C. R. Acad. Sci. Paris, t. 324, Série I, p. 1047-1052, 1997
Systèmes dynamiques/*Dynamical Systems*
(Théorie des nombres/*Number Theory*)

Sur l'approximation rationnelle simultanée des vecteurs de Bruno

François GOLSE et Pierre LOCHAK

École Normale Supérieure, D. M. I., 45, rue d'Ulm, 75005 Paris, France.
golse@dmi.ens.fr, lochak@dmi.ens.fr

Résumé. On montre dans cette Note comment le principe de transférence de Khinchin s'applique pour donner une condition nécessaire de croissance des dénominateurs dans l'approximation rationnelle simultanée des composantes de vecteurs de Bruno.

Simultaneous rational approximation of Bruno vectors

Abstract. *We show in this Note how to apply Khinchin's transference principle in order to estimate the growth of the denominators of a sequence of simultaneous rational approximants of the components of Bruno vectors.*

Abridged English Version

For any integer $d \geq 1$, the vector space $\mathbb{R}^d$ is equipped with the norm $|x| = \sup_{1 \leq i \leq d} |x_i|$. For any $x \in \mathbb{R}^d$, we denote by $\|x\|_{\mathbb{Z}^d}$ the distance $\inf_{y \in \mathbb{Z}^d} |x - y|$ from x to the lattice $\mathbb{Z}^d$.

Let $d \in \mathbb{N}^*$, and let $\omega \in \mathbb{R}^d \setminus \mathbb{Q}^d$. One associates with ω the two following objects:

1] the function $\Omega :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ defined by (1) (*see* the French Version).

2] the sequence $(q_j)_{j \geq 0}$ of positive integers, characterized by (2.a-b).

For lack of a standard terminology, the q_j will be called the *quasiperiods* (or simply *periods*) of ω. By a well-known property of continued fractions, they coincide for $d = 1$ with the denominators of the convergents of ω.

DEFINITION. – The vector ω is called a "Bruno vector" if and only if (3) holds.

Condition (3) was introduced by Bruno in [1] (*see* condition ω p. 140) in connection with the theory of normal forms of analytic systems of ordinary differential equations. In [7], Rüssman gives a proof of a KAM type result using Bruno vectors as frequencies.

In the one-dimensional case, there is a simpler description of Bruno numbers (*see* [1], example 7, p. 224): namely, $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ is a Bruno number (*i.e.* satisfies condition (3)) if and only if (4) holds. Apart from the work of Bruno and Rüssman, the interest for Bruno vectors stems largely from the striking one-dimensional result of Yoccoz (*see* [9]) which says that condition (4) is optimal in Siegel's

Note présentée par Michaël HERMAN.

0764-4442/97/03241047 © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

conjugacy problem, and is the first result which shows the *necessity* of a small divisor condition in a dynamical context.

On the other hand, simultaneous approximation was used in [4] in order to produce stability results for – multidimensional – near-integrable Hamiltonian systems (*see* also [5]). It is thus natural to investigate the counterpart of Bruno's condition (3) in simultaneous approximation. Of course, this has a nontrivial meaning only in the multidimensional case $d > 1$. In this Note, we prove that Bruno vectors satisfy a condition similar to (4). More precisely:

THEOREM 1. – *Let $\omega \in \mathbb{R}^d \setminus \mathbb{Q}^d$ be a Bruno vector and let $(q_j)_{j\geq 0}$ denote its associated sequence of quasiperiods. Then* (5) *and* (6) *hold.*

In the one-dimensional case, where $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, one has the well-known estimate (7) so that (5) and (6) are actually equivalent. In any dimension, Dirichlet's theorem implies that (5) is stronger than (6).

NOTATIONS. – Pour tout entier $d \geq 1$, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^d$ est muni de la norme $|x| = \sup_{1\leq i\leq d} |x_i|$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on notera $\|x\|_{\mathbb{Z}^d} = \inf_{y\in\mathbb{Z}^d} |x - y|$ la distance de x au réseau $\mathbb{Z}^d$.

1. Introduction et résultat principal

Soit $\omega \in \mathbb{R}^d \setminus \mathbb{Q}^d$. Au vecteur ω sont associés :

1] la fonction $\Omega :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall K > 1\,, \quad \Omega(K) = \inf\{\|\omega \cdot k\|_{\mathbb{Z}} \,|\, k \in \mathbb{Z}^d\,,\ 0 < |k| < K\} \tag{1}$$

2] la suite d'entiers naturels $(q_j)_{j\geq 0}$, caractérisée par les conditions suivantes :

$$1 = q_0 < q_1 < \ldots < q_j < q_{j+1} < \ldots \tag{2.a}$$

et, pour tout $j \geq 1$

$$\forall q \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 1 \leq q < q_j\,, \quad \|q\omega\|_{\mathbb{Z}^d} \geq \|q_{j-1}\omega\|_{\mathbb{Z}^d}\,. \tag{2.b}$$

Faute d'une terminologie reçue, les q_j seront appelés *quasi-périodes* (ou simplement *périodes*) du vecteur ω. Ils coïncident pour $d = 1$ avec les dénominateurs des convergents de la fraction continue de ω.

DÉFINITION. – Le vecteur ω est dit "vecteur de Bruno" si et seulement si

$$\sum_{j\geq 0} \frac{|\log \Omega(2^{j+1})|}{2^j} < +\infty\,. \tag{3}$$

Cette condition (3) a été introduite par Bruno dans [1] (*voir* la condition ω p. 140) ; elle joue un rôle naturel dans la théorie des formes normales de systèmes dynamiques ; en particulier Rüssman a démontré (dans [7]), un théorème de type KAM pour des fréquences qui sont des vecteurs de Bruno.

En dimension $d = 1$, les vecteurs (ou nombres) de Bruno sont caractérisés par une condition plus simple que (3) (*voir* [1], exemple 7, p. 224): $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est un nombre de Bruno (c'est-à-dire vérifie (3)) si et seulement si

$$\sum_{j\geq 0} \frac{\log q_{j+1}}{q_j} < +\infty\,. \tag{4}$$

Outre les travaux de Bruno et Rüssman, l'importance des nombres de Bruno est illustrée (pour $d = 1$) par le résultat de Yoccoz (*voir* [9]) qui affirme que la condition (4) est optimale pour le problème de conjugaison de Siegel. Il s'agit là du premier résultat qui montre le caractère *nécessaire* d'une condition de petits diviseurs dans un contexte de systèmes dynamiques.

D'autre part, l'approximation simultanée a été utilisée dans [4] pour montrer des résultats de stabilité pour des systèmes Hamiltoniens – multidimensionnels – presque intégrables (*voir* aussi [5]). Il paraît donc naturel de s'interroger sur la contrepartie de la condition de Bruno multidimensionnelle (3) en termes d'approximation simultanée. Nous montrons dans cette Note que pour tout $d \geq 1$, les vecteurs de Bruno vérifient une condition analogue à (4). Plus précisément, on a :

THÉORÈME 1. – *Soit $\omega \in \mathbb{R}^d \setminus \mathbb{Q}^d$ un vecteur de Bruno et sa suite de périodes $(q_j)_{j\geq 0}$. Alors*

$$\sum_{j\geq 0} \frac{|\log \|q_j\omega\|_{\mathbb{Z}^d}|}{q_j^{1/d}} < +\infty, \tag{5}$$

et

$$\sum_{j\geq 0} \frac{\log q_{j+1}}{q_j^{1/d}} < +\infty. \tag{6}$$

Notons que lorsque $d = 1$, l'estimation classique :

$$\frac{1}{q_j + q_{j+1}} \leq \|q_j\omega\|_{\mathbb{Z}} \leq \frac{1}{q_{j+1}} \tag{7}$$

montre que (5) et (6) sont équivalentes. D'autre part, en toute dimension $d \geq 1$ la condition (5) implique la condition (6). En effet, le théorème de Dirichlet (*voir* par exemple [8] Chapitre II) montre que l'on a $\|q_j(\omega)\|_{\mathbb{Z}^d} \leq q_{j+1}^{-1/d}$ si bien que $\log q_{j+1} \leq d|\log \|q_j\omega\|_{\mathbb{Z}^d}|$.
Ainsi, (6) est moins forte que (5). Il nous reste donc à démontrer cette dernière propriété.

2. Quelques préparations

Ce paragraphe rassemble des énoncés utiles pour la démonstration du théorème 1.

Les deux lemmes suivants montrent qu'il est possible de remplacer la suite $(2^j)_{j\geq 0}$ dans la condition de Bruno (3) par une classe plus générale de suites.

LEMME 2. – *Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction croissante telle que*

$$\sum_{j\geq 0} \frac{f(2^{j+1})}{2^j} < +\infty. \tag{8}$$

Alors, pour tout $\rho > 1$,

$$\sum_{j\geq 0} \frac{f(\rho^{j+1})}{\rho^j} < +\infty. \tag{9}$$

Démonstration. – L'argument est le même que dans [1], lemme 12, p. 222. On remarque d'abord que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{j\geq 0} \frac{f(2^{mj+m})}{2^{mj}} \leq 2^{m-1} \sum_{j\geq 0} \frac{f(2^{mj+m})}{2^{mj+m-1}} \leq 2^{m-1} \sum_{k\geq 0} \frac{f(2^{k+1})}{2^k} < +\infty. \tag{10}$$

Soit alors $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\rho < 2^m$; on note $\nu = 2^m$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on pose $k(j) = [\log_\rho(\nu^j)]$; autrement dit $k(j)$ est l'unique entier naturel tel que

$$\rho^{k(j)} \leq \nu^j < \rho^{k(j)+1} . \tag{11}$$

Alors

$$\sum_{k=k(j)}^{k(j+1)} \frac{f(\rho^{k+1})}{\rho^k} \leq \frac{f(\nu^{j+1})}{\rho^{k(j)}} \sum_{k=k(j)}^{k(j+1)} \frac{\rho^{k(j)}}{\rho^k} \leq \frac{f(\nu^{j+1})}{\nu^j} \frac{\nu^j}{\rho^{k(j)}} \sum_{k=k(j)}^{+\infty} \frac{\rho^{k(j)}}{\rho^k} \leq \frac{\rho^2}{\rho - 1} \frac{f(\nu^{j+1})}{\nu^j} . \tag{12}$$

Par conséquent,

$$\sum_{j \geq 0} \frac{f(\rho^{j+1})}{\rho^j} \leq \sum_{j \geq 0} \sum_{k=k(j)}^{k(j+1)} \frac{f(\rho^{k+1})}{\rho^k} \leq \frac{\rho^2}{\rho - 1} \sum_{j \geq 0} \frac{f(\nu^{j+1})}{\nu^j} < +\infty . \tag{13}$$

LEMME 3. – *Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction croissante vérifiant (8). Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de $[1, +\infty[$ vérifiant*

$$\exists \rho > 1 \text{ tel que, pour tout } j \geq 0,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \rho . \tag{14}$$

Alors

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f(u_n)}{u_n} < +\infty . \tag{15}$$

Démonstration. – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, définissons $j(n)$ comme l'unique élément de $\mathbb{N}$ tel que

$$\rho^{j(n)} \leq u_n < \rho^{j(n)+1} . \tag{16}$$

Considérons la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ obtenue en ordonnant de manière croissante l'ensemble des termes des deux suites $(\rho^j)_{j \geq 0}$ et $(u_n)_{n \geq 0}$. L'inégalité (14) montre qu'il y a au plus un terme de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ dans tout intervalle de la forme $[\rho^j, \rho^{j+1}[$, j décrivant $\mathbb{N}$. La suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est donc de la forme

$$1 = \rho^0 \leq \ldots \leq \rho^{j(0)} \leq u_0 < \rho^{j(0)+1} \leq \ldots \leq \rho^{j(1)} \leq u_1 < \rho^{j(1)+1} \leq \ldots .$$

Comme l'on a

$$\frac{\log f(u_n)}{\rho^{j(n)}} + \frac{\log f(\rho^{j(n)+1})}{u_n} \leq 2 \frac{\log f(\rho^{j(n)+1})}{\rho^{j(n)}} , \tag{17}$$

le lemme 2 montre que

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f(v_{n+1})}{v_n} \leq 2 \sum_{j \geq 0} \frac{f(\rho^{j+1})}{\rho^j} < +\infty . \tag{18}$$

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{f(u_n)}{u_n} \leq \frac{f(u_n)}{\rho^{j(n)}} , \tag{19}$$

de sorte que

$$\sum_{n\geq 0}\frac{f(u_n)}{u_n}\leq \sum_{n\geq 0}\frac{f(v_{n+1})}{v_n}<+\infty\,. \tag{20}$$

Terminons ce paragraphe sur deux résultats d'arithmétique. Le premier est essentiellement le principe de transférence de Khinchin (*voir* [8], Théorème 5.A, p.95).

PRINCIPE DE TRANSFÉRENCE. – *Pour tout $d\in\mathbb{N}^*$, il existe $C_d>1$ tel que, pour tout $\omega\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$, tout $K>0$ et tout $0<\eta\leq\frac{1}{2C_d}$, si le système des deux inéquations d'inconnue $k\in\mathbb{Z}^d$*

$$|k|\leq C_dK\,,\quad \|k\cdot\omega\|_{\mathbb{Z}}\leq C_d\eta \tag{21}$$

admet pour unique solution $k=0$, alors le système des deux inéquations d'inconnue $q\in\mathbb{Z}$

$$|q|\leq K^d\,,\quad \|q\omega\|_{\mathbb{Z}^d}\leq \eta K^{d-1} \tag{22}$$

admet pour unique solution $q=0$.

(Un résultat récent de Banaszczyk [2] montre que $C_d=(d+1)(d+1)^{1/d}$ convient). Lagarias a montré que la suite des périodes d'un vecteur $\omega\in\mathbb{R}^d\setminus\mathbb{Q}^d$ croît au moins géométriquement :

PROPOSITION. – *(voir [3]) Soit $d\in\mathbb{N}^*$ et $\omega\in\mathbb{R}^d\setminus\mathbb{Q}^d$. La suite $(q_j)_{j\geq 0}$ des périodes de ω vérifie*

$$\liminf_{j\to+\infty} q_j^{1/j}\geq 1+\frac{1}{2^{d+1}}\,. \tag{23}$$

3. Démonstration du Théorème 1

Choisissons la suite $u_j=C_dq_j^{1/d}$, $\forall j\in\mathbb{N}$. Le résultat de Lagarias (23) montre que cette suite vérifie (14).

Appliquons le lemme 3 à la fonction croissante $f:K\mapsto|\log\Omega(K)|$. Puisque ω est un vecteur de Bruno

$$\sum_{j\geq 0}\frac{|\log\Omega(u_j)|}{u_j}<+\infty\,. \tag{24}$$

Posons $a_j=\frac{|\log\Omega(u_j)|}{u_j}$, $\forall j\in\mathbb{N}$. Appliquons ensuite, pour tout $j\in\mathbb{N}$, le principe de transférence, avec

$$K=q_j^{1/d}\,,\qquad \eta<\frac{1}{C_d}\Omega(C_dq_j^{1/d})\,. \tag{25}$$

On obtient :

$$\forall q\in\mathbb{Z}\,,\quad \text{si } 0<|q|\leq q_j \text{ alors } \|q\omega\|_{\mathbb{Z}^d}>\eta q_j^{1-1/d}\,. \tag{26}$$

Comme (26) a lieu pour tout η vérifiant (25), on a en particulier, pour tout $j\in\mathbb{N}$:

$$\|q_j\omega\|_{\mathbb{Z}^d}\geq\frac{1}{C_d}q_j^{1-1/d}\Omega(C_dq_j^{1/d})=\frac{1}{C_d}q_j^{1-1/d}e^{-a_jC_dq_j^{1/d}}\,. \tag{27}$$

Mais $q_j\geq 1$, de sorte que (27) implique que

$$\frac{|\log\|q_j\omega\|_{\mathbb{Z}^d}|}{q_j^{1/d}}\leq\frac{\log C_d}{q_j^{1/d}}+C_da_j\,. \tag{28}$$

D'après la proposition de Lagarias (23),

$$\sum_{j\geq 0} \frac{1}{q_j^{1/d}} < +\infty\,, \tag{29}$$

si bien que (5) découle de (28) et (24), ce qui conclut la démonstration.

Il y a d'autres classes de vecteurs que celle des vecteurs de Bruno, auxquelles le principe de transférence s'applique de manière plus directe, à commencer par le cas classique des vecteurs "diophantiens" (*voir* [8], p. 99 ou [4] Appendice 1). Ainsi Rüssmann (*voir* [6], p. 617 ; et aussi [7]) considère la classe des vecteurs $\omega \in \mathbb{R}^d$ vérifiant $\|k \cdot \omega\|_{\mathbb{Z}} \geq Ce^{-f(|k|)}$, $\forall k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$, où $C > 0$ et $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction croissante telle que $\frac{f(x)}{x} \to C' \geq 0$ pour $x \to +\infty$.

Le principe de transférence montre que

$$\forall q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\,, \quad \|q\omega\|_{\mathbb{Z}^d} \geq \frac{C}{C_d}|q|^{1-1/d}e^{-f(C_d|q|^{1/d})}\,. \tag{30}$$

Note remise le 27 janvier 1997, acceptée après révision le 17 février 1997.

Références bibliographiques

[1] **Bruno A. D., 1971**. Analytical form of differential equations, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 25, p. 131-288.
[2] **Banaszczyk W., 1993**. New bounds in some transference theorems in the geometry of numbers, Math. Ann. 296, p. 625-635.
[3] **Lagarias J.-C., 1988**. Best simultaneous Dirichlet approximations I: growth rates of best approximation denominators, *Trans. of the AMS*, 272, p. 545-554.
[4] **Lochak P., 1992**. Canonical perturbation theory via simultaneous approximation, Russian Math. Surveys 47, p. 57-133.
[5] **Lochak P., 1993**. Hamiltonian perturbation theory: periodic orbits, resonances and intermittency, Nonlinearity 6, p. 885-904.
[6] **Rüssmann H., 1975**. On optimal estimates for the solutions of linear partial differential equations of first order with constant coefficients on the torus, in Lecture Notes in Physics 38, p. 598-624, Springer Verlag.
[7] **Rüssmann H., 1994**. On the frequencies of quasi periodic solutions of analytic nearly integrable Hamiltonian systems, in "Seminar on Dynamical Systems, St. Petersburg 1991, S.Kuksin, V.Lazutkin, J.Pöschel Eds, PNDLE 12, p. 160-183, Birkhaüser Verlag.
[8] **Schmidt W., 1980**. "Diophantine Approximation", *Lecture Notes in Mathematics*, 785, Springer Verlag.
[9] **Yoccoz J.-C., 1995**. Théorème de Siegel, nombres de Bruno et polynômes quadratiques, in "Petits diviseurs en dimension un", *Astérisque*, 231, p. 3-88, Publications SMF.