Systèmes Dynamiques/*Dynamical Systems*

Tores invariants à torsion évanescente dans les systèmes hamiltoniens proches de l'intégrable

Pierre LOCHAK

Résumé – On montre dans cette note un résultat de préservation de tores de type KAM avec torsion évanescente. La démonstration utilise une variante du schéma original de A.N.Kolmogorov.

Twistless invariant tori in nearly integrable Hamiltonian systems

Abstract – *In this note we prove the preservation of "twistless" invariant tori in a class of nearly integrable Hamiltonian systems. The proof is an adaptation of the original scheme of A.N.Kolmogorov.*

Nous montrons dans cette note un résultat de préservation de tores pour une classe de systèmes hamiltoniens presque intégrables. Ces tores persistent à la limite de torsion nulle et sont donc "twistless" au sens de [3], [4]. La proposition 1 ci-dessous est plus générale que les énoncés qu'on trouve dans la littérature sur le sujet (voir entre autres [3], [4] et leurs bibliographies). Elle suit d'une modification du schéma originel de A.N.Kolmogorov dans [1], qui a été détaillé dans [2]. Il nous a paru intéressant de repartir du schéma originel, mais on pourrait utiliser bien sûr une des preuves plus récentes, par exemple du type "fonctions implicites", qui diffèrent d'ailleurs peu au fond de la preuve originale.

Nous suivrons donc de près [1], avec les détails donnés dans [2], et en utilisant comme dans ce dernier articles les séries de Lie, plutôt que les transformations génératrices de [1]. Tout ceci étant devenu classique, nous nous permettrons d'être brefs, jusque dans les énoncés, et n'indiquerons que les quelques points de différence avec ces articles. Ceci posé, la preuve ci-dessous est complète, moyennant les estimations données dans [2]. Le cadre est celui de [1] et [2], avec une différence mineure de notations. Nous noterons (I, ϕ) les variables actions-angles que nous divisons en deux groupes. Soit $n = n_1 + n_2$ le nombre de degrés de liberté, et soit $(I_k, \phi_k) \in {}^{n_k} \times {}^{n_k}$ $(k = 1, 2)$; nous écrivons $I = (I_1, I_2) \in {}^{n}$, $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in {}^{n}$, et de même pour les autres quantités tensorielles sur l'espace des phases (I, ϕ). On utilisera une notation concise mais qui ne devrait pas créer d'ambiguités. Par exemple si ω est un vecteur fréquence et I une action, on note ωI ou $\omega \cdot I$ le produit scalaire; de même CI^2 se lit $CI \cdot I$, où C est une matrice carrée. Le résultat est le suivant:

Proposition 1: Soit le Hamiltonien:

$$H(I, \phi) = \omega I + \frac{1}{2} C_1 I_1^2 + \frac{1}{2} \mu C_2 I_2^2 + \varepsilon f(I_1, \phi) + \varepsilon \mu g(I, \phi),$$

où ε et μ sont des paramètres réels. On suppose que les matrices symétriques C_1 et C_2 sont inversibles, que les fonctions f et g sont définies et analytiques près de $I = 0$, et que le vecteur ω est diophantien ($|\omega \cdot k| \geq \gamma |k|^{-\tau}$ pour $k \in {}^{n} \setminus \{0\}$ et des constantes $\gamma > 0$, $\tau \geq n - 1$).

Alors pour tout $|\mu| \leq 1$ et pour $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ avec $\varepsilon_0 > 0$ indépendant *de μ, il existe un tore invariant de fréquence ω pour H; celui-ci est ε-proche de $I = 0$ (uniformément en μ).*

On peut démontrer de la même façon plusieurs variantes. Ici f peut dépendre de ε et g de ε et μ, auquel cas on suppose de l'analyticité en ε (mais pas en μ). Pour $\mu \neq 0$ fixé on obtient l'énoncé de Kolmogorov, à ceci près que nous avons voulu donner un énoncé assez lisible. On peut plus généralement considérer un Hamiltonien $H(I, \phi, \varepsilon, \mu)$, analytique (I, ϕ, ε), et obtenir un énoncé apparemment plus général que celui de la proposition 1 (mais au fond équivalent), qui redonne exactement l'énoncé de [1] à μ fixé non nul. La proposition 2 ci-dessous se réduit elle exactement à la proposition analogue dans le cas standard (cf. [1] ou [2] théorème 2). Lorsque $\mu = 0$, on obtient une perturbation ω_2-quasipériodique d'un Hamiltonien en I_1

intégrable et non dégénéré. La proposition 1 dit que la limite $\mu \to 0$ est en fait *régulière*, même si la partie μC_2 de la torsion s'annulle. Notons aussi qu'on pourrait considérer μ comme un vecteur à n_2 composantes et donc traiter le cas de Hamiltoniens multiéchelles dans les variables d'action. On se borne ici au cas de deux échelles mais les changements nécessaires pour traiter le cas général sont essentiellement typographiques.

Pour démontrer la proposition 1, on réécrit le Hamiltonien sous la forme normale de Kolmogorov. La proposition 1 est une conséquence immédiate de la

Proposition 2: Soit le Hamiltonien:

$$H(I,\phi) = \omega I + \frac{1}{2}C_1(\phi)I_1^2 + \frac{1}{2}\mu C_2(\phi)I_2^2 + \varepsilon A(\phi) + \varepsilon B_1(\phi)I_1 + \mu\varepsilon B_2(\phi)I_2 + Q(I_1,\phi) + \mu R(I,\phi),$$

où ω est diophantien, les moyennes C_1 et C_2 des matrices symétriques $C_1(\phi)$ et $C_2(\phi)$ sur $\phi \in {}^n$ sont inversibles, $A(\phi)$ est de moyenne nulle et Q (resp. R) est d'ordre I_1^3 (resp. I^3). Toutes les fonctions sont supposées définies et analytiques en leurs arguments près de $I = 0$. La conclusion est la même que celle de la proposition 1.

La preuve de la proposition 2 suit de près celle de son analogue dans [1] et [2]. Nous nous bornerons donc essentiellement à mentionner les différences. Notons que nous avons choisi de faire apparaître la dépendance en les paramètres ε et μ explicitement, en espérant rendre ainsi l'écriture plus claire. Nous ne notons par contre pas cette dépendance dans les arguments des fonctions.

Écrivons $H = H^0 + \varepsilon H^1$ où $H^1 = A + B_1 I_1 + \mu B_2 I_2$ est le terme perturbatif à éliminer par approximations successives. Soit χ le Hamiltonien auxiliaire (pendant de la fonction génératrice en termes de séries de Lie) qui servira à accomplir un pas de l'algorithme. Nous le choisiron de la forme:

$$\chi(I,\phi) = \xi \cdot \phi + X(\phi) + Y_1(\phi)I_1 + \mu Y_2(\phi)I_2,$$

où $\xi \in {}^n$, la fonction scalaire X et les fonctions vectorielles Y_1 et Y_2 (de tailles respectives n_1 et n_2) sont à déterminer. Notons que pour $\mu \neq 0$, la composante en I_2 de la translation moyenne du tore, à savoir ξ_2, est *a priori* d'ordre 1 (et non μ).

Détaillons un pas du schéma perturbatif; la convergence suit exactement comme dans le cas usuel (cf. [2] §5). Notons L_a l'opérateur de Liouville associé à une fonction a. Autrement dit $L_a(b) = \{a,b\}$ est le crochet de Poisson de a et b. Nous modifions maintenant H en utilisant le flot de χ au temps ε, pour obtenir le Hamiltonien $H' = \exp(\varepsilon L_\chi)H$ et il s'agit de choisir χ pour faire décroître le terme perturbatif. Nous conservons les mêmes noms pour les variables s'agissant du nouvel Hamiltonien H' et les nouvelles fonctions sont désignés par des lettres primées. La fonction χ est déterminée par la résolution de l'équation linéarisée (ou homologique) qui s'écrit:

$$H^1 + \{\chi, H^0\} = cst + O(I_1^2) + \mu O(I^2).$$

On calcule donc le membre de gauche:

$$\begin{aligned} H^1 + \{\chi, H^0\} &= -\xi\cdot\omega - \omega\frac{\partial X}{\partial\phi} + A(\phi) \\ &+ [B_1(\phi) - C_1(\phi)(\xi_1 + \frac{\partial X}{\partial\phi_1}) - \omega\frac{\partial Y_1}{\partial\phi}]I_1 \\ &+ \mu[B_2(\phi) - C_2(\phi)(\xi_2 + \frac{\partial X}{\partial\phi_2}) - \omega\frac{\partial Y_2}{\partial\phi}]I_2 + O(I_1^2) + \mu O(I^2). \end{aligned}$$

Le point clef est que dans les deux dernières lignes, on trouve des gradients en ϕ partiels pour $X(\phi)$ mais des gradients totaux pour Y_1 et Y_2. Le système à résoudre s'écrit donc:

$$\begin{cases} \omega\frac{\partial X}{\partial\phi} = A(\phi) \\ \omega\frac{\partial Y_1}{\partial\phi} = B_1(\phi) - C_1(\phi)(\xi_1 + \frac{\partial X}{\partial\phi_1}) \\ \omega\frac{\partial Y_2}{\partial\phi} = B_2(\phi) - C_2(\phi)(\xi_2 + \frac{\partial X}{\partial\phi_2}). \end{cases}$$

La première équation est l'équation usuelle et se résout parce que $A(\phi)$ est de moyenne nulle et ω est diophantien. Les deux dernières équations sont identiques et reproduisent chacune l'équation unique du cas usuel (cf. [1] ou l'équation (4.14) de [2]). On peut donc les résoudre pour un choix approprié (et unique sauf si $\mu = 0$ auquel cas la second équation disparaît) de $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, parce que les matrices de torsion moyenne C_1 et C_2 sont inversibles et ω est diophantien. Les estimations qu'on obtient pour ξ, X, Y_1 et Y_2 sont identiques –et pour cause– à celles que l'on obtient ordinairement (cf. [2] §4).

Ceci termine essentiellement la preuve de la proposition 2, et donc celle de la proposition 1. Nous mentionnerons pour être complet la différence mineure qui intervient dans l'évaluation du reste $H' - H - \{\chi, H^0\}$. Il s'agit d'évaluer les quantités $\{\chi, H^1\}$ et $\{\chi, \{\chi, H\}\}$ (cf. [2] §3.1) et le seul point est qu'il faut estimer séparément les termes indépendants de μ et les autres. Plus précisément, on part d'estimations sur A, B_1 et B_2 et on cherche à borner A', B_1' et B_2'. On obtient d'abord des bornes sur ξ, X, Y_1 et Y_2, comme dans [1] et [2] (§4.2 c,d). On décompose ensuite H^1 et χ selon $H^1 = H_0^1 + \mu H_1^1$, $\chi = \chi_0 + \mu\chi_1$, avec $H_1^1 = B_2 I_2$ et $\chi_1 = Y_2 I_2$; chacun des termes H_0^1, H_1^1, χ_0 et χ_1 a donc déjà été estimé. Enfin on développe en puissances de μ les quantités à estimer, $\{\chi, H^1\}$ et $\{\chi, \{\chi, H\}\}$, suivant la décomposion ci-dessus de χ et H^1 (il est ici à vrai dire inutile de décomposer H). On obtient alors immédiatement des bornes sur les contributions d'ordre 0 (en μ) et d'ordre ≥ 1, et le reste suit *verbatim* comme dans le cas standard.

Nous terminerons par des remarques sur des points classiques, à savoir les conditions de non dégénérescence, les conditions arithmétiques, et les conditions de régularité. A propos du premier, nous avons supposé ici que les matrices C_1 et C_2 sont inversibles, ce qui est une condition sur le jet à l'ordre 2 du Hamiltonien non perturbé. Ces conditions peuvent être considérablement affaiblies, comme le montrent les travaux de H.Rüssman. Pour appliquer les résultats de ces travaux (que nous n'énoncerons pas ici en détail) dans le cas présent, il faudrait revenir à un cadre un peu plus général, à savoir considérer un Hamiltonien $H(I, \phi, \varepsilon, \mu)$ proche de l'intégrable, i.e. tel que $H(I, \phi, 0, \mu)$ est indépendant de ϕ. On impose ensuite les conditions de non dégénérescence de H.Rüssman sur les jets en $I = 0$ des fonctions (indépendantes de ϕ) $H(I, \phi, 0, 0)$ et $\partial H/\partial\mu(I, \phi, 0, 0)$ (nous nous sommes bornés ci-dessus à considérer les Hessiennes de ces fonctions, c'est-à-dire les jets d'ordre 2). Les résultat de la présente note devraient s'étendre sans difficulté à cette situation. A propos des conditions arithmétiques, outre les travaux originaux de A.D.Bruno et H.Rüssman en particulier, nous aimerions attirer l'attention sur deux articles récents de A.Giorgilli et U.Locatelli ([5], [6]) dans lesquels les auteurs montrent comment, en modifiant de nouveau convenablement le schéma original de Kolmogorov on peut prouver l'existence de tores invariants pour des fréquences vérifiant la condition de Bruno. Il est plausible que ce travail puisse être étendu au contexte envisagé ici. Enfin nous mentionnerons que les techniques usuelles permettant de traiter le cas de données de classe C^r pour r assez grand devraient s'adapter au contexte de cette note.

Références bibliographiques

[1] A.N.Kolmogorov, On the preservation of conditionally periodic motions, Doklady AN **98**, 1954, 527-530.

[2] G.Benettin, L.Galgani, A.Giorgilli, J.-M.Strelcyn, A proof of Kolmogorov's theorem on invariant tori etc., Il Nuovo Cimento **79 B**, 1984, 201-223.

[3] G.Gallavotti, Twistless KAM tori, Commun. in Math. Phys. **164**, 1994, 145-156.

[4] G.Gallavotti and G.Gentile, Majorant series convergence for twistless KAM tori, Ergod. Th. and Dynam. Sys. **15**, 1995, 857-869.

[5] A.Giorgilli and U.Locatelli, Kolmogorov theorem and classical perturbation theory, Z. angew. Math. Phys. **48**, 1997, 220-261.

[6] A.Giorgilli and U.Locatelli, On classical series expansions for quasi-periodic motions, Math. Phys. Electronic. J. **3**, 1998.

P. L.: Ecole Normale Supérieure, D. M. I., 45, rue d'Ulm, 75005 Paris; lochak@dmi.ens.fr