PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Démonstration linéaire du théorème adiabatique en mécanique classique; équivalence avec le cas quantique.* Note (*) de **Pierre Lochak,** présentée par René Thom.

Suivant la démonstration de Kasuga [2] du théorème adiabatique en mécanique classique, on montre l'étroit parallélisme du résultat avec celui de la mécanique quantique.

MATHEMATICAL PHYSICS. — Linear Demonstration of the Adiabatical Theorem in Classical Mechanics, Similarity with the Quantum Case.

Following Kasuga's demonstration [2] *of the adiabatical theorem in classical mechanics we show the mathematical similarity of the result with that of quantum mechanics.*

1. Le résultat en mécanique quantique. — Nous commençons par énoncer le résultat quantique, suivant la formulation de Kato [1], sans trop nous appesantir sur les problèmes d'auto-adjonction, de régularité, etc., c'est-à-dire que l'on suppose possibles les opérations décrites. On se donne une famille $H(s)$ $(s \in [0, 1])$ d'opérateurs auto-adjoints dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}$, telle que zéro soit valeur propre isolée de $H(s)$ pour tout s (le cas d'une valeur propre $\lambda(s)$ isolée quelconque introduit seulement un facteur de phase dans les solutions des équations), et on considère l'équation :

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = -i\tau H(s)\psi, \tag{1}$$

où $\psi \in \mathscr{H}$ et τ est un réel positif, qui joue le rôle de temps caractéristique (s est sans dimension et τs donne la variable de temps). On note $\Pi(s)$ la projection orthogonale sur le sous-espace propre de $H(s)$ pour la valeur propre zéro, et on confondra dans la notation le projecteur et son image.

Ceci fait, on s'intéresse aux solutions $\psi_\tau(s)$ de (1) lorsque τ tend vers l'infini; le théorème adiabatique affirme que si $\psi_\tau(0) \equiv \psi_0$ est un vecteur fixe de $\Pi(0)$, $\psi_\tau(1)$ sera asymptotiquement dans le sous-espace $\Pi(1)$. De manière précise, soit $W(s)$ l'opérateur vérifiant :

$$\frac{dW}{ds} = \frac{d\Pi(s)}{ds} W; \qquad W(0) = \Pi(0). \tag{2}$$

$W(s)$ est indépendant de τ et $\operatorname{Ran} W(s) = \Pi(s)$; de plus, $\Pi(s)\, dW/ds = 0$ et $W(s)$ est partiellement isométrique :

$$W(s) . W^*_{(s)} = \Pi(s); \qquad W^*_{(s)} . W(s) = \Pi(0), \tag{3}$$

alors, on aura, uniformément pour $s \in [0, 1]$:

$$\| \psi_\tau(s) - W(s)\psi_0 \| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\tau}\right). \tag{4}$$

Pour résumer, on peut dire que la solution de (1) « suivra », pour τ grand, le sous-espace $\Pi(s)$, et ce, de la manière la plus simple possible, c'est-à-dire de sorte que $\Pi(s) . d\psi_\tau/ds$ soit presque nul, ce qui est naturel, puisque lorsque s est fixe, $\Pi(s)$ est le sous-espace invariant sous le flot induit par $H(s)$.

2. LE CAS DE LA MÉCANIQUE CLASSIQUE. — On note ici $H(p, q, s)$ une famille d'hamiltoniens; l'espace des phases est de dimension $2n$, mais on omet les indices dans la notation. Les équations de Hamilton s'écrivent :

$$\frac{dp}{ds} = -\tau \frac{\partial H}{\partial q}(p, q, s), \qquad \frac{dq}{ds} = \tau \frac{\partial H}{\partial p}(p, q, s). \tag{5}$$

On introduit, pour s fixe, la fonction $\mathcal{F}_s(p, q)$ donnée par :

$$\mathcal{F}_s(\tilde{p}, \tilde{q}) \equiv m\{(p, q)/H(p, q, s) \leqq H(\tilde{p}, \tilde{q}, s)\}, \tag{6}$$

où $m = dp . dq$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{2n}$. Le théorème adiabatique en mécanique classique s'énoncera sur une couronne cylindrique :

$$I \equiv \bigcup_{s \in [0, 1]} I(J_1, J_2, s) = I(J_1, J_2); \qquad I(J_1, J_2, s) \equiv \{(p, q)/J_1 < \mathcal{F}_s(p, q) < J_2\}, \tag{7}$$

avec les conditions suivantes :

(i) $I(J_1, J_2)$ est relativement ouvert dans la tranche K des points $(p, q, s) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ tels que $s \in [0, 1]$, et l'intervalle (J_1, J_2) n'est pas maximum, i. e. il existe $J_1^* < J_1$ et $J_2^* > J_2$ tels que $I(J_1^*, J_2^*)$ vérifie les mêmes propriétés que $I(J_1, J_2)$;

(ii) $H(p, q, s)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I(J_1, J_2)$, et sans point fixe (comme fonction de $2n$ variables) pour tout $s \in [0, 1]$;

(iii) Pour s fixé, le flot induit par $H(p, q, s)$ sur la variété $\mathcal{F}_s(p, q) = \mathcal{F}$ est ergodique presque partout par rapport au couple $(s, \mathcal{F})$.

Pour $(p_0, q_0) \in I(J_1, J_2, 0)$, on pose :

$$\Delta(p_0, q_0, \tau) = \sup_{s \in [0, 1]} \{|\mathcal{F}_s(p_\tau(s), q_\tau(s)) - \mathcal{F}_0(p_0, q_0)|\}, \tag{8}$$

où $(p_\tau(s), q_\tau(s))$ est la solution de (5) pour la valeur initiale $(p_\tau(0), q_\tau(0)) = (p_0, q_0)$; si cette solution ne peut être prolongée jusqu'à la valeur $s = 1$, on pose : $\Delta(p_0, q_0, \tau) = +\infty$.

THÉORÈME (adiabatique) :

$$\forall \delta > 0, \quad \lim_{\tau \infty} m\{I(J_1, J_2, 0) - L(\tau, \delta)\} = 0, \tag{9}$$

où on a posé :

$$L(\tau, \delta) = \{(p_0, q_0) \in I(J_1, J_2, 0)/\Delta(p_0, q_0, \tau) < \delta\}.$$

La méthode de démonstration « linéaire », utilisée par Kasuga dans la référence [2] consiste d'abord à introduire la transformation de Koopman :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^{2n}), \quad (\mathcal{U}_\sigma f)(p, q) \equiv f(p(\sigma), q(\sigma)), \tag{10}$$

où $(p(\sigma), q(\sigma)) \equiv P(\sigma)$ évolue suivant les équations de Hamilton; $\mathcal{U}_\sigma$ est unitaire, et pour un hamiltonien $H(p, q)$ fixe, on a :

$$\frac{d\mathcal{U}_\sigma}{d\sigma} = -i\tau L_H . \mathcal{U}_\sigma \quad \text{où} \quad L_H f \equiv i\{H, f\}. \tag{11}$$

Nous allons voir comment, grâce à cette transposition en un problème linéaire sur $L^2(\mathbb{R}^{2n})$, le théorème devient équivalent à celui de la mécanique quantique. On se placera dorénavant dans le cas où $J_1 = 0$, $J_2 = \infty$ ce qui permet de travailler avec des espaces plus aisément désignables; le théorème adiabatique s'énoncerait alors avec J_1^* et J_2^* finis quelconques. Le cas général n'apporte que des difficultés de notations.

Remarquons d'abord que la mesure de volume $m=dp.dq$, se décompose pour tout $s\in[0, 1]$, par rapport à la fonction $\mathscr{F}_s(p, q)$:

(12) $$dp.dq=d\mathscr{F}_s.d\mu_s,$$

$d\mu_s$ est décrite de la manière suivante; on considère la surface $\Sigma(\mathscr{F}, s)$ donnée par $\mathscr{F}_s(p, q)=\mathscr{F}$ (=Cte). Soit $d\sigma=d\sigma(\mathscr{F}, s)$ la mesure superficielle sur Σ induite par m; alors :

(13) $$d\mu_s=c_{(\mathscr{F},s)}^{-1}.\|\operatorname{grad} \mathrm{H}(p, q, s)\|^{-1}.d\sigma \qquad \text{où} \qquad c_{\mathscr{F},s)}\equiv\int_\Sigma \|\operatorname{grad} \mathrm{H}(p, q, s)\|^{-1}.d\sigma,$$

on remarquera que si Σ est aussi la surface d'énergie E_s $(\mathrm{H}(p, q, s)|_\Sigma=\mathrm{E}_s)$, on a :

(14) $$\frac{\partial\mathscr{F}_0}{\partial\mathrm{E}_s}=c_{(\mathscr{F},s)}.$$

La projection $\Pi(s)$ sera alors définie de la manière suivante; si $\varphi\in\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ et $(p, q)\in\mathbb{R}^{2n}$:

(15) $$(\Pi(s)\varphi)_{(p_0,q_0)}\equiv\int_{\mathscr{F}_s(p,q)=\mathscr{F}_s(p_0,q_0)}\varphi\, d\mu_s.$$

On vérifie que $\|\Pi(s)\|=1$, et grâce au théorème sur les applications linéaires bornées (qui rejoint ici une des conclusions du théorème de Fubini), $\Pi(s)$ s'étend en une projection orthogonale sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{2n})$. $\Pi(s)\varphi$ sera donc en fait une fonction de $\mathscr{F}_s$ (ou d'ailleurs de E_s). On peut calculer facilement $(d\Pi/ds)(s).\Pi(s)$ — tandis que le calcul de $d\Pi/ds$ est beaucoup moins évident). Soit en effet une fonction $\varphi=\varphi(\mathrm{E}_s)$ et $(p_0, q_0)\in\mathbb{R}^{2n}$. Pour effectuer la variation de $\Pi(s)$, il faut varier dans (15) d'abord la fonction, puis la mesure. Mais comme $\varphi\in\Pi(s)$, on aura dans la seconde à dériver $\int\varphi\, d\mu_s=\varphi.\int d\mu_s=\varphi$ et donc la variation sera nulle. D'autre part, en $s+ds$, (p_0, q_0) est sur la surface d'énergie $\mathrm{E}_{s+ds}=\mathrm{E}_s+(\partial\mathrm{H}/\partial s)(p_0, q_0).ds$; si l'on considère $\mathrm{P}=(p, q)$ sur la surface de niveau $\mathrm{E}_s(p_0, q_0)$, la surface de niveau $\mathrm{E}_{s+ds}(p_0, q_0)$ est donnée par :

(16) $$d\mathrm{P}.\operatorname{grad}\mathrm{H}(p, q, s)=\left[\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial s}(p_0, q_0, s)-\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial s}(p, q, s)\right]ds,$$

on obtient ainsi :

(17) $$\left(\frac{d\Pi}{ds}(s)\varphi\right)_{(p_0,q_0)}=\frac{d\varphi}{d\mathrm{E}_s}\left[\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial s}(p_0, q_0, s)-\int_\Sigma\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial s}(p, q, s)\,d\mu_s\right].$$

Le lemme crucial — et facile — dans la démonstration de [2], est l'identité :

(18) $$\int_\Sigma\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial s}d\mu_s=0,$$

ce qui nous donne :

(19) $$\left(\frac{d\Pi}{ds}(s)\varphi\right)_{(p_0,q_0)}=\frac{d\varphi}{d\mathrm{E}_s}\cdot\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial s}(p_0, q_0, s).$$

Pour comprendre l'équivalence avec la mécanique quantique, il suffit maintenant de rassembler ce que nous avons écrit :

(i) $\Pi(s)$ est la projection sur le sous-espace des fonctions invariantes par le flot de $H(s)$ (s fixe); c'est la conservation de l'énergie pour s fixe.

(ii) Si $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ est une fonction *fixe*, (18) implique :

$$(18\,bis)\qquad \forall s\in[0,1],\quad \int_{\Sigma(\mathscr{F},s)} \frac{\partial\psi(\mathscr{F}_s)}{\partial s}\,d\mu_s=0 \quad\text{ou encore}\quad \Pi(s)\frac{\partial\psi(\mathscr{F}_s)}{\partial s}=0.$$

C'est-à-dire que la fonction $\psi_s \equiv \psi(\mathscr{F}_s)$ qui appartient à $\Pi(s)$ pour tout s, vérifie :

$$(19\,bis)\qquad \frac{d\psi_s}{ds}=\frac{d\Pi_{(s)}}{ds}\psi_s,$$

ainsi qu'on le vérifie d'ailleurs en comparant avec (19), le changement de E_s en $\mathscr{F}_s$ introduisant une modification évidente au deuxième membre.

Le théorème classique s'énonce alors de manière identique au théorème quantique (i. e. c'est le *même* théorème) avec les données suivantes :

– On étudie l'évolution d'une fonction ψ qui est une fonction *fixe de* $\mathbb{R}$ dans lui-même, mais qui, considérée comme fonction de l'énergie ou du volume de l'espace des phases, devient une fonction variable de $\mathbb{R}^{2n}$ dans $\mathbb{R}$; c'est là le point un peu inhabituel qu'il convient de garder en mémoire.

– L'opérateur hamiltonien est l'opérateur de Liouville L_H.

– La valeur propre considérée est identiquement nulle, correspondant aux fonctions sur $\mathbb{R}^{2n}$ qui ne dépendent que de l'énergie. Si zéro est isolé dans le spectre de L_H, le théorème quantique *démontre* le théorème classique; en fait, le spectre des systèmes classiques étant infiniment plus complexe que celui des systèmes quantiques, et en particulier le spectre de L_H étant mal connu, on ne dispose pas ainsi d'une démonstration directe (du moins en général) du théorème classique.

– On a correspondance entre les solutions asymptotiques (τ tendant vers l'infini) :

- en mécanique quantique :

$$\sigma_q(s,\psi)=W(s)\psi;\qquad \psi\in\Pi(0),$$

- en mécanique classique :

$$\sigma_c(s,\psi)=\psi_{(\mathscr{F}_s)};\qquad \psi\in L^2(\mathbb{R})\approx\Pi(0).$$

Cependant, dans la version classique, la décroissance en $1/\tau$ de la différence entre la solution et la forme asymptotique n'est pas assurée; on sait seulement que cette différence tend vers zéro.

Le théorème adiabatique classique s'énonce généralement en prenant pour ψ la fonction caractéristique d'un intervalle; d'autre part, on peut traiter de même l'invariance adiabatique des variables d'action dans les systèmes complètement intégrables qui correspondent aussi à des fonctions propres de l'opérateur L_H.

(*) Remise le 1er mars 1982, acceptée le 28 juin 1982.

[1] T. Kato, *Phys. Soc. of Japan*, 5, 1950.

[2] T. Kasuga, *On the Adiabatic Theorem for Hamiltonian Systems*, (*Proceedings of the Academy of Japan*, 37, 1961).

Centre de Mathématiques de l'E.N.S.,
45, *rue d'Ulm*, 75230 *Paris Cedex* 05.