической теории возмущений, который, в динамических терминах, сосредоточивается больше на замкнутых орбитах и их распределении, а не на резонансных соотношениях и соответствующих поверхностях. В частности, мы получаем подробные результаты об устойчивости в гамильтоновых системах, близких к интегрируемым на временах, экспоненциально больших по сравнению с величиной, обратной возмущению. Наше доказательство, хотя и применимо лишь к квазивыпуклым невозмущенным системам, очень сильно отличается от существующих доказательств и приводит к значительным улучшениям первоначальных результатов Н.Н. Нехорошева. Фактически некоторые наши оценки, возможно близки к оптимальным, во всяком случае когда речь идет о более существенных параметрах. Получены также локальные оценки, которые проясняют смысл устойчивости. В конце работы обсуждаются некоторые приложения метода и перспективы дальнейших исследований.

СОДЕРЖАНИЕ

I. Введение 61
II. Устойчивость в окрестности периодического тора 63
III. Устойчивость при произвольных начальных условиях 81
IV. Дополнения, приложения, перспективы 95
§ 1 . Дополнительные переменные и приложения к небесной механике 95
§ 2 . Перенос результатов на другие ситуации и вырожденные случаи 99
§ 3 . Системы с (бесконечно) большим числом степеней свободы 107
§ 4 . Крутизна, квазивыпуклость и замкнутые орбиты 109
V. Стойкие торы, диффузия Арнольда 112
§ 1 . Стойкие торы и “перенормировка” 112
§ 2 . Диффузия Арнольда 120
Приложение 1. Несколько слов о диофантовых приближениях 128

Приложение 2. Асимптотические разложения Жевре 134
Список литературы 138

> D′ailleurs, ce qui nous rend ces solutions périodiques si précieuses, c′est qu′elles sont, pour ainsi dire, la seule brèche par où nous puissions essayer depénétrer dans une place jusqu′ici réputée inabordable.
>
> *Henri Poincaré*, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste (§ 36)

I. Введение

Целью настоящей статьи является изложение нового метода в канонической (т. е. симплектической, или гамильтоновой) теории возмущений. Стандартная модельная ситуация состоит в возмущении интегрируемой гамильтоновой системы, т. е. рассматривается система, определяемая гамильтонианом[1]

$$H(p,q) = h(p) + \varepsilon f(p,q), \quad (p,q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n, \quad \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}. \tag{1}$$

Как обычно, через (p,q) обозначаются переменные действие – угол интегрируемого гамильтониана, а ε – малый параметр.

Нашим основным результатом для системы (1) является существенное улучшение, как количественное, так и качественное, результатов Н.Н.Нехорошева [11]–[13] об устойчивости переменных действия в течение экспоненциально большого промежутка времени в том случае, когда невозмущенный гамильтониан является *квазивыпуклым.* Под последним мы подразумеваем (следуя Н.Н. Нехорошеву) то, что поверхность уровня энергии $h(p) = E$ является строго выпуклой (для некоторого диапазона значений энергии E). Конечно, любая выпуклая функция тем более квазивыпукла.

При указанных предположениях выполнена следующая основная оценка:

$$\|p(t) - p(0)\| \le R(\varepsilon) \text{ при } |t| \le \mathcal{T}(\varepsilon) \text{ и } |\varepsilon| \le \varepsilon_0, \tag{2}$$

где $R(\varepsilon) = O(\varepsilon^b)$, а $\mathcal{T}(\varepsilon)$ имеет порядок $\exp(c/\varepsilon^a)$. Назовем $\mathcal{T}(\varepsilon)$ *временем устойчивости,* $R(\varepsilon)$ – *радиусом удержания,* а $\varepsilon_0 > 0$ – *порогом применимости.* Грубую, но важную характеристику величин $\mathcal{T}(\varepsilon)$ и $R(\varepsilon)$ дают числа (a,b), $0 < a, b \le 1$, которые мы назовем показателями устойчивости.

Неравенство (2) было доказано Н.Н. Нехорошевым [12], [13] в предположении, что функция H *аналитична* (без этого нельзя обойтись), а функция h – *крутая*, что является слабым условием, которому удовлетворяют C^∞-функции общего положения. Здесь мы должны будем использовать более сильное предположение, что h является квазивыпуклой. Подчеркнем, что такое предположение вводится не ради технических упрощений. Используемый ниже метод доказательства просто не применим в случае крутых функций. Интересно заметить в связи с этим, что недавние работы различных авторов также указывают на специфику квазивыпуклых систем (мы вернемся к этому вопросу в IV § 4). Отметим также, что первоначальное доказательство Нехорошева было аккуратно переписано для выпуклого случая (см. [20], [21]).

[1] Нумерация формул в каждом разделе своя, а теорем и лемм – сквозная по всей статье (прим. перев.).

Ниже (см. разделы II и III) мы улучшим известные оценки показателей в квазивыпуклом случае. В частности, мы покажем, что $a > \frac{1}{2n+1} - \eta$ для любого $\eta > 0$. Мы предполагаем, что в общем случае $a \leq \frac{1}{2n}$. Последнее утверждение, по существу, означает, что на больших временах диффузия Арнольда может, и фактически в общем случае будет, происходить, так что устойчивость, действительно, нарушится. Это, по-видимому, весьма сложно доказать, и мы будем довольствоваться эвристическими соображениями, которые подводят к таким выводам (см. V, § 2). Другое поразительное качественное явление, которое мы изучаем, состоит в том, что на конечных, но экспоненциально больших временах резонансы способствуют устойчивости движения. Точнее, мы доказываем строгий локальный вариант оценки (2), из которого вытекает, что время устойчивости возрастает при резонансных условиях.

Эти результаты легко следуют из самого доказательства, которое существенно отличается от обычного и менее громоздко. Чтобы оценить различие, достаточно сказать, что обычные элементы канонической теории возмущений, такие как малые знаменатели, отбрасывание высоких гармоник, резонансные поверхности и даже ряды Фурье, в доказательстве совершенно не участвуют. Это происходит от перемены всей точки зрения на теорию возмущений, и мы посвятим конец этого введения более общему обсуждению, потому что, как видно из названия, мы полагаем, что наш метод может иметь широкий диапазон приложений, некоторые из которых рассмотрены или намечены в разделах IV и V.

Грубо говоря, обычно в основу канонической теории возмущений кладется то, что возмущенная система может быть приведена к интегрируемой с помощью аппарата нормальных форм в области фазового пространства, свободной от резонансов. Так как таких *открытых* областей фазового пространства в общем случае не существует (за исключением линейного или изохронного случая, т. е. возмущений гармонических осцилляторов), неинтегрируемость есть скорее правило, чем исключение (вывод, принадлежащий главным образом Пуанкаре), и цель состоит в том, чтобы понять, какие результаты могут быть получены, несмотря на неизбежное присутствие резонансов. Именно такой природы, например, был знаменитый прорыв 1954 г. в канонической теории возмущений, когда А.Н. Колмогоров доказал существование сохраняющихся торов.

В настоящей работе в некотором смысле все вывернуто наизнанку, так как делается попытка рассматривать резонансы не как препятствие, а как подспорье. Для этой цели мы сначала сосредоточиваем внимание на полностью резонансной ситуации, которая воплощается в замкнутых орбитах (т. е траекториях). Переформулируем это более точно. В “классической” теории возмущений, кульминацией которой являются результаты типа Нехорошева, рассматривались бы объекты (резонансные поверхности, замкнутые орбиты и т. д.), относящиеся к *невозмущенной* системе. Возвращаясь к (1) и обозначая через $\omega(p) = \nabla h(p) \in \mathbb{R}^n$ вектор частот, получим, что замкнутые орбиты невозмущенной системы соответствуют *рациональным векторам* ω, т. е. векторам, которые кратны целочисленным: если вектор $\omega_0 = \omega(p_0)$ рационален, то тор $p = p_0$ заполнен замкнутыми орбитами невозмущенной системы с общим периодом T таким, что $T\omega_0 \in \mathbb{Z}^n$.

Для доказательства оценок типа (2) сначала изучается устойчивость в окрестности этих периодических торов. Это предмет раздела II, и весь анализ, который здесь требуется, – *одно* усреднение по фазе или по времени. Далее, любая точка в фазовом пространстве, а вернее в пространстве переменных действия, может быть приближена точками, соответствующими периодическим торам. Скорость аппроксимации и рост соответствующих периодов связаны для точки общего положения простейшим аппроксимационным законом, а именно теоремой Дирихле. Эта процедура позволит нам (в разделе III) доказать неравенство (2) и его локальный вариант, который зависит от свойств начальных условий.

Обратившись к более общим соображениям, можно понять, что такой подход опирается на некоторого рода двойственность (здесь это слово употребляется не в "техническом" смысле), которая может быть описана несколькими способами. С точки зрения динамики, существует связь между усреднением по времени и по фазе, лежащая в основе эргодической теории. Для линейных потоков на торе подобную связь можно, конечно, выразить намного более прозрачно, используя, в частности, понятие моментов приближенных возвращений. В теории диофантовых приближений это соответствует "двойственности" между *линейным* и *совместным* приближениями. Для данного $\omega \in \mathbb{R}^n$ первое имеет дело со значениями линейных форм (ω, k), $k \in \mathbb{Z}^n$, второе – с приближением прямой $T\omega$ $(T \in \mathbb{R})$ целочисленной решеткой $\mathbb{Z}^n$, т. е. нас интересует расстояние $\mathrm{dist}(T\omega, \mathbb{Z}^n)$, когда T изменяется, скажем, вдоль положительной полуоси. В динамических терминах первое описывает распределение малых знаменателей, второе – распределение замкнутых траекторий. В некотором смысле оба приближения содержат одинаковую арифметическую информацию об ω, как утверждается *принципами переноса*, берущими начало в работе А.Я. Хинчина (простейшие и наиболее удобные из них приведены в приложении 1). Отметим, однако, что эта информация "закодирована" более компактно при использовании совместного приближения: последнее всегда "одномерно", независимо от размерности объемлющего пространства. Наконец, принципы переноса являются – не прямым – отражением проективной двойственности между линейным подпространством и его ортогональным дополнением, а фактически, для частного случая линейных и совместных приближений, – между прямыми и гиперплоскостями.

В заключение этого введения отметим, что приложение 2 включено в данную работу, чтобы прояснить некоторые рассуждения из раздела IV § 2. Отметим также, что мы стремились ограничиться списком литературы разумной длины и, соответственно, воздерживались от цитирования некоторых классических и не совсем классических работ, которые могут быть найдены, например, в библиографии ряда статей, на которые мы ссылаемся.

Я выражаю искреннюю признательность Н.Н. Нехорошеву и А.И.Нейштадту за интересные беседы в связи с этой работой. Я также хотел бы поблагодарить М.Б.Севрюка за ряд критических замечаний, которые помогли мне при подготовке окончательного варианта статьи, а также за его помощь при переводе работы на русский язык.

II. Устойчивость в окрестности периодического тора

Мы будем интересоваться гамильтонианами следующего вида:

$$H(p,q) = h(p) + f(p,q), \quad (p,q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n, \quad \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}. \tag{1}$$

Обозначим через $\omega(p) = \nabla h(p)$ вектор частот невозмущенной системы и будем предполагать в этом разделе, что $\omega_0 = \omega(0)$ – *рациональный* вектор с (минимальным) периодом T, т. е. $T\omega_0 \in \mathbb{Z}^n$. Введем также обозначение $\Omega = \|\omega_0\|$ (евклидова норма). Предполагается, что h и f определены и *аналитичны* в некоторой окрестности начала координат, точнее, в комплексной области $D = D(R,\rho,\sigma)$ $(\rho > 0, \sigma > 0)$, заданной следующим образом. Пусть B_R – вещественный шар радиуса R с центром в нуле, тогда

$$D(R,\rho,\sigma) = \big\{(p,q) \in \mathbb{C}^{2n},\ \mathrm{dist}(p, B_R) \le \rho,\ |\operatorname{Im} q| \le \sigma\big\}, \tag{2}$$

где $|\operatorname{Im} q| = \sup_i |\operatorname{Im} q_i|$. Предполагается также, что h и f непрерывны на границе D. Вещественная часть D есть, конечно, не что иное, как $B_{R+\rho} \times \mathbb{T}^n$. При $0 \le \delta \le \rho, 0 \le \xi \le \sigma$, обозначим через $D - (\delta,\xi)$ область $D(R, \rho-\delta, \sigma-\xi)$.

В качестве нормы $\|\cdot\|_D$ выберем L^∞-норму на D (супремум модуля) и представим норму $\|f\|_D$ в виде $\|f\|_D = \varepsilon E$. Заметим, что мы не выписывали малый параметр в (1) явно, и вводим E главным образом потому, что тогда ε становится безразмерной величиной, и все формулы, которые мы получим, будут корректны с точки зрения размерности. Читатель, который не находит это полезным, может положить в дальнейшем $E = 1$; он может также положить $\Omega = 1$, изменив масштаб времени, но нам опять-таки кажется, что тогда формулы станут менее информативными. Наконец, для определения величины возмущения можно также сравнивать нормы ∇f и Ω. Мы не предполагаем даже, хотя и могли бы, что f имеет нулевое среднее относительно q для любого p.

Будем рассматривать случай, когда функция h является *выпуклой*. Незначительные изменения, которые необходимы, если h предполагается лишь *квази*выпуклой, будут указаны в конце этого раздела. Обозначим через $A(p) = \nabla^2 h(p)$ матрицу гессиана функции h и предположим, что она положительно определена (иначе заменим t на $-t$ и H на $-H$), точнее, что m (соответственно M) – нижняя (соответственно – верхняя) граница спектра A в D. Это означает, что

$$\|A(p)v\| \le M\|v\|, \quad \big(A(p)v, v\big) \ge m\|v\|^2$$

для любого $p \in D \cap \mathbb{R}^n$ и $v \in \mathbb{R}^n$, где $0 < m \le M$.

Сначала мы докажем итеративную лемму, которая состоит в простой процедуре усреднения по одной фазе и представляет собой единственный аналитический результат, который понадобится во всей этой статье. Из нее легко будут следовать три связанные утверждения, описывающие устойчивость вблизи периодического тора. Чтобы дать более определенно представление о том, какого типа результаты мы имеем в виду, сформулируем теорему 1B (см. ниже) в несколько неформальном виде.

Пусть $H(p,q) = h(p) + f(p,q)$ – возмущение выпуклого интегрируемого гамильтониана, такого, что $p = 0$ – периодический тор с периодом T. Обозначим через $\big(p(t), q(t)\big)$ траекторию, начинающуюся в точке $\big(p(0), q(0)\big)$. Тогда, если $\big\|p(0)\big\| \le r_0\varepsilon^{1/3}$, выполнена оценка $\|p(t)\| \le R_0\varepsilon^{1/3}$ при $\varepsilon \le \varepsilon_0$ и $|t| \le \mathcal{T}(\varepsilon) = \mathcal{T}_0 \exp\Big(\frac{\tau}{T}\,\varepsilon^{-1/3}\Big)$.

Все константы будут явно вычислены как простые функции параметров $\Omega, m, M, \rho, \sigma, E$ и T, физический смысл которых ясен. От числа n степеней свободы эти константы не зависят.

Чтобы сформулировать итеративную лемму, нам нужно еще одно простое понятие. Функции $g(q)$ на торе соответствует *среднее по времени* $\langle g\rangle$ вдоль траекторий линейного потока, определяемого вектором ω_0:

$$\langle g\rangle(q) = \int_0^T g(q + \omega_0 t)dt.$$

Будем говорить, что g *резонансна* (относительно ω_0), если $g = \langle g \rangle$, что всего лишь означает, что g постоянна вдоль траекторий потока, текущего в направлении ω_0. Имеет место

Итеративная лемма.

Пусть $H(p,q)$ – аналитический гамильтониан на $D = D(R,\rho,\sigma)$, такой, что

$$H(p,q) = h(p) + Z(p,q) + N(p,q), \tag{3}$$

где функция Z резонансна относительно ω_0 (p входит как параметр), тогда как $\langle N \rangle = 0$. Предположим, что $\|Z + N\|_D \le \varepsilon E$ и $\|N\|_D \le \eta E$. Пусть ξ и δ удовлетворяют неравенствам:

$$0 < \delta < \rho, \quad 0 < \xi < \sigma \text{ и } \xi\delta \ge 2TE\eta. \tag{4}$$

Тогда существует каноническое преобразование $\mathcal{C} : D' \to D$, где $D' = D - (\delta,\xi)$, со следующими свойствами: а) $\mathcal{C}$ взаимно однозначно; б) образ $\mathcal{C}(D')$ удовлетворяет условию

$$D - (\delta/2, \xi/2) \supset \mathcal{C}(D') \supset D - (3\delta/2, 3\xi/2);$$

в) $\mathcal{C}$ аналитично; г) $\mathcal{C}$ сохраняет вещественность, т. е. $\mathcal{C}(D' \cap \mathbb{R}^{2n}) \subset D \cap \mathbb{R}^{2n}$. Более того, если $\mathcal{C}(p',q') = (p,q)$, имеют место оценки $\|p' - p\| \le \delta/2$, $\|q' - q\| \le \xi/2$, и в обозначении $H' = H \circ \mathcal{C}$ функцию H' можно записать в форме (3) (используя буквы, помеченные штрихом), причем

$$\varepsilon' \le \varepsilon + \frac{1}{2}\eta', \tag*{$(5)_1$}$$

$$\eta' \le 5T\eta\bigl[M(R+\rho)\xi^{-1} + 4E\varepsilon(\xi\delta)^{-1}\bigr]. \tag*{$(5)_2$}$$

Несколько забегая вперед, отметим, что идея всей процедуры заключается в следующем. С помощью последовательного применения леммы нерезонансная компонента N делается настолько малой, насколько это возможно, в то время как величина резонансного члена Z остается почти неизменной. Затем необходимо использовать уравнение Гамильтона $\dot p = -\frac{\partial H}{\partial q}$ и тот решающий факт, что $\omega_0 \frac{\partial Z}{\partial q} = 0$ (здесь можно в качестве модели рассмотреть "стандартный" случай, когда $\omega_0 = (\nu, 0, \dots, 0)$ с периодом $T = \frac{1}{\nu}$), откуда $\omega_0 \dot p = -\omega_0 \frac{\partial N}{\partial q}$. Последнее произведение будет очень мало. Итак, мы почти исключили возможность дрейфа вдоль направления ω_0, что, в свою очередь, гарантирует устойчивость согласно простому геометрическому доводу (см. (21) и последующее рассуждение).

Приступим к доказательству итеративной леммы. Преобразование $\mathcal{C}$ строится с помощью рядов Ли, т. е. как отображение за время 1 потока, соответствующего вспомогательному гамильтониану $\chi(p,q)$. Нам понадобится лемма для оценки градиентов и скобок Пуассона, которая представляет собой почти непосредственное следствие формулы Коши. Ниже $\frac{\partial f}{\partial p}$ и $\frac{\partial f}{\partial q}$ (n-мерные векторы) обозначают, конечно, градиенты f относительно переменных p и q; $\{\ ,\ \}$ – скобку Пуассона:

$$\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial p}\,\frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q}\,\frac{\partial g}{\partial p}$$

(точка обозначает скалярное произведение). Наконец, норма векторнозначной функции на D определяется как супремум на D евклидовой нормы ее значений.

Лемма 1. *Пусть f и g аналитичны в D (и непрерывны на границе). Тогда*

$$\Big\|\frac{\partial f}{\partial q}\Big\|_{D-(0,\xi)} \le \frac{1}{\xi}\|f\|_D, \qquad \Big\|\frac{\partial f}{\partial p}\Big\|_{D-(\delta,0)} \le \frac{1}{\delta}\|f\|_D. \tag{6}$$

Предположим, что $0 \le \xi' < \xi$ и $0 \le \delta' < \delta$. Тогда

$$\big\|\{f,g\}\big\|_{D-(\delta,\xi)} \le \Big(\inf\big[\xi(\delta-\delta'),\delta(\xi-\xi')\big]\Big)^{-1}\|f\|_D\|g\|_{D-(\delta',\xi')}. \tag{7}$$

В частности,

$$\begin{aligned} \big\|\{f,g\}\big\|_{D-(\delta,\xi)} &\le \frac{1}{\xi\delta}\|f\|_D\|g\|_D,\\ \big\|\{f,g\}\big\|_{D-(\delta,\xi)} &\le \frac{2}{\xi\delta}\|f\|_D\|g\|_{D-\left(\frac{\delta}{2},\frac{\xi}{2}\right)}. \end{aligned} \tag{8}$$

Чтобы доказать первое неравенство в (6), заметим, что в любой фиксированной точке (p,q)

$$\Big\|\frac{\partial f}{\partial q}(p,q)\Big\| = \sup_{\|e\|=1}\Big\|\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(p,q+te)\Big\|.$$

Затем применим формулу Коши к функции $t \to f(p,q+te)$ комплексной переменной t, определенной при $|t| \le \xi$ и непрерывной на границе, когда $(p,q) \in D-(0,\xi)$. Второе неравенство в (6) доказывается аналогично.

Для доказательства (7) точно так же запишем:

$$\{f,g\}(p,q) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g\Big(p - t\frac{\partial f}{\partial q},\ q + t\frac{\partial f}{\partial p}\Big)$$

и снова применим формулу Коши к функции от t, появляющейся в первой части. Здесь используется круг $|t| = \inf\big[\xi(\delta-\delta'),\ \delta(\xi-\xi')\big]\big(\|f\|_D\big)^{-1}$. Для обоснования этого сначала заметим, что $\big|g(p - t\frac{\partial f}{\partial q},\ q + t\frac{\partial f}{\partial p})\big| \le \|g\|_{D-(\delta',\xi')}$ при $(p,q) \in D$, если t удовлетворяет неравенствам $\left|t\frac{\partial f}{\partial q}\right| \le \delta - \delta'$ и $\left|t\frac{\partial f}{\partial p}\right| \le \xi - \xi'$. Затем применим (6), чтобы показать, что функция в правой части действительно аналитична в вышеупомянутом круге (и непрерывна на границе). $\square$

Вернемся теперь к построению канонического преобразования $\mathcal{C}$ как отображения за время 1 потока, задаваемого гамильтонианом χ. Потребуем, чтобы последний удовлетворял неравенству $\|\chi\|_D \le \xi\delta/4$, так, что из (6) вытекают следующие оценки для гамильтонова векторного поля:

$$\left\|\frac{\partial\chi}{\partial q}\right\|_{D-\left(0,\frac{\xi}{2}\right)} \le \frac{2}{\xi}\|\chi\|_D \le \frac{\delta}{2},\ \left\|\frac{\partial\chi}{\partial p}\right\|_{D-\left(\frac{\delta}{2},0\right)} \le \frac{2}{\delta}\|\chi\|_D \le \frac{\xi}{2}. \tag{9}$$

Это позволяет определить $\mathcal{C}$ и обеспечивает выполнение включений и неравенств, следующих за (4). Обозначим через L_χ оператор Лиувилля $\big(L_\chi(f) = \{\chi, f\}\big)$. Преобразование $\mathcal{C} = \exp L_\chi$ действует на функции, определенные на D', и можно проверить, что

$$H' = \exp(L_\chi)H = h + Z + N + \{\chi, h\} + \{\chi, Z+N\} + H' - H - \{\chi, H\}. \tag{10}$$

Мы должны оценить H' в D' $\big($ниже для простоты вместо (p', q') пишем $(p, q)\big)$. Имеет место равенство $\{\chi, h\} = -\omega\frac{\partial\chi}{\partial q}$, $\big(\omega = \omega(p)\big)$, и мы определим χ таким образом, чтобы выполнялось равенство $\omega_0\frac{\partial\chi}{\partial q} = N$. Последнее возможно благодаря условию $\langle N\rangle = 0$ (см. лемму 2 ниже). Тогда можно записать: $H' = h + Z + N''$, где

$$N'' = (\omega_0 - \omega)\frac{\partial\chi}{\partial q} + \{\chi, Z+N\} + H' - H - \{\chi, H\}. \tag{11}$$

Затем определяются $Z' = Z + \langle N''\rangle$, $N' = N'' - \langle N''\rangle$. Находим, что

$$\|Z' + N'\|_{D'} \le \|Z\|_{D'} + \|N\|_{D'} \le \varepsilon E + \|N''\|_{D'},$$
$$\|N'\|_{D'} = \big\|N'' - \langle N''\rangle\big\|_{D'} \le 2\|N''\|_{D'}.$$

Таким образом, $\varepsilon' \le \varepsilon + \frac{1}{2}\eta'$, что совпадает с $(5)_1$ при $\eta' \le 2\|N''\|_{D'}/E$. Здесь мы использовали тот факт, что оператор усреднения $\langle\cdot\rangle$ есть проекция с единичной нормой, т. е. для любой функции g имеет место неравенство $\big\|\langle g\rangle\big\|_D \le \|g\|_D$. Это очевидно из определения $\langle\cdot\rangle$.

Осталось оценить $\|N''\|_{D'}$. Для этого напишем следующее неравенство:

$$\|N''\|_{D'} \le \|\omega_0 - \omega\|_{D'}\left\|\frac{\partial\chi}{\partial q}\right\| + \big\|\{\chi, Z+N\}\big\|_{D'} + \frac{1}{2}\,\big\|\{\chi, \{\chi, H\}\}\big\|_{D-\left(\frac{\delta}{2},\frac{\xi}{2}\right)}. \tag{12}$$

Последнее слагаемое получается из формулы Тейлора с учетом того, что $\mathcal{C}(D') \subset D - \left(\frac{\delta}{2}, \frac{\xi}{2}\right)$.

Первые два слагаемых в правой части легко оценить:

$$1)\ \|\omega_0-\omega\|_{D'}\le M(R+\rho)\quad\text{и}\ \left\|\frac{\partial\chi}{\partial q}\right\|_{D'}\le\xi^{-1}\|\chi\|_D$$

(используется (6));

$$2)\ \big\|\{\chi,Z+N\}\big\|_{D'}\le(\xi\delta)^{-1}\|\chi\|_D\|Z+N\|_D\le\varepsilon E(\xi\delta)^{-1}\|\chi\|_D$$

(используется (8) и определение ε).

Для оценки третьего слагаемого воспользуемся определением χ:

$$\{\chi,H\}=-N+(\omega_0-\omega)\frac{\partial\chi}{\partial q}+\{\chi,Z+N\},$$

так что

$$\begin{aligned}\Big\|\{\chi,\{\chi,H\}\}\Big\|\le\|\{\chi,N\}\|+\left\|\left\{\chi,(\omega_0-\omega)\frac{\partial\chi}{\partial q}\right\}\right\|\\+\Big\|\{\chi,\{\chi,Z+N\}\}\Big\|,\end{aligned}$$

и мы снова получим три слагаемых, которые нужно оценить в области $D-\left(\frac{\delta}{2},\frac{\xi}{2}\right)$. С первым поступаем так же, как раньше:

$$\big\|\{\chi,N\}\big\|_{D-\left(\frac{\delta}{2},\frac{\xi}{2}\right)}\le4(\xi\delta)^{-1}\|\chi\|_D\|N\|_D\le4\eta E(\xi\delta)^{-1}\|\chi\|_D.$$

Для оценки двух оставшихся слагаемых необходимо дважды применить неравенства (8):

$$\begin{aligned}1)\ \left\|\left\{\chi,(\omega_0-\omega)\frac{\partial\chi}{\partial q}\right\}\right\|_{D-\left(\frac{\delta}{2},\frac{\xi}{2}\right)}&\le8(\xi\delta)^{-1}\|\chi\|_D\left\|(\omega_0-\omega)\frac{\partial\chi}{\partial q}\right\|_{D-\left(\frac{\delta}{4},\frac{\xi}{4}\right)}\\&\le8(\xi\delta)^{-1}\|\chi\|_DM(R+\rho)4\xi^{-1}\|\chi\|_D\\&=32M(R+\rho)\xi^{-2}\delta^{-1}\|\chi\|_D^2;\\2)\ \big\|\{\chi,\{\chi,Z+N\}\}\big\|_{D-\left(\frac{\delta}{2},\frac{\xi}{2}\right)}&\le8(\xi\delta)^{-1}\|\chi\|_D\big\|\{\chi,Z+N\}\big\|_{D-\left(\frac{\delta}{4},\frac{\xi}{4}\right)}\\&\le8(\xi\delta)^{-1}\|\chi\|_D^2 16(\xi\delta)^{-1}\|Z+N\|_D\\&=128\varepsilon E\xi^{-2}\delta^{-2}\|\chi\|_D^2.\end{aligned}$$

После того как все слагаемые оценены, это элементарное (но выглядящее громоздко) вычисление окончательно дает:

$$\begin{aligned}\|N''\|_{D'}=\eta'\frac{E}{2}\le M(R+\rho)\xi^{-1}\|\chi\|_D+\varepsilon E(\xi\delta)^{-1}\|\chi\|_D\\+2\eta E(\xi\delta)^{-1}\|\chi\|_D+16M(R+\rho)\xi^{-2}\delta^{-1}\|\chi\|_D^2\\+64\varepsilon E\xi^{-2}\delta^{-2}\|\chi\|_D^2.\end{aligned}\tag{13}$$

Чтобы идти дальше, мы должны вычислить χ, для чего воспользуемся следующей леммой, в которой переменная p опущена, так как она играет роль ни на что не влияющего параметра.

Лемма 2. *Пусть $g(q)$ – функция с нулевым средним значением (относительно ω_0): $\langle g \rangle = 0$. Тогда уравнение*

$$\omega_0 \frac{\partial \chi}{\partial q} = g \tag{14}$$

допускает явное решение

$$\chi(q) = \frac{1}{T} \int_0^T g(q + \omega_0 t) t \, dt, \tag{15}$$

которое, в частности, удовлетворяет оценке

$$\|\chi\| \leq \frac{T}{2} \|g\| \tag{16}$$

для любой нормы $\|\cdot\|$, инвариантной относительно сдвигов на торе и определенной на пространстве измеримых функций.

Доказательство занимает две строчки и сводится к интегрированию по частям:

$$\begin{aligned} \omega_0 \frac{\partial \chi}{\partial q} &= \frac{1}{T} \int_0^T \omega_0 \frac{\partial g}{\partial q}(q + \omega_0 t) t \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d}{dt} g(q + \omega_0 t) dt \\ &= \frac{1}{T} g(q + \omega_0 t) t \Big|_0^T - \frac{1}{T} \int_0^T g(q + \omega_0 t) dt = g(q). \quad \square \end{aligned}$$

Вернемся к оценке (13). Функция χ удовлетворяет уравнению (14) с $g = N$, и, выбирая решение (15), мы получаем: $\|\chi\|_D \leq \frac{T}{2} \eta E$, так что (13) принимает вид:

$$\begin{aligned} \eta' \leq \eta T \big[& M(R + \rho) \xi^{-1} + \varepsilon E (\xi \delta)^{-1} + 2 \eta E (\xi \delta)^{-1} \\ & + 8 M E T (R + \rho) \xi^{-2} \delta^{-1} \eta + 32 E^2 T \xi^{-2} \delta^{-2} \varepsilon \eta \big]. \end{aligned} \tag{17}$$

Все полученные оценки верны в предположении, что $\|\chi\|_D \leq \frac{\xi\delta}{4}$, т. е. $2TE\eta \leq \xi\delta$. Это позволяет упростить (17), что также подчеркнет корректность (17) с точки зрения размерности. Действительно, после подстановки последнего неравенства в (17) получается второе из неравенств (5):

$$\eta' \leq 5 T \eta \big[M(R + \rho) \xi^{-1} + 4 E \varepsilon (\xi \delta)^{-1} \big]. \tag{5_2}$$

Этим завершается доказательство итеративной леммы. $\square$

Необходимо сделать несколько замечаний.

1. Вклад слагаемого второго порядка $\big($т. е. $\{\chi, \{\chi, H\}\}\big)$ мы свели к числовому множителю.
2. Число η'/η ограничено величиной, пропорциональной T: чем больше частота, по которой происходит усреднение, тем лучше получающаяся оценка.
3. Происхождение слагаемых в правой части (5) легко понять. Второе из них возникает из “квадратичной погрешности” и имеет тот же порядок, что и скобка Пуассона $\{\chi, f\}$ вспомогательного гамильтониана (или производящей функции) и возмущения. Первое же представляет частотный сдвиг и появляется из-за того, что мы всегда решаем (14) вместо того, чтобы подгонять частоту, т. е. решать то же уравнение с ω_0, замененным на $\omega = \omega(p)$. Изложенный выше алгоритм, таким образом, принципиально хуже, чем обычный метод Пикара, не говоря уже о методе Ньютона.

Теперь применим итеративную лемму некоторое число раз, скажем, $s = s(\varepsilon)$, для того чтобы уничтожить резонансную часть гамильтониана вплоть до высокого порядка. Мы начнем с гамильтониана $H = H^{(0)} = h + f$, определенного на множестве $D^{(0)}$ (где $D^{(0)} \subset D(R, \rho, \sigma)$, см. ниже), и в разложении (3) положим:

$$Z = \langle f \rangle,\ N = f - \langle f \rangle,\ \varepsilon = \varepsilon_0,\ \eta = \eta_0 = \big\| f - \langle f \rangle \big\|_D / E \le 2\varepsilon.$$

В конце мы получим гамильтониан $H' = H^{(s)}$, определенный на множестве $D' \subset D = D^{(0)}$ и характеризующийся величинами $\varepsilon' = \varepsilon_s$ и $\eta' = \eta_s$. Начало и конец итерационного процесса связаны последовательностью промежуточных объектов $H^{(j)}, D^{(j)}, \varepsilon_j, \eta_j, j = 0, \dots, s$.

Из-за сдвига частоты мы не можем работать в области порядка 1, так что будем использовать меньшую область:

$$D = D^{(0)} = D\big(R(\varepsilon), \rho(\varepsilon), \sigma\big) \subset D(R, \rho, \sigma).$$

Любая траектория с начальными условиями (в пространстве переменных действия), лежащими в вещественном шаре радиуса $r(\varepsilon)$ с центром в начале координат, останется в течение промежутка времени $\mathcal{T}(\varepsilon)$ в шаре радиуса $R(\varepsilon) \le R$. Положим $D^{(j)} = D^{(j-1)} - (\delta_j, \xi_j)$ и выберем все пары (δ_j, ξ_j) равными между собой: $\xi_j = \xi, \delta_j = \delta, j = 1, \dots, s$. Такой выбор означает, что

$$D' = D^{(0)} - (s\delta, s\xi) = D\big(R(\varepsilon), \rho(\varepsilon) - s\delta, \sigma - s\xi\big).$$

Мы строим последовательность канонических преобразований $\mathcal{C}^{(j)} : D^{(j)} \to D^{(j-1)}$, используя итеративную лемму. Обозначим через $\mathcal{C}$ их композицию, действующую из D' в D. Итеративная лемма обеспечивает включения

$$\begin{aligned} &D^{(0)} - \Big(\frac{s\delta}{2}, \frac{s\xi}{2}\Big) \supset \mathcal{C}(D') \supset D^{(0)} - \Big(\frac{3s\delta}{2}, \frac{3s\xi}{2}\Big) \\ =&D\Big(R(\varepsilon), \rho(\varepsilon) - \frac{3s\delta}{2}, \sigma - \frac{3s\xi}{2}\Big). \end{aligned}$$

Области должны удовлетворять следующим двум условиям:

1) система определена на $D = D^{(0)}$, т. е. $D \subset D(R, \rho, \sigma)$, что означает: $R(\varepsilon) \le R$ и $\rho(\varepsilon) \le \rho$;

2) образ преобразования $\mathcal{C}$ содержит вещественный шар радиуса $R(\varepsilon)$ с центром в начале координат в пространстве переменных действия. Для того чтобы это было верно, достаточно выполнения неравенств $\frac{3s\delta}{2} \le \rho(\varepsilon)$ и $\frac{3s\xi}{2} \le \sigma(\varepsilon)$, что приводит к выбору:

$$\delta_j = \delta = \frac{\rho(\varepsilon)}{2s}, \quad \xi_j = \xi = \frac{\sigma}{2s}.$$

Кроме того, в дальнейшем мы полагаем $R(\varepsilon) = \rho(\varepsilon)$, что не является существенным ограничением: $r(\varepsilon) < R(\varepsilon)$ будет величиной того же порядка (относительно ε). Наконец, для упрощения обозначений мы часто будем писать r, R и ρ без явного указания зависимости от ε. Эта небольшая двусмысленность не приведет к путанице, так как первоначальные величины R и ρ не будут участвовать в выкладках, и мы вернемся к условиям $R(\varepsilon) \le R$ и $\rho(\varepsilon) \le \rho$ в самом конце.

Переписывая формулу $(5)_2$ с данными значениями параметров, мы получаем:

$$\eta_j \le \eta_{j-1} 20\sigma^{-1} T\Big(M\rho s + \frac{4E\varepsilon_j s^2}{\rho}\Big), \quad j = 1, \dots, s. \tag{18}$$

Это в некотором смысле основное неравенство, отражающее наиболее точно, как данные задачи зависят от различных параметров. Мы будем использовать его тремя способами, но сначала рассмотрим то общее, что есть в этих трех вариантах.

Каждый раз мы производим s преобразований и считаем, что $s \ge 2$ (в противном случае конструкция неинтересна). Мы также требуем, чтобы последовательность η_j убывала, по крайней мере, как геометрическая прогрессия со знаменателем $\frac{1}{e}$ ($e = 2.718\dots$), что, конечно, несколько произвольно. Из неравенств $\eta_j \le \eta_0 e^{-j}$, $\eta_0 \le 2\varepsilon$ и $\varepsilon_j \le \varepsilon_{j-1} + \frac{1}{2}\eta_j$ находим, что $\varepsilon_j \le 2\varepsilon_0 = 2\varepsilon$. Подставляя это в (18), получим, что неравенство $\eta_j \le \frac{1}{e}\eta_{j-1}$ выполнено при условии

$$X \stackrel{\text{def}}{=} 20\sigma^{-1} T\Big(M\rho s + \frac{8E\varepsilon s^2}{\rho}\Big) \le \frac{1}{e}. \tag{19}$$

Конечная невязка η' может быть тогда оценена как

$$\eta' = \eta_s \le \eta_0 e^{-s} \le 2\varepsilon e^{-s}. \tag{20}$$

Теперь в нашем распоряжении есть “резонансная нормальная форма”, в которой нерезонансные гармоники исходного гамильтониана уничтожены до высокого порядка s (который еще нужно определить) с помощью канонического преобразования $\mathcal{C}$, такого что $\mathcal{C}(p', q') = (p, q)$.

Чтобы использовать эту форму, мы теперь добавим условия сохранения энергии и выпуклости невозмущенного гамильтониана. Функции $s = s(\varepsilon)$, $r(\varepsilon)$ и $R(\varepsilon)$ остаются пока свободными параметрами, а нижеследующие рассуждения касаются *вещественных* частей различных областей. Обозначим через $c(\varepsilon)$ "величину" канонического преобразования в пространстве переменных действия: $\|p' - p\| \le c(\varepsilon)$. Из построения видно, что $c(\varepsilon) \le \frac{1}{2}\rho(\varepsilon)$, но нам потребуется несколько более точная оценка.

Рассмотрим начальное условие $\big(p(0), q(0)\big)$ с $\|p(0)\| \le r(\varepsilon)$. Имеем:

$$\begin{aligned} h\big(p'(t)\big) &= h\big(p'(0)\big) + \omega\big(p'(0)\big)\big(p'(t) - p'(0)\big) \\ &\quad + \frac{1}{2}\Big(A(p^*)\big(p'(t) - p'(0)\big),\ \big(p'(t) - p'(0)\big)\Big), \end{aligned}$$

где p^* лежит между $p'(t)$ и $p'(0)$ (область является выпуклой). Из выпуклости h теперь вытекает:

$$\frac{1}{2}m\big\|p'(t) - p'(0)\big\| \le \Big|h\big(p'(t)\big) - h\big(p'(0)\big)\Big| + \Big|\Big(\omega\big(p'(0)\big), \big(p'(t) - p'(0)\big)\Big)\Big|. \tag{21}$$

Первое слагаемое в правой части оценивается с помощью закона сохранения энергии для полной системы: $H'\big(p'(t), q'(t)\big) = H'\big(p'(0), q'(0)\big)$, следовательно,

$$\begin{aligned} \Big|h\big(p'(t)\big) - h\big(p'(0)\big)\Big| &\le \Big|Z'\big(p'(t)\big)\Big| + \Big|Z'\big(p'(0)\big)\Big| + \Big|N'\big(p'(t)\big)\Big| + \Big|N'\big(p'(0)\big)\Big| \\ &\le 2\varepsilon E + 2\varepsilon E + \eta' E + \eta' E \le 5\varepsilon E. \end{aligned} \tag{22}$$

Мы использовали неравенства $\|Z'\| \le 2\varepsilon E$ и $\eta' \le \frac{1}{2}\varepsilon$ (это следует из того, что $s \ge 2$).

Чтобы оценить второе слагаемое в правой части (21), рассмотрим проекции векторов $\omega\big(p'(0)\big)$ и $p'(t) - p'(0)$ на ω_0 и на ортогональное дополнение. Обозначим соответствующие операторы проектирования через Π и $\Pi^\perp$. Прежде всего

$$\begin{aligned} \Big\|\Pi^\perp \omega\big(p'(0)\big)\Big\| &= \Big\|\Pi^\perp\big(\omega\big(p'(0)\big) - \omega(0)\big)\Big\| \le \Big\|\omega\big(p'(0)\big) - \omega(0)\Big\| \\ &\le M\big\|p'(0)\big\| \le 2rM. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали неравенство $c(\varepsilon) \le r(\varepsilon)$ – еще одно требование, которое надо запомнить.

Проектируя теперь на ω_0, мы используем тот факт, что $\Pi\Big(\frac{\partial}{\partial q}Z'\Big) = 0$, потому что Z' резонансно. Это единственное место, где используется нормальная форма; перефразируя, можно сказать, что мы удалили *одну* степень свободы с помощью усреднения по времени движения с периодом T. Ввиду гамильтонова характера уравнения, это соответствует движению, ортогональному невозмущенной поверхности уровня энергии. Выпуклось далее обеспечивает квадратичные потенциальные ямы, которые препятствуют движению, касательному к поверхности. Итак, из

$$\Pi\dot{p}' = -\Pi\Big(\frac{\partial Z'}{\partial q} + \frac{\partial N'}{\partial q}\Big) = -\Pi\frac{\partial N'}{\partial q}$$

мы находим:

$$\Big\|\Pi\big(p'(t) - p'(0)\big)\Big\| \le |t|\Big\|\frac{\partial}{\partial q}N'\Big\| \le \frac{2}{\sigma}|t|\|N'\| \le \frac{2}{\sigma}\mathcal{T}(\varepsilon)\eta' E.$$

Мы применили неравенство Коши к *вещественным* точкам области D' и использовали тот факт, что ширина аналитичности σ' функции H' равна $\frac{\sigma}{2}$ благодаря выбору ξ. Время удержания $\mathcal{T}(\varepsilon)$ является все еще свободным параметром. Мы, таким образом, получаем:

$$\Big|\Big(\omega\big(p'(0)\big), \big(p'(t) - p'(0)\big)\Big)\Big| \le 2rM\big\|p'(t) - p'(0)\big\| + \frac{2}{\sigma}\mathcal{T}(\varepsilon)\eta' E\Big\|\omega\big(p'(0)\big)\Big\|.$$

Ввиду того, что $p'(0) \in B_{2r}$, имеем: $\Big\|\omega\big(p'(0)\big)\Big\| \le \Omega + 2rM \le 2\Omega$, *если* $2rM \le \Omega$, что является условием на $r = r(\varepsilon)$. Вводя обозначение $a = \big\|p'(t) - p'(0)\big\|$, соберем полученные выше оценки:

$$\frac{1}{2}ma^2 \le 5\varepsilon E + \frac{4}{\sigma}\mathcal{T}(\varepsilon)\Omega\eta' E + 2rMa. \tag{23}$$

Выберем $\mathcal{T}(\varepsilon)$ так, чтобы выполнялось неравенство $\frac{4}{\sigma}\mathcal{T}(\varepsilon)\Omega\eta' E \le \varepsilon E$, т. е. $\mathcal{T}(\varepsilon) \le \varepsilon\frac{\sigma}{4\Omega}\,\frac{1}{\eta'}$. Так как $\eta' \le 2\varepsilon e^{-s}$, правая часть последней оценки больше, чем

$$\mathcal{T}(\varepsilon) = \frac{\sigma}{8\Omega}e^{s(\varepsilon)}, \tag{24}$$

что и будет окончательным значением $\mathcal{T}(\varepsilon)$. Подставляя (24) в (23), мы находим, что

$$a \le 2r\frac{M}{m} + \frac{1}{m}(12m\varepsilon E + 4r^2M^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{25}$$

Можно заметить, что правая часть в (25) имеет порядок по меньшей мере $\sqrt{\varepsilon}$, что можно было предсказать заранее. Действительно, выпуклость дает *квадратичные* потенциальные ямы, так что энергия возрастает как a^2 (квадрат расстояния до дна). При наложении возмущения порядка ε оба слагаемых должны быть, по крайней мере, одного порядка, чтобы обеспечить удержание. Из этого следует, что радиус удержания имеет по меньшей мере порядок $\sqrt{\varepsilon}$, так что второй показатель устойчивости удовлетворяет оценке $b \le \frac{1}{2}$.

Потребуем теперь, чтобы второе слагаемое в скобках было большим: $12m\varepsilon E \leq 4r^2M^2$. При этом условии из (25) вытекает, что $a \leq 5r\frac{M}{m}$, таким образом,

$$\|p(t)-p(0)\| \leq 2c(\varepsilon)+\|p'(t)-p'(0)\| \leq 7r\frac{M}{m},$$

откуда следует, что $\|p(t)\| \leq 8r\frac{M}{m}$.

Прежде чем все собрать воедино, запишем условие $r(\varepsilon) \geq c(\varepsilon)$ в явном виде, оценив последнюю величину следующим образом:

$$c(\varepsilon) \leq \sum_{j=1}^{s}\frac{2}{\varepsilon_j}\|\chi_j\|_{D_j} \leq \sum_{j=0}^{s-1}\frac{4s}{\sigma}\frac{T}{2}\eta_j E = \frac{2ET}{\sigma}s\sum_{j=0}^{s-1}\eta_j.$$

Из оценки $\eta_j \leq 2\varepsilon e^{-j}$ мы выводим ограничение: $c(\varepsilon) \leq 8ETs\varepsilon/\sigma$.

Все, что мы сделали до сих пор, верно в предположении (4) итеративной леммы. Теперь первые два условия выполнены по построению, и легко видеть, что неравенство $(5)_2$ сильнее, чем $\xi\delta \geq 2TE\eta$. Чтобы удостовериться в этом, достаточно вернуться к $(5)_2$ и оценить снизу правую часть, оставляя только второе слагаемое в скобках. Чтобы сравнить получающиеся неравенства, надо использовать тот факт, что $\eta \leq 2\varepsilon$ (мы применяем итеративную лемму с $\eta=\eta_j, \eta'=\eta_{j+1}$ и $\varepsilon_j \leq 2\varepsilon$).

Теперь мы можем сформулировать утверждение, из которого результаты 1A, 1B, 1C, приведенные ниже, будут легко следовать при различных способах выбора параметров.

Модельное утверждение.

В описанной выше ситуации предположим, что выполнено неравенство (19), *так что можно сделать* $s(\varepsilon)$ *шагов алгоритма. Выберем* $R(\varepsilon)=\rho(\varepsilon)$ *и* $r(\varepsilon)=\frac{m}{8M}R(\varepsilon)$. *Тогда, если начальные условия удовлетворяют неравенству* $\|p(0)\| \leq r(\varepsilon)$, *мы будем иметь* $\|p(t)\| \leq R(\varepsilon)$ *при* $|t| \leq \mathcal{T}(\varepsilon)=\frac{\sigma}{8\Omega}e^{s(\varepsilon)}$, *если только выполнено следующее:*

I) $R(\varepsilon)=\rho(\varepsilon) \leq \inf(R,\rho)$, *где* R *и* ρ – *исходные величины* (*см.*(2)), *т. е. требуется, чтобы гамильтониан был определен в области, с которой мы работаем*;

II) $2Mr \leq \Omega$: *частота не должна меняться слишком сильно в шаре, где выбираются начальные условия*;

III) $12m\varepsilon E \leq 4M^2r^2$, *т. е.* $r^2 \geq 3\frac{m}{M^2}\varepsilon E$: *энергия возмущения уравновешивается той, которая возникает из квадратичных ям для "кинетической" части*;

IV) $r(\varepsilon) \geq c(\varepsilon)$, *или* $r \geq \frac{8ET}{\sigma}s\varepsilon$: *размер шара, в котором должны лежать начальные условия, превышает величну канонического преобразования* (*в пространстве переменных действия*);

V) $s \geq 2$: *можно сделать по меньшей мере два шага алгоритма.*

Перед формулировкой теоремы 1A определим три величины, которые будут полезны в дальнейшем. Они корректны с точки зрения размерности, и их появление, за исключением числовых коэффициентов, легко понять. Итак, положим:

$$\lambda = 10^{-3}\frac{\sigma m}{M^2}, \quad \tau = 3\cdot 10^{-3}\frac{\sigma}{\sqrt{EM}}, \quad \mathcal{T}_0 = 4\cdot 10^{-2}\frac{\sigma}{\Omega}. \tag{26}$$

Мы сохраняем, конечно, обозначения, определенные в начале этого раздела.

Теорема 1А. *Пусть* α *таково, что* $0 < \alpha \le \frac{1}{3}$. *Предположим, что* $\|p(0)\| \le r(\varepsilon) = \lambda\varepsilon^\alpha/T$, *где* T *лежит в интервале* $1 \le T \le \tau\varepsilon^{-\frac{1}{2}(1-3\alpha)}$. *Тогда* $\|p(t)\| \le R(\varepsilon) = \frac{8M}{m}r(\varepsilon) \le 10^{-2}\frac{\sigma}{M}\frac{\varepsilon^\alpha}{T}$ *при* $|t| \le \mathcal{T}(\varepsilon) = \mathcal{T}_0\exp(\varepsilon^{-\alpha})$, *если только* ε *удовлетворяет следующим неравенствам*:

$$\begin{aligned} &\varepsilon^\alpha \le 100\frac{M}{\sigma}\inf(R,\rho), \quad &&\varepsilon^\alpha \le 10^3\frac{\Omega M}{2\sigma m}, \\ &\varepsilon^\alpha \le 4\cdot 10^{-2}\frac{m}{M}, &&\varepsilon^{\frac{1}{2}(1-3\alpha)} \le \tau. \end{aligned} \tag{27}$$

Это не самое естественное утверждение в рамках развиваемого в настоящем разделе подхода, но его достоинство в том, что время применимости не зависит от периода орбиты, если последний достаточно мал. Это будет важно в следующем разделе. Для доказательства теоремы положим:

$$\rho = \rho_0\frac{T_0}{T}\varepsilon^\alpha, \quad s = [s_0\varepsilon^\alpha], \quad T \le T_0\varepsilon^{-\beta}, \quad \beta = \frac{1}{2}(1-3\alpha). \tag{28}$$

Величины ρ_0 и T_0 еще нужно определить; $[x]$ обозначает целую часть вещественного числа x. Произведение X в (19) приобретает следующий вид:

$$X = \frac{20}{\sigma}\Big[M\rho_0 s_0 T_0 + 8ET^2\frac{s_0^2}{\rho_0 T_0}\varepsilon^{1-3\alpha}\Big].$$

Первое слагаемое в скобках больше второго при условии, что

$$M\rho_0 s_0 T_0 \ge 8E\frac{T_0 s_0^2}{\rho_0}.$$

Выберем $s_0 = 1$ и $\rho_0 = 2(2E/M)^{\frac{1}{2}}$, что обеспечивает равенство. При этом (19) сводится к неравенству

$$\frac{40}{\sigma}M\rho_0 s_0 T_0 \le \frac{1}{e}.$$

Снова предполагая равенство, находим:

$$T_0 = \frac{1}{80e\sqrt{2}}\,\frac{\sigma}{\sqrt{EM}} > \tau,$$

так что мы можем принять значение $T_0 = \tau$ и вычислить $\rho(\varepsilon) = R(\varepsilon)$ и $r(\varepsilon)$. Заметим, что

$$R(\varepsilon) \le \rho_0 T_0\varepsilon^\alpha \quad \text{и} \quad R(\varepsilon) \ge \rho_0\varepsilon^{\alpha+\beta} = \rho_0\varepsilon^{\frac{1}{2}(1-\alpha)} > \rho_0\varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 1A является тогда следствием “модельного утверждения”, приведенного выше. Что касается времени удержания, заметим, что неравенство $s \geq s_0\varepsilon^{-\alpha} - 1$ приводит к значению $\mathcal{T}_0$, определенному в (26), после незначительного уменьшения величины $\frac{\sigma}{8e\Omega}$, получаемой из этого неравенства и “модельного утверждения”.

Вычисление порогов применимости производится напрямую, с использованием пяти условий “модельного утверждения”. В первых двух из них нужно использовать оценки для $r(\varepsilon)$ и $R(\varepsilon)$ *сверху*, т. е. положить $T = 1$, в то время как в третьем надо использовать оценку для $r(\varepsilon)$ *снизу*. Это приводит к первым трем неравенствам в (27). Условия IV) и V) слабее, чем III). Последний порого гарантирует, что верхняя граница для T действительно больше 1. □

Следующий результат будет выглядеть более естественным в рамках развиваемого подхода. Снова положим

$$\rho_0 = R_0 = 2\sqrt{\frac{2E}{M}}, \quad r_0 = \frac{m}{8M}R_0 = \frac{m}{4M}\sqrt{\frac{2E}{M}}. \tag{29}$$

Теорема 1B. *Если* $\|p(0)\| \leq r_0\varepsilon^{\frac{1}{3}}$, *то* $\|p(t)\| \leq R_0\varepsilon^{\frac{1}{3}}$ *при* $|t| \leq \mathcal{T}_0\exp\Big(\frac{\tau}{T\varepsilon^{1/3}}\Big)$ (*однако, если* $T \leq \tau$, *необходимо заменить множитель* τ/T *на* 1), *при условии, что* ε *удовлетворяет неравенствам*:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{\frac{1}{3}} \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{M}{2E}}\inf(R,\rho), &&\varepsilon^{\frac{1}{3}} \leq \frac{\Omega}{\sqrt{EM}},\\
&\varepsilon^{\frac{1}{3}} \leq 4\cdot 10^{-2}\frac{m}{M}, &&\varepsilon^{\frac{1}{3}} \leq \frac{\tau}{2T} = 1.5\cdot 10^{-3}\frac{\sigma}{T\sqrt{EM}}.
\end{aligned} \tag{30}$$

Доказательство аналогично предыдущему и на самом деле проще. Определим ρ и s как

$$\rho = \rho_0\varepsilon^{\frac{1}{3}}, \quad s = [s_0\varepsilon^{-\frac{1}{3}}].$$

Подстановка этих величин в (19) дает:

$$X = \frac{20}{\sigma}T\Big[M\rho_0 s_0 + \frac{8E}{\rho_0}s_0^2\Big] \leq \frac{1}{e}.$$

Мы предполагаем, что $s_0 \leq 1$ (откуда следует ограничение, указанное в скобках в формулировке теоремы): это позволяет заменить s_0^2 на s_0, немного усиливая условие на X. Предполагая равенство, находим:

$$s_0 = \frac{\sigma}{20eT}\Big(M\rho_0 + \frac{8E}{\rho_0}\Big)^{-1}.$$

Максимизируя это выражение относительно ρ_0, получаем величину (29) и

$$s_0 = \frac{1}{80e\sqrt{2}} \frac{\sigma}{T\sqrt{EM}} > \frac{\tau}{T}.$$

Остается определить пороги применимости, что не представляет особой проблемы. Снова IV) слабее, чем III), а II) было немного усилено в эстетических целях. □

Мы имеем дело с тремя параметрами, представляющими физический интерес: T, s и r, которые связаны, соответственно, с *периодом* линейного потока на данном торе, *временем применимости* оценки устойчивости, и тем, что мы будем называть радиусом *зоны влияния* тора. В нашем последнем утверждении мы поставим этот радиус в привилегированное положение и будем обращаться с r как со свободной переменной, стараясь сделать ее как можно большей. Можно предполагать, что $r \geq r_0\varepsilon^{\frac{1}{3}}$, так как иначе применима теорема 1В.

Теорема 1С. *Пусть* $\big(p(0), q(0)\big)$ *– начальное условие, такое, что* $\big\|p(0)\big\| \leq r$. *Тогда* $\big\|p(t)\big\| \leq \frac{8M}{m} r$ *при* $|t| \leq \mathcal{T}_0 \exp\Big[\frac{\lambda}{rT}\Big]$ *(в случае, когда* $\frac{\lambda}{rT} \leq \varepsilon^{-\frac{1}{3}}$, *нужно использовать последнюю величину), если выполнены следующие условия*:

а) $r \geq r_0\varepsilon^{\frac{1}{3}}$, *где* $r_0 = \frac{m}{4M}\Big(\frac{2E}{M}\Big)^{\frac{1}{2}}$;

б) r *удовлетворяет следующим четырем неравенствам*:

$$r \leq \frac{m}{8M}\inf(R,\rho),\ r \leq \frac{\Omega}{2M},\ r^2 \geq \frac{3m}{M^2}\varepsilon E,\ r \leq \frac{\lambda}{2T} = 10^{-3}\frac{\sigma m}{2TM^2}. \tag{31}$$

Комбинируя последние два неравенства, мы найдем порог для ε; теоремы 1С и 1В красиво "сливаются" в окрестности $r = r_0\varepsilon^{\frac{1}{3}}$. Доказательство теоремы 1С снова непосредственно выводится из "модельного утверждения". Имеем: $\rho = \frac{8M}{m} r \geq \rho_0\varepsilon^{\frac{1}{3}}$, так что для выражения X из (19) находим:

$$X = \frac{20}{\sigma} T\Big[M\rho s + 8E\frac{\varepsilon s^2}{\rho}\Big] \leq \frac{20}{\sigma} T\big[M\rho s + 2\sqrt{2EM}(\varepsilon^{\frac{1}{3}} s)^2\big].$$

Предполагается, что $s \leq \varepsilon^{-\frac{1}{3}}$ (откуда вытекает ограничение, указанное в скобках в формулировке теоремы), что действительно верно, если, например, $\tau \leq T$, так как $r \geq r_0\varepsilon^{\frac{1}{3}}$. При таком допущении первое слагаемое в скобках – большее, и дальше доказательство продолжается, как в теоремах 1А и 1В. □

Три вышеприведенных результата представляют собой "строительные кирпичи", из которых в следующем разделе будут получены общие теоремы об устоячивости на конечных временах только при помощи простых аппроксимационных лемм, без какой-либо дополнительной работы. Так как эти арифметические соображения не могут быть улучшены, во всех отклонениях будущих теорем от оптимальности виноваты предыдущие результаты.

В этом разделе остается кратко указать изменения, необходимые, когда функция h предполагается всего лишь *квази*выпуклой. Это естественное геометрическое предположение: невозмущенная поверхность уровня энергии является выпуклой в переменных действие – угол (будучи рассматриваемой в пространстве переменных действия). Допущение квазивыпуклости позволяет, в частности, включить случай периодических возмущений выпуклых гамильтонианов (см. ниже) и близкую ситуацию симплектических отображений со знакоопределенными матрицами закручивания (см. раздел IV § 2).

Мы продолжаем обозначать матрицу гессиана через $A(p) = \nabla^2 h(p)$, и пусть M – ее наибольшее собственное значение в данной области: $\|A(p)v\| \leq M\|v\|$ для любых $v \in \mathbb{R}^n$, $p \in D$. Теперь $m > 0$ определяется с помощью неравенства:

$$\big(A(p)v, v\big) \geq m\|v\|^2, \text{ если } \big(\omega(p), v\big) = 0,\ v \in \mathbb{R}^n,\ p \in D \cap \mathbb{R}^n,$$

т. е. если вектор v касателен к невозмущенной поверхности уровня энергии $\big(\omega(p) = \nabla h(p)\big)$.

В качестве примера вычислим эту величину для периодически возмущенного выпуклого гамильтониана, т. е. пусть $H(p, q, t) = h(p) + f(p, q, t)$, где h – выпуклая функция, характеризующаяся как таковая соответствующими величинами m и M, а f имеет период 1 по переменной t. Можно рассматривать эту задачу как автономную в размерности $n + 1$, с гамильтонианом

$$H_1(p_1, q_1) = h_1(p_1) + f_1(p_1, q_1),$$

где $p_1 = (p, e)$, $q_1 = (q, t)$, $h_1 = h(p) + e$, $f_1(p_1, q_1) = f(p, q_1)$. Вектор частот есть $\omega_1 = (\omega, 1)$. Матрица гессиана вырождена, так как мы добавили постоянную частоту, но система изоэнергетически невырождена (см. начало раздела III). Функция h_1 является, как легко видеть, квазивыпуклой; обозначим ассоциированные величины через m_1 и M_1. Очевидно, $M_1 = M$, а m_1 вычисляется следующим образом. Если $v_1 = (v, w) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $v \in \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}$, условие $(v_1, \omega_1) = 0$ записывается как $(v, \omega) + w = 0$. По определению

$$(A_1 v_1, v_1) = (Av, v) \geq m\|v\|^2$$

и при условии, что $(v_1, \omega_1) = 0$,

$$\|v_1\|^2 = \|v\|^2 + |w|^2 \leq \big(1 + \|\omega\|^2\big)\|v\|^2.$$

Следовательно,

$$(A_1 v_1, v_1) \geq m\big(1 + \|\omega\|^2\big)^{-1}\|v_1\|^2.$$

Работая в области такой, что, например, $\big\|\omega(p)\big\| \leq 2\Omega = 2\big\|\omega(0)\big\|$, мы можем принять:

$$m_1 = m(1 + 4\Omega^2)^{-1}.$$

Вернемся к доказательству теорем. Разница между выпуклостью и квазивыпуклостью появляется только в геометрических рассуждениях. Итеративная лемма остается без изменений (заметим, что величина m в ней не участвует). Неравенство (21) по-прежнему может быть выписано, но в следующем виде:

$$\frac{1}{2}\Big(A(p^*)\big(p'(t)-p'(0)\big),\big(p'(t)-p'(0)\big)\Big) \le \Big|h\big(p'(t)\big)-h\big(p'(0)\big)\Big| + \Big|\Big(\omega\big(p'(0)\big),\big(p'(t)-p'(0)\big)\Big)\Big|,$$

где p^* лежит между $p'(t)$ и $p'(0)$.

Правая часть оценивается, как и выше, правой частью неравенства (23). Пусть $\omega^* = \omega(p^*)$, $A^* = A(p^*)$, $u = p'(t) - p'(0)$, $\|u\| = a$. Снова выбирая $\mathcal{T}(\varepsilon)$, как в (24), находим:

$$\frac{1}{2}(A^*u,u) \le 6\varepsilon E + 2rMa, \tag{32}$$

и остается только оценить снизу левую часть неравенства. Для этого обозначим через Π^* оператор ортогонального проектирования на ω^*, а через $\Pi^{*\perp}$ – оператор проектирования на ортогональное дополнение. Напишем подробное разложение:

$$(A^*u,u) = (A^*\Pi^*u,\Pi^*u) + (A^*\Pi^{*\perp}u,\Pi^{*\perp}u) + 2(A^*\Pi^*u,\Pi^{*\perp}u).$$

Поэтому

$$\frac{1}{2}(A^*\Pi^*u,\Pi^{*\perp}u) \ge \frac{1}{2}m\|\Pi^{*\perp}u\|^2 = \frac{1}{2}m\big(a^2 - \|\Pi^*u\|^2\big).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(A^*u,u) &\ge \frac{1}{2}ma^2 - \frac{1}{2}m\|\Pi^*u\|^2 - \frac{1}{2}M\|\Pi^*u\|^2 - Ma\|\Pi^*u\| \\ &\ge \frac{1}{2}ma^2 - 2Ma\|\Pi^*u\|,\end{aligned}$$

что дает:

$$\frac{1}{2}ma^2 \le 6\varepsilon E + 2rMa + 2Ma\|\Pi^*u\|. \tag{33}$$

По-прежнему обозначая через Π оператор проектирования на $\omega_0 = \omega(0)$ и помня, что $\Omega = \|\omega_0\|$, имеем:

$$\|\Pi^*u\| = \|\Pi u\| + \big\|(\Pi - \Pi^*)u\big\|.$$

Затем воспользуемся оценкой

$$\|\Pi u\| \le \frac{2}{\sigma}\mathcal{T}(\varepsilon)\eta' E \le \frac{\varepsilon E}{2\Omega},$$

которая сохраняется и в этом случае. Из неравенства $\|p^*\| \le 2r + a$ находим:

$$\big\|(\Pi - \Pi^*)u\big\| \le 2a(2r+a)\frac{M}{\Omega},$$

и, наконец,

$$\|\Pi^* u\| \le \varepsilon\frac{E}{2\Omega} + 2a(2r+a)\frac{M}{\Omega}. \tag{34}$$

Нам теперь надо получить *такой же* радиус удержания $R(\varepsilon)$, что и раньше, чтобы не было необходимости изменять области в итеративной лемме. Простой способ достичь этого состоит в том, чтобы потребовать выполнения условия $\|\Pi^* u\| \le r$. Ввиду (33) можно тогда оставить R неизменным, заменив r на $\frac{r}{2}$. Таким образом, мы полагаем:

$$R(\varepsilon) = \rho(\varepsilon) \ \text{ и } \ r(\varepsilon) = \frac{m}{16M}R(\varepsilon) \quad \Big(\text{вместо} \quad \frac{m}{8M}R(\varepsilon)\Big).$$

Необходимо, чтобы было выполнено условие $\|\Pi^* u\| \le r$ при том, что известно, что $a \le R$. Это равнозначно следующему простому соображению: (34) накладывет условие на R (или r), которое удовлетворяется, в частности, если

$$r \ge \varepsilon\frac{E}{\Omega} \ \text{ и } \ r \le 10^{-3}\frac{m^2\Omega}{M^3}.$$

Мы можем теперь сформулировать следующее

Модельное утверждение (*вариант для квазивыпуклых гамильтонианов*).

Оно отличается от варианта для выпуклых гамильтонианов только в следующих пунктах:

1) *мы по-прежнему определяем* $R(\varepsilon) = \rho(\varepsilon)$, *но теперь* $r(\varepsilon) = \frac{m}{16M}R(\varepsilon)$;

2) *условие* II) *заменяется на более сильное*:

$$\text{II-}\textit{бис}) \quad r \le 10^{-3}\frac{m^2\Omega}{M^3};$$

3) *добавляется условие* $r \ge \varepsilon\frac{E}{\Omega}$, *которое для малых* ε *слабее, чем* III).

Мы оставляем заинтересованному читателю соответствующую модификацию теорем 1A, 1B, 1C. *Требующиеся изменения незначительны.*

III. Устойчивость при произвольных начальных условиях

В этом разделе мы используем теоремы 1A, 1B, 1C, главным образом теорему 1A, чтобы получить информацию об устойчивости точек в фазовом пространстве. Основная идея состоит в том, чтобы применять один из этих результатов всякий раз, когда данная точка лежит в зоне влияния некоторого периодического тора. Это равносильно изучению распределения рациональных точек в пространстве частот, которые соответствуют невозмущенным периодическим торам, при условии, что частотное отображение $p \to \omega(p)$ обладает некоторым свойством невырожденности. Отметим, что в действительности ничего больше для аппроксимационного процесса не потребуется, в частности, аналитичность и квазивыпуклость используются лишь постольку, поскольку применяются теоремы раздела II.

Чтобы изложить все это точно, вернемся снова к гамильтониану (1) из раздела II. Единственное отличие здесь будет состоять в том, что мы рассматриваем окрестность некоторой произвольной точки (или, вернее, тора) $p = p^*$, так что в (2) (см. раздел II) следует использовать шар с центром в p^*.

Если невозмущенный гамильтониан h является выпуклым, матрица гессиана $A(p) = \nabla^2 h(p)$ невырождена $\big(\det A(p) \neq 0\big)$, и частотное отображение является локальным диффеоморфизмом. Совместные приближения будут, однако, иметь дело скорее с отношениями частот к одной из них, что соответствует изоэнергетической невырожденности. Для полноты мы вкратце напомним определение и покажем, что квазивыпуклые (в частности, выпуклые) гамильтонианы ему удовлетворяют.

Пусть Σ – невозмущенная поверхность уровня энергии $h(p) = h(p^*)$. Мы хотим, чтобы $n-1$ отношений частот к одной из них давали локальную карту на Σ. Это эквивалентно требованию, чтобы отображение

$$p \in \Sigma \to \omega \in \mathbb{PR}^{n-1}$$

было локальным диффеоморфизмом вблизи p^*, причем частота рассматривается в проективном пространстве. Чтобы проверить это условие, нужно убедиться, что матрица гессиана “однородного” отображения

$$(p, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \lambda h(p)$$

невырождена в точке $(p^*, 1)$. Эта матрица имеет вид

$$\mathcal{A}(p^*) = \begin{pmatrix} A & \omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix},$$

где $\omega = \omega(p^*)$ записывается как столбец справа и как стока – внизу. Условие изоэнергетической невырожденности приобретает, следовательно, вид $\det \mathcal{A} \neq 0$ (иногда $\det \mathcal{A}$ называют “определителем Арнольда”). Предположим теперь, что функция h является квазивыпуклой, и пусть $u \in \mathbb{R}^{n+1}$ таково, что $\mathcal{A}u = 0$. Запишем u в виде $u = (v, w)$, $v \in \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}$. Условие $\mathcal{A}u = 0$ распадается на

$$Av + w\omega = 0 \quad \text{и} \quad (\omega, v) = 0.$$

Скалярно умножая правое равенство на v, находим:

$$(Av, v) = 0 \quad \text{и} \quad (\omega, v) = 0,$$

откуда вытекает, что $v = 0$ по определению квазивыпуклости, и следовательно, $w = 0$ и $u = 0$.

Квазивыпуклые гамильтонианы являются, таким образом, изоэнергетически невырожденными. Напомним, что, с другой стороны, для малых размерностей имеют место следующие простые результаты: при $n = 2$ изоэнергетическая невырожденность эквивалентна квазивыпуклости, при $n = 3$ квазивыпуклость эквивалентна условию $\det \mathcal{A} < 0$, так что, если так можно выразиться, "половина" изоэнергетически невырожденных гамильтонианов квазивыпукла. Следует также подчеркнуть, что если отвлечься от выпуклости и квазивыпуклости, невырожденность и изоэнергетическая невырожденность предстанут двумя независимыми условиями: ни одно из них не вытекает из другого.

Ниже мы снова для простоты будем рассматривать случай выпуклых гамильтонианов; изменения, необходимые в квазивыпуклом случае, малоинтересны. Говоря геометрическим языком, в обоих случаях множество точек в пространстве переменных действия, отвечающее постоянному значению $\omega \in \mathbb{PR}^{n-1}$, является гладкой кривой, которая пересекает невозмущенную поверхность уровня энергии трансверсально. На этом множестве n-мерный вектор ω изменяется вдоль прямой. В выпуклом случае он действительно изменяется, и сама частота является локальным параметром. В *квази*выпуклом же случае частота вполне может быть постоянной вдоль кривой (например, для периодического возмущения выпуклого гамильтониана, ср. конец предыдущего раздела).

Итак, пусть функция h является выпуклой, p^* – произвольная точка, $\omega^* = \omega(p^*)$. Мы используем, конечно, обозначения раздела II. Из стандартной теоремы о неявной функции вытекает следующее. Пусть $B(p^*)$ – шар с центром в p^* и радиусом S такой, что для $p \in B(p^*)$

$$\big\|A(p) - A(p^*)\big\| \le \frac{m}{2}.$$

Здесь символ $\|\cdot\|$ обозначает обычную норму оператора, соответствующую евклидовой норме. Можно взять $S = \frac{m}{2|h|_3}$, где $|h|_3$ – оценка сверху третьей производной h. Тогда частотное отображение является взаимно однозначным на $B(p^*)$, и $\omega\big(B(p^*)\big) \subset B(\omega^*)$, где $B(\omega^*)$ – шар с центром в ω^* и радиусом $\frac{m}{2}S$.

Вышесказанное количественно определяет локальные инверсионные свойства частотного отображения. Благодаря этому процедура определения области заключается в следующем. Мы начинаем с фиксированного шара $B_0(p^*)$, в котором функция $H = h + f$ определена со значениями ширины аналитичности ρ и σ. Затем вычисляются m, M и $|h|_3$ на $B_0(p^*)$, после чего следует ограничиться шаром радиуса S, который можно считать лежащим в $B_0(p^*)$, уменьшая m, если это необходимо.

Подойдем теперь ближе к существу темы, для чего нам потребуется еще немного новых обозначений. Для вещественного x имеем

$$x = [x] + \{x\},$$

где $[x] \in \mathbb{Z}$ – целая часть, а $\{x\} \in (0,1)$. Введем обозначение

$$\|x\|_{\mathbb{Z}} \stackrel{\text{def}}{=} \inf\bigl(\{x\}, 1-\{x\}\bigr) = \operatorname{dist}(x, \mathbb{Z}).$$

Хотя символ $\|\cdot\|_{\mathbb{Z}}$ – не норма, это обозначение – общеупотребительное, даже без индекса $\mathbb{Z}$, который мы добавили, чтобы избежать путаницы. Если теперь $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор с компонентами $x^{(j)}$, положим:

$$\|x\|_{\mathbb{Z}} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{j=1,\ldots,n} \|x^{(j)}\|_{\mathbb{Z}} = \inf_{\zeta \in \mathbb{Z}^n} \|x - \zeta\|_\infty,$$

где $\|\cdot\|_\infty$ – норма наибольшей компоненты, которая естественно возникает в теории аппроксимации. В частности,

$$\|x\|_{\mathbb{Z}} \le \operatorname{dist}(x, \mathbb{Z}^n) \le \sqrt{n}\|x\|_{\mathbb{Z}}.$$

В этих обозначениях имеем следующий результат.

Теорема (Дирихле; см., например, [17], [25]) *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}^n$, а Q – вещественное число, $Q > 1$. Существует целое q, $1 \le q < Q$, такое, что*

$$\|q\alpha\|_{\mathbb{Z}} \le Q^{-\frac{1}{n}}.$$

Этот основной результат теории аппроксимации мы будем применять при $\alpha = \omega^* = \omega(p^*)$ и $q = T$; последняя величина играет роль периода. Однако прежде чем излагать процедуру, важно заметить, что можно добавить одну размерность, и это имеет прямое отношение к показателям устойчивости. Последнее отражает тот факт, что совместное приближение соответствует *неоднородному* линейному приближению (см. приложение 1), или, конкретнее, что в приведенной выше теореме q – целое число, так что аппроксимация α эквивалентна аппроксимации $(1, \alpha) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Один из способов использовать это – считать, что $\alpha \in \mathbb{PR}^{n-1}$, т. е. что фактически нужно аппроксимировать отношения компонент к фиксированной компоненте. В рамках интересующего нас подхода мы на самом деле можем просто изменением масштаба превратить одну из компонент ω^* в единицу. Для этого обозначим через $w > 0$ модуль какой-либо ненулевой компоненты ω^*, например, хотя и необязательно, наибольший: $w = \|\omega^*\|_\infty$. Далее осуществляется перенормировка:

$$t' = wt,\ H' = \frac{H}{w},\ \omega^{*\prime} = \frac{\omega^*}{w},\ m' = \frac{m}{w},\ M' = \frac{M}{w},\ E' = \frac{E}{w},\ \varepsilon' = \varepsilon. \tag{1}$$

После переобозначения (если оно необходимо) мы приходим к случаю, когда первая компонента частоты равна единице. Ниже, чтобы сделать изложение более ясным, мы используем исключительно первоначальные величины и лишь в самом конце, вспомнив, что нужно *сначала* совершить преобразования (1), соответственно изменим результаты.

Применим теперь теорему Дирихле при $\alpha = \omega^*$. Для любого $Q > 1$ существует целое T, $1 \le T < Q$, и $\zeta \in \mathbb{Z}^n$, такие что

$$\|T\omega^* - \zeta\| \le \sqrt{n} Q^{-\frac{1}{n}}$$

(норма евклидова). Следовательно, $\omega = T^{-1}\zeta$ – рациональный вектор периода T, удовлетворяющий неравенству

$$\|\omega - \omega^*\| \le \frac{\sqrt{n}}{TQ^{1/n}}. \tag{2}$$

Мы предполагаем, что ω достаточно близко к ω^*, так что частотное отображение имеет обратное. Из сказанного выше следует, что для этого достаточно потребовать выполнения неравенства

$$\frac{\sqrt{n}}{Q^{1/n}} \le |h|_3^{-1} \frac{m^2}{4},$$

в котором T удалено из левой части, так как $T \ge 1$. При этом условии существует точка p такая, что $\omega = \omega(p)$, и

$$\|p - p^*\| \le \frac{\sqrt{n}}{m} \frac{1}{TQ^{1/n}}, \tag{3}$$

где множитель $\frac{1}{m}$ оценивает снизу норму отображения, обратного частотному.

Мы хотим применить теорему 1A в *окрестности точки* p, рациональной, с периодом T, и стремимся, чтобы p^* лежала в зоне влияния p, что будет иметь место, если

$$r(\varepsilon) = \frac{\lambda \varepsilon^\alpha}{T} \ge \|p - p^*\|.$$

Из (3) следует, что последнее, в свою очередь, будет обеспечено, если выбрать

$$Q^{\frac{1}{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\lambda m} \varepsilon^{-\alpha}, \tag{4}$$

что и *определяет* величину Q. Именно в этом месте решающее значение имеет применение теоремы 1A, в которой время устойчивости не зависит от периода, а радиус зоны влияния обратно пропорционален ему. Последнее свойство приводит к равенству (4), в которое T не входит. Ниже мы покажем, что можно получить, если попытаться использовать теоремы 1B и 1C.

Чтобы применить теорему 1A, остается выполнить еще одно важное условие: период не должен быть слишком большим. Точнее, ввиду неравенства $T < Q$, достаточно потребовать:

$$Q \leq \tau\varepsilon^{-\frac{1}{2}(1-3\alpha)},$$

т. е., с учетом (4),

$$\left(\frac{\sqrt{n}}{\lambda m}\right)^n \varepsilon^{-n\alpha} \leq \tau\varepsilon^{-\frac{1}{2}(1-3\alpha)},$$

или

$$\varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{2}-n\alpha} \leq \tau\left(\frac{\lambda m}{\sqrt{n}}\right)^n. \tag{5}$$

Это простое рассуждение очень важно, потому что фактически оно раскрывает значение первого показателя устойчивости, наиболее существенного. Неравенство (5) определяет порог для ε при условии, что $\frac{1}{2}(1-3\alpha) - n\alpha > 0$, или

$$\alpha < \frac{1}{2n+3}.$$

Значение правой части не является, таким образом, достижимым, но всякое меньшее значение – является. Здесь необходимо также помнить, что мы будем затем подставлять $n-1$ вместо n, и показатель устойчивости $a(n)$ будет даваться формулой $a(n) = \alpha(n-1)$. Сейчас мы, продолжая использовать исходные величины, напишем утверждение для значения $\alpha = \frac{1}{2n+4}$, которое удовлетворяет равенству $\frac{1}{2}(1-3\alpha) - n\alpha = \frac{1}{2}\alpha$. Последнее позволяет переписать (5) как

$$\varepsilon^{\alpha} \leq \tau^2\left(\frac{\lambda m}{\sqrt{n}}\right)^{2n}. \tag{6}$$

Радиус устойчивости легко может быть вычислен, так как теорема 1A указывает расстояние до p, и $\|p - p^*\| \leq r(\varepsilon)$. В действительности, вернувшись к тексту немного выше “модельного утверждения” раздела II, можно заметить, что мы доказали несколько больше того, что было реально включено в это утверждение. Фактически было показано, что

$$\|p(t) - p(0)\| \leq 7r\frac{M}{m} < R(\varepsilon).$$

Мы используем эту оценку, чтобы получить:

$$\|p(t) - p(0)\| < R(\varepsilon) < 10^{-2}\frac{\sigma}{M}\frac{\varepsilon^{\alpha}}{T} \leq 10^{-2}\frac{\sigma}{M}\varepsilon^{\alpha}.$$

Для вычисления порога применимости нужно, по существу, взять неравенства (27) раздела II, добавить условие обратимости и, самое важное, условие (5), выраженное в форме (6) благодаря нашему выбору α. Рассмотрим вкратце некоторые детали.

Мы оставляем первое из неравенств (27) неизменным: функция H определена и аналитична в области $D = D(R, \rho, \sigma)$ с центром в точке p^*, а далее, возможно, следует уменьшить область ввиду условия обратимости, как объяснено выше. Применение теоремы 1A в окрестности точки p (а не p^*) ничего не меняет.

Однако используя второе из неравенств (27), нужно остерегаться того факта, что величина Ω связана с точкой p $\big(\Omega = \|\omega(p)\|\big)$, а не p^* $\big(\Omega^* = \|\omega^*\|\big)$. Чтобы выразить все через параметры, центрированные в точке p^*, мы можем добавить, например, следующее условие:

$$|\Omega - \Omega^*| \leq \frac{1}{2}\Omega^*,$$

которое имеет место, если, в частности,

$$M\|p - p^*\| \leq Mr \leq \frac{1}{2}\Omega^*.$$

Но это в точности эквивалентно второму из неравенств (27) (см. “модельное утверждение”, условие II), раздел II), если Ω заменить на Ω^*. Короче, чтобы учесть все эти детали, достаточно подставить Ω^* вместо Ω во второе из неравенств (27). Тогда в определении $\mathcal{T}_0$ (см. (26), раздел II) надо заменить Ω на $\frac{3}{2}\Omega^*$.

Третье из неравенств (27) остается неизменным. Что же касается четвертого, то заметим, что показатель $\frac{1}{2}(1 - 3\alpha)$ больше, чем $\frac{1}{5}$ (или даже $\frac{1}{4}$, если $n \geq 3$); здесь мы уже приняли во внимание подстановку $n \to n-1$, которая должна быть осуществлена после преобразования (1). Затем добавляется условие обратимости вместе с (6), с $n-1$ вместо n. Суммируя сказанное, мы приходим к выводу, что доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Для любой начальной точки* $\big(p(0), q(0)\big)$ $\big(p(0) = p^*\big)$ *траектория* $\big(p(t), q(t)\big)$, *начинающаяся в* $\big(p(0), q(0)\big)$, *допускает оценку*

$$\big\|p(t) - p(0)\big\| \leq 10^{-2}\frac{\sigma}{M}\varepsilon^{\alpha} \quad \textit{при} \quad |t| \leq \mathcal{T}(\varepsilon) = \mathcal{T}_0^* \exp(\varepsilon^{-\alpha}),$$

где $a = a(n) = \frac{1}{2(n+1)}$, $\Omega^* = \Big\|\omega\big(p(0)\big)\Big\|$, $\mathcal{T}_0^* = 3 \cdot 10^{-2}\frac{\sigma}{\Omega^*}$.

Это утверждение имеет место при условии, что ε удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\begin{aligned} &\varepsilon^a \leq 100\frac{M}{\sigma}\inf(R,\rho), \quad && \varepsilon^a \leq 200\frac{M\Omega^*}{\sigma m}, \quad && \varepsilon^a \leq 4 \cdot 10^{-2}\frac{m}{M}, \\ &\varepsilon \leq \tau^5, && \varepsilon^a \leq 200\frac{M^2}{\sigma |h|_3}, && \varepsilon^a \leq \tau^2\Big(\frac{\lambda m}{\sqrt{n-1}}\Big)^{2(n-1)}, \end{aligned} \tag{7}$$

где λ и τ определены в формуле 26 раздела II, а $|h|_3$ – максимум третьей производной h в области D.

В этом утверждении все параметры, связанные с гамильтонианом в течение времени t, суть те, что получены после изменений масштаба (1), т. е. здесь следует использовать величины из равенств (1), помеченные штрихом.

Хотя может показаться, что условия порога довольно опасно разрастаются, только последнее условие имеет реальное значение. В частности, все условия, кроме этого последнего, выглядят совершенно одинаково при любом a из интервала $\left(0, \frac{1}{2n+1}\right)$. С другой стороны, последнее условие является по сути переформулировкой неравенства (5), которое есть прямое следствие оценки Дирихле. Короче, величина первого показателя, управляющего временем устойчивости, – непосредственный "потомок" показателя $\frac{1}{n}$, который входит в теорему Дирихле. В частности, когда число степеней свободы возрастает, результаты ухудшаются не из-за наводнения фазового пространства резонансными поверхностями, а вследствие относительной редкости рациональных точек, т. е. периодических торов. Ниже мы увидим, как эта новая точка зрения может быть использована и для других целей.

Возвращаясь к последнему условию порога, заметим, что оно также является единственным местом, где число n появляется в явном виде. Делитель $\sqrt{n}$ (или $\sqrt{n-1}$) – это просто длина диагонали единичного куба, возникающая в результате использования евклидовых норм, в то времы как sup-норма более естественна для теории аппроксимации. Большого значения это не имеет. Кроме того, последний порог очень чувствителен к величине α (или a), и он исчезает при $a = \frac{1}{2n+1}$. Если выбрать, например, значение $\alpha = \frac{1}{2n+5}$, которое удовлетворяет равенству $\frac{1}{2}(1-3\alpha) - n\alpha = \alpha$, получится условие

$$\varepsilon^a \leq \tau\Big(\frac{\lambda m}{\sqrt{n-1}}\Big)^{n-1}, \quad a = \frac{1}{2n+3},$$

которое гораздо слабее, чем последнее неравенство в (7).

Важно также отметить, что потеря оптимальности в теореме 2 в точности такая же, как и в теореме 1A. Действительно, единственная новая составляющая, добавленная нами, – теорема Дирихле, а она оптимальна (по крайней мере в том, что касается интересующих нас величин).

С нашей точки зрения, весьма замечательно, что, по сути, лучший возможный результат теории возмущений для конечных интервалов времени может быть получен с помощью самого основного результата теорем приближений, и в то же время для определенных классов начальных условий легко вывести те или иные важные усовершенствования и улучшения теоремы 2. Мы посвятим конец этого раздела некоторым из них, свободно используя понятия и обозначения из приложения 1.

Накладывание арифметических условий на частоту, по существу, эквивалентно обеспечению некоторой связи между q (или T) и Q в теореме Дирихле. В частности, верно следующее утверждение.

Следствие 1. *Предположим, что после изменения масштабов (1) будем иметь: $\omega^* = \omega(p^*) = (1, \omega')$, где $\omega' \in \Omega_{n-1}(\delta, \gamma)$ $(\gamma, \delta > 0$; мы избегаем буквы τ, которая уже была* *использована в этом контексте). Тогда в теореме 2 можно заменить радиус удержания на*

$$\left\|p(t)-p^*\right\| \le 10^{-2}\frac{\sigma}{M}\,\frac{\varepsilon^a}{T} \le 10^{-2}\frac{\sigma}{M}\Big(\frac{\lambda m}{\sqrt{n-1}}\Big)^{\frac{n-1}{1+\delta}}\frac{\varepsilon^b}{\gamma},$$

где $b = a\frac{n+\delta}{1+\delta}$, $a = \frac{1}{2(n+1)}$.

Время устойчивости и условия порога остаются теми же.

В частности, почти все точки в фазовом пространстве для любого $\eta > 0$ *допускают показатели устойчивости*

$$(a,b) = \Big(\frac{1}{2n+1}-\eta, \frac{n}{2n+1}-\eta\Big).$$

Доказательство проводится непосредственно. На самом деле мы уже выписывали первое неравенство для нормы $\left\|p(t)-p^*\right\|$. Теперь, при $\omega^* \in \Omega_n(\delta,\gamma)$, период может быть оценен снизу, так как

$$Q^{-\frac{1}{n}} \ge \|T\omega^*\|_{\mathbb{Z}} \ge \Big(\frac{\gamma}{T}\Big)^{\frac{1}{n}(1+\delta)}.$$

Величина Q дается формулой (4), и ее требуется только подставить; конечно, сначала надо использовать равенства (1) для нормировки одной из компонент. Последнее утверждение вытекает из предложения, которое можно найти в приложении 1, и того факта, что в теореме 2 можно заменить $\frac{1}{2n+2}$ на $\frac{1}{2n+1}-\eta$ для любого $\eta > 0$ (при этом порог стремится к нулю при $\eta \to 0$). $\square$

Заметим, что пара показателей подходит очень близко к оптимальной, по-видимому, паре $\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2}\right)$. Это утверждение может немного ввести в заблуждение, потому что хотя любая точка принадлежит $\Omega_n(\delta)$ для любого $\delta > 0$, верно также и то, что почти для каждой точки соответствующая константа γ стремится к нулю вместе с δ. Можно прийти к результату несколько иной природы. Зафиксируем $\delta > 0$ и рассмотрим случай, когда $\gamma = \gamma(\varepsilon)$ стремится к бесконечности при $\varepsilon \to 0$, например, $\gamma = \gamma_0\varepsilon^{-\xi}$, $\gamma_0 > 0$, $0 < \xi < b = b(n,\delta)$. Тогда можно получить такой же результат на множестве (после изменения масштабов) $\Omega_{n-1}\big(\delta,\gamma(\varepsilon)\big)$, относительная мера которого стремится к единице при $\varepsilon \to 0$, со вторым показателем $b(n,\delta) - \xi$ и фиксированным значением γ_0.

Предположим теперь, что мы захотели применить теорему 1B или 1C для того, чтобы получить результаты для произвольных начальных условий. Тогда бы мы встретились со своего рода явлением перемежаемости, на котором, возможно, стоит остановиться. Пусть $(T_i)_{i\ge 0}$ – последовательность периодов вектора ω^*, $(\omega_i)_{i\ge 0}$ – соответствующие наилучшие аппроксимации. Рациональные векторы ω_i сходятся к ω^*, так что $T_i\omega_i \in \mathbb{Z}^n$, и имеет место оценка:

$$\|\omega_i-\omega^*\| \le \frac{\sqrt{n}}{T_iT_{i+1}^{1/n}}.$$

Для достаточно больших i определим соответствующие точки p_i, сходящиеся к p^* $\big(\omega(p_i) = \omega_i\big)$, и пусть

$$r_i = \|p_i - p^*\| \leq \frac{\sqrt{n}}{m}\,\frac{1}{T_i T_{i+1}^{1/n}}. \tag{8}$$

Наконец, мы определим последовательность значений ε_i, удовлетворяющих равенствам $r_i = r_0\varepsilon_i^{\frac{1}{3}}$, где r_0 обозначает, как и раньше, константу, определенную формулой (29) из раздела II. С этими определениями получаем в прежнем контексте следующее утверждение.

. *Пусть* $\varepsilon > 0, \varepsilon_{i-1} \geq \varepsilon > \varepsilon_i, i$ *достаточно велико. Тогда*

$$\big\|p(t) - p^*\big\| \leq \frac{8M}{m} r_{i-1}$$

$$\text{\textit{при}}\ |t| \leq \mathcal{T}_i^* = \mathcal{T}_0^* \exp(\mu T_i^{\frac{1}{n-1}}),\ \text{\textit{где}}\ \mathcal{T}_0^* = 3\cdot 10^{-2}\frac{\sigma}{\Omega^*},\ \mu = 10^{-2}\frac{\sigma}{\sqrt{n-1}}\Big(\frac{m}{M}\Big)^2.$$

Как обычно, параметры относятся к ситуации, возникающей после преобразования (1).

Выписанные оценки верны для любых начальных условий $\big(p^* = p(0), q(0)\big)$, но мы не придаем этому довольно неестественному утверждению статус "теоремы" и даже не указываем пороги, которые легко могут быть вычислены. Доказательство снова очень кратко. Достаточно применить в окрестности точки p_{i-1} теорему 1C, условия которой выполнены ввиду $r_{i-1} \geq r_0\varepsilon^{\frac{1}{3}}$, что следует из определений ε и последовательности (ε_i). Далее, для оценки показателя $\frac{\lambda}{r_{i-1}T_{i-1}}$ снизу используем неравенство (8)

$$\frac{\lambda}{r_{i-1}T_{i-1}} \geq \frac{\lambda m}{\sqrt{n}} T_i^{\frac{1}{n}}.$$

Наконец, заметим, что множитель $\frac{\lambda m}{\sqrt{n}}$ больше, чем μ, после подстановки $n-1$ вместо n. □

И радиус удержания, и время устойчивости остаются постоянными, когда ε принадлежит интервалу $(\varepsilon_i, \varepsilon_{i-1})$. На самом деле наиболее интересная ситуация возникает, когда ε равно одному из ε_i. Это также очевидно при применении теоремы 1B: если $\varepsilon = \varepsilon_{i-1}$, она применима в окрестности точки p_{i-1}, но как только ε перейдет через это значение, p^* покидает зону влияния p_{i-1}, и вместо p_{i-1} необходимо использовать точку p_i. Последнее обстоятельство заставляет время устойчивости разрывно перескакивать от величины, пропорциональной $\exp\Big(\frac{\tau}{T_{i-1}\varepsilon^{1/3}}\Big)$, к величине, пропорциональной $\exp\Big(\frac{\tau}{T_i\varepsilon^{1/3}}\Big)$.

Отметим, что величины T_i, ω_i, p_i, r_i имеют очевидный внутренний смысл, но последовательность (ε_i) довольно искусственна, снова отчасти благодаря показателю $\frac{1}{3}$ вместо $\frac{1}{2}$ в теореме 1B. По-настоящему же важным является то, что распределение рациональных векторов вблизи данного вектора может быть весьма беспорядочным (например, ничего в общем случае нельзя сказать о последовательностях T_i/T_{i+1} или r_i/r_{i+1}), и возникает последовательность значений, для которых приближение замкнутыми орбитами является относительно лучшим из возможных.

Если иметь это в виду, то не покажется неожиданным, что можно доказывать утверждения типа следствия 1, используя теорему 1B и диофантовы множества $\Omega(\tau,\gamma)$. В самом деле, в соответствии с самим определением этих множеств (см. приложение 1) становится возможным оценить, например, отношения T_i/T_{i+1} снизу, что позволяет получать результаты, которые будут иметь место для всех достаточно малых возмущений на множестве большой меры (или даже почти всюду). Вспоминая включения из приложения 1:

$$\Omega_n(\tau,\gamma) \subset \Omega(\tau,\gamma^{-(1+\tau)}),$$

можно затем сравнить утверждение, полученное из теоремы 1B, со следствием 1 на множествах типа $\Omega_n(\tau,\gamma)$ и убедиться, что эти результаты, по существу, эквивалентны. Мы не будем вдаваться в нетрудные подробности.

В качестве последнего замечания по этой теме отметим, что введение диофантовых условий при изучении поведения системы на *конечных* отрезках времени может выглядеть в какой-то степени парадоксальным, потому что эти арифметические условия имеют сугубо асимптотическую природу. В действительности можно назвать две дополнительные возможности, которые мы не использовали.

1. Нас интересуют явления, возникающие на экспоненциально больших отрезках времени; с другой стороны, последовательность периодов (T_i) *любого* вектора возрастает, по крайней мере, геометрически (см. приложение 1). Следовательно, мы можем ограничиться индексами i такими, что $i = O(\varepsilon^{-c})$ для некоторого $c > 0$. Это “совместный” аналог отбрасывания высоких гармоник, который естественно интерпретируется в терминах времен приближенного возвращения (см. снова приложение 1).

2. Имеется дополнительная возможность, связанная с начальными условиями. Предположим, что мы разбиваем радиус $r(\varepsilon)$ зоны влияния, скажем, на две равные части. Тогда достаточно найти точку, в которой частота обладает хорошими арифметическими свойствами и которая лежит не далее $\frac{r(\varepsilon)}{2}$ от данного начального условия p^*.

Видимо, комбинируя эти два замечания, можно показать, что оценка радиуса удержания, полученная вследствии 1, на самом деле имеет место для любой точки в фазовом пространстве, так что второй показатель устойчивости, действительно, всегда близок к $\frac{1}{2}$. Во всяком случае, второе замечание будет использовано ниже при выводе следствия 3.

Перейдем теперь к интерпретации резонансов и к тем явлениям, которые возникают, когда начальные условия резонансны или хотя бы *близки* к резонансным. Грубо говоря, существенным наблюдением здесь является то, что чем более резонансны начальные условия, тем более устойчивой будет соответствующая траектория. Напомним, что самые резонансные точки отвечают в точности рациональным векторам, т. е. невозмущенным замкнутым орбитам, и что, как мы уже отмечали, теоремы 1A, 1B, 1C, по существу, не зависят от размерности. Мы особо подчеркиваем, что эта стабилизация через резонанс является специфической особенностью квазивыпуклых систем и, видимо, не имеет места для крутых гамильтонианов общего вида.

Напомним сперва некоторые стандартные понятия. Пусть $\mathcal{M}$ – подмодуль (или подрешетка) модуля $\mathbb{Z}^n$ ранга (размерности) r, порожденный над $\mathbb{Z}$ линейно независимыми векторами $k_1, \ldots, k_r$ из $\mathbb{Z}^n$. Вектор $\omega \in \mathbb{R}^n$ называется резонансным с *кратностью* r и *ассоциированным модулем* $\mathcal{M}$ (мы будем говорить: $\mathcal{M}$-резонансным), если $(\omega, k) = 0$ для любого $k \in \mathcal{M}$, что, конечно, эквивалентно системе равенств $(\omega, k_i) = 0$, $i = 1, \ldots, r$. Мы также ставим в соответствие $\mathcal{M}$ *резонансную поверхность* $\Sigma_{\mathcal{M}}$, состоящую из точек p в пространстве переменных действия, в которых частота $\omega(p)$ $\mathcal{M}$-резонансна:

$$\Sigma_{\mathcal{M}} = \Big\{ p \in \mathbb{R}^n,\ \big(\omega(p), k_i\big) = 0,\, i = 1, \ldots, r \Big\}.$$

Так как частотное отображение – локальный диффеоморфизм, $\Sigma_{\mathcal{M}}$ является гладким многообразием размерности $d = n - r$. В этих классических обозначениях мы докажем следующее.

Следствие 2. *Пусть $\mathcal{M}$ – подмодуль $\mathbb{Z}^n$ ранга r, $0 \le r \le n-1$, $p^* \in \mathbb{R}^n$, $\omega(p^*) = \omega^*$. Предположим, что частота ω^* $\mathcal{M}$-резонансна, т. е. $p^* \in \Sigma_{\mathcal{M}}$. Тогда существуют положительные константы $c(\mathcal{M})$ и $c'(\mathcal{M})$ (которые будут конструктивно определены в процессе доказательства) такие, что теорема 2 и следствие 1 остаются справедливыми для точек $\big(p(0) = p^*, q(0)\big)$ $\big(q(0)$ произвольно$\big)$ при следующих изменениях:*

а) *n везде заменяется на $d = n - r$, а $\sqrt{n-1}$ – на $c(\mathcal{M})\sqrt{d-1}$;*

б) *в преобразовании (1) $w = \|\omega^*\|_\infty$ заменяется на $c'(\mathcal{M})w$;*

в) *наконец, в следствии 1 выражение “почти все точки” должно пониматься как “почти всюду на резонансной поверхности $\Sigma_{\mathcal{M}}$”, на которой задана естественная поверхностная мера.*

Основная идея состоит в том, что резонансные поверхности должны рассматриваться как множества точек, содержащие необычно много рациональных векторов. В частности, следствие 2 почти непосредственно вытекает из сформулированной ниже леммы.

Лемма 3. *Пусть $\mathcal{M}$ – подмодуль $\mathbb{Z}^n$ ранга r, $0 \le r \le n$, а вектор $\alpha \in \mathbb{R}^n$ $\mathcal{M}$-резонансен. Пусть $d = n - r$. Тогда существует $c(\mathcal{M})$ такое, что если $Q > 1$ вещественно, то можно найти целое q из интервала $1 \le q < Q$ такое, что*

$$\|q\alpha\|_{\mathbb{Z}} \le c(\mathcal{M}) Q^{-\frac{1}{d}}.$$

Величина $c(\mathcal{M})$ определяется как наименьшая константа с таким свойством, а целое число $c(\mathcal{M})/c\big(\{0\}\big)$ мы будем называть порядком резонанса (или подмодуля).

Это утверждение очевидно в случае, когда $\mathcal{M}$ определяет “стандартный” резонанс, т. е. когда α имеет вид $\alpha = (0, \alpha')$, где $0 \in \mathbb{R}^r$ – нулевой вектор, а $\alpha' \in \mathbb{R}^d$. Доказательство леммы превращается теперь в упражнение по линейной алгебре, с помощью которой можно свести все к этому частному случаю, но мы рассмотрим для полноты некоторые детали. Прежде всего заметим, что, согласно теореме Дирихле, $c\big(\{0\}\big) \le 1$, но равенство здесь *не* достигается (см. приложение 1), вследствие чего мы и определили порядок так, как изложено выше. Однако так как $c(\{0\})$ близко к единице и разность совершенно несущественна для наших целей, мы будем иногда позволять себе называть само $c(\mathcal{M})$ порядком резонанса.

Пусть $K = (k_i^{(j)})$ – матрица размера $r \times n$, строки которой – векторы k_i, порождающие $\mathcal{M}$ над $\mathbb{Z}$: $k_i = (k_i^{(j)})$, $j = 1, \dots, n$. Так как элементы K целые, классический результат из линейной алгебры утверждает, что K может быть записана в виде $K = B\Delta A$, где $B \in Gl_r(\mathbb{Z})$ и $A \in Gl_n(\mathbb{Z})$ – *обратимые* квадратные матрицы, а Δ имеет вид: $\Delta = \big[D \mid 0_d\big]$. Здесь 0_d – нулевая матрица порядка $d = n - r$, а матрица D диагональна: $D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_r)$ и, кроме того, d_j есть кратное d_i при $i \leq j$. Натуральные числа d_i часто называют инвариантными факторами $\mathcal{M}$. Мы будем говорить, что модуль *примитивен*, если все d_i равны единице, что эквивалентно требованию $d_r = 1$, или, иначе, требованию, что все миноры K порядка $r \times r$ взаимно просты. В этом случае $D = \mathbb{I}_r$, и мы пишем: $\Delta = \Pi$, потому что это оператор проектирования. Любой модуль содержится в единственном примитивном (получаемом заменой исходной матрицы Δ на Π) модуле, который определяет тот же резонанс, так что можно ограничиться рассмотрением примитивных модулей. Это следует из очевидных эквивалентностей:

$$\alpha\ \mathcal{M}\text{-}\textit{резонансно} \iff K\alpha = 0 \iff \Delta A\alpha = 0 \iff \Pi A\alpha = 0.$$

Таким образом, будем считать модуль $\mathcal{M}$ примитивным и обозначим через (e_i), $i = 1, \dots, n$, стандартный базис в $\mathbb{Z}^n$. Пространство $\mathcal{M}$-резонансных векторов порождается над $\mathbb{R}$ векторами $A^{-1}e_i, i = r+1, \dots, n$. Пусть $\|u\|_\infty$ обозначает, как обычно, sup-норму и пусть для любой матрицы $M = (m_{ij})$ символ $\|M\|_\infty$ обозначает соответствующую норму оператора, т. е.

$$\|M\|_\infty = \sup_{u, \|u\|=1} \|Mu\|_\infty = \sup_i \sum_j |m_{ij}|.$$

Теперь предположим, что мы хотим приблизить $\mathcal{M}$-резонансный вектор α. Вектор $A\alpha$ лежит в подпространстве $\mathbb{R}^d$, натянутом на векторы $(e_i), i = r+1, \dots, n$. Применяя теорему Дирихле в этом пространстве, находим $q \in \mathbb{N}$ такое что $\|qA\alpha\|_{\mathbb{Z}} \leq Q^{-1/d}$, следовательно,

$$\|q\alpha\|_{\mathbb{Z}} \leq \|A^{-1}\|_\infty Q^{-\frac{1}{d}},$$

потому что элементы матрицы A – *целые*. Мы, таким образом, доказали лемму 3 и оценку $c(\mathcal{M}) \leq \|A^{-1}\|_\infty$.

Следствие 2 непосредственно вытекает из этой леммы, потому что если частота ω^* является $\mathcal{M}$-резонансной, то, используя лемму 3, оценку (2) можно заменить на

$$\|\omega - \omega^*\| \leq \frac{\sqrt{d}c(\mathcal{M})}{TQ^{1/d}},$$

и читатель может проверить, что из этого все следует, кроме предварительной перенормировки. Для большей определенности используем линейное симплектическое преобразование

$(p,q) \to (p',q') = ({}^tA^{-1}p, Aq)$, чтобы свести ситуацию к стандартному резонансному случаю. *Затем* применим преобразование (1) для увеличения размерности на единицу и получим вектор частот вида $(0,\dots,0,1,\omega')$, где $\omega' \in \mathbb{R}^{d-1}$. При этом был изменен масштаб одной из компонент $A\omega^*$, вследствие чего и появился множитель $c'(\mathcal{M})$. На самом деле отсюда следует, что $c'(\mathcal{M}) \leq \|A\|_\infty$.

Наконец, последнее утверждение следствия об интерпретации выражения "почти все точки", встречающегося в следствии 1, ясно из вышеизложенного. $\square$

Добавим несколько простых замечаний о геометрическом смысле констант $c(\mathcal{M})$ и $c'(\mathcal{M})$ и выведем для них немного лучшие оценки.

По построению последние d столбцов матрицы A^{-1} представляют собой целочисленные векторы, ортогональные $\mathcal{M}$, и в действительности они порождают над $\mathbb{Z}$ примитивный модуль $\mathcal{M}^\perp$, ортогональный $\mathcal{M}$. Иными словами, матрица E размера $n \times d$, составленная из последних d столбцов A^{-1}, определяет линейный мономорфизм из $\mathbb{Z}^d$ в $\mathbb{Z}^n$, образ которого совпадает с $\mathcal{M}^\perp$. Очевидно, можно улучшить оценку $c(\mathcal{M})$ следующим образом:

$$c(\mathcal{M}) \leq \|E\|_\infty = \sup_{i=1,\dots,n} \sum_{j=r+1}^{n} \left|(A^{-1})_{ij}\right|.$$

Так как определитель матрицы A равен ± 1, ее обратная – это просто матрица, составленная из алгебраических дополнений. Можно еще минимизировать правую часть относительно возможных матриц E, т. е. относительно всевозможных мономорфизмов из $\mathbb{Z}^d$ в $\mathbb{Z}^n$ с образом $\mathcal{M}^\perp$. Иными словами, E можно заменить на ET, где $T \in Gl_d(\mathbb{Z})$, что соответствует замене A на

$$\begin{pmatrix} \mathbb{I}_r & 0 \\ 0 & T^{-1} \end{pmatrix} A,$$

если использовать блочные обозначения.

Аналогичным образом последние d *строк* матрицы A суть векторы, порождающие модуль, или решетку, $\mathcal{M}'$ такую, что $\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}' = \mathbb{Z}^n$, и мы имеем оценку

$$c'(\mathcal{M}) \leq \sup_{i=r+1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|,$$

которую можно потом минимизировать по различным выборам этих векторов.

Конечно, матрица B, которая здесь не используется, всего лишь соответствует всевозможным выборам базиса в самом $\mathcal{M}$: при замене базиса матрица K заменяется на PK, где $P \in Gl_r(\mathbb{Z})$, и выбор $P = B^{-1}$ сводит общую ситуацию к случаю $B = \mathbb{I}_r$.

Заметим также, поскольку это иногда может быть полезно, что нетрудно выписать явно базис из *целых векторов* для вещественного подпространства, ортогонального $\mathcal{M}$ ("резонансной плоскости"). Действительно, предположим, что векторы $k_1,\dots,k_r,e_{r+1},\dots,e_n$ порождают все пространство $\mathbb{R}^n$, что всегда будет иметь место после возможной перенумерации. Затем положим

$$l_i = k_1 \wedge \dots \wedge k_r \wedge e_{r+1} \wedge \dots \wedge \widehat{e_{r+1}} \wedge \dots \wedge e_n, \quad i = 1,\dots,d,$$

где $\wedge$ обозначает обычное внешнее произведение, а вектор под “шляпкой” опущен. Векторы l_i порождают над $\mathbb{Z}$ модуль $\mathcal{L}$, $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}^{\perp}$, а его линейная оболочка над $\mathbb{R}$ ($\mathcal{L} \times \mathbb{R}$) есть плоскость, ортогональная $\mathcal{M}$. Вообще говоря, модуль $\mathcal{L}$ не примитивен, так что $\mathcal{L} \neq \mathcal{M}^{\perp}$.

В качестве последнего замечания рассмотрим случай, когда $r = n-1$, т. е. “максимально резонансный” случай, или случай рациональных векторов. Тогда следствие 2 должно сводиться и действительно сводится к теореме 1А, кроме нескольких небольших ухудшений, которые возникают из-за того, что мы идем окружным путем. При $r = n-1$, заменяя α на ω, имеем: $A\omega = (0, \dots, 0, \nu)$, где $\nu > 0$ (с точностью до возможной перезамены знака в A), так что

$$\nu = \sum_j A_{nj}\omega_j,$$

где A_{nj} – последняя строка матрицы A. Период равен $T = \frac{1}{\nu}$, а $T\omega \in \mathbb{Z}^n$ есть последний столбец матрицы A^{-1}. Другими словами, предположим, что $(\omega, k_i) = 0, i = 1, \dots, n-1$, и $n-1$ квадратных матриц порядка $n-1$, получаемых вычеркиванием столбца из матрицы K, имеют взаимно простые определители. Если $k_n \in \mathbb{Z}^n$ удовлетворяет условию $\det(k_1, \dots, k_n) = \pm 1$, то период дается формулой $T = \left|(\omega, k_n)\right|^{-1}$.

Теперь мы улучшим следствие 2, показав, что начальная точка p^* не обязана лежать в точности на резонансной поверхности. Здесь используется сделанное выше замечание о том, что вместо приближения самой начальной точки можно брать другую, достаточно близкую точку. Итак рассмотрим снова модуль $\mathcal{M}$, соответствующую резонансную поверхность $\Sigma_{\mathcal{M}}$ и точку p^*, отстоящую от $\Sigma_{\mathcal{M}}$ на расстояние, меньшее $\frac{r(\varepsilon)}{2}$. Имеем (см. теорему 1А): $r(\varepsilon) = \lambda \frac{\varepsilon^{\alpha}}{T}$ и мы хотим оценить это выражение *снизу*, когда T пробегает интервал, указанный в теореме 1А. Это уже сделано в разделе II, в конце доказательства теоремы 1А, и в результате получено:

$$r(\varepsilon) \geq r_0 \varepsilon^{\frac{1}{2}(1-\alpha)} > r_0 \varepsilon^{\frac{1}{2}},$$

где r_0 определено в (29), раздел II. Итак, пусть p^* удовлетворяет условию

$$\operatorname{dist}(p^*, \Sigma_{\mathcal{M}}) \leq \frac{r_0}{2}\varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Применим теорему 2 в варианте следствия 2 к точке на поверхности $\Sigma_{\mathcal{M}}$, ближайшей к p^* (такая точка не обязательно определяется однозначно, но это несущественно). Единственное различие состоит в том, что зона влияния должна сжаться, с тем чтобы результат мог быть успешно применен к точке p^*. Поэтому мы также приближаем точку на поверхности рациональными точками в радиусе $r(\varepsilon)/2$ вместо $r(\varepsilon)$. Вернувшись к соотношению (3), можно убедиться, что формально это эквивалентно замене $\sqrt{n}$ на $2\sqrt{n}$, или, скорее, замене $c(\mathcal{M})\sqrt{d-1}$ на $2c(\mathcal{M})\sqrt{d-1}$. Таким образом, доказано следующее следствие.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Пусть $\mathcal{M}$ – подмодуль $\mathbb{Z}$ ранга r, $\Sigma_{\mathcal{M}}$ – соответствующая резонансная поверхность размерности $d = n - r$. Пусть p^* – точка в пространстве переменных действия, удовлетворяющая условию:*

$$\operatorname{dist}(p^*, \Sigma_{\mathcal{M}}) \leq \frac{r_0}{2}\varepsilon^{\frac{1}{2}} = \frac{m}{8M}\sqrt{\frac{2E}{M}}\varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда для любой точки $\big(p(0) = p^*, q(0)\big)$ имеет место утверждение теоремы 2, если заменить n на d и $\sqrt{n-1}$ на $2c(\mathcal{M})\sqrt{d-1}$. В предварительном преобразовании (1) величина $w = \|\omega^*\|_\infty$ должна быть заменена на $c'(\mathcal{M})w$.

Конечно, можно также придумать – несколько натянутое – утверждение в духе следствия 1. Мы надеемся, что у следствий 2 и 3 обнаружатся важные и далеко идущие приложения. Грубо говоря, можно вспомнить, что начальные условия, лежащие в трубчатой окрестности толщины $O(\sqrt{\varepsilon})$ резонансной поверхности размерности d, будут устойчивы (в пространстве переменных действия) на временах порядка $\exp(c\varepsilon^{-\frac{1}{2d}})$, но, конечно, в игру вступает порядок резонанса, и при данном ε устойчивость нарушается, если этот порядок слишком высок. Мы немного разовьем эту эвристическую картину в разделе V, §2.

Чтобы выразить это иначе, определим следующие подмножества фазового пространства:

$$\mathcal{F}(d_0, c_0, \varepsilon) = \Big\{(p^*, q^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n \Big| \text{ существует подмодуль } \mathcal{M} \text{ модуля } \mathbb{Z}$$
$$\text{такой, что } \operatorname{corank}\mathcal{M} \leq d_0, c(\mathcal{M}) \leq c_0 \text{ и } \operatorname{dist}(p^*, \Sigma_{\mathcal{M}}) \leq \frac{r_0}{2}\varepsilon^{\frac{1}{2}}\Big\},$$

где $c_0 > 0$ и $d_0 \in \mathbb{N}$ $(1 \leq d_0 \leq n)$. На таком подмножестве устойчивость переменных действия, в сущности, такая же, как и у системы с d_0 степенями свободы. Конечно, соблазнительно устремить n к бесконечности (термодинамический предел) или просто положить с самого начала $n = \infty$ (см. раздел IV, § 3).

Следствия 2 и 3 также показывают, что для *квазивыпуклых систем* должна иметь место конкуренция между устойчивостью на конечных временах и вечной КАМ-устойчивостью, которая касается, грубо говоря, "очень нерезонансных" частот. Это может быть существенно, в частности, в небесной механике, о чем подробно сказано ниже (см. раздел IV, § 1).

IV. Дополнения, приложения, перспективы

§ 1. Дополнительные переменные и приложения к небесной механике

Существует важное обобщение изложенных выше результатов, которое не требует какой-либо дополнительной работы. А именно, можно добавить канонические переменные в возмущении. Пусть

$$H(p, q, I, \phi) = h(p) + \varepsilon f(p, q, I, \phi), \quad (p, q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n, \quad (I, \phi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{T}^m.$$

Если функция h является квазивыпуклой, все предыдущие результаты переносятся на этот случай (устанавливается, конечно, только устойчивость переменных p). Чтобы проверить это, достаточно просмотреть снова все доказательства и убедиться, что при добавлении "фиктивных" переменных ничего не меняется (это замечание остается верным также и в общем случае крутых функций, (см. [12], § 1.5). Следует подчеркнуть, что такие системы вырождены с точки зрения КАМ-теории, и последнюю можно распространить на них только при некоторых довольно ограничительных дополнительных предположениях, основным из которых является то, что возмущение f должно иметь вид

$$f(p,q,I,\phi) = f_1(p,I) + \varepsilon f_2(p,q,I,\phi),$$

с выполнением соответствующих условий невырожденности[2].

В качестве первого класса приложений можно с этой точки зрения рассмотреть "адиабатически-интегрируемые" ситуации, т. е. гамильтонианы вида

$$H(p,q,\varepsilon t) = h(p) + \varepsilon f(p,q,\varepsilon t),$$

где f – периодическая функция по переменной $\tau = \varepsilon t$. Введение переменной e, канонически сопряженной с τ, приводит гамильтониан к виду

$$H(p,q,e,\tau) = h(p) + \varepsilon\big[e + f(p,q,\tau)\big],$$

что является частным примером рассмотренного выше случая.

Здесь мы хотели бы упомянуть одно важное приложение, которое может иметь далеко идущие следствия в небесной механике: задачу о системах планет. Так как последняя подробно обсуждалась В.И. Арнольдом ([1]) в связи с сохранением торов и Н.Н. Нехорошевым ([12], § 1.18 и § 12) с той же точки зрения, что и наша, а именно с точки зрения устойчивости на экспоненциально больших временах, то мы изложим постановку задачи весьма кратко. Однако наши результаты будут не только количественно лучше, чем в [12], но и качественно другими, потому что следствия 2 и 3, похоже, действительно открывают новые перспективы, когда применяются в этом контексте.

Итак, потребуется исследовать частный случай задачи многих тел, когда одно из них (Солнце) немного тяжелее остальных (планет). Если пренебречь взаимодействием планет, они будут двигаться по взаимно независимым кеплеровским орбитам, которые определяются их эллиптическими элементами: большой полуосью, эксцентриситетом и наклонением, вместе с соответствующими углами. По причинам, изложенным ниже, нам следует ограничиться случаем малых эксцентриситетов и малых взаимных наклонений, т. е. задачей, близкой к

[2] В этом случае говорят, что возмущение f снимает собственное вырождение исходного гамильтониана h (*прим. перев*).

плоской круговой. Наиболее удобны здесь будут так называемые гелиоцентрические координаты Пуанкаре. Их определение можно найти в [14] (§ 8–12) или в [1] (III, § 2). Они обозначаются через $(\Lambda, H, Z, \lambda, h, \zeta) \in (\mathbb{R}^n)^3 \times (\mathbb{T}^n)^3$. Переменные действия (Λ, H, Z) являются простыми функциями полуосей, эксцентриситетов и взаимных наклонений. Когда эксцентриситеты и наклонения малы, лучше всего перейти к симплектическим полярным координатам в парах (H, h) и (Z, ζ), получив переменные $(\Lambda, \lambda, \xi, \eta, p, q)$, где

$$H = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2), \quad Z = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$$

(в компонентной записи). Масса Солнца может быть нормирована к единице, а массы планет записаны в виде $m_i = \varepsilon\mu_i$, где ε – отношение массы самой тяжелой планеты к массе Солнца (для солнечной системы $\varepsilon \approx 10^{-3}$). В этих обозначениях гамильтониан приобретает вид:

$$H = h(\Lambda) + \varepsilon f(\Lambda, \lambda, \xi, \eta, p, q, \varepsilon), \quad h(\Lambda) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i^3}{\Lambda_i^2}.$$

Кроме того, $\Lambda_i = \mu_i\sqrt{a_i}$, где a_i – большая полуось эллипса, оскулирующего к траектории i-й планеты (имеющего с этой траекторией касание второго порядка) в данный момент времени. Следовательно, следить за переменными Λ_i – это то же самое, что следить за осями a_i.

Перед применением какой-либо теоремы необходимо всякий раз проверять, что возмущение действительно мало, а последнее верно только в случае, если $n + 1$ тел не приближается слишком сильно друг к другу. Так как мы будем оценивать только величины a_i, единственной областью в фазовом пространстве, где это влечет оценки эксцентриситетов и наклонений, является окрестность плоской круговой задачи, потому что плоское круговое движение, при котором планеты движутся в одном направлении, отвечает максимуму углового момента системы, а последний есть сохраняющаяся величина. Точнее, пусть G_i – вектор углового момента i-й планеты $\left(\|G_i\| = m_i\big(a_i(1 - e_i^2)\big)^{\frac{1}{2}}, \text{где } e_i \text{ – эксцентриситет}\right)$, $G = \sum\limits_i G_i$ – полный угловой момент, и $N = \varepsilon^{-1}G$ не зависит от ε. Выберем $2n$ положительных чисел α_i, β_i, удовлетворяющих неравенствам

$$0 \le \alpha_1 \le \beta_1 \le \alpha_2 \le \dots \le \alpha_n \le \beta_n.$$

Область $B(\alpha, \beta, \gamma)$ *движения планет* – это такая область фазового пространства, в которой

$$\alpha_i \le a_i \le \beta_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{и} \quad \|N\| \ge \gamma,$$

где число γ лежит в интервале $0 \le \gamma_0(\alpha, \beta) < \gamma < \gamma_m(\alpha, \beta)$. Здесь $\gamma_m(\alpha, \beta)$ – максимально возможное значение $\|N\|$ при условиях, наложенных на полуоси a_i, оно отвечает плоским круговым движениям с радиусами β_i, а $\gamma_0(\alpha, \beta)$ – наименьшее значение $\|N\|$, соответствующее возможным столкновениям планет между собой и (или) с Солнцем.

В работе [12] (§ 12) подробно обсуждается то обстоятельство, что в области $B(\alpha,\beta,\gamma)$, действительно, можно применять результаты об устойчивости на экспоненциально больших временах. Рассуждения [12] переносятся сюда без каких-либо изменений.

Так как $h(\Lambda)$ – выпуклая функция, применима теорема 2, которая обеспечивает устойчивость главных полуосей на экспоненциально больших временах. В то же время выводы из следствий 2 и 3 гораздо более любопытны. Действительно, они утверждают, что резонансные, или даже близкие к резонансным, траектории являются *привилегированными* с точки зрения устойчивости на конечных временах. Резонанс в данном случае означает просто резонанс между величинами, обратными периодам движений вдоль мгновенных эллипсов, т. е. обратными "годам"; соотношние между этими периодами обращения и значениями полуосей, т. е. третий закон Кеплера, вытекает из вида выражения для $h(\Lambda)$.

С другой стороны, существует давняя дискуссия о том, что небесные тела, похоже, выбирают резонансные траектории чаще, чем можно было бы ожидать из чисто статистических соображений. Эти размышления о "гармонических движениях" можно проследить вплоть до Пифагора, Платона или Кеплера, а в современных терминах такая точка зрения убедительно отстаивалась А.М. Молчановым (см. [19], [40], [50], [51]), который заметил существование многих "простых" резонансных соотношений между планетами Солнечной системы и внутри спутниковых подсистем Юпитера, Сатурна и Урана. Он был немедленно подвергнут резкой критике в том смысле, что эти соотношения не являются по-настоящему "удивительными" и могут часто встречаться среди чисел и векторов, выбранных "случайно"; затем он отвечал на эту критику, стараясь, в частности, дать точное определение термина "простой", использованного выше. Так как в данном случае не может быть проведен никакой повторяемый эксперимент, доводы оставались хрупкими. Как бы то ни было, множество последующих работ было посвящено этому предмету, включая резонансы, в которые вовлечены искусственные спутники. Многие из этих резонансов приписывались негамильтоновым причинам, например, приливным эффектам, но все равно казалось, что в массе притиворечивых наблюдений содержится некоторая "тайна". Говоря словами Молчанова, "почему планеты и спутники заперты в простые резонансы, а кольца Сатурна или пояс астероидов прерываются в этих местах"? Даже если отдельные утверждения можно оспорить, последнее, по-видимому, представляет подлинную загадку.

Приведенные выше результаты предлагают первое чисто гамильтоново частичное объяснение этому. Если тела задерживаются значительно дольше около резонансных траекторий, чем в других областях, то через некоторое время окрестности этих траекторий, действительно, станут наиболее заполненными местами. Однако все это не так просто, и, в соответствии с духом вышеприведенной цитаты, мы на самом деле установили "конкуренцию" между устойчивостью на конечных отрезках времени и вечной устойчивостью типа КАМ, поскольку последняя предпочитает очень *не*резонансные траектории. С учетом конкретной ситуации, о которой идет речь, вполне возможно, что тот или другой вид устойчивости на самом деле преобладает. В этом контексте мы утверждаем, что согласно оценкам устойчивости тела остаются запертыми в резонансных зонах в течение экспоненциально больших промежутков времени, но, конечно, такие оценки не препятствуют "хаотическим" движениям малой амплитуды $\bigl(O(\sqrt{\varepsilon})\bigr)$ внутри этих зон на много более коротких временных отрезках.

Следует также отметить, что настоящие результаты имеют более широкую область применения, чем результаты КАМ (прежде всего теорема, доказанная в [1]). Во-первых, с практической точки зрения найденный нами порог применимости хотя и не реалистичен, но все же и не настолько мал, как в КАМ-теории. Возможно даже, что его удастся увеличить до реалистического значения, используя оценки, полученные с помощью компьютеров. Во-вторых, при построении инвариантных торов *максимальной* размерности (половина размерности фазового пространства) необходимо, чтобы невозмущенная система была интегрируема относительно *всех* переменных. Здесь это соответствует тому, что можно подвергать возмущению только *точную* плоскую круговую задачу (как в [1]), и, следовательно, в возмущенной задаче эксцентриситеты и наклонения должны быть порядка (степени) параметра возмущения, т. е. очень малыми. Необходимо отметить, с другой стороны, что в КАМ-теории существуют результаты, относящиеся к *неполномерным* (или *маломерным*) торам, т. е. торам размерности *меньше* максимальной (см., например, [4], [16], [24], [53] и цитированную там литературу). Эти результаты предполагают лишь *частичную* интегрируемость невозмущенной системы, что как раз и имеет место в нашей ситуации. Обширная библиография по неполномерным торам в гамильтоновых системах приведена в [15], [59], хотя сами эти две работы посвящены маломерным торам в так называемых *обратимых системах*[3]. Насколько мне известно, неполномерная гамильтонова КАМ-теория никогда не применялась специально к задаче движения планет, хотя здесь, скорее всего, могут встретиться трудности лишь технического характера (тем не менее отметим две работы [57], [58], в которых к плоской задаче трех тел, одновременно гамильтоновой и обратимой, применяется неполномерная *обратимая* КАМ-теория). Более существенным может быть то обстоятельство, что мера Лебега объединения торов в маломерном случае равна нулю. Мы вкратце прокомментируем эту ситуацию при обсуждении диффузии Арнольда в разделе V § 2.

Возвращаясь к результатам об устойчивости на конечных промежутках времени, заметим, что они требуют только достаточной близости системы к плоской круговой задаче, чтобы избежать столкновений. Это и гарантируется условием $\|N\| \geq \gamma_0$ из определения области движений планет, где γ_0 не зависит от ε. Оно определяет окрестность “порядка 1” плоской круговой задачи; наиболее благоприятный случай соответствует тому, что все планеты имеют одинаковую массу. Действительно, ни одно условие на угловой момент не может, по-видимому, предотвратить столкновение, когда масса хотя бы одной из планет обращается в ноль, как в ограниченной задаче трех тел.

§2. Перенос результатов на другие ситуации и вырожденные случаи

Результаты разделов II и III могут быть перенесены, по крайней мере до некоторой степени, на другие ситуации, в которых применима классическая теория возмущений. Мы имеем в

[3]Обратимые системы обладают многими свойствами, характерными для гамильтоновых систем, в частности, на обратимый случай переносятся почти все КАМ-теоремы о сохранении торов при малых возмущениях и о существовании торов вблизи положений равновесия (см. [4], [15], [52], [59]). Однако никаких результатов об устойчивости на экспоненциально больших временах в обратимых системах до сих пор, по всей видимости, не получено (прим. перев.).

виду:

I) возмущение интегрируемого гамильтонова векторного поля;

II) окрестность эллиптического положения равновесия гамильтонова векторного поля;

III) окрестность лагранжева тора, в которой гамильтоново векторное поле индуцирует поток, сопряженный линейному.

Каждая ситуация имеет дискретный аналог, когда гамильтоновы векторные поля заменяются на симплектические отображения. Конечно, I) – это та задача, которой мы занимались, но мы внесли ее в список для полноты. Мы отсылаем к [3] (и [35] в случае III)) за элементарными подробностями. Непрерывные и дискретные задачи, по существу, соответствуют друг другу посредством двух обратных операций *сечения* и *надстройки*. Кратко проиллюстрируем это на примере I). Хорошо известно, как строится локальное сечение Пуанкаре для автономного гамильтонова векторного поля. С другой стороны, рассмотрим дискретную задачу, которая формулируется следующим образом. Пусть B_δ – открытый шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса $\delta > 0$ с центром в начале координат, $\mathbb{A}_\delta = \mathbb{T}^n \times B_\delta$ – многомерное кольцо. Определим отображение f_0 как

$$(\theta, r) \to f_0(\theta, r) = \big(\theta + \omega(r) \bmod \mathbb{Z}^n, r\big), \quad (\theta, r) \in \mathbb{A}_\delta. \tag{1}$$

Предполагается, что $\omega = \nabla h$ – градиент функции h, тогда f_0 – интегрируемое глобально каноническое отображение с производящей функцией h. Мы рассмотрим отображение f, порождаемое возмущением h – функцией $\sum(\theta, r') = h(r') = h(r') + \sigma(\theta, r')$, где σ мало (порядка ε). Это отображение неявно определяется равенством

$$(\theta', r') = f(\theta, r) = \Big(\theta + \omega(r') + \frac{\partial\sigma}{\partial r'} \bmod \mathbb{Z}^n, \, r - \frac{\partial\sigma}{\partial\theta}\Big). \tag{2}$$

Предположим, что h и σ аналитичны и что функция h выпукла. Тогда имеет место следующая теорема устойчивости для переменной $r \in B_\delta$:

Если $\varepsilon = \|\sigma\| \le \varepsilon_0$, *то* $\|r_s - r\| \le c\varepsilon^b$ *при* $|s| \le c\exp(\varepsilon^{-a})$, $s \in \mathbb{Z}$.

Мы используем обозначение $(\theta_s, r_s) = f^s(\theta, r)$, $\theta_0 = \theta$, $r_0 = r$.

Нормы определяются так же, как и в разделах II и III, а показатели (a, b) – такие же, как в теореме 2, *но* для размерности $n + 1$. Все последующие усовершенствования также можно проделать.

Чтобы рассматривать это утверждение как следствие результатов раздела III, необходимо взять надстройку отображения f, т. е. представить последнее как отображение за время 1 потока, соответствующего гамильтониану $H(\theta, r, t)$, периодическому с периодом 1 по переменной времени t. Здесь настоящая трудность состоит в предположении регулярности. Действительно, построение весьма просто на уровне бесконечной дифференцируемости, но это далеко не так, если, как в данном случае, требуется аналитичность. Тем не менее непреодолимые препятствия отсутствуют, и можно доказать существование гамильтониана H, который будет $O(\varepsilon)$-возмущением функции h и для которого f_0 есть отображение потока за время 1 (см. [9]). Таким образом, работая с периодическим возмущением выпуклого гамильтониана, мы пришли к квазивыпуклому случаю (именно поэтому h должно быть выпуклым, а не *квази*выпуклым). Конечно, было бы еще полезно провести прямое доказательство приведенного выше утверждения. Заметим, что при этом необходимо будет справиться с тем фактом, что сохранение энергии более не имеет места.

Теперь мы немного подробнее остановимся на ситуации II), которая интенсивно изучалась, по крайней мере, с прошлого века. Мы не будем упоминать о дискретных задачах, соответствующих случаям II) и III). Ситуация II) является вырожденной с точки зрения теории возмущений, и прежде чем мы обратимся к ней, полезно рассмотреть другую, чуть более простую, но весьма похожую задачу: возмущение гармонических осцилляторов. Конечно, последнее представляет интерес и само по себе. Итак, пусть

$$H(p,q) = (\omega_0, p) + \varepsilon h_1(p) + \varepsilon^2 f(p,q), \tag{3}$$

где $\omega_0 \in \mathbb{R}^n$ – ненулевой вектор, функции h_1 и f аналитичны, а h_1 – квазивыпукла. Мы проведем изменение масштаба $t \to \varepsilon t$, $H \to \varepsilon^{-1}H$ и, сохраняя для простоты те же обозначения, получим:

$$H(p,q) = \Big(\frac{\omega_0}{\varepsilon}, p\Big) + h_1(p) + \varepsilon f(p,q). \tag{4}$$

Обозначим ∇h_1 через ω_1. Вырождение проявляется в том, что частота $\omega = \varepsilon^{-1}\omega_0 + \omega_1$ имеет порядок ε^{-1}. Зафиксировав достаточно малое $\varepsilon > 0$, предположим, что вектор $\omega(0)$ рационален, с периодом T, и снова просмотрим раздел II. Величины m и M, которые измеряют нелинейность и выпуклость, сейчас относятся к h_1 и не зависят от ω_0. Это означает, что итеративная лемма переносится на настоящий случай безо всяких изменений. Тем не менее в геометрических рассуждениях, приводящих к уравнению (23) (раздел II), необходимо принять в расчет тот факт, что $\big\|\omega(0)\big\|$ имеет порядок ε^{-1}, для чего достаточно заменить Ω на $2\varepsilon^{-1}\Omega$, причем Ω здесь обозначает $\|\omega_0\|$ (действительно, $\big\|\omega(0)\big\| \le 2\varepsilon^{-1}\|\omega_0\|$ для достаточно малых ε). Теперь (24) снова определяет $\mathcal{T}(\varepsilon)$, если заменить Ω на $2\varepsilon^{-1}\Omega$. Остальное остается неизменным. Следовательно, "модельное утверждение" также переносится на настоящую ситуацию только с этим единственным изменением.

Наконец, теорема 1А справедлива для гамильтониана (4), если сделать подстановку $\Omega \to 2\varepsilon^{-1}\|\omega_0\|$. Как было сказано, мы *зафиксировали* $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\omega(0)$ было рациональным, с периодом T. Теперь единственное требование состоит в том, чтобы ε удовлетворяло неравенствам (27) раздела II. Второе из этих неравенств очень сильно ослаблено заменой Ω, но необходимо добавить требование $\big\|\omega(0)\big\| \le 2\varepsilon^{-1}\|\omega_0\|$, т. е. $\|\omega_1\| \le \varepsilon^{-1}\|\omega_0\|$, которое не сильно ограничивает ε. Заметим, что Ω не входит в определение (26) величин λ и τ.

Пусть теперь $p^* \in \mathbb{R}^n$ – точка в пространстве переменных действия, $\omega_1^* = \omega_1(p^*)$, $\omega^* = \varepsilon^{-1}\omega_0 + \omega_1^*$, и мы хотим приблизить ω^*. Ключевое соображение здесь заключается в том, что, хотя мы работаем с *высокими* частотами (порядка ε^{-1}), всегда существуют орбиты с *низкой* частотой (порядка 1), близкие к данной, и это явление равномерно по ε, когда последняя величина стремится к нулю. Действительно, указанное соображение выражает лишь тот факт, что для любого значения $\varepsilon > 0$ частоту $\varepsilon^{-1}\omega_0$ можно сдвинуть назад в единичный куб, используя целочисленный вектор. Это простое, но физически важное свойство позволит справиться с вырождением. Осуществим сказанное. В наших обозначениях формула (2) раздела III остается неизменной. *Определим* ω_1 равенством $\omega = \varepsilon^{-1}\omega_0 + \omega_1$, так что

$$\|\omega_1 - \omega_1^*\| \leq \frac{\sqrt{n}}{TQ^{1/n}}.$$

Так как отображение $p \to \omega_1(p)$ локально обратимо, можно найти p, близкое к p^*, такое, что $\omega_1 = \omega_1(p)$, а оставшиеся рассуждения вообще не нуждаются в изменениях. Конечно, символ A обозначает теперь матрицу гессиана h_1, и то же самое касается других величин. Сформулируем полученный результат.

Теорема 3. *Рассмотрим гамильтониан* (3), *описанный выше. Тогда справедлив результат, названный как теорема* 2 (*раздел* III), *но при следующих оговорках*:
I) Ω^* *следует заменить на* $2\varepsilon^{-1}\|\omega_0\|$ *с дополнительным пороговым условием на* ε:

$$\|\nabla h_1\| \leq 2\varepsilon^{-1}\|\omega_0\|;$$

II) *константа* $\mathcal{T}_0^*$ *принимает теперь значение*

$$\mathcal{T}_0^* = 1.5 \cdot 10^{-2}\frac{\sigma}{\|\omega_0\|};$$

III) *изменения масштаба* (1) *раздела* III *не производятся, так что* n *должно быть заменено в утверждении на* $n+1$, *а величины* m, M *и т. д. относятся к исходному гамильтониану* h_1.

Хотя это утверждение было доказано почти без усилий, мы сформулировали его как “теорему”, потому что считаем, что оно весьма важно. Действительно, это первый нелинейный результат об устойчивости на экспоненциальных временах, который был получен в вырожденном случае. Перед тем как прокомментировать его, вернемся к самому утверждению. Условие II) вытекает из того, что мы работали с гамильтонианом (4); возвращение к гамильтониану (3) подразумевает изменение масштаба времени, которое восстанавливает множитель ε, утерянный ранее. Перенормировки (1) раздела III не могут быть произведены, потому что они включают частоту, которая здесь имеет порядок ε^{-1}; отсюда возникает III). В частности мы получаем для времени устойчивости показатель $a = \frac{1}{2n+3} - \eta$ для любого $\eta > 0$.

Гамильтониан (3) естественно появляется, например, в следующем контексте. Рассмотрим снова возмущение системы гармонических осцилляторов:

$$H(p,q) = (\omega_0, p) + \varepsilon g(p,q). \tag{5}$$

Предположим, что g содержит только конечное число гармоник, т. е. является тригонометрическим полиномом по q. Тогда вне *конечного* числа резонансных поверхностей можно совершить один шаг алгоритма приведения к нормальной форме, в результате которого приходим (после замены переменных) к гамильтониану

$$H(p,q) = (\omega_0, p) + \varepsilon \langle g \rangle (p) + \varepsilon^2 f(p,q).$$

Итак, если пространственное среднее $\langle g \rangle$ квазивыпукло, мы получаем гамильтониан вида (3).

Чтобы правильно оценить значение теоремы 3, следует остерегаться возможного существенного недоразумения. Мы доказали результат, который совершенно не зависит от вектора ω_0, в частности, его арифметических свойств. На самом деле, если положить $\omega_0 = 0$ в (3), мы придем к невырожденному случаю и, кроме некоторых деталей, оставляемых читателю, вновь получим соответствующий результат. Если теперь ω_0 сильно нерезонансно, скажем, удовлетворяет обычному диофантову условию

$$\exists \gamma > 0,\ \tau > n-1, \quad \text{такие что} \quad \big|(\omega_0, k)\big| \geq \gamma |k|^{-\tau},\ \forall k \in \mathbb{Z}^n \backslash \{0\}, \tag{6}$$

то нетрудно получить результат об устойчивости на экспоненциальных временах. Действительно, начиная с менее явной формы (5), мы просто строим ряды Биркгофа, используя (6) для контроля за этим процессом при помощи либо итеративного метода, либо мажорантных рядов. Эта чисто алгебраическая конструкция позволяет доказать теорему об устойчивости на экспоненциальных временах, но очень чувствительную к арифметике ω_0.

Такие элементарные оценки получены, например, в [21], и мы предлагаем назвать их *оценками типа Жевре.* Основания для подобной терминологии объясняются в приложении 2. В результатах такого рода в качестве невозмущенной системы рассматривается *линейный* гамильтониан $h(p) = (\omega_0, p)$. Теорема 3, безусловно, глубже: в ней рассматривается *нелинейный* гамильтониан $h(p) = (\omega_0, p) + \varepsilon h_1(p)$ в качестве невозмущенного слагаемого и используется нелинейность (ангармоничность) и выпуклость для получения оценки, которая не зависит от невозмущенной частоты ω_0. Мы предлагаем называть такие оценки *оценками типа Нехорошева.* Аналогичное утверждение должно иметь место (с другими показателями), если h_1 предполагается всего лишь *крутым*, но, по-видимому, получить его очень сложно, если применять оригинальный метод Нехорошева.

Заметим, наконец, что Г.М. Заславский с соавторами (см. [6]) недавно изучали, главным образом с физической и численной точек зрения, системы, которые являются возмущениями гамильтонианов вида

$$h(p) = (\omega_0, p_0) + h_1(p_1), \quad p = (p_0, p_1) \in \mathbb{R}^{l+m} = \mathbb{R}^n,$$

где функция h_1 невырождена (например, выпукла). В такой ситуации неустойчивость обычно проявляется на значительно более коротких масштабах времени, и результаты типа Нехорошева, вообще говоря, не имеют места.

Вернемся теперь к задаче изучения гамильтонова векторного поля в окрестности эллиптического положения равновесия. Мы будем использовать теорему 3 для получения результата в этой ситуации. Обозначим через $\pm i\alpha_j$ $(i=\sqrt{-1})$, $j=1,\dots,n$, собственные числа линеаризации в положении равновесия, которое мы принимаем за начало системы координат (x_j,y_j), $j=1,\dots,n$, в $\mathbb{R}^{2n}$, и будем писать: $z=(x,y)\in\mathbb{R}^{2n}$. Мы предполагаем, что линейная часть диагонализуема и что отсутствуют резонансы порядка $\le s$ (s – натурально число), или, в обозначениях $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$,

$$\forall k\in\mathbb{Z}^n\backslash\{0\}\quad(\alpha,k)\neq 0\quad\text{при}\quad |k|=|k_1|+\dots+|k_n|\le s.$$

Пусть $r_j=\frac{1}{2}(x_j^2+y_j^2)$, $r=(r_1,\dots,r_n)\in\mathbb{R}_+^n$. Следуя Биркгофу, можно совершить каноническое преобразование с тем, чтобы привести гамильтониан к виду

$$H(z)=H(x,y)=H^{(s)}(r)+O\big(\|x,y\|^{s+1}\big). \tag{7}$$

Здесь $H^{(s)}(r)$ – полином степени не более $\left[\frac{s}{2}\right]$ по переменным r_j. Предполагаем, что функция H аналитична, так что остаток – сходящийся степенной ряд, члены которого имеют степень не менее $s+1$ по переменным x_j,y_j. Будем считать, что $s>4$, так что $H^{(s)}$ имеет вид

$$\begin{aligned} H^{(s)}(r)&=\sum_j\alpha_j r_j+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\alpha_{ij}r_ir_j+O\big(\|r\|^3\big)\\ &=(\alpha,r)+\frac{1}{2}(Ar,r)+O\big(\|r\|^3\big), \end{aligned} \tag{8}$$

где $A=(\alpha_{ij})$ – симметрическая матрица. Эта форма записи определяет знаки величин α_j. Заметим, что если они все одного знака, проблема устойчивости немедленно решается (положительно), потому что начало координат в этом случае является локальным максимумом (или минимумом) гамильтониана. Теперь снова наложим условие выпуклости, скажем, что A есть положительно определенная матрица, и пусть $m>0$ (соответственно $M\ge m$) – ее наименьшее (соответственно – наибольшее) собственно значение. При таких предположениях мы докажем следующую теорему.

Теорема 4. *Рассмотрим траекторию $z(t)$ движения, определяемого гамильтонианом $H(z)$ (см. (7) и (8)). Существует константа $\nu>0$ такая, что если $z=z(0)$ достаточно мало и удовлетворяет условию*

$$r_j=\frac{1}{2}(x_j^2+y_j^2)\ge\nu\|z\|^{2+\frac{1}{n+2}},\quad j=1,\dots,n, \tag{9}$$

($r_j=r_j(0)$ и т. д.), то будем иметь:

$$\big\|r_j(t)-r_j\big\|\le\frac{\nu}{2}\|z\|^{2+\frac{1}{n+2}},\quad j=1,\dots,n,$$

при условии, что t удовлетворяет неравенству

$$|t| \leq \mathcal{T} \exp\Big(\|z\|^{-\frac{1}{n+2}}\Big),$$

где $\mathcal{T}$ – некоторая строго положительная константа.

Перед тем как сделать некоторые пояснения, мы покажем, как это утверждение можно легко вывести из теоремы 3. Как читатель убедится, мы докажем на самом деле более точное и сильное утверждение. Прежде всего введем обычные симплектические полярные координаты (r, θ), определяемые как

$$x_j = \sqrt{2r_j}\cos\theta_j, \quad y_j = \sqrt{2r_j}\sin\theta_j.$$

Зафиксируем $z = z(0)$ и положим $\varepsilon = \sum_j r_j = \frac{1}{2}\|z\|^2$. Затем проведем изменение масштаба $r = \varepsilon\rho$, $H = \varepsilon K$, в результате чего симплектическая структура умножится на ε, а уравнения останутся неизменными. Тогда

$$K(\rho, \theta) = (\alpha, \rho) + \frac{1}{2}\varepsilon(A\rho, \rho) + \varepsilon^2 f(\sqrt{\varepsilon\rho}, \theta),$$

где мы используем компонентную запись $\sqrt{r} = (\sqrt{r_1}, \ldots, \sqrt{r_n}) \in \mathbb{R}^n_+$. Функция f аналитична и периодична по θ, и мы обозначим через σ ее ширину аналитичности по θ.

Теперь можно применить теорему 3, при условии, что мы держимся в стороне от особенностей при $\rho_j = r_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Напомним, что в теореме 2 (или даже в теоремах 1) ширина аналитичности по переменным действия должна быть не обязательно порядка 1, а лишь не меньше радиуса удержания. Это свойство в данном случае чрезвычайно важно, потому что оно показывает, насколько близко мы можем подходить к особенностям. Из теоремы 3 (или, вернее, теоремы 2) мы вычисляем радиус удержания:

$$\big\|\rho_j(t) - \rho_j\big\| \leq 10^{-2}\frac{\sigma}{M}\varepsilon^a = 10\frac{\sigma}{M}\Big(\frac{1}{2}\|z\|^2\Big)^a < 10^{-2}\frac{\sigma}{M}\|z\|^{2a}.$$

Здесь $a = \frac{1}{2n+4}$, и мы полагаем $\nu = 10^{-2}\frac{\sigma}{M}$. Мы получили, таким образом, неравенство для дрейфа переменных действия с временами применимости

$$\mathcal{T}(z) = \mathcal{T}\exp(\varepsilon^{-a}) > \mathcal{T}\exp\big(\|z\|^{-2a}\big), \quad \mathcal{T} = 1.5 \cdot 10^{-2}\frac{\sigma}{\|\alpha\|}.$$

Все вышесказанное верно при условии, что неравенства $\rho_j(t) > \nu\varepsilon^a$ выполняются в течение времени $\mathcal{T}(z)$, что обеспечивается неравенством (9). Мы, таким образом, доказали теорему и вычислили величины ν и $\mathcal{T}$. Порог применимости, т. е. максимально возможное значение $\|z\|$, также, конечно, может быть вычислено с использованием теорем 2 и 3. $\square$

Кратко прокомментируем это результат. Во-первых, аналогичная, но чуть более слабая оценка верна при $s \geq 4$ (минимальный порядок возможного резонанса), что является также условием применимости теории КАМ. Мы полагаем $s > 4$ только для удобства.

Во-вторых, можно улучшить полученный результат, если в действительности s больше, произведя несколько шагов алгоритма приведения к нормальной форме Биркгофа и применив затем рассуждения аналогичного вида. На самом деле подобная стратегия может быть также использована в контексте теорем 2 и 3, по крайней мере в некоторых случаях. Это комбинация обычного метода и метода замкнутых орбит, который мы предлагаем в данной статье; она может оказаться полезной при попытках улучшить оценки, возможно, применяя компьютер.

В-третьих, если матрица A индефинитна, нельзя судить о крутизне, зная только α и A. Необходимо вычислить дополнительные инварианты Биркгофа (следовательно, s должно быть больше, по крайней мере ≥ 6), а затем, в крутом случае, можно, в принципе, применить вариант метода из [12], чтобы доказать результаты типа теоремы 4, но все это на самом деле снова выглядит очень громоздко.

В-четвертых, мы не доказали экспоненциальную оценку "времени ухода" из-за, по-видимому, искусственного требования (9), накладываемого на начальные условия. Это требование возникает из-за того, что мы должны были использовать переменные действие–угол (r, θ), которые имеют особенности на координатных плоскостях $r_j = 0$. Точно такая же трудность встречается (и остается непреодоленной) в теории КАМ (см., например, [52], последний параграф). Мы не знаем, можно ли и как ее преодолеть, и, соответственно, вынуждены были исключить малые пикообразные области с вершинами в положении равновесия.

В-пятых, у теоремы 4 имеются некоторые очевидные обобщения, которые могут быть полезны. Например, можно потребовать только *квази*выпуклость. В данном случае это означает, что квадратичная форма (Ar, r) должна иметь определенный знак, но только будучи ограниченной на плоскости $(\alpha, r) = 0$. С другой стороны, можно рассматривать *периодические* возмущения: тогда матрица A должна быть положительно или отрицательно определенной, но гамильтониан может периодически зависеть от времени.

Наконец, те же замечания можно отнести к оценкам типа Жевре, которые обсуждались в связи с теоремой 3 (мы снова отсылаем читателя к приложению 2). Если α – диофантов вектор, т. е. если он удовлетворяет неравенствам (6) (с α вместо ω_0), то экспоненциальные оценки устойчивости получаются элементарным, чисто алгебраическим путем, с помощью контроля за ростом ряда Биркгофа (см., например, [37], [38]). Эти оценки снова сильно зависят от арифметики α. Заметим, что если требуется получить оценки типа Нехорошева, как делали мы, то нельзя использовать обычные комплексные координаты ($w = x + iy$ и комплексно-сопряженный вектор), потому что они не связаны прямо с переменными действие–угол невозмущенной системы, за исключением ситуаций, когда последняя *линейна*, как в случае оценок типа Жевре.

В некотором смысле случай III), упомянутый в начале настоящего параграфа, а именно окрестность инвариантного лагранжева тора, легче анализировать. Прежде всего согласно симплектической теореме о трубчатой окрестности можно – симплектически – описать окрестность тора как $\mathbb{T}^n \times B_\delta$, где B_δ – снова открытый шар радиуса δ с центром в начале координат в $\mathbb{R}^n$. Мы по-прежнему обозначаем через $(\theta, r) \in \mathbb{T}^n \times B_\delta$ соответствующие координаты. Инвариантный тор задается уравнением $r = 0$, и, после замены переменных, поток на нем становится линейным с вектором скорости $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Затруднение состоит в том, что если вектор α *не* диофантов, ситуация структурно неустойчива, и представляется весьма сложным вообще что-либо сказать. Действительно, теория нормализации уже *для первого порядка* требует чтобы α было сильно иррационально.

Предположим теперь, что α все же диофантово. В качестве побочного замечания отметим, что из этого вытекает при слабых предположениях регулярности, что тор является лагранжевым, и, следовательно, последнее не нужно накладывать как дополнительное требование. Тогда мы приходим к ситуации, очень похожей на случай эллиптического положения равновесия, а именно после замены координат получаем гамильтониан

$$\begin{aligned} H(\theta, r) &= H^{(s)}(r) + O\big(\|r\|^{s+1}\big), \\ H^{(s)}(r) &= \sum_j \alpha_j r_j + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \alpha_{ij} r_i r_j + O\big(\|r\|^3\big) \\ &= (\alpha, r) + \frac{1}{2}(Ar, r) + O\big(\|r\|^3\big). \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь s произвольно, а $r \in B_\delta$ пробегает окрестность начала координат. Особенности отсутствуют, и без каких-либо предположений выпуклости или крутизны можно получить оценки типа Жевре, потому что α сильно нерезонансно. Все проводится, как в случае эллиптического положения равновесия, если не считать того, что здесь не могут быть использованы комплексные координаты $\big((\theta, r)$ появляются не в качестве полярных координат$\big)$. Подобная ситуация аналогична случаю эллиптического положения равновесия, когда последнее "раздуто". По-видимому, эти оценки до сих пор не были подробно изложены, хотя они описывают, в частности, время, необходимое для отхода от колмогоровского инвариантного тора. Заметим, что последняя задача имеет *два* малых параметра: ε, описывающее величину возмущения интегрируемой системы, и $\|r\|$, измеряющее расстояние до тора.

§ 3. Системы с (бесконечно) большим числом степеней свободы

Следствия 2 и 3 из раздела III, видимо, очень уместны для класса задач с большим – возможно, бесконечным – числом степеней свободы. Здесь мы имеем в виду простые статистические модели, такие, как спиновые решетки, цепи, кристаллы и т. д., а также некоторые уравнения в частных производных, главным образом с одним пространственным измерением. Эти задачи изучались в течение нескольких последних лет с переменным успехом, с особым акцентом на теории КАМ. Библиография в [54] содержит некоторые важные ссылки по этому вопросу.

Возможно, во избежание туманности и абстрактности, лучше всего рассмотреть простой пример, демонстрирующий основные характерные черты и трудности: одномерную цепь ротаторов, каждый из которых взаимодействует только с двумя соседями. Мы, таким образом, рассматриваем гамильтониан

$$H(p, q) = \sum_{i=1}^{N} \Big(\frac{1}{2}p_i^2 + \varepsilon V(q_{i+1} - q_i)\Big).$$

Здесь V – потенциал с критической точкой при некотором значении $a > 0$ аргумента $\big(V'(a) = 0\big)$, представляющем среднее расстояние между двумя свободными ротаторами. Если N конечно, следует добавить граничные условия (например, периодичность, скажем, $q_{N+l} = q_l$), а затем искать утверждения, которые не зависят от N, по крайней мере асимптотически, когда N стремится к бесконечности (термодинамический предел). С другой стороны, можно положить $N = \infty$ с самого начала, в подходящем математическом контексте.

Суть того, что мы хотим показать в этом коротком параграфе, – это то, что *локализация есть резонанс* и что, в соответствии с результатами раздела III, выпуклость и резонанс вместе приводят к устойчивости вследствие локального изобилия периодических орбит. Отсюда должны вытекать сильные "нелинейные локализационные теоремы". Действительно, предположим, что при $t = 0$ возбуждены d из N ротаторов (пусть для простоты N конечно и наложены периодические граничные условия), т. е. мы имеем следующие начальные условия:

$$p_i(0)\ \text{произвольно},\quad i = 1,\dots,d;\quad p_i(0) = 0,\ i = d+1,\dots,N;$$
$$q_i(0)\ \text{произвольно},\quad i = 1,\dots,N.$$

Это резонансный случай, так как вектор частот – не что иное, как

$$\omega(0) = \big(p_1(0),\dots,p_d(0),0,\dots,0\big),$$

так что мы находимся на d-мерной резонансной поверхности. Теперь применим следствие 2 из раздела III и получим, что переменные действия устойчивы в течение промежутка времени, имеющего, по существу, порядок $\exp(\varepsilon^{-\frac{1}{2d}})$ для достаточно малых ε, независимо от числа N степеней свободы. Следствие 3 добавляет важную возможность: можно даже допустить, чтобы остающиеся $N - d$ ротаторов обладали некоторой энергией и при этом сохранялся по сути прежний результат.

Но, конечно, все это – иллюзия! Чего же нам не хватает? На самом деле немногого: только учета того, что число степеней свободы спрятано в определении норм, используемых нами, например, для измерения силы деформации. Эти нормы никак не отражают того факта, что задача основана на некотором свойстве локальности в *вещественном* пространстве, а именно на том, что взаимодействие включает только ближайших соседей. Ю.Пёшель, отправляясь от работ разных авторов (в том числе и собственных), описал общую абстрактную схему обращения с этими *локальными структурами* (см. [54]). Мы надеемся, что сочетание этого достижения с идеями данной работы сможет привести к интересным результатам такого же типа, как и небрежно сформулированный выше.

Снова подчеркнем, что выпуклость здесь существенна. В частности, к цепям возмущенных гармонических осцилляторов можно применять теорему 3 из предыдущего параграфа, только когда нелинейное возмущение обладает некоторым свойством выпуклости в *переменных действие–угол* (координаты "нормальных мод"). К сожалению, это требование в данной ситуации не вполне естественно (ср. модель Ферми–Паста–Улама).

Отметим также, что КАМ-теория была недавно обобщена на некоторые классы бесконечномерных систем различными способами, и при тех или иных технических предположениях было доказано существование как *конечномерных* инвариантных торов (С.Б.Куксин, Ю.Пёшель, Ю.К.Уэйн (J.Pöschel, E.C.Wayne) и др.), т.е. условно-периодических движений с конечным числом частот, так и *бесконечномерных* инвариантных торов (М.Витто, Ю.Пёшель (M.Vittot, J.Pöschel) и др.). Соответствующая библиография приведена в [8], [53] [54]. Наше последнее замечание состоит в том, что, наряду с другими условиями, КАМ-теория для подобных задач, как обычно, предполагает a priori невырожденность в той или иной форме, но в рамках статистической механики из невырожденности, по существу, *вытекает* выпуклость. Причиной этого является то, что невозмущенная интегрируемая система обычно предстает как совокупность невзаимодействующих *идентичных* объектов. Невырожденность означает, что каждый из микроскопических элементов "по-настоящему нелинеен" (например, является ротатором, а не гармоническим осциллятором). Но тогда, очевидно, матрица гессиана невозмущенного гамильтониана будет ненулевой скалярной (диагональной с одним и тем же отличным от нуля числом вдоль диагонали), откуда следует выпуклость.

§ 4. Крутизна, квазивыпуклость и замкнутые орбиты

Мы постоянно подчеркивали, что метод замкнутых орбит, который мы используем в настоящей статье, ограничивается квазивыпуклым случаем и что он принципиально **неприменим** к устойчивости в общей ситуации крутых гамильтонианов. Может быть, это вызовет возрождение интереса к последнему случаю, который очень мало исследовался? Тем более, что в рамках аналитической теории, используя жесткость аналитических объектов, Ю.С. Ильяшенко [7] получил полное алгебраическое опичание крутизны, которая первоначально была введена как C^∞-понятие. Поэтому было бы весьма интересно переписать доказательство Нехорошева [12], [13], стараясь прояснить связь с геометрией и теорией особенностей, из которых, собственно, первоначально и возникло понятие крутизны. Можно было бы также попытаться выделить интересные подклассы крутых функций, кроме подкласса квазивыпуклых функций – единственного, как мы знаем, где наличие крутизны можно определить по 2-струе функции.

С другой стороны, как выяснилось последние несколько лет, из квазивыпуклости вытекают очень специфичные свойства, и, с этой точки зрения, исследованные в настоящей работе свойства устойчивости хорошо укладываются в общую картину. Поэтому может быть полезно упомянуть некоторые из тех свойств. (Квази) выпуклость естественным образом привлекается в первую очередь, потому что кинетическая энергия в разных ситуациях, встречающихся в физике, обычно удовлетворяет этому условию. Это также связано с тем, что даже вне теории возмущений гамильтонианы обычно получаются из лагранжианов и что выпуклость по переменным действия влечет существование и хорошие свойства преобразования Лежандра.

Далее, выпуклость – естественное и простейшее условие применения вариационных методов, например, если попытаться доказать существование замкнутых орбит "в целом", т. е. для произвольных гамильтонианов с компактными поверхностями уровня энергии. Предположение, что поверхность уровня энергии выпукла, очень упрощает задачу, и при этом предположении известны результаты, значительно более точные, чем в общем случае.

Некоторые более тонкие следствия из выпуклости были обнаружены недавно. Рассмотрим, как в § 2 (формула (1)), глобально каноническое интегрируемое отображение многомерного кольца:

$$(\theta, r) \to \big(\theta + \omega(r) \bmod \mathbb{Z}^n, r\big),$$
$$(\theta, r) \in \mathbb{A}^n = \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \omega = \nabla h.$$

Здесь нам будет нужна дифференцируемость только конечного порядка, так что в действительности все сосредоточено на переменных r. Рассмотрим теперь глобально каноническое возмущение этого отображения (см. (2) в § 2). Если $n = 1$, то при условии закручивания $\omega'(r_0) \neq 0$ Биркгоф показал, что любая инвариантная кривая Γ, близкая к окружности $r = r_0$, является графиком непрерывной функции, т. е. существует функция $\psi \in C^0(\mathbb{T}^1, \mathbb{R})$, такая что $\Gamma = \Gamma_\psi = \Big\{\big(\theta, \psi(\theta)\big), \theta \in \mathbb{T}^1\Big\}$. Кроме того, на самом деле ψ липшицева, и ее производная (которая существует почти всюду) удовлетворяет априорной оценке. В действительности теория Биркгофа применима к отображениям, которые *не* являются возмущениями интегрируемых, но мы для простоты ограничились этим случаем.

В то же время М.Эрман ([41]) показал, что при $n > 1$ могут возникать различные патологии, если не ограничиться рассмотрением *лагранжевых* торов, гомотопных $r = 0$, *и* если не предполагать *монотонное закручивание* (выпуклость), т. е. что матрица $A(r) = \frac{\partial \omega}{\partial r} = \nabla^2 h$ положительно или отрицательно определена. Только в этом случае можно обобщить теорию регулярности Биркгофа на многомерную ситуацию, по крайней мере в том, что касается возмущений.

Мы посвятим конец этого параграфа краткому обсуждению вопроса о существовании (точных) замкнутых орбит для гамильтонианов, близких к интегрируемым. Сначала напомним старый результат теории возмущений, по существу принадлежащий Пуанкаре ([14], главы III и IV), и обратим внимание, как специфика квазивыпуклости весьма заметна уже на этом уровне, что, по-видимому, никогда ранее не отмечалась в литературе.

Вернемся к ситуации раздела II. Пусть $H = h(p) + \varepsilon f(p, q)$ – возмущенный гамильтониан; ε выписано в явном виде, и без ограничения общности можно считать, что $\varepsilon \geq 0$. Когда $\varepsilon = 0$, $p = 0$ – инвариантный периодический тор с периодом T и рациональной частотой $\omega(0) = \omega_0$. Мы *не* предполагаем квазивыпуклость в данный момент, а лишь невырожденность: $\det A_0 \neq 0$ $\big(A(p) = \nabla^2 h, A_0 = A(0)\big)$. Как и в разделе II, если $g(q)$ – функция на $\mathbb{T}^n$, то через $\langle g \rangle$ обозначается ее среднее значение вдоль ω_0. Пусть $\langle f \rangle(q) = \langle f \rangle(0, q)$ – среднее значение возмущения на торе $p = 0$. Оно постоянно на орбитах линейного потока вдоль вектора ω_0 и может рассматриваться как функция на пространстве орбит $\mathcal{O} = \mathbb{T}^{n-1}$. Мы предполагаем, что это функция Морса на указанном пространстве. Если рассматривать ее на торе $\mathbb{T}^n$, то морсовость означает, что матрица гессиана $F_0 = \frac{\partial^2}{\partial q^2} \langle f \rangle(0, q^{(0)})$ в критической точке $q^{(0)}$ имеет *одномерное* ядро, порожденное вектором ω_0 (критические точки являются на самом деле критическими орбитами). Имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Пусть гамильтониан $H(p, q) = h(p) + \varepsilon f(p, q)$ $(\varepsilon \geq 0)$ таков, что при $\varepsilon = 0$ тор $p = 0$ – периодический, с частотой ω_0 и периодом T. Предположим, что h невырождено в точке $p = 0$ $\big(\det \nabla^2 h(0) \neq 0\big)$ и что среднее значение $\langle f \rangle(0, q)$ имеет одномерное ноль-пространство (порожденное ω_0) в своих критических точках.*

Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ *в окрестности тора* $p = 0$ *порядка* $O(\varepsilon)$ *существует по меньшей мере* 2^{n-1} *орбит периода* T, *с учетом кратностей, из которых по крайней мере* n *геометрически различны.*

Кроме того, если функция h *квазивыпукла, можно указать спектральный тип этих орбит и утверждать, что имеется по меньшей мере* $\binom{n-1}{k}$ k*-гиперболических орбит,* $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Здесь мы называем орбиту k-гиперболической, если она имеет k пар показателей Флоке, не являющихся чисто мнимыми. Напомним, что μ называется показателем Флоке некоторой орбиты периода T, если $\lambda = e^{\mu T}$ – собственное число линеаризации отображения последования. Таким образом, в последнем пункте говорится, что *в квазивыпуклом случае* можно предсказывать линейную устойчивость орбит, рождающихся из периодического тора. Например, появится по крайней мере одна линейно устойчивая (т. е. 0-гиперболическая, или эллиптическая) орбита. Это следует из того, что показатели Флоке, которые разбиваются на пары с противоположными знаками, можно разложить по степеням $\sqrt{\varepsilon}$ (два из них равны нулю), и младшие члены разложения имеют вид $\pm(\varepsilon\Omega_j)^{\frac{1}{2}}$, $j = 1, \ldots, n$, где величины Ω_j – собственные значения матрицы $-A_0F_0$ $\left(A_0 = \nabla^2 h(0),\, F_0 = \frac{\partial^2}{\partial q^2}\langle f\rangle(0, q^{(0)})\right)$. В невырожденном случае теперь можно использовать неравенства Морса, чтобы определить число и спектральный тип критических точек (или, вернее, орбит) $\langle f\rangle$, т. е. спектральный тип F_0. Затем, добавив предположение квазивыпуклости, можно использовать следующее элементарное утверждение.

Предложение. *Пусть* A *и* B *– две симметричные матрицы, причем* $A > 0$. *Тогда спектр произведения* AB *веществен и имеет тот же тип, что и спектр* B, *т. е. содержит такое же число положительных, нулевых и отрицательных собственных чисел (с учетом кратностей).*

Действительно, если $p^2 = A$, $P > 0$, то спектр AB совпадает со спектром матрицы PBP, которая является симметричной, и подпространства, на которых $B > 0$ (соответственно, $B = 0$, $B < 0$), переводятся матрицей P в соответствующие подпространства для PBP. □

Чтобы применить это предложение, надо рассмотреть ортогональное дополнение к ω_0, так что требуется только *квази*выпуклость. В результате мы получаем, что даже на уровне возмущения лишь в квазивыпуклом случае можно предсказать устойчивость (по крайней мере некоторых) периодических орбит, рожденных из периодического тора.

Приведенная выше теорема применима при $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0 = \varepsilon_0(h, T)$. Потребовалось столетие, чтобы показать, что можно избавиться, по крайней мере частично, от зависимости ε_0 от T, и снова лишь в квазивыпуклой ситуации. Грубо говоря, Д. Бернштейн и А.Каток доказали (в [22]), что *если* h *квазивыпукло*, то для достаточно малых ε, *независимо от периода* T, выживают не менее n замкнутых орбит в окрестности порядка $O(\varepsilon^{\frac{1}{3}})$ тора с периодом T. Этот более глубокий результат тесно связан с многомерным вариантом "последней геометрической теоремы Паункаре", доказанным Ч.Конли и Э. Цендером (в [28]). Это также первый шаг к попытке понять, что происходит при возмущении, когда последовательность рациональных торов накапливается к данному предельному тору (в невозмущенной ситуации), т. е. в попытке обобщить теорию "кантороторов" Обри–Мазера на высшие размерности. Повторим, что все это требует квазивыпуклости, причем не только из-за частого использования вариационных методов, но также потому, что в противном случае представляются неизбежными многие “патологические” явления (см. снова [41]). Конечно, для доказательства утверждений об устойчивости на экспоненциально больших временах мы должны были использовать лишь некоторые простые арифметические соотношения, связанные с этими результатами. Мы рассмотрим соответствующую арифметику более глубоко в следующем параграфе (V, § 1).

V. Стойкие торы, диффузия Арнольда

§ 1. Стойкие торы и “перенормировка”

Мы не знаем точно, как совместные приближения могут быть использованы для получения результатов типа КАМ, хотя это, безусловно, возможно. Заметим, что такой метод был бы ближе к идеям “перенормировки”, особенно к оригинальным интуитивным соображениям Дж.М.Грина в [39]. Это может оказаться полезным в некоторых отношениях, например, для изучения неполномерных инвариантных торов. Единственное, что мы хотели бы упомянуть в связи с этим, – простое утверждение, которое уточняет сходимость временных средних к пространственному среднему для линейных потоков на торе. Его, возможно, следует использовать, по крайней мере в некоторой форме, для получения результатов типа КАМ с помощью совместных приближений.

Пусть $\mathcal{A}_\rho$ обозначает пространство функций на $\mathbb{T}^n$, которые аналитически продолжаются на полосу $|\operatorname{Im} q| < \rho$ и непрерывны на границе. На $\mathcal{A}_\rho$ определена норма $\|\cdot\|_\rho$ – максимум на замкнутой полосе. С другой стороны, пусть вектор $\omega \in \mathbb{R}^n$, $(T_j)_{j\geq 0}$ – последовательность его периодов, $(\omega_j)_{j\geq 0}$ – соответствующая последовательность наилучших приближений (ω_j имеет период T_j, см. приложение 1). В обозначениях $\eta_j = \|\omega_j - \omega\|$ имеем оценку:

$$\eta_j \leq \frac{\sqrt{n}}{T_j T_{j+1}^{\frac{1}{n}}} < \frac{\sqrt{n}}{T_j^{1+\frac{1}{n}}}. \tag{1}$$

Наконец, введем операторы M_j усреднения по времени вдоль ω_j и оператор M_∞ пространственного усреднения. Для функции $g(q)$ на торе имеем:

$$M_j(g) = \frac{1}{T_j}\int_0^{T_j} g(q+\omega_j t)dt; \quad M_\infty(g) = \int_{\pi^n} g(q)dq.$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

Предложение. *Предположим, что вектор ω диофантов, или, точнее,*

$$\begin{aligned} &\exists \tau > n-1, \quad \gamma > 0, \quad \textit{такие что} \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n \backslash \{0\} \\ &\big|(\omega, k)\big| \geq \gamma |k|^{-\tau}, \qquad\qquad \textit{где} \quad |k| = \sum_i |k_i|. \end{aligned} \tag{2}$$

Тогда для любого $g \in \mathcal{A}_\rho$ и любого δ, $0 < \delta \le \rho$,

$$(3) \qquad \big\|M_j(g) - M_\infty(g)\big\|_{\rho-\delta} \le 4^n \|g\|_\rho \delta^{-n} \exp\left[-\frac{\delta}{2}\Big(\frac{\gamma}{\eta_j}\Big)^{\frac{1}{\tau+1}}\right].$$

Заметим, что правая часть в (3) может быть оценена только через T_j, если использовать (1). Чтобы доказать (3), считаем, что $g \in L^2(\mathbb{T}^n)$ с коэффициентом Фурье g_k, $k \in \mathbb{Z}^n$. Тогда $M_j(g)$ – функция, коэффициенты Фурье которой отличны от нуля (и равны g_k) только для значений k, удовлетворяющих равенству $(\omega_j, k) = 0$, из которого вытекает:

$$\gamma|k|^{-\tau} \le \big|(\omega, k)\big| = \Big|\big((\omega - \omega_j), k\big)\Big| \le \|\omega - \omega_j\| \cdot \|k\| = \eta_j \|k\|.$$

Следовательно,

$$(4) \qquad |k| \ge K_j \stackrel{\text{def}}{=} \Big(\frac{\gamma}{\eta_j}\Big)^{\frac{1}{\tau+1}}.$$

Здесь использовано неравенство $|k| \ge \|k\|$ (евклидова норма). С другой стороны, тот факт, что $g \in \mathcal{A}_\rho$, дает оценку

$$|g_k| \le \|g\|_\rho e^{-2\pi\rho|k|},$$

что позволяет нам оценить остаток ряда Фурье. А именно, если $K \in \mathbb{Z}_+$, положим:

$$g^{\ge K(q)} = \sum_{k, |k| \ge K} g_k e^{2\pi i (k,q)}.$$

Тогда (см., например, [20]):

$$(5) \qquad \|g^{\ge K}\|_{\rho-\delta} \le \|g\|_\rho \sum_{|k|\ge K} e^{-2\pi\delta|k|} \le c_n \|g\|_\rho \delta^{-n} \exp\Big(-\frac{\delta K}{2}\Big),$$

причем можно взять $c_n = 4^n$ (см. [21]). Полагая $K = K_j$, с учетом (4) получаем (3). $\square$

Это довольно элементарное утверждение интересно само по себе. Оно, однако, неудовлетворительно, потому что в нем используется арифметическое условие линейного типа (в данном случае условие (2), которое можно обобщить), тогда как нам хотелось бы применять условие совместного типа, скажем, $\omega \in \Omega_n(\tau)$ (определение см. в приложении 1). Это отнюдь не случайно. Вообще говоря, линейные условия, которые ограничивают знаменатели снизу, позволяют естественно контролировать изменение *функций*, тогда как условия метода совместных приближений относятся больше к самим *траекториям*. Это, по-видимому, можно считать одним из аспектов двойственности Фурье ("волна-частица"). Можно это еще проиллюстрировать, изучая непосредственно времена приближенного возвращения для линейного потока, исходя из линейных диофантовых условий типа (2) (такая идея была реализована в [63]). Так как совместное приближение вектора, в сущности, эквивалентно распределению моментов возвращения (см. приложение 1), мы снова приходим к одной из форм принципа переноса.

В оставшейся части параграфа мы бы хотели рассмотреть чисто арифметические вопросы. Мы не докажем новых результатов, но соберем некоторые факты и ссылки, которые малоизвестны и могут быть полезны в дальнейших исследованиях некоторых динамических проблем. Мы будем использовать некоторые понятия из алгебраической теории чисел и, соответственно, отсылаем читателя к любому элементарному учебнику по этому предмету, например, [5], [56]. В целях мотивации мы сначала сформулируем одну гипотезу. Рассмотрим двумерное "стандартное" отображение, т. е. симплектическое отображение $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$ в себя, определяемое формулой

$$\begin{gathered} f(\theta, r) = (\theta', r') = \bigl(\theta + r' (\mathrm{mod} \mathbb{Z}^2),\ r + \varepsilon \nabla \sigma(\theta)\bigr), \\ (\theta, r) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2, \quad \sigma : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R} \ \text{ – аналитическая функция.} \end{gathered}$$

При $\sigma = 0$ торы $r = \omega = \mathrm{const}$ инвариантны для этого отображения. Пусть $\mathcal{A}$ – пространство функций с предписанными полосами аналитичности и непрерывных на границе, с соответствующей sup-нормой $\|\cdot\|$. Если $\omega \in \mathbb{R}^2$, будем говорить, что $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\omega)$ – *порог разрушения* для частоты ω, если для любого $\sigma \in \mathcal{A}$, $\|\sigma\| < \varepsilon_0$, сохраняется инвариантный тор с частотой ω $\bigl($гомотопный $\mathbb{T}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2\bigr)$ и ε_0 – максимальное число с таким свойством. Отталкиваясь от одномерных результатов, можно ожидать следующее.

Гипотеза. *Рассмотрим векторы частот $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2$ такие, что $(1, \omega_1, \omega_2)$ – целый базис (над $\mathbb{Z}$) кубического поля $\mathbb{Q}\Bigl(\cos\Bigl(\frac{2\pi}{7}\Bigr)\Bigr)$. Тогда некоторые из них определяют торы, пороги разрушения которых локально максимальны в пространстве частот (пространстве переменных действия).*

Ниже мы уточним это утверждение, так что его можно будет численно подтвердить или опровергнуть. В то же время его, по-видимому, очень трудно доказать или опровергнуть аналитически. Аналогичное предложение можно сформулировать, если первую компоненту $\theta' = \theta + r'$ отображения f заменить на $\theta' = \theta + Sr'$, где $S = \mathrm{diag}(1, -1)$ – матрица размера 2×2. Тогда предположение выпуклости больше не имеет места, так что такое утверждение находится вне сферы применимости результатов этой статьи и, например, результатов [22]. Оно должно приводить к более неустойчивой ситуации и с точки зрения устойчивости на конечных временах, и с точки зрения существования аналогов множеств Обри–Мазера. Эти свойства могли бы сделать инвариантные торы динамически более важными и легче находимыми численно.

Рассмотренная выше гипотеза опирается на арифметику, а не на динамику, и связана с поисками двумерного "золотого вектора", о которых мы сейчас вкратце расскажем. Кроме самостоятельного интереса, мы надеемся, эта тема поможет понять, как далеко можно дойти, начав с теории приближений. Нам понадобятся функции $\gamma_n(\alpha)$ и $\gamma^n(\alpha)$, введенные в конце приложения 1, и диофантова постоянная $\gamma_n = \gamma^n$. Результаты, которые мы представим, слишком точны, чтобы для них имели место простые принципы переноса, так что установление связи между линейным и совместным приближениями обычно требует кропотливой работы. Имеются даже результаты, доказанные только в одном из двух случаев.

Долгое время считалось, что константа γ_n определяется векторами α такими, что совокупность $(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ образует базис вещественного алгебраического поля степени $n+1$. Это, конечно, было бы очень полезно для поиска "наихудших" для аппроксимации векторов размерности n. Однако Д. Секереш недавно представил результаты численных расчетов, сильно склоняющие к мысли, что это справедливо для $n = 2$ (случай $n = 1$ хорошо изучен, см. ниже), но неверно для $n = 3$ и, возможно, $n = 4$ (см. [61]). На самом деле он провел тонкие вычисления, которые, по-видимому, означают, что γ_3 не может быть приближено с помощью базисов полей степени 4. Если это окажется верным, то существует *качественная* разница между случаями $n = 2$ и $n > 2$. Мы ограничимся далее первым случаем, который изучается значительно больше, чем случай высших размерностей. С точки зрения динамических систем можно вспомнить, что уже на уровне арифметики мало что известно за пределами задач с тремя независимыми частотами или, вернее, с двумя отношениями частот. Это также наименьшая размерность, при которой может встретиться диффузия Арнольда.

Прежде чем обратиться к двумерному случаю, напомним кратко некоторые черты хорошо изученного одномерного случая. Нам потребуется одно элементарное свойство цепных дробей. Пусть $a = [a_1, \ldots, a_k, \ldots]$ и $b = [b_1, \ldots, b_k, \ldots]$ – разложения чисел a и b в цепные дроби. Тогда a и b называются *эквивалентными*, если, с точностью до сдвига, эти разложения совпадают для достаточно больших k, иными словами, если существуют натуральные l и m, такие что $a_{l+i} = b_{m+i}$ для любого натурального i. Имеет место следующее элементарное утверждение.

Предложение(см., например, [17]) *Два числа a и b эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют целые p, q, r, s, удовлетворяющие условию $ps - qr = \pm 1$, и такие, что*

$$b = \frac{pa + q}{ra + s}.$$

Перечислим теперь следующие факты (см. снова [17]):

I) $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$;

II) γ_1 – не только верхняя грань, но и максимум, который достигается, например, на "золотом сечении" $\chi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1, 1, \ldots, 1]$ $\big(\gamma_1(\chi) = \gamma_1\big)$ или на $\chi' = \chi - 1$ (χ и χ' – корни уравнения $x^2 = x + 1$);

III) числа α, для которых $\gamma_1(\alpha) = \gamma_1$, – это в точности те, которые эквивалентны "золотому сечению" χ;

IV) имеется разрыв в лагранжевом спектре, т. е. в значениях функции $\gamma_1(\alpha)$: действительно, для любого числа α, *не* эквивалентного χ, выполнено неравенство

$$\gamma_1(\alpha) \leq \frac{1}{\sqrt{8}} < \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

В размерности 1, конечно, известно гораздо больше перечисленного выше. Мы увидим, что в размерности 2 известно (и на самом деле верно) значительно меньше. Прежде всего неясно, как доказать, что можно ограничиться рассмотрением кубических полей. Оставив в стороне этот вопрос, можно получить следующий результат.

Теорема. *Пусть* $\gamma_2 = \sup\{\gamma_2'(\alpha)$, *где* $\alpha = (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(1,a,b)$ *– базис кубического поля*$\}$. *Тогда* $\gamma_2' = \frac{2}{7}$.

Это было доказано В.В. Адамсом (в [18]), который завершил работу нескольких авторов по этому вопросу. Конечно, $\gamma_2' \leq \gamma_2$, и очень похоже, что здесь имеет место равенство (и что это трудно доказать). Равенство уверенно подтверждают численные расчеты (см. [61]), в противоположность параллельному утверждению в размерности 3, как было упомянуто выше.

Переформулируем теперь утверждения II) и III) так, чтобы их можно было обобщить на высшие размерности. Максимум γ_1 достигается при $\chi \in \mathbb{Q}(\sqrt{5})$; легко показать, что $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ – квадратичное поле с *минимальным дискриминантом.* Еще точнее, $(1,\chi)$ порождают над $\mathbb{Z}$ кольцо целых этого поля (напомним, что если $d \in \mathbb{Z}$ свободно от квадратов, то целые поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ даются формулами $\mathbb{Z} + \frac{\sqrt{d}+1}{2}\mathbb{Z}$, если $d = 1(\mathrm{mod}4)$, и $\mathbb{Z} + \sqrt{d}\mathbb{Z}$, если $d = 2$ или $d = 3(\mathrm{mod}4)$).

Что касается III), то для α, эквивалентного χ, используя свойство, приведенное выше, получим: $\alpha = (p\chi + q)/(r\chi + s)$, где $ps - qr = \pm 1$. Последнее равносильно тому, что $(p\chi + q, r\chi + s)$ снова есть целый базис $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Более того, все базисы имеют такой вид.

В размерности 2 мы, таким образом, приходим к исследованию кубических полей с минимальным дискриминантом. На самом деле (см. [34, [45]]) можно ограничиться *полностью вещественными* полями, т. е. такими, для которых все корни определяющего полинома вещественны. Существует только одно полностью вещественное поле с минимальным дискриминантом (равным 49). Это $\mathbb{Q}(\xi)$, где ξ – решение уравнения

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0,$$

три корня которого суть $\xi = 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$, $\xi' = 2\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)$ и $\xi'' = 2\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$. Кроме того, оказывается, что $(1,\xi,\xi^2)$ – целый базис $\mathbb{Q}(\xi)$ (это далеко не очевидно). Соответстующие диофантовы постоянные, тем не менее, не очень близки к $\frac{2}{7}$ (≈ 0.286), а именно $\gamma_2(\xi,\xi^2) = \gamma^2(\xi,\xi^2) \approx 0.187$.

Таким образом, в действительности верхняя грань $\frac{2}{7}$ *не* достигается в размерности 2. Но в этом направлении известны и другие результаты, касающиеся сформулированной выше гипотезы. Рассмотрим базис $(1,\xi,\xi^2)$, $\xi = 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$, целых поля $\mathbb{Q}(\xi)$. Другие целые базисы, включающие 1, имеют вид $(1,a,b)$, где

$$a = n_1 + p\xi + q\xi^2, \quad b = n_2 + r\xi + s\xi^2,$$
$$n_1, n_2, p, q, r, s \ \text{ принадлежат } \mathbb{Z}, \quad ps - qr = \pm 1.$$

Можно ограничиться случаем $0 < a < b < 1$. В работе [31] (которая использует [29], [30]) Т.В.Кьюсик описывает конструкцию, позволяющую при данном $\varepsilon > 0$ определить p, q, r, s так, что

$$\frac{2}{7} - \varepsilon < \gamma_2(a,b) = \gamma^2(a,b) < \frac{2}{7}$$

(равенство двух констант доказано в [29]). Эта процедура эффективна и имеет характер алгоритма, если известно разложение $\xi = 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ в цепную дробь и если оно удовлетворяет некоторому условию, выполненному для чисел общего положения, но неизвестно, как доказать его для этого конкретного числа.

Наконец, следует упомянуть о *численных* результатах, представляющих собой единственный двумерный аналог свойства IV), указанного выше, известный к настоящему моменту: Д. Секереш провел вычисления, из которых напрашивается вывод (см. [61]), что если $\alpha = (a,b)$ и если $(1,a,b)$ не является базисом (целым или нет) поля $\mathbb{Q}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right)$, то $\gamma_2(\alpha) \le \frac{2}{7} - \delta$, где $\delta \approx 0.03$. Если это верно, то, используя разложение ξ в цепную дробь и вышеупомянутую конструкцию Т.В. Кьюсика, легко построить пары (a,b), удовлетворяющие неравенству $\gamma_2(a,b) > \frac{2}{7} - \delta$. Они должны отвечать локальным максимумам функции $\gamma_2(\alpha)$ и, соответственно, локально наиболее "стойким" инвариантным торам. Конечно, можно – и нужно – рассматривать также *все* целые базисы $\mathbb{Q}(\xi)$, полученные действием группы $Gl_3(\mathbb{Z})$ на вектор $(1,\xi,\xi^2)$.

Мы приходим к последней теме настоящего параграфа, связанной с пока что очень проблематичной теорией "перенормировки". Мы снова будем касаться только арифметики, и с этой точки зрения совместное приближение – единственное относящееся к делу понятие. Самые стойкие торы должны соответствовать наиболе медленно и наиболее правильно (эти два свойства тесно связаны) приближаемым векторам частот, что и привело к гипотезе, сформулированной выше. В духе этой статьи и работы Дж.М.Грина ([39]), которая дала импульс развитию "идеологии" перемнормировки в одномерном случае, можно теперь задаться вопросом о распределении замкнутых орбит с длинными периодами, накапливающихся на инвариантном торе. Это представляется в данный момент недостижимым, и мы рассмотрим значительно более скромную задачу нахождения наилучших приближений данного вектора. Это соответствует распределению в пространстве переменных действия или частот периодических торов в *невозмущенном* интегрируемом случае. *После* возмущения, в сущности, единственная информация, которой мы располагаем, состоит в том, что некоторые замкнутые орбиты, отвечающие этим торам, уцелеют, сколь бы ни был велик период (т. е. сколь бы близко мы не подошли к невозмущенному тору; см. конец раздела IV, § 4, и [22]).

Пусть вектор $\alpha \in \mathbb{R}^n$, а (α_i) – последовательность его наилучших приближений: $\alpha_i = \frac{p_i}{q_i}$, где $p_i \in \mathbb{Z}^n, q_i \in \mathbb{Z}_+(q_i), (q_i)$ – последовательность периодов α. Могут ли последовательности (q_i) и (α_i) демонстрировать некоторый вариант самоподобия? Существование нетривиального преобразования масштаба, соответствующего сдвигу $i \to i+1$ на индексах, очевидно, зависит от существования трех величин: λ, ρ и θ, которые мы определим следующим образом.

Сначала положим

$$\lambda = \lim_{i\to\infty} \frac{q_{i+1}}{q_i},$$

если, конечно, этот предел существует. Заметим, что мы имеем априорную оценку снизу: $\lambda \geq 1 + 2^{-n-1}$. В двумерном случае оценка улучшена до $\lambda \geq 1.270$ (> 1.125, см. [46]). Величина λ определяет изменение масштаба по переменной времени.

Затем положим

$$\rho = \lim_{i\to\infty} \frac{\|\alpha_i - \alpha\|}{\|\alpha_{i+1} - \alpha\|},$$

если, опять же, этот предел существует. Число ρ определяет масштаб в пространстве.

Конечно, в определении λ и ρ можно обобщить сдвиг $i \to i+1$ до $i = i+u$ при произвольном $u \in \mathbb{Z}_+$. Мы положили $u = 1$ для простоты обозначений. В одномерном случае λ и ρ существуют (для некоторого $u \in \mathbb{Z}_+$), в частности, для квадратичных иррациональностей. В многомерном случае необходимо также рассматривать угловую переменную.

Положим

$$\theta_i = \frac{q_i\alpha - p_i}{\|q_i\alpha - p_i\|} \in S^{n-1}.$$

Мы определяем θ при $n = 2$. Это можно обобщить, но при $n > 2$ почти ничего не известно. При $n = 2$ (θ_i) есть последовательность точек на окружности S^1, и $\theta \in (-\pi, \pi)$ определяется как число вращения (θ_i), опять-таки если оно существует. Интересно отметить, что при $n = 1$ последовательность $(\theta_i) \subset S^0 = \{\pm 1\}$ хорошо известна: она имеет вид $\theta_i = (-1)^i$, что просто означает, что подходящие дроби разложения в цепную дробь иррационального числа приближают последнее по очереди сверху и снизу.

Оптимистическое предположение состоит в том, что λ, ρ и θ существуют, по крайней мере, когда $\alpha = (a, b)$ таково, что $(1, a, b)$ – целый базис $\mathbb{Q}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right)$ или, шире, базис (не обязательно целый) кубического вещественного поля. По-видимому, в этом направлении мало что известно. Читателя, интересующегося общими результатами, мы отсылаем, в частности, к [43], [44], [47]. В [62] авторы строят векторы, аналогичные числам Лиувилля, наилучшие приближения которых могут демонстрировать, по существу, любое предписанное поведение, сколь угодно хаотическое.

Есть одно средство для изучения аппроксимации, которое мы до сих пор не упоминали: многомерные цепные дроби. Мы скажем о них несколько слов, большей частью лишь для того, чтобы дать необходимые ссылки. Некоторые из них были бы очень полезны для численной проверки сформулированной выше гипотезы или изучения связанных с ней вопросов. Прежде всего напомним, что алгоритм цепных дробей представляет собой схему, которая для данного n-мерного вектора дает, как и в одномерном случае, ряд цифр, из которых можно построить последовательность *рациональных* векторов, приближающих исходный вектор с возрастающей точностью. Существуют несколько требований, которые можно накладывать на такой алгоритм. Эти требования указаны в работе [60], содержащей ясное и аккуратное обсуждение различных возможных схем; ключевой результат состоит в том, что все требования не могут быть выполнены одновременно, так что в отличие от одномерной ситуации *оптимального* алгоритма не существует.

Вернемся к “перенормировке”. Свойства самоподобия наилучших приближений отражаются в свойствах периодичности многомерной цепной дроби, и было бы заманчиво узнать, какие векторы отвечают периодическим дробям. Здесь мы встречаемся с глубоким арифметическим явлением: для векторов, являющихся базисами числовых полей, все алгоритмы цепных дробей связаны с поиском единиц поля. С этой точки зрения самый благоприятный случай соответствует тому, что группа единиц моногенна, т. е. мультипликативно порождается одним элементом. Но, по теореме Дирихле о структуре группы единиц алгебраических полей, это верно для кубических полей тогда и только тогда, когда поле *не* является полностью вещественным. На самом деле имеет место следующее более сильное свойство: если алгоритм цепных дробей дает *все* наилучшие приближения, дробь может быть периодической на базисе вещественного числового поля, *только* если это поле квадратичное или кубическое и не полностью вещественное. Этот результат принадлежит К.Малеру, оригинальную статью которого ([49]) мы рекомендуем особенно любителям алгебраической теории чисел. Случай поля $\mathbb{Q}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right)$ там разбирается детально. Заметим, что не стоит рассчитывать получать *только* наилучшие приближения; все алгоритмы дают также “ложные” приближения, которые не особенно хороши.

Итак, хуже всего приближаемые векторы в размерности 2 соответствуют целым базисам полностью вещественных кубических полей, тогда как векторы, цепные дроби которых наиболее регулярны и легко вычисляемы, связаны с базисами (необязательно целыми) вещественных, но не полностью вещественных, кубических полей, например, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{m})$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Работы [23], [33], [36] посвящены изучению этого последнего примера.

Таким образом, встает альтернатива: можно ли ослаблять требования, которым должен удовлетворять алгоритм цепных дробей, либо изменять понятие наилучшего приближения. В первом направлении Д. Секереш предложил в [60] (см. также [32]) алгоритм, обобщающий классическую схему Якоби–Перрона. Последний пример, который рассматривается в [60], – в точности случай двумерной дроби для (ξ,ξ^2) $\left(\xi = 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right)$, для которой были вычислены первые 100 000 цифр. Эти обильные вычисления позволили предположить, что дробь содержит только единицы и двойки и что она *почти периодическая* в некотором точном смысле. Это было доказано (весьма сложно) Т.В. Кьюсиком в длинной статье [32], которая посвящена исключительно данной дроби. Как и раньше, мы упоминаем об этом, в частности, потому, что это наводит на мысль, что все арифметические вычисления, связанные с гипотезой о стойких торах, уже имеются в литературе.

Во втором направлении, касающемся самого определения наилучших приближений, можно отметить то элементарное обстоятельство, что в одномерном случае приближения, которые мы определили, являются приближениями второго рода: для данного $\alpha \in \mathbb{R}$ минимизируется $|q\alpha - p|$, $q \in \mathbb{Z}_+$, $p \in \mathbb{Z}$. Приближения первого рода, которые минимизируют $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$, в некотором смысле более естественны, но не все они появляются среди подходящих дробей α. В n-мерном случае аппроксимация α – это аппроксимация прямой в $\mathbb{R}^{n+1}$, направленной вдоль вектора $(1,\alpha)$, целочисленной решеткой $\mathbb{Z}^{n+1}$. Естественно оценивать приближение, например, через евклидово расстояние до этой прямой. По всем этим вопросам, которые порождают много открытых проблем, мы отсылаем читателя, в частности, к [23], [34], [36], [46]. В этих статьях также детально рассматривается случай кубических полей.

§ 2. Диффузия Арнольда

Цель этого параграфа двоякая. Во-первых, мы бы хотели немного развить эвристическую картину диффузии Арнольда которая вырисовывается из результатов настоящей работы. Затем мы рассмотрим нестрогий, но богатый идеями довод в пользу того, что эти результаты должны быть близки к оптимальным, по крайней мере в том, что касается показателей устойчивости. Везде в этом параграфе мы будем предполагать некоторое знакомство читателя с оригинальной статьей В.И. Арнольда [2]. Заметим, что термин "диффузия" немного неудачен (в [2] В.И. Арнольд говорит о "топологической неустойчивости"), потому что явление диффузии, вероятно, слишком сложно, чтобы строго моделироваться простыми случайными процессами, удовлетворяющими условию Маркова. Мы, тем не менее, будем следовать широко распространенной терминологии. Мы не хотели бы обсуждать трудности, связанные со строгим рассмотрением диффузии Арнольда, которые еще почти совсем непонятны, и будем оставаться на чисто эвристическом уровне. Заметим только, что в [35] построен пример, который позволяет избежать основных трудностей (но не преодолеть их), так что в этом очень частном случае конструкция, предложенная в [2], была сделана строгой. Наконец, в том, что касается физического подхода к явлению диффузии и его значения с точки зрения физики, мы отсылаем читателя, в частности, к [26], [27], где убедительно объясняется, почему оно должно "выглядеть как" процесс диффузии с корректно определенным коэффициентом диффузии (см. также конец этого параграфа).

Результаты раздела III позволяют оценить скорость диффузии Арнольда сверху, т. е. оценить снизу время, необходимое, чтобы переменные действия подверглись дрейфу порядка 1. Но наш метод также наводит на другую картину явления. Рассмотрим снова знакомый гамильтониан $H(p,q) = h(p) + \varepsilon f(p,q)$. Мы здесь можем, кроме того, предполагать, что $h(p) = \frac{1}{2}p^2$, так что пространства переменных действия и частот совпадают; для других выпуклых невозмущенных гамильтонианов картина лишь немного искажена частотным отображением. Частокол, образованный рациональными плоскостями в пространстве частот или резонансными поверхностями в пространстве переменных действия, естественно сопровождает использование линейного приближения. Он называется в физической литературе "стохастической паутиной". С другой стороны, совместное приближение связано с *рациональной решеткой*, образованной рациональными точками, снабженными весами, зависящими от их периодов. В размерностях 2 или 3 можно получить наглядную иллюстрацию явления, нанося эти точки на экран с яркостью, зависящей от периода. Рациональные плоскости тогда представляются "каустиками", так как они суть множества, на которых "размерность иррациональности" скачкообразно падает (см. лемму 3 из раздела III).

В любом случае резонансный частокол и рациональная решетка – двойственные объекты, которые несут, в сущности, одинаковую информацию. Используя решетку, диффузию Арнольда можно, по-видимому, эвристически описать следующим образом. Ограничив внимание пространством переменных действия (которое совпадает с пространством частот при $h(p) = \frac{1}{2}p^2$), будем использовать только теорему 1B с показателем $\frac{1}{2}$ вместо $\frac{1}{3}$, т. е. из

$\|p(0)\| \le r_0\sqrt{\varepsilon}$ следует $\|p(t)\| \le R_0\sqrt{\varepsilon}$ при $|t| \le \mathcal{T}_0 \exp\left(\frac{\tau}{T\sqrt{\varepsilon}}\right)$ и достаточно малом ε, причем начало координат $p = 0$ предполагается точкой (тором в фазовом пространстве) с периодом T. Конечно, мы не доказывали в точности это утверждение, но данный параграф в любом случае не претендует на строгость, и мы больше заинтересованы в том, чтобы предложить простую картину явления, которую, возможно, удастся численно смоделировать. Что касается констант, то можно взять $m = M = E = 1$, и, взглянув на формулы (29) из раздела II, мы убедимся, что для численного расчета можно положить, например, $r_0 = 1$, $R_0 = 10$, тогда как $\mathcal{T}_0$ и τ – относительно "малые" константы, точные значения которых несущественны.

Пусть теперь $p(0)$ – произвольное начальное условие. Мы рассматриваем шар $B\left(p(0), \sqrt{\varepsilon}\right)$ радиуса $\sqrt{\varepsilon}$ с центром в $p(0)$ ($r_0 = 1$) и ищем рациональную точку p с минимальным периодом T, лежащую внутри этого шара. Заметим, что такая точка *единственна*, потому что две точки с одинаковым периодом T удалены друг от друга на расстояние по крайней мере $\frac{1}{T}$, и $\frac{1}{T} > 2\sqrt{\varepsilon} = \operatorname{diam} B\left(p(0), \sqrt{\varepsilon}\right)$. Точка $p(t)$, следовательно, a priori может "стохастически" колебаться со скоростью порядка $\sqrt{\varepsilon}$ внутри шара $B(p, 10\sqrt{\varepsilon})$ радиуса $10\sqrt{\varepsilon}$ ($R_0 = 10$) с центром в p вплоть до момента времени $t_* = \mathcal{T}_0 \exp\left(\frac{\tau}{T\sqrt{\varepsilon}}\right)$ (при подходящем выборе $\mathcal{T}_0$ и τ, например, порядка 10^{-1}). С другой стороны, если при некотором t', $0 < t' < t_*$, $p(t')$ лежит на расстоянии не больше $\sqrt{\varepsilon}$ от некоторой рациональной точки p' с периодом T', можно применить то же правило по отношению к p', начиная с момента времени t'. Тогда следует сравнить t_* с $t' + t'_*$, где $t'_* = \mathcal{T}_0 \exp\left(\frac{\tau}{T'\sqrt{\varepsilon}}\right)$ и, возможно, рассмотреть шар $B(p', 10\sqrt{\varepsilon})$ для новой ссылки на вышеприведенное утверждение (на самом деле в течение некоторого времени следует рассматривать даже пересечение $B(p, 10\sqrt{\varepsilon})$ и $B(p', 10\sqrt{\varepsilon})$, но, так как мы описываем качественный и нестрогий механизм, такой педантизм, вероятно, является излишним). Иными словами, если $p(t')$ находится в зоне влияния некоторой рациональной точки с достаточно малым периодом, т. е. достаточно долгим временем удержания, мы переключаем внимание на эту точку и начинаем процесс как бы с самого начала. Теперь очевидно, что это *обязательно* случится для некоторого $t' \le t_*$, так что весь процесс корректно определен на любом интервале времени.

Возможно, движущуюся частицу в пространстве частот имеет смысл представлять себе как шарик (а не просто точку), старающийся пройти между очень "липких" (рациональных) точек, или, наоборот, как "броуновскую" частицу среди липких шаров. Не следует, однако, вводить себя в заблуждение этим образом и терять из виду, что весь процесс обратим по времени. Достоинство такой модели в том, что, ввиду отсутствия необходимости интегрировать, она может быть "ускорена" путем использования логарифмического масштаба времени с частицей, двигающейся экспоненциально быстро и задерживающейся в течение "времени" порядка $\frac{\tau}{T\sqrt{\varepsilon}}$.

Конечно, эта грубая модель страдает также многими дефектами, неточностями и излишней простотой, и мы перечислим хотя бы некоторые из ее недостатков.

1. Модель столь "универсальна", что даже не зависит от точного вида возмущения (!); предполагается только, что последнее – "общего положения" в некотором неясном смысле. Фактически мы работаем только в пространстве переменных действия, что не позволяет адекватно отразить всю сложность задачи. Это в каком-то смысле равносильно некоторого

рода “приближению случайной фазы”, изобретению, которое широко применяется в физике и которое очень трудно обосновать или даже разумным образом выразить математически.

2. Со сказанным выше связан тот факт, что мы рассматриваем движение частицы внутри шара как “стохастическое”. Здесь мы, по-видимому, теряем ту информацию, которая имеет решающее значение в доказательстве Нехорошева, а именно что колебательное движение в среднем должно быть трансверсально резонансным поверхностям (см. [12]). Последнее обеспечивается предположением выпуклости, которое с этой точки зрения возникает как раз как условие сильной трансверсальности (и которое можно заменить на условие *слабой* трансверсальности, а именно на условие крутизны). До сих пор неясно, как механизм “расстройки” Нехорошева, т. е. дрейфа в нерезонансную область, можно согласовать с нашей картиной; даже, кажется, не совсем ясно, в какой степени этот механизм отражает реальность, а в какой – только метод доказательства. С другой стороны, он, возможно, каким-то образом учитывается в картине резонансных поверхностей, появляющихся в качестве “каустик” рациональной решетки.

3. Другая информация явно упускается, – это существование колмогоровских торов (инвариантных торов максимальной размерности). Они снова могут быть адекватно представлены в пространстве переменных действия, так как они деформированы по отношению к (некоторым) невозмущенным торам (которые выглядят как точки в пространстве переменных действия).

Колмогоровские торы также стремятся “удерживать” (но не “притягивать”; все опять обратимо во времени) соседние траектории в течение экспоненциально больших времен. Это соответствует оценкам типа Жевре с двумя параметрами, которые были упомянуты в конце раздела IV § 2, и снова указывает на определенного рода двойственность между очень резонансными и очень нерезонансными частотами, которая обсуждалась выше (см. особенно IV § 1), а также отражает тот факт, что “классическая” теория возмущений, включающая оценки на экспоненциально больших временах, и теория КАМ еще недостаточно хорошо “стыкаются” друг с другом. По нашему мнению, это еще больше поднимает значение первоначальных идей А.Н. Колмогорова о существовании инвариантных торов.

4. В нарисованной картине отсутствуют также другие хорошо известные объекты, в частности, маломерные инвариантные торы, вплоть до периодических орбит. Все эти объекты, которые, конечно, могут быть представлены только в полном фазовом пространстве, образуют множество нулевой меры Лебега, в отличие от колмогоровских торов, но в их окрестностях также имеют место различные оценки с экспоненциальными временами, хотя эти оценки еще никем не были получены, и некоторые из них, возможно, технически выписать довольно громоздко. Кроме того, эти торы “оснащены” устойчивым, центральным и неустойчивым многообразиями, которые также играют свою роль, в действительности важную, так как они составляют существо первоначального анализа В.И. Арнольда [2]. Наконец, следует упомянуть возможные канторторы (множества Обри–Мазера), о которых мало что известно, только лишь что при их изучении нельзя провести полную аналогию с двумерным случаем и что выпуклость играет решающую роль (см. конец IV, § 4).

Сделанные выше замечания должны были бы убедить читателя, что наша модель способна дать в лучшем случае грубое “макроскопическое” описание явления, которое можно реализовать численно. С этой точки зрения она может иметь определенное значение, и следует надеяться в конце концов извлечь из нее ту или иную количественную информацию, описывающую некоторые свойства рассматриваемого процесса. После этого ее можно будет сопоставить с результатами уже существующих численных экспериментов по диффузии Арнольда.

Что же касается строгого "микроскопического" описания диффузии Арнольда (или действительно строгого статистического описания), задача выглядит значительно труднее, и мы сделаем только одно простое замечание. Для того чтобы строго обосновать такую картину, как описанная выше, или даже малую часть ее, понадобилось бы рассматривать линейно неустойчивые замкнутые орбиты в качестве элементарных составляющих конструкции вместо трансверсально гиперболических $n-1$-мерных торов. Предположим теперь, что вектор $\omega \in \mathbb{R}^d$ $(1 < d \le n-1)$ диофантов, скажем, удовлетворяет условию:

$$\exists \gamma > 0, \quad \text{такое, что} \quad \big|(\omega, k)\big| \ge \gamma |k|^{-d} \quad \text{при} \quad \forall k \in \mathbb{Z}^d \backslash \{0\}.$$

Тогда торы размерности d и частоты ω, которые являются трансверсально гиперболическими, будут, как правило, существовать при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 = \varepsilon_0(\gamma)$, где $\varepsilon_0(\gamma)$ стремится к нулю вместе с γ. Напротив, при $d = 1$, как мы уже упоминали (см. IV, конец § 4), замкнутые орбиты периода T будут, как правило, существовать при $\varepsilon < \varepsilon_0$ с ε_0, *не зависящим* от T. Здесь T и γ играют очень похожие роли, при этом γ связано с временами приближенного возвращения линейного потока, направленного вдоль вектора ω (см. приложение 1). В результате в общем случае, при данном ε, будут существовать области неустойчивости, в которых никакие торы не сохраняются, чего, однако, нельзя сказать, про замкнутые орбиты. Это может иметь очень большое значение при попытках построить переходные цепочки в смысле [2].

Теперь мы вернемся к более общепринятому описанию диффузии Арнольда, использующему трансверсально гиперболические ("усатые") торы, для того чтобы проверить оптимальность показателя устойчивости $a(n)$, найденного в разделе III. Нижеследующие вычисления можно рассматривать как интерпретацию некоторых рассуждений Б.В. Чирикова, в частности, в последней части [26]. Рассмотрим гамильтониан

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}I^2 + \varepsilon(\cos q - 1)\big(1 + \mu F(\phi)\big), \tag{1}$$

где

$$(p, q) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}), \quad (I\phi) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z})^n.$$

Число измерений равно $N = n+1$, а переменные здесь обозначаются по-новому, чтобы сосредоточить внимание на окрестности простой резонансной поверхности $p = 0$. Далее, ε и μ – параметры возмущения, F – вещественная аналитическая функция с шириной аналитичности $\sigma > 0$. Для удобства мы предполагаем, что она четная, и пишем:

$$F(\phi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \backslash \{0\}} f_k \cos(k, \phi), \quad \text{где} \quad f_{-k} = f_k.$$

Коэффициенты Фурье удовлетворяют оценке $|f_k| = O(e^{-\sigma|k|})$, где $|k| = \sum |k_i|$. Имея в виду возможные численные эксперименты, можно предложить следующие два примера: $f_k = e^{-\sigma|k|}$ (в этом случае ряды могут быть просуммированы явно) и $f_k = \exp\bigl(-c\|k\|^2\bigr)$ ($\|\cdot\|$ – евклидова норма), что определяет целую функцию, которая является почти тета-функцией. Разложим H в сумму $H = H_1 + H_2 + \varepsilon\mu\Phi(q,\phi)$, где

$$H_1 = \frac{1}{2}p^2 + \varepsilon(\cos q - 1), \quad H_2 = \frac{1}{2}I^2.$$

При $\mu = 0$ гамильтониан $H_0 = H_1 + H_2$ имеет инвариантные торы размерности $n = N-1$, определяемые равенствами $p = q = 0$, $I = \omega$, $\phi \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n$. Мы пишем: $\omega = I$, только чтобы подчеркнуть, что I – частота ($\omega = \nabla H_2$). По сравнению с примером В.И. Арнольда из [2] обобщение состоит в том, что размерность произвольна (так что можно рассматривать автономный гамильтониан) и, что более важно, в том, что возмущающее слагаемое включает сколь угодно высокие гармоники. Гиперболичность отсутствует при $\varepsilon = 0$, что указывает на вырожденность задачи, и мы ввели, как в [2], [14], *два* параметра, чтобы избежать трудностей с сингулярным возмущением (см. краткий комментарий ниже). Кроме того, как и в [2], возмущение обращается в ноль на торах, которые, следовательно, все сохраняются, что является совсем уже нетипичным свойством.

Теперь мы подробно изложим вычисление интегралов Пуанкаре–Мельникова для H, при котором появятся малые знаменатели. При $\mu \geq 0$ устойчивое (+) и неустойчивое (−) многообразия тора определяются уравнениями вида

$$H_1 = \Delta^{\pm}(q,p,I,\phi), \quad \frac{1}{2}I_j^2 = \frac{1}{2}\omega_j^2 + \Delta_j^{\pm}(q,p,I,\phi), \quad j = 1,\ldots,n.$$

Функции $\Delta^{\pm}$ и $\Delta_j^{\pm}$ (индексы здесь обозначают компоненты вектора) обращаются в ноль при $\mu = 0$. Классический прием Пуанкаре–Мельникова состоит в том, чтобы оценить – по крайней мере, формально – эти функции в первом порядке малости по μ. Точнее, пусть $\bigl(p(t), q(t)\bigr)$ – решение уравнения маятника, описываемого гамильтонианом H_1, соответствующее сепаратрисе (скажем, ее верхней ветви) и такое, что $q(0) = \pi$:

$$q(t) = 4\mathrm{arctg} e^{\tau}, \quad p(t) = \dot{q}(t) = \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\mathrm{ch}\tau}, \quad \tau = \sqrt{\varepsilon}t.$$

Имеем:

$$\frac{d}{dt}\Bigl(\frac{1}{2}I_j^2\Bigr) = -I_j\frac{\partial H}{\partial \phi_j} = \frac{1}{2}\mu\omega_j p^2\frac{\partial F}{\partial \phi_j},$$

так как $I_j = \omega_j$, и $H_1 = 0$ на сепаратрисе. Линейное приближение состоит в подстановке невозмущенной траектории вместо возмущенной при интегрировании. Вычисляются разности $\Delta = \Delta^+ - \Delta^-$ и $\Delta_j = \Delta_j^+ - \Delta_j^-$ на плоскости $q = \pi$, которое мы в этом приближении обозначаем через $\delta = \delta H_1$ и δ_j. Эти величины представляют в первом порядке малости по μ расстояния между проекциями устойчивого и неустойчивого многообразий на плоскостях (p,q) и

(I_j, ϕ_j). Они являются функциями начального угла $\phi^{(0)}$ на торе (см. ниже), его частоты ω и параметров, описывающих возмущение. Таким образом, мы получаем вариант формулы Пуанкаре–Мельникова для этого примера. В частности,

$$\delta_j = \frac{1}{2}\mu\omega_j \int_{-\infty}^{+\infty} p^2 \frac{\partial F}{\partial \phi_j}\, dt. \tag{2}$$

Вклад δ_j^k гормоники $f_k \cos(k, \phi)$ возмущения дается формулой

$$\delta_j^k = -\frac{1}{2}\mu f_k \omega_j k_j \int_{-\infty}^{+\infty} p^2 \sin\bigl(k, \phi(t)\bigr) dt,$$

где $\phi(t) = \phi^{(0)} + \omega t$ описывает невозмущенную траекторию. Находим:

$$\delta_j^k = -2\pi\mu f_k(\omega, k) \frac{\sin(k, \phi^{(0)})}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{2}\frac{(\omega,k)}{\sqrt{\varepsilon}}\right)} \omega_j k_j. \tag{3}$$

После суммирования по j мы получаем вклад гармоники с номером k в δH_2, обозначаемый через $\delta^k H_2$:

$$\delta^k H_2 = -2\pi\mu f_k(\omega, k)^2 \frac{\sin(k, \phi^{(0)})}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{2}\frac{(\omega,k)}{\sqrt{\varepsilon}}\right)}. \tag{4}$$

Аналогично можно вычислить $\delta = \delta H_1$ и получить, что $\delta H_1 = -\delta H_2 (= -\sum_j \delta_j)$. Такой результат не является неожиданным для данного разложения H, так как последнее инвариантно, а членом $\varepsilon\mu\delta\Phi$ можно пренебречь в первом порядке малости по μ (на самом деле это слагаемое имеет еще более высокий порядок, потому что Φ осциллирует).

Последующие рассуждения, если излагать их очень конспективно, выглядят следующим образом (ср. [2]). Для того чтобы построить "переходные цепочки" между гиперболическими торами, надо найти гетероклинические пересечения, в данном случае на плоскости $q = \pi$, между устойчивым и неустойчивым многообразиями двух торов с частотами, соответственно, $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(2)}$. Затем следует решить систему

$$\Delta = \Delta H_1 = 0, \quad \frac{1}{2}\omega_j^{(1)^2} + \Delta_j^{(1)-} = \frac{1}{2}\omega_j^{(2)^2} + \Delta_j^{(2)+}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Если разность частот мала по сравнению с μ, разрешимость этой системы эквивалентна, по теореме о неявной функции, разрешимости следующей линеаризованной системы, где величины δ и δ'_j вычислены при общем промежуточном значении ω, лежащем между $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(2)}$:

$$\delta = 0, \quad \delta_j = \frac{1}{2}\omega_j^{(2)^2} - \frac{1}{2}\omega_j^{(1)^2}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

В то же время в "реальных" задачах имеется связь между μ и ε типа $\mu = \varepsilon^p$ $(p \in \mathbb{Z}_+)$, и проблема обоснования этого линейного приближения весьма трудна; был исследован только одномерный случай. Насколько нам известно, более типичные *формальные* вычисления содержатся в книге [14] (§ 225 и далее), которую мы рекомендуем читателю для справок. Во введении к [42] можно найти обсуждение многих случаев, в которых возникает такая задача с сингулярным возмущением: в двух словах, это происходит вследствие того, что интегрируемая гамильтонова система не содержит гиперболичности, и последняя, таким образом, имеет тот же порядок, что и возмущение. Задача такого типа, но в *одномерной* ситуации, была решена впервые совсем недавно В.Ф. Лазуткиным с соавторами (см. [48]). Здесь мы только отметим эту трудность и продолжим вычисления в линейном приближении.

Следуя рассуждениям В.И. Арнольда, максимальный шаг в переходной цепочке, т. е. $\|\omega^{(2)} - \omega^{(1)}\|$, по существу, определяется в соответствии с (5) величиной интегралов Пуанкаре–Мельникова, и *если* можно пренебречь временем, необходимым для совершения первого шага, по сравнению с числом шагов, то средняя скорость диффузии Арнольда, т. е. обратная величина к времени, необходимому для дрейфа переменных действия порядка единицы, будет приближенно равна тому же самому числу. Изложенные эвристические соображения можно подытожить в следующем уравнении:

Средняя скорость диффузии $\approx$ расщепление $\approx$ расщепление в линейном приближении, где первый знак равенства следует понимать в том смысле, что две величины имеют один и тот же порядок, а второй – в смысле асимптотических разложений. Грубо говоря, обоснование первого равенства – предмет трудных геометрических задач, а второе ставит трудные аналитические задачи.

Если верить этому уравнению, можно оценить среднюю скорость и найти в случае гамильтониана, рассматриваемого в [2], что она имеет порядок $e^{-\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}}$. Для гамильтониана H, рассмотренного выше, ситуация усложняется наличием в формулах (3) и (4) выражения (ω, k) или, вернее, комбинации $\frac{(\omega,k)}{\sqrt{\varepsilon}}$. Это отражает переплетение гиперболичности (гетероклинические многообразия), сингулярного возмущения (множитель $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$) и эллиптичности ("малый знаменатель" (ω, k)); последний фактор является новым и, конечно, встречается в общем случае. Множитель (ω, k) a priori может принимать, по существу, *любое* значение, и, как кажется, это полностью лишает смысла вариационные вычисления типа Пуанкаре–Мельникова, даже с формальной точки зрения. Действительно, при подходящих значениях малого знаменателя можно предсказать *любое* значение скорости диффузии, включая такое, которое противоречит оценкам типа Нехорошева.

Однако, взглянув на сказанное выше немного более внимательно, можно увидеть, что множитель $\frac{(\omega,k)}{\sqrt{\varepsilon}}$ появляется из возможного резонанса вектора частот ω гиперболического тора с относительной частотой $\frac{k}{\sqrt{\varepsilon}}$ гармоники возмущения. Но напомним, что вектор частот гамильтониана H в действительности имеет вид $(0,\omega) \in \mathbb{R}^N$, так что резонанс ω определяет *двойной* резонанс для H. Теперь мы потребуем все время находиться от таких двойных резонансов настолько далеко, насколько это возможно, т. е. предположим, что ω – диофантова частота. Для этого можно назвать, по крайней мере, три серьезных довода.

Во-первых, вообще говоря, выживают в точности те трансверсально гиперболические торы, которые отвечают диофантовым частотам. В данном случае, конечно, этот довод довольно неубедителен, так как *все* торы сохраняются.

Во-вторых, изложенные выше вариационные рассуждения приспособлены к отдельным резонансам. Если имеет место r-кратный резонанс $(1 \leq r \leq N-1)$, т. е. если рассматриваются трансверсально гиперболические торы размерности $d = N - r$, необходимо, в принципе, вычислять матрицу функций размера $r \times r$.

В-третьих, в соответствии с результатами настоящей работы, если мы хотим максимизировать скорость диффузии Арнольда, следует избегать резонансов высоких кратностей. Действительно, если две точки в пространстве действия с одинаковой невозмущенной энергией лежат, скажем, на двух простых резонансных поверхностях, которые пересекаются на этой невозмущенной поверхности уровня энергии, то переход из одной точки в другую с необходимостью влечет прохождение двойного резонанса, что вызывает увеличение первого показателя устойчивости (согласно следствиям 2 и 3), т. е. снижение скорости дрейфа.

Имея это в виду, посмотрим снова на формулу (3). До сих пор у нас было единственное условие $\delta = \delta H_1 = 0$, вынуждающее вектор I (или ω) двигаться по сфере $\big(\|I\| = \mathrm{const}\big)$. Теперь мы положим $\sin(k, \phi^{(0)}) = \pm 1$, потому что мы максимизируем расщепление по начальному углу (заметим, что когда k стремится к бесконечности, условие $\big|\sin(k, \phi^{(0)})\big| \geq \mathrm{const}$ разбивает тор на все более тонкие полоски). Добавим условие, что вектор ω диофантов, т. е. удовлеворяет обычным неравенствам:

$$\exists \tau \geq n-1,\ \gamma > 0 \ \ \text{такие, что} \ \ \big|(\omega, k)\big| \geq \gamma |k|^{-\tau}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n \backslash \{0\}.$$

Мы можем, наконец, провести следующую оценку. Рассмотрим гармоники с номерами k такими, что

$$\sqrt{\varepsilon} \ll \big|(\omega, k)\big| \approx \frac{\gamma}{|k|^\tau} \ll 1.$$

Предположим, что амплитуда $|f_k|$ имеет порядок $e^{-\sigma |k|}$. Согласно формуле (3) эта гармоника добавляет в расщепление устойчивого и неустойчивого многообразий слагаемое

$$\delta_j^k \approx \mu |k|^{-\tau} e^{-\sigma |k|} \exp\Big[-\frac{\rho}{\sqrt{\varepsilon}|k|^\tau}\Big],$$

где $\rho = \frac{\pi\gamma}{2}$. Найдем теперь экстремум (максимум) этой величины относительно k при фиксированном ε, что, в соответствии со сказанным выше, даст максимальный из возможных шаг в переходной цепочке и, грубо говоря, максимальную среднюю скорость. Для $\varepsilon \ll 1$ немедленно получаем: $|k| \approx \left(\frac{\rho\tau}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\tau+1}} \varepsilon^{-\frac{1}{2(\tau+1)}}$, так что

$$\delta_j^k \approx \mu \varepsilon^{\frac{\tau}{2(\tau+1)}} \exp\big(-\Xi \varepsilon^{-\frac{1}{2(\tau+1)}}\big) \tag{6}$$

для некоторой константы Ξ (которую легко можно вычислить). Наиболее важная особенность этой формулы – показатель $\frac{1}{2(\tau+1)}$ степени ε под знаком внешней экспоненты. В частности, полагая $\tau = n$, находим, что при $\varepsilon \to 0$ скорость убывает как $\exp\bigl(-c\varepsilon^{-\frac{1}{2N}}\bigr)$ $(N = n + 1)$, что почти совпадает с оценкой *сверху*, полученной в разделе III. По правде говоря, можно даже положить $\tau = n - 1$ или, лучше, использовать любое $\tau > n - 1$ для определения множества частот относительной меры 1, в результате чего получилась бы слегка завышенная оценка скорости по сравнению с теорией устойчивости. Это обстоятельство не должно причинять особого беспокойства ввиду многочисленных предположений, при которых проводилось данное вычисление.

Точно так же, если попытаться выполнить подобные вычисления для r-мерных резонансов, то, как мы уже упоминали, потребовалось бы вычислить матрицу размера $r \times r$, и понятно, что с точки зрения показателя результат будет состоять в замене n на $d = N - r$, ввиду диофантовых условий на частоту. Мы бы восстановили таким образом показатели устойчивости из следствия 2. В действительности показатели устойчивости являются очень грубыми, и, следовательно, очень стойкими характеристиками, которые, в частности, нечувствительны ко многим алгебраическим операциям. В более интуитивных терминах можно сказать, что чем выше размерность гиперболического тора, тем больше значение может иметь резонанс возмущения с линейным потоком на этом торе, даже если рассматриваемый резонанс предполагается минимальным из возможных при данной размерности.

Мы уже упоминали, что изложенные выше рассуждения тесно связаны с оценками, проведенными Б.В. Чириковым на другом языке, что привело его к предсказанию "коэффициента диффузии" с показателем, снова равным $\frac{1}{2N}$, где N – число независимых частот. Несмотря на различную размерность, "коэффициент диффузии" (который в действительности строго определить нельзя) и "средняя скорость", по существу, означают одно и то же. Предсказание Б.В. Чирикова было проверено численно, и результаты представляются достаточно согласованными, если принять во внимание трудоемкость численных экспериментов (см. [27]). Учитывая результаты настоящей работы, можно сказать, что теоремы устойчивости, которые оценивают скорость диффузии Арнольда сверху, и эвристические рассуждения, которые дают грубые оценки для нее, приводят к практически совпадающим выводам, по крайней мере в том, что касается показателей двойных экспонент.

Приложение 1. Несколько слов о диофантовых приближениях

Здесь мы кратко напоминаем для удобства читателя некоторые простые результаты из теории приближений, ссылаясь на специальные монографии (особенно [17], [25]) и статьи, содержащие больше подробностей и гораздо более богатую информацию.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. Две важные и связанные между собой задачи состоят в изучении *совместного* и *линейного* приближений вектора α. В первом случае нас интересует последовательность чисел $\|q\alpha\|_{\mathbb{Z}}$, $q \in \mathbb{Z}$ (или $\mathbb{N}$); во втором рассматриваются выражения $\bigl|(\alpha, k)\bigr|$, $k \in \mathbb{Z}^n$. Напомним, что мы используем обозначение

$$\|\alpha\|_{\mathbb{Z}} = \inf_{\zeta \in \mathbb{Z}^n} \|\alpha - \zeta\|_{\infty},$$

где $\|\cdot\|_\infty$ означает sup-норму (модуль максимальной компоненты). Более общая задача состоит в рассмотрении значений p линейных форм на $\mathbb{R}^q$, и такой подход технически очень полезен, даже для доказательства утверждений о совместном или линейном приближениях, но мы не будем на этом останавливаться.

С точки зрения совместного приближения, очевидно, приближать $\alpha \in \mathbb{R}^n$ или $(1,\alpha) \in \mathbb{R}^{n+1}$ – эквивалентные задачи. Поэтому совместное приближение α соответствует *неоднородному* линейному приближению. Рассматриваются значения выражения $\bigl|k_0 + (\alpha,k)\bigr|$, $k_0 \in \mathbb{Z}$, $k = (k_1,\dots,k_n) \in \mathbb{Z}^n$, т. е. значения $\bigl\|(\alpha,k)\bigr\|_{\mathbb{Z}}$. Кроме того, для получения хороших свойств переноса следует использовать норму $|k|_\infty = \sup\limits_i |k_i|$ при оценке величины k. Итак, мы определяем:

$$\Omega_n(\tau,\gamma) = \left\{\alpha \in \mathbb{R}^n,\ \forall q \in \mathbb{N}\backslash\{0\},\ \|q\alpha\|_{\mathbb{Z}} \geq \left(\frac{\gamma}{q}\right)^{\frac{1}{n}(1+\tau)}\right\},$$

$$\Omega_n(\tau) = \bigcup_{\gamma>0} \Omega_n(\tau,\gamma);$$

$$\Omega^n(\tau,\gamma) = \bigl\{\alpha \in \mathbb{R}^n,\ \forall k \in \mathbb{Z}^n\backslash\{0\},\ \bigl\|(\alpha,k)\bigr\|_{\mathbb{Z}} \geq \gamma|k|_\infty^{-n(1+\tau)}\bigr\},$$

$$\Omega^n(\tau) = \bigcup_{\gamma>0} \Omega^n(\tau,\gamma).$$

Свойства включения

$$\Omega_n(\tau_1,\gamma) \subset \Omega_n(\tau_2,\gamma) \quad \text{при} \quad \tau_1 < \tau_2,$$

$$\Omega_n(\tau,\gamma_1) \subset \Omega_n(\tau,\gamma_2) \quad \text{при} \quad \gamma_1 > \gamma_2$$

проверяются непосредственно, так же как и аналогичные свойства множеств $\Omega^n(\tau,\gamma)$.

Сначала мы укажем несколько простых свойств множеств $\Omega_n(\tau,\gamma)$, а затем сформулируем теорему переноса, которая, в частности, позволит переписать эти свойства для $\Omega^n(\tau,\gamma)$.

Говорят, что данный вектор *плохо аппроксимируем*, если он принадлежит $\Omega_n(0)$. То, что это множество не пусто, не очевидно, но на самом деле можно предъявить явные примеры: любой вектор α, такой что $(1,\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ образует базис алгебраического поля (степени $n+1$) над $\mathbb{Q}$, плохо аппроксимируем. Это простое утверждение – многомерный аналог теоремы Лиувилля о приближениях алгебраических чисел.

С другой стороны, говорят, что данный вектор *очень хорошо аппроксимируем*, если он не принадлежит множеству $\Omega_n(\tau)$ при достаточно малых $\tau > 0$, что эквивалентно существованию $\varepsilon > 0$, для которого неравенство $\|q\alpha\|_{\mathbb{Z}} \leq q^{-\frac{1}{n-\varepsilon}}$ имеет *бесконечно много* целых решений. При таких определениях справедливо следующее

Предложение. *Почти все векторы не являются ни плохо, ни очень хорошо аппроксимируемыми*:

$$\operatorname{mes} \Omega_n(0) = \operatorname{mes}\bigl(\mathbb{R}^n - \bigcap_{\tau>0} \Omega_n(\tau)\bigr) = 0.$$

Это значит, что оценка в теореме Дирихле почти нигде не является оптимальной $\bigl($ибо $\operatorname{mes}\Omega_n(0) = 0\bigr)$, но что показатель $\frac{1}{n}$ в $q^{-\frac{1}{n}}$ почти нигде не может быть улучшен. Это предложение – частный случай основного результата метрической теории приближений, который можно сформулировать следующим образом.

Теорема (А.Я.Хинчин) *Пусть* $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ *монотонно убывает. Если ряд* $\sum_{q\geq 0} \big(\phi(q)\big)^n$ *сходится (соответственно расходится), то неравенство* $\|q\alpha\|_{\mathbb{Z}} \leq \phi(q)$ *имеет почти для всех* α *конечное (соответственно бесконечное) число целых решений.*

Эту теорему можно теперь применить для $\phi(q) = q^{-\frac{1}{n}}$, или даже $\phi(q) = (q \log q)^{-\frac{1}{n}}$ ($q > 1$, случай расходимости), или, наоборот, $\phi(q) = q^{-\frac{1}{n-\varepsilon}}$ ($\varepsilon > 0$) или $\phi(q) = (q \log^2 q)^{-\frac{1}{n}}$ (случай сходимости). Заметим, что утверждение теоремы легко доказать в сходящемся случае, но значительно труднее в расходящемся. В [17] содержится более точный вариант теоремы (принадлежащий В.М.Шмидту). Отметим также, что хотя множество $\Omega_n(0)$ имеет нулевую меру Лебега, его хаусдорфова размерность равна n.

Теперь можно ввести положительные функции τ_* и τ^* на $\mathbb{R}^n$, определяемые как

$$\begin{aligned} \tau_*(\alpha) &= \inf\big\{\tau \geq 0 \quad \text{таких, что} \quad \alpha \in \Omega_n(\tau)\big\}, \\ \tau^*(\alpha) &= \inf\big\{\tau \geq 0 \quad \text{таких, что} \quad \alpha \in \Omega^n(\tau)\big\}. \end{aligned}$$

Вообще говоря, конечно, эти нижние грани не достигаются, т. е. α не обязательно принадлежит $\Omega_n\big(\tau_*(\alpha)\big)$ $\big($или $\Omega^n\big(\tau^*(\alpha)\big)\big)$. Можно переформулировать определение в виде:

$$\tau_*(\alpha) = \inf\big\{\tau \geq 0 \quad \text{таких, что неравенство} \quad \|q\alpha\|_{\mathbb{Z}} \leq q^{-\frac{1}{n}(1+\tau)} \\ \text{имеет } \textit{конечное} \text{ число целых решений}\big\}.$$

Аналогичную переформулировку можно дать для τ^*. Имеет место следующая теорема переноса.

Теорема. 1. *Для любого* $\alpha \in \mathbb{R}^n$

$$n\tau^*(\alpha) \geq \tau_*(\alpha) \geq \frac{\tau^*(\alpha)}{(n-1)\tau^*(\alpha) + n}.$$

2. $\Omega_n(0) = \Omega^n(0)$.

Из сформулированной выше метрической теоремы вытекает, что $\tau_*(\alpha) = 0$ почти всюду, откуда и $\tau^*(\alpha) = 0$ почти всюду. Эта теорема утверждает, в частности, что понятия плохой или очень хорошей аппроксимируемости не зависят от вида приближения.

Одно из преимуществ совместного приближения состоит в том, что в нем необходимо рассматривать лишь *последовательность* чисел (с натуральными индексами). В действительности можно часто ограничиться *наилучшими приближениями.* Прежде всего дадим определение соответствующих *периодов* (это название не вполне стандартно, но мы не знаем ни одного достаточно широко используемого термина).

Определение. Для любого вектора $\alpha \in \mathbb{R}^n$ его периодами $(q_i)_{i\geq 0}$ называются натуральные числа, такие что

$$q_0 = 1 \;\text{ и }\; \forall q \in \mathbb{N} \;\; q < q_{i+1} \Rightarrow \|q\alpha\|_{\mathbb{Z}} \geq \|q_i\alpha\|_{\mathbb{Z}}.$$

Изменением масштаба одну из компонент α можно превратить в единицу, так что можно предполагать, что $\alpha = (1, \alpha')$, $\alpha^1 \in \mathbb{R}^{n-1}$. При $n = 2$ числа q_i суть знаменатели подходящих дробей цепной дроби α'. В произвольной размерности можно определить целочисленные векторы p_i, такие что

$$\|q_i\alpha\|_{\mathbb{Z}} = \|q_i\alpha - p_i\|_{\infty}.$$

Рациональные векторы $\alpha_i = p_i/q_i$, $p \in \mathbb{Z}^n$, $q_i \in \mathbb{N}$, с периодами q_i называются *наилучшими приближениями* (по Дирихле) вектора α.

Обратившись на короткое время к динамике, можно заметить, что периоды связаны с временами приближенного возвращения на торе. В самом деле, пусть $\omega = (1, \omega') \in \mathbb{R}^n$ с соответствующими периодами (T_i), и пусть F^t – линейный поток на n-мерном торе с вектором скорости ω:

$$\phi \in \mathbb{T}^n \to F^t(\phi) = \phi + \omega t \in \mathbb{T}^n.$$

Рассмотрим $C(\delta)$, $0 < \delta < \frac{1}{2}$, куб с центром в начале координат и ребрами длины 2δ, направленными вдоль координатных осей (представляя $\mathbb{T}^n$ как $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$). Наконец, пусть $T(\delta)$ – время возврата в $C(\delta)$ траектории, выходящей из начала координат. Тогда, кроме некоторых тривиальных исключений,

$$T(\delta) = T_i + O(\delta), \quad \text{где } i \text{ – наименьший индекс такой, что } \|T_i\omega\|_{\mathbb{Z}} \leq \delta.$$

Это на самом деле просто динамическая переформулировка определения периодов. В настоящей статье при изучении канонической теории возмущений мы, таким образом, вместо периодов используем малые знаменатели, т. е. времена возвращения заменяем на резонансы. Теорема Дирихле утверждает, что $T(\delta) = O(\delta^{-n+1})$, что почти очевидно.

Возвращаясь к арифметике и вектору $\alpha \in \mathbb{R}^n$, можно заметить, что теорема Дирихле эквивалентна последовательности неравенств:

$$\|q_i\alpha\|_{\mathbb{Z}} \leq q_{i+1}^{-\frac{1}{n}}, \quad i \geq 0.$$

Мы можем теперь ввести еще один тип диофантовых условий, определив

$$\Omega(\tau, \gamma) = \left\{\alpha \in \mathbb{R}^n, \forall_i \geq 0 \;\; q_{i+1} \leq \gamma q_i^{1+\tau}\right\},$$
$$\Omega(\tau) = \bigcup_{\gamma > 0} \Omega(\tau, \gamma).$$

Мы, таким образом, требуем, чтобы последовательность периодов не росла слишком быстро. Использование *полиномиальной* границы весьма произвольно, что можно сказать и про другие диофантовы условия. Важно отметить, что множества $\Omega(\tau,\gamma)$ на самом деле описывают не скорость аппроксимации, а ее регулярность. В частности, если $\alpha = (0,\alpha')$, где $0 \in \mathbb{R}^r$, $\alpha' \in \mathbb{R}^d$ $(d+r=n)$, то $\alpha \in \Omega(\tau,\gamma)$ тогда и только тогда, когда $\alpha' \in \Omega(\tau,\gamma)$. По этой причине множество $\Omega(\tau,\gamma)$ в некотором смысле не зависит от n. Иными словами, если вектор резонансен, траектория соответствующего линейного потока на n-мерном торе не плотна, вернее, тор расслоен на торы меньшей размерности, на которых траектории плотны. Принадлежность к $\Omega(\tau,\gamma)$ зависит только от движения на этих торах меньшей размерности. Понятно, что такой вид арифметических условий оказываетя наиболее полезным или естественным во многих ситуациях.

Наконец, имеют место прямые отношения включения, которые связывают эти и ранее определенные множества. В частности,

$$\Omega_n(\tau,\gamma) \subset \Omega(\tau,\gamma^{-(1+\tau)}), \quad \text{откуда} \;\; \Omega_n(\tau) \subset \Omega(\tau).$$

Чтобы доказать это, положим $\alpha \in \Omega_n(\tau,\gamma)$; тогда, в частности, для любого i

$$\left(\frac{\gamma}{q_i}\right)^{\frac{1}{n}(1+\tau)} \le \|q_i\alpha\|_{\mathbb{Z}} \le q_{i+1}^{-\frac{1}{n}},$$

откуда и следует написанное выше включение (как уже отмечалось, неравенство справа эквивалентно теореме Дирихле). Мы, таким образом, также получаем, что

$$\mathrm{mes}\big(\mathbb{R}^n \setminus \cap_{\tau>0}\, \Omega(\tau)\big) = 0,$$

но на самом деле верно гораздо большее. Как было сказано выше, это утверждение сохраняется, если заменить $\mathbb{R}^n$ на любую рациональную плоскость ("резонансные" плоскости в динамике).

В качестве последней темы рассмотрим чуть более подробно множество плохо аппроксимируемых векторов. Введем обозначения $\Omega_n = \Omega_n(0) = \Omega^n(0)$, $\Omega = \Omega(0)$. Имеем: $\Omega_n \subset \Omega$, что означает, что последовательность периодов плохо приближаемых векторов возрастает, самое большее, как геометрическая прогрессия. Точнее, $\Omega_n(0,\gamma) \subset \Omega(0,\gamma^{-1})$ $(\gamma > 0)$, т. е. при $\alpha \in \Omega_n(0,\gamma)$ соответствующие периоды (q_i) удовлетворяют неравенствам $q_i \le \gamma^{-i}$ $(q_0 = 1)$.

С другой стороны, для *любого* $\alpha \in \mathbb{R}^n$ эта последовательность возрастает *по меньшей мере* как геометрическая прогрессия (если она бесконечна, т. е. если хотя бы одна компонента вектора иррациональна). В самом деле, для любого α

$$\varliminf_{i\to\infty} (q_i)^{\frac{1}{i}} \ge g_n > 0,$$

с явной оценкой $g_n \geq 1 + 2^{-n-1}$ (см. [46]). По аналогии со случаем размерности 2 (или 1, в зависимости от терминологии) можно сказать, что плохо аппроксимируемые векторы суть векторы постоянного типа.

Для таких векторов можно определить величины $\gamma_n(\alpha)$ и $\gamma^n(\alpha)$ как

$$\gamma_n(\alpha) = \varliminf_{q\to\infty} q\|q\alpha\|_{\mathbb{Z}}^n, \quad \gamma^n(\alpha) = \varliminf_{|k|\to\infty} |k|_\infty^n \big\|(\alpha,k)\big\|_{\mathbb{Z}}.$$

Правда, эти функции определены для любого вектора, но они обращаются в ноль, если вектор не является плохо аппроксимируемым. Эквивалентное определение:

$$\gamma_n(\alpha) = \inf\big\{\gamma > 0 \text{ таких, что неравенство } \|q\alpha\|_{\mathbb{Z}} \leq \left(\frac{\gamma}{q}\right)^{\frac{1}{n}} \text{ имеет бесконечно много целых решений}\big\}.$$

Аналогично можно определить и $\gamma^n(\alpha)$.

Диофантовы постоянные размерности n определяются как

$$\gamma_n = \sup\big\{\gamma_n(\alpha), \alpha \in \mathbb{R}^n\big\}, \quad \gamma^n = \sup\big\{\gamma^n(\alpha), \alpha \in \mathbb{R}^n\big\}.$$

Имеет место следующая теорема переноса.

Теорема (Г.Дэвенпорт, см. [34]) $\gamma_n = \gamma^n$.

Это более тонкий результат, чем теорема переноса, приведенная выше, и его доказательство использует характеризацию диофантовых постоянных в терминах геометрии чисел. За исключением размерности 1, величины $\gamma_n(\alpha)$ и $\gamma^n(\alpha)$, вообще говоря, различны. Постоянную γ_n можно еще определить как

$$\gamma_n = \inf\big\{\gamma > 0 \text{ таких, что для любого } \alpha \in \mathbb{R}^n \text{ неравенство } \|q\alpha\|_{\mathbb{Z}} \leq \left(\frac{\gamma}{q}\right)^{\frac{1}{n}} \text{ имеет бесконечно много целых решений}\big\}.$$

Из этого определения и теоремы Дирихле следует, что $\gamma_n \leq 1$, что можно улучшить до $\gamma_n \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ (см. [17], [25]). Последняя оценка может быть еще улучшена. Методы геометрии чисел позволяют показать, что, с другой стороны, $\gamma_n \geq \frac{1}{\Delta_{n+1}}$, где Δ_{n+1} обозначает модуль наименьшего дискриминанта вещественного алгебраического поля степени $n+1$ (П.Фуртвэнглер, 1928). Этот результат также можно улучшить (см. [34], [45]). В настоящей статье, в разделе IV § 5, обсуждаются некоторые результаты о двумерных диофантовых постоянных в связи с вопросами динамики.

Приложение 2. Асимптотические разложения Жевре

В этом приложении мы прежде всего напомним несколько определений и стандартных утверждений о свойствах Жевре формальных рядов и функций, для которых эти ряды служат асимптотическими разложениями, следуя все время [55] (и, конечно, другим источникам). Мы надеемся, что дальнейшие исследования в этих направлениях помогут лучше понять расходимость рядов, возникающих в канонической теории возмущений. Начнем со следующего определения.

Определение 1. Формальный ряд $\sum a_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$ называется *рядом Жевре порядка* k (k – вещественное положительное число), если существуют константы $C > 0$ и $M > 0$, такие что

$$\text{для любого} \quad n \geq 0 \quad |a_n| \leq CM^n (n!)^{\frac{1}{k}}. \tag{1}$$

Алгебра таких рядов, инвариантная относительно дифференцирования, обозначается через $\mathbb{C}[[z]]_k$. Конечно, $\mathbb{C}[[z]]_k \subset \mathbb{C}[[z]]_{k'}$, если $k > k'$, и $\mathbb{C}[[z]]_\infty = \mathbb{C}\{z\}$, где $\mathbb{C}\{z\}$ – алгебра сходящихся степенных рядов.

Определение 2. Пусть $f(z)$ – функция, определенная и аналитическая на открытом секторе S:

$$S = \{z \in \mathbb{C}, \quad \theta_0 < \arg z < \theta_1, \quad 0 < |z| < R\},$$

и пусть $\widehat{f} = \sum a_n z^n$ – формальный ряд. Тогда $\widehat{f}$ называетя *асимптотическим разложением* f в точке 0 на S, если для любого собственного подсектора S' сектора S (определяемого неравенствами $\theta_0 < \theta_0' < \arg z < \theta_1' < \theta_1$) и любого $N \geq 0$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n + z^N R_N(z),$$

где R_N определено в S' и $R_N(z) \to 0$ при $z \to 0$ в S'.

Определение 3. Функция f, аналитическая в секторе S, называется *функцией Жевре порядка* k, если она допускает асимптотическое разложение $\widehat{f} = \sum a_n z^n$ в начале координат, и для любого собственного подсектора S' сектора S существуют константы C' и M' (возможно зависящие от S'), такие что

$$\sup_{z \in S'} \left| \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \right| \leq C' M'^n (n!)^{\frac{1}{k}}. \tag{2}$$

Сохраняющаяся при дифференцировании алгебра таких функций обозначается через $G_k(S)$. Конечно, если $f \in G_k(S)$, то $f^{(n)}(0) = n!a_n$ и $f \in \mathbb{C}\big[[z]\big]_k$. Кроме того, из (2) и формулы Тейлора имеем:

$$\forall n > 0 \left| f(z) - \sum_{p=0}^{n-1} a_p z^p \right| \leq C'\big(M'|z|\big)^n (n!)^{\frac{1}{k}}. \tag{3}$$

Обратно, используя формулу Коши, легко доказать, что $f \in G_k(S)$, если (3) имеет место в любом собственном подсекторе S' сектора S (возможно, с различными константами C' и M'). С другой стороны, из (3) вытекает следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть $f \in G_k(S)$, $\widehat{f} = \sum a_n z^n$ – асимптотическое разложение функции f в начале координат и S' – собственный подсектор сектора S. Тогда существуют положительные постоянные A, B, C, такие что*

$$\forall z \in S' \left| f(z) - \sum_{n \leq A|z|^{-k}} a_n z^n \right| \leq B e^{-\frac{C}{|z|^k}}. \tag{4}$$

Чтобы доказать это, достаточно просто минимизировать правую часть (4) по n при фиксированном $|z|$, используя формулу Стирлинга для оценки $n!$. Результат состоит в том, что после отбрасывания членов высокого порядка асимптотические разложения Жевре естественно приводят к экспоненциально малым невязкам с показателем k для функций из $G_k(S)$. К сожалению, нет простого обращения этого утверждения, т. е. неравенства (4) строго слабее, чем (3), хотя они, по существу, эквивалентны для функций с “хорошим поведением”. Последнее имеет место, в частности, когда все члены разложения равны нулю. Точнее, скажем, что функция $f \in G_k(S)$ – *плоская* в начале координат на S, если $\widehat{f} = 0$, т. е. если $a_n = 0$ для всех $n \geq 0$. Тогда справедливо следующее.

Предложение 2. *Функция $f \in G_k(S)$ является плоской тогда и только тогда, когда она экспоненциально убывает, т. е. когда для любого собственного подсектора S' существуют положительные константы B и C, такие, что*

$$\forall z \in S' \left| f(z) \right| \leq B e^{-\frac{C}{|z|^k}}. \tag{5}$$

Функция $\exp(-z^{-k})$ принадлежит $G_k(S)$, где

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C}, \quad -\frac{\pi}{2k} < \arg z < \frac{\pi}{2k} \right\}$$

(при $k < \frac{1}{2}$ следует рассматривать S как область на универсальном накрытии $\mathbb{C}\backslash\{0\}$). Кроме того, функция $\exp(-z^{-k})$ является плоской в нуле на S, и, согласно предложению 2, она в некотором смысле в S настолько велика, насколько это возможно. Более общим образом можно рассматривать функцию $\exp\left[\left(-\frac{\lambda}{z}\right)^k\right]$, являющуюся плоской на секторе, биссектрисой которого служит луч, направленный вдоль $\lambda \in \mathbb{C}$.

Последнее свойство функций Жевре, которое мы упомянем, – это очень важное квазианалитическое свойство, которое можно рассматривать как вариант принципа Фрагмена–Линделёфа.

Предложение 3. *Предположим, что функция $f \in G_k(S)$ является плоской в нуле на S и* $\operatorname{angle}(S) > \frac{\pi}{k}$. *Тогда* $f = 0$.

Здесь $\operatorname{angle}(S) = |\theta_1 - \theta_0|$ обозначает раствор (угол) сектора. Функция $\exp(-z^{-k})$, следовательно, является плоской в секторе максимального из возможных раствора.

Запомнив приведенные выше определения и факты, вернемся к канонической теории возмущений. Общая идея состоит в том, чтобы изучать свойства Жевре, если такие есть, различных рядов, появляющихся в классической теории нормальных форм. Например, как в § 2 раздела IV, можно рассмотреть возмущение гармонических осцилляторов (см. (5) в IV § 2) или задачу об эллиптическом положении равновесия (см. (7) и (8) там же), добавив диофантово условие $\big($(6), там же$\big)$ на частоту. Затем строятся нормализующие ряды, и, контролируя их рост, можно доказать экспоненциальные оценки. Это количественный вариант первоначальной конструкции Биркгофа, приводящий к тому, что мы называем оценками типа Жевре. Почему? Грубо говоря, на самом деле доказываются неравенства типа неравенства (4) (см. выше), которые означают, что отбрасывание членов высокого порядка приводит к экспоненциально малой невязке. Здесь роль z играет, конечно, ε, и внимание ограничивается *вещественными* значениями этого параметра при работе с рядами, которые принадлежат, скажем, $\mathbb{C}\{p,q\}\big[[\varepsilon]\big]$, т. е. формальными рядами по параметру возмущения, члены которых являются аналитическими функциями фазовых переменных.

Мы просто хотим сказать, что может быть интересно пойти немного глубже, исследовав свойства аналитичности по ε и, возможно, доказав неравенства типа неравенства (3) (см. выше), которые, как мы указывали, чрезвычайно характерны для функций Жевре и влекут за собой (4), но не наоборот. Индекс k пространств Жевре $\big($когда речь идет о неравенстве (4)$\big)$ и показатель τ диофантова условия тесно связаны. Действительно, мы получаем, грубо говоря, $k = \frac{1}{2\tau}$ в задаче о гармонических осцилляторах (или $k = \frac{1}{\tau}$, если в качестве малого параметра выбрано $\sqrt{\varepsilon}$) и $k = \frac{1}{\tau}$ в задаче об эллиптическом положении равновесия. В свою очередь, $\tau \geq n - 1$, где n – размерность, которая, таким образом, связана с расходимостью рядов. Заметим также, что в теории нормальных форм с рядами обращаются двумя существенно различными способами, используя либо мажорантные ряды, либо итеративную процедуру. Первый метод лучше приспособлен для доказательства свойств Жевре; к сожалению, он применим только в сравнительно простых ситуациях.

В настоящей работе мы добивались экспоненциально малых невязок совершенно другим способом, без какого-либо арифметического условия, но используя нелинейность (или ангармоничность) и приближение вместо обычных резонансных нормальных форм. Мы получили, грубо говоря, $a = \frac{1}{2n}$ для первого показателя устойчивости, так что $a = k(\tau)$, если положить $\tau = n$ в оценках типа Жевре. Иными словами, все выглядит так, как будто *нелинейная* оценка (типа Нехорошева) в квазивыпуклой ситуации более или менее совпадает с *линейной* оценкой (типа Жевре) в наилучшем возможном случае, т. е. для частот, аппроксимируемых наихудшим образом. Это, конечно, не очевидно и не случайно и требует, возможно, дальнейшего исследования. Связан ли показатель устойчивости с некоторым индексом Жевре? Каких именно функций или рядов? Напомним, что в нашем доказательстве мы полностью оставили без внимания построение рядов и ограничились рассмотрением *одночастотной* задачи, дополненной приближением. В этом отношении следовало бы написать: $a = \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{n}$.

Множитель $\frac{1}{2}$ происходит просто из того факта, что $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, а не ε является естественным малым параметром; $\frac{1}{n}$ получается из теоремы Дирихле, что соответствует $\tau \geq n-1$ в терминах линейного приближения; наконец, "1" вытекает из одночастотности задачи. Эти представляющиеся очень простыми соображения являются, возможно, еще одной интересной темой для исследования.

Сформулируем задачу в чистом виде. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(x,t) \tag{6}$$

со скалярной переменной x (можно было бы также рассматривать и вектор) и функцией f, периодической по переменной времени t, скажем, с периодом 1. Функция f должна быть аналитической по x и по крайней мере липшицевой по t. Цель состоит в том, чтобы связать (6) с автономной задачей

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon g(y,\varepsilon), \tag{7}$$

которая является "интегрируемой" (в скалярном случае). Это осуществляется с помощью замены переменных:

$$x = y + \varepsilon u(y,t,\varepsilon) \tag{8}$$

и всегда возможно ***формально***, т. е. существует ряд $\widehat{u} \in \mathbb{C}\{y,t\}\big[[\varepsilon]\big]$, который переводит (6) в (7) с некоторым $\widehat{g} \in \mathbb{C}\{y,t\}\big[[\varepsilon]\big]$. Кроме того, можно получить экспоненциально малую невязку с помощью процедуры отбрасывания членов высокого порядка: существуют функции $u(y,t,\varepsilon)$ и $g(y,\varepsilon)$, получаемые как усечения $\widehat{u}$ и $\widehat{g}$, такие что (8) переводит (6) в уравнение

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon g(y,\varepsilon) + O(e^{-\frac{c}{\varepsilon}});$$

оценка здесь верна только для *вещественных* ε. Этот результат был получен в явном виде А.И. Нейштадтом в [10]. Он на самом деле проще, чем итеративная лемма из раздела II: там мы должны были учитывать, что задача каноническая, что имеются другие степени свободы и что угловая переменная, зависимость от которой мы хотим ослабить, соответствует изменяющейся частоте. Все это вместе сказывается в ухудшении показателя. Например, в теореме 1B мы получили $\frac{1}{3}$ вместо $\frac{1}{2}$ (избегая соответствия $\varepsilon \leftrightarrow \sqrt{\varepsilon}$ в вышеприведенном контексте). Мы полагаем, что было бы интересно исследовать свойства Жевре порядка 1 задачи (6), (7), (8), которая представляет собой простой случай появления расходимости *без* малых знаменателей. Вполне возможно, что суммируемость и возрождаемость (в смысле Ж.Экалла (J.Ecalle)) окажутся полезными в данном контексте.

Замечание. После того как эта статья была написана, техническое улучшение итеративной леммы позволило автору, А.И. Нейштадту и Л.Нидерману получить значение $a = \frac{1}{2n}$ (подробности будут опубликованы в Proceedings of the Dynamical Systems conference, St. Petersburg (Russia), October–November 1991, V.F.Lazutkin, ed., Birkhäuser publ.). Соответственно изменяется значение этого показателя устойчивости во всевозможных следствиях и приложениях. С другой стороны, Ю.Пёшель в недавнем препринте (J.Pöschel, ETH, 1991) также добился значения $a = \frac{1}{2n}$, улучшая доказательство в рамках традиционных методов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Арнольд В.И.. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // УМН. 1963. Т. 18. №6. С. 91–192.

[2] Арнольд В.И.. О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы // ДАН СССР 1964. Т. 156. №1. С. 9–12.

[3] Арнольд В.И.. Математические методы классической механики. 3-е изд.. М.: Наука, 1989.

[4] Бибиков Ю.Н.. Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1991.

[5] Боревич З.И., Шафаревич И.Р.. Теория чисел. 3-е изд.. М.: Наука, 1985.

[6] Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А.. Минимальный хаос, стохастическая паутина и структуры с симметрией типа "квазикристалл" // УФН. 1988. Т. 156. №2. С. 193–251.

[7] Ильяшенко Ю.С.. Признак крутизны для аналитических функций // УМН. 1986. Т. 41. №1. С. 193–194.

[8] Куксин С.Б.. Теория возмущений условно-периодических решений бесконечномерных гамильтоновых систем и ее приложения к уравнению Кортевега-де Фриза // Мат. сборник. 1988. Т. 178. №7. С. 396–412.

[9] Куксин С.Б.. Об интерполяции аналитического симплектоморфизма гамильтоновым потоком. В печати (1992).

[10] Нейштадт А.И.. О разделении движений в системах с быстро вращающейся фазой // ПММ. 1984. Т. 48. №2. С. 197–204.

[11] Нехорошев Н.Н.. Метод последовательных канонических замен переменных. – Добавление к кн.: Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. . М.: Мир, 1973.

[12] Нехорошев Н.Н.. Экспоненциальная оценка времени устойчивости гамильтоновых систем, близких к интегрируемым // УМН. 1977. Т. 32. №6. С. 5–66.

[13] Нехорошев Н.Н.. Экспоненциальная оценка времени устойчивости гамильтоновых систем, близких к интегрируемым. II // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 1979. №5. С. 5–50.

[14] Пуанкаре А.. Новые методы небесной механики // Пуанкаре А. Избр. труды в 3-х томах. Т. 1–2. М.: Наука, 1971, 1972.

[15] Севрюк М.Б.. Инвариантные m-мерные торы обратимых систем с фазовым пространством размерности, большей $2m$ // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 1989. №14. С. 109–124.

[16] Трещёв Д.В.. Механизм разрушения резонансных торов гамильтоновых систем // Мат. сборник. 1989. Т. 180. №10. С. 1325–1346.

[17] Шмидт В.. Диофантовы приближения. . М.: Мир, 1983.

[18] Adams W.W.. The best two-dimensional diophantine approximation constant for cubic irrationals // Pacific J. Math. 1980. V. 91. №1. P. 29–30.

[19] Backus G.E.. Critique of "The resonant structure of the Solar System", by A.M.Molchanov // Icarus. 1969. V. 11. P. 88–92.

[20] Benettin G., Galgani L., Giorgilli A.. A proof of Nekhoroshev′s theorem for the stability times in nearly integrable Hamiltonian systems // Celest. Mech. 1985. V. 37. №1. P. 1–25.

[21] Benettin G., Gallavotti G.. Stability of motions near resonances in quasi-integrable Hamiltonian systems // J. Stat. Phys. 1986. V. 44. №3–4. P. 293–338.

[22] Bernstein D., Katok A.. Birkhoff periodic orbits for small perturbations of completely integrable Hamiltonian systems with convex Hamiltonians // Invent. Math. 1987. V. 88. №2. P. 225–241.

[23] Brentjes A.J.. A two-dimensional contiinued fraction algorithm for best approximations with an application to cubic number fields // J. Reine Ang. Math. 1981. V. 326. P. 18–44.

[24] Broer H.W., Huitema G.B., Takens F.. Unfoldings of quasiperiodic tori // Mem. Amer. Math. Soc. 1990. V. 83. №421. P. 1–81.

[25] Cassels J.. An introduction to diophantine approximation // Cambrige tract in mathematics. V. 45. Cambrige: Cambrige Univ. Press, 1957.

[26] Chirikov B.V.. A universal instability of many-dimensional oscillator systems // Phys. Rep. 1979. V. 52. №5. P. 263–379.

[27] Chirikov B.V., Vecheslavov V.V.. KAM integrability // Analysis etc., P.Rabinowitz and E.Zehnder eds: Academic Press, 1989. P. 219–236.

[28] Conley C.C., Zehnder E.. The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of V.I.Arnold // Invent. Math. 1983. V. 73. №1. P. 33–49.

[29] Cusick T.W.. Formulas for some Diophantine approximation constants // Math. Annalen. 1972. V. 197. №3. P. 182–188.

[30] Cusick T.W.. Formulas for some Diophantine approximation constants. II // Acta Arithmetica. 1974. V. 26. №2. P. 117–128.

[31] Cusick T.W.. The two-dimensional Diophantine approximation constant // Monatshefte Math. 1974. V. 78. №4. P. 297–304.

[32] Cusick T.W.. The Szekeres multidimensional continued fraction // Math. Comput. 1977. V. 31. №137. P. 280–317.

[33] Cusick T.W.. Best diophantine approximations for ternary kinear forms // J. Reine Ang. Math. 1980. V. 315. P. 40–52.

[34] Davenport H.. On a theorem of Furtwänger // J. London Math. Soc. 1955. V. 30. №2. P. 186–195.

[35] Douady R.. Stabilité ou instabilité des points fixes elliptiques // Ann. Sc.Ecole Norm. Sup., Ser 4. 1988. V. 21. №1. P. 1–46.

[36] Dubois E., Rhin G.. Meilleures approximations d′une forme linéaire cubique // Acta Arithmetica. 1982. V. 40. №2. P. 197–208.

[37] Giorgilli A.. Rigorous results on the power expansions for the integrals of a Hamiltonian systems near an elliptic equilibrium point // Annales IHP. Phys. Théor. 1989. V. 48. P. 423–439.

[38] Giorgilli A., Delshams A., Fontich E., Galgani L., Simó C.. Effective stability for a Hamiltonian system near an elliptic equilibrium point, with an application to the restricted three body problem // J. Diff. Equat. 1989. V. 77. №1. P. 167–198.

[39] Greene J.M.. A method for determining a stochastic transition // J. Math. Phys. 1979. V. 20. №6. P. 1183–1201.

[40] Hénon M.. A comment on “The resonant structure of the Solar System”, by A.M.Molchanov // Icarus. 1969. V. 11. P. 93–94.

[41] Herman M.R.. Inégalités “a priori” pour des tores lagrangiens invariants par des difféomorphismes symplectiques // Publ. Math. IHES. Paris. 1989. V. 70. P. 47–101.

[42] Holmes P., Marsden J.E., Scheurle J.. Exponentially small splittings of separatrices with application to KAM theory and degenerate bifurcations // Contemp. Math. 1988. V. 81. P. 213–244.

[43] Jurkat W., Kratz W., Peyerimhoff A.. Explicit representations of Dirichlet approximations // Math. Annalen. 1977. V. 228. №1. P. 11-25.

[44] Jurkat W., Kratz W., Peyerimhoff A.. On best two-dimensional Dirichlet approximations and their algorithmic calculation // Math. Annalen. 1979. V. 244. №1. P. 1–32.

[45] Krass S.. Estimates for n-dimensional Diophantine approximation constant for $n \geq 4$ // J. Number Theory. 1985. V. 20. № 2. P. 172–176.
[46] Lagarias J.C.. Best simultaneous Diophantine approximations. I. Growth rates approximation denominators // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. V. 272. № 2. P. 545–554.
[47] Lagarias J.C.. Best simultaneous Diophantine approximations. II. Behavior of consecutive best approximations // Pacific J. Math. 1982. V. 102. № 1. P. 61–88.
[48] Lazutkin V.F., Schachmannski I.G., Tabanov M.B.. Splitting of separatrices for standard and semistandard mappings // Physica D. 1989. V. 40. № 2. P. 235–248.
[49] Mahler K.. Über die Annäherung algebraischen Zahlen durch periodische Algorithmen // Acta Mathematica. 1937. V. B.68. P. 109–144.
[50] Molchanov A.M.. The resonant structure of the Solar System // Icarus. 1968. V. 8. P. 203–215.
[51] Molchanov A.M.. Resonances in complex systems. A reply to critiques // Icarus. 1969. V. 11. P. 95–103.
[52] Pöschel J.. Integrability of Hamiltonian systems on Cantor sets // Comm. Pure Appl. Math. 1982. V. 35. № 5. P. 653–696.
[53] Pöschel J.. On elliptic lower dimensional tori in Hamiltonian systems // Math. Z. 1989. V. 202. № 4. P. 559–608.
[54] Pöschel J.. Small divisors with spatial structure in infinite dimensional Hamiltonian systems // Commun. Math. Phys. 1990. V. 127. № 2. P. 351–393.
[55] Ramis J.-P.. Théorèmes d′indices Gevrey pour les équations différentielles ordinaires // Mem. Amer. Math. Soc. 1984. V. 48. № 296. P. 1–95.
[56] Samuel P.. Théorie algébraique des nombres. . Paris: Hermann, 1971.
[57] Scheurle J.. A class of quasiperiodic solutions for the plane three-body problem // Methoden Verfahren Math. Phys. V. 21. Frankfurt: Lang-Verlag, 1981. P. 71–80.
[58] Scheurle J.. Quasi-periodic solutions of plane three-body problem near Euler′s orbits // Celest. Mech. 1982. V. 28. № 1/2. P. 141–151.
[59] Sevryuk M.B.. Lower-dimensional tori in reversible systems // Chaos. 1991. V. 1. № 2. P. 160–167.
[60] Szekeres G.. Multidimensional continued fractions // Annales Univ. Sc. Budapest. 1970. V. 13. P. 113–140.
[61] Szekeres G.. Search for the three-dimensional approximation constant // London Math. Soc. Lect. Note Ser 1986. V. 109. P. 139–146.
[62] Szekeres G.. Sós V.T. Rational approximation vectors // Acta Arithmetica. 1988. V. 49. № 3. P. 255–261.
[63] Dumas H.S.. Ergodization rates for the linear flows on the torus // J. Dynamics Diff. Equations. 1991. V. 3. P. 593–610.

Ecole Normale Sypérieure

Поступила в редакцию
20.04.1992