

MODULES DE DRINFELD QUASICRISTALLINS

T.M. GENDRON, E. LEICHTNAM, AND P. LOCHAK

ABSTRACT. Dans cet article nous développons la notion de *module de Drinfeld quasicristallin*, que l'on peut voir comme un analogue en caractéristique zéro des modules de Drinfeld classiques. On prendra garde que l'adjectif se réfère aux quasi-cristaux (au sens de [23]), sans rapport avec la théorie cristalline initiée par A. Grothendieck.

CONTENTS

Introduction	1
1. Bref résumé de la théorie de Drinfeld-Hayes	4
2. Anneaux et idéaux quasicristallins	6
3. Monoïdes des classes d'idéaux quasicristallins	9
4. La fonction zêta d'un idéal quasicristallin	15
5. L'invariant modulaire quantique et un résultat de R. Pink	21
6. Le solénoïde associé à un quasicristal	23
7. Fonction exponentielle et modules de Drinfeld quasicristallins	30
References	36

INTRODUCTION

Rassembler sous la dénomination commune de *corps globaux* les corps de nombres (alias les extensions finies de \mathbb{Q}) et les corps de fonctions (alias les extensions finies de $\mathbf{Q} := \mathbb{F}_q(T)$) a sans doute constitué l'un des gestes les plus productifs en théorie des nombres. Cette philosophie, promue par A. Weil dans son ouvrage si influent ([35]), a largement établi l'habitude de prouver d'abord les conjectures pour les corps de fonctions (donc en caractéristique positive), en utilisant les structures supplémentaires attachées à ces derniers, à savoir d'abord :

- (1) La *géométrie des courbes* que l'on trouve comme en coulisses dans les extensions de \mathbf{Q} mais pas pour les corps de nombres ;
- (2) l'*arithmétique de rang 1*, c'est-à-dire l'existence d'anneaux de Dedekind avec groupe d'unités fini, qui découle du caractère non archimédien de la somme par rapport aux valuations à l'infini, tandis que les valuations à l'infini des extensions de \mathbb{Q} sont elles archimédiennes.

L'aspect géométrique des extensions de \mathbf{Q} était utilisé par Weil pour démontrer l'hypothèse de Riemann [36] dans ce cas, ce qui l'a conduit à la formulation des fameuses conjectures, dites de Weil [37]. Les preuves de Weil et de Deligne continuent à inspirer certaines approches du cas "classique", comme le montrent les

travaux d'A. Connes [6] et C. Deninger [12]. Il s'agit en particulier de chercher l'analogue d'un morphisme étale de courbes qui induirait une extension finie K/\mathbb{Q} .

D'autre part l'arithmétique des anneaux de Dedekind de rang 1 a été synthétisée par V. Drinfeld [13] et D. Hayes [17] dans une théorie du corps de classes en caractéristique positive qui combine des idées venues de la théorie de la multiplication complexe et du théorème de Kronecker-Weber. Plus généralement, V. Drinfeld [14] a appliqué sa théorie à la résolution d'un cas de la réciprocité de Langlands en caractéristique positive.

Ce qui précède rend très naturel le projet de chercher une version de la théorie de Hayes-Drinfeld pour les corps de nombres. Une piste était fournie dans les articles [5] et [10] qui concernent l'étude de l'*invariant modulaire quantique*

$$j^{\text{qt}} : \mathbb{R}/\text{GL}(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

une fonction *multivaluée*, discontinue et invariante par rapport à l'action projective de $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$ sur \mathbb{R} . La définition de $j(\theta)$ utilise les approximations diophantiennes de θ . Pour les nombres quadratiques, on sait que $j^{\text{qt}}(\theta)$ est une image continue d'un ensemble de Cantor, donc aussi un ensemble du même type (voir Corollaire 1 de §5).

Il existe aussi une définition de j^{qt} en caractéristique positive

$$j^{\text{qt}} : \mathbf{R}/\text{GL}(2, \mathbf{A}) \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\},$$

où $\mathbf{R} = \mathbf{Q}_\infty$ est l'analogue des nombres réels. Dans ce cas, pour $f \in \mathbf{R}$ quadratique et irrationnel sur \mathbf{Q} , $j^{\text{qt}}(f)$ est *fini*, et on peut identifier

$$(1) \quad j^{\text{qt}}(f) = \{j(\mathfrak{a}_i) \mid \mathfrak{a}_i \subset \mathbf{A}_{\infty_1}, i = 1, \dots, d\},$$

où (voir [10] pour plus de précisions)

- \mathbf{A}_{∞_1} est un sous-anneau de Dedekind de $\mathbf{O}_K =$ l'anneau des entiers de $K = \mathbf{Q}(f)$, "petit" au sens que $\mathbf{A}_{\infty_1}^\times = \mathbb{F}_q^\times$;
- Les $\mathfrak{a}_i \subset \mathbf{A}_{\infty_1}$ sont des idéaux ;
- $j : \text{Cl}_{\mathbf{A}_{\infty_1}} \rightarrow \mathbf{R}$ est un invariant modulaire des classes d'idéaux de \mathbf{A}_{∞_1} .

Si l'on note $\mathbf{H}_{\mathbf{O}_K}$ le corps de classes associé à \mathbf{O}_K , le théorème principal de [10] dit que

$$\mathbf{H}_{\mathbf{O}_K} = \mathbf{K} \left(\prod_{\alpha \in j^{\text{qt}}(f)} \alpha \right) = \mathbf{K} \left(\prod_{i=1}^d j(\mathfrak{a}_i) \right).$$

La preuve utilise la théorie de Drinfeld-Hayes, autrement dit une théorie du corps de classes basée sur le "petit" anneau \mathbf{A}_{∞_1} ([13], [17]). On a la conjecture suivante:

Conjecture (Demangos-Gendron [10]). *Soient $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ une unité fondamentale quadratique et $K = \mathbb{Q}(\theta)$ le corps quadratique associé, de discriminant D . Alors, $j^{\text{qt}}(\theta)$ est un ensemble de Cantor autosimilaire d'ordre D et*

$$H_K = K(\mathbf{N}^{\text{avg}}(j^{\text{qt}}(\theta)))$$

où H_K est le corps de classes de Hilbert de K et $\mathbf{N}^{\text{avg}}(j^{\text{qt}}(\theta))$ est un produit pondéré des éléments de $j^{\text{qt}}(\theta)$.

Dans cet article, on démontre que $j^{\text{qt}}(\theta)$ est l'image continue d'un ensemble de Cantor ; en particulier il est soit de Cantor, soit fini (voir Corollaire 1).

En vue de prouver l'analogie en caractéristique nulle des résultats résumés plus haut il est désirable de disposer de l'équivalent de la théorie de Drinfeld-Hayes dans

ce cas. On constate immédiatement que le premier pas consiste à trouver un anneau analogue A_{σ_1} à \mathbf{A}_{∞_1} en caractéristique nulle, où $\sigma_1 : K \rightarrow \mathbb{C}$ est un plongement de K/\mathbb{Q} .

Dans le cas où $K = \mathbb{Q}(\varphi)$, avec φ le nombre d'or, une description explicite de A_{σ_1} était implicite dans les calculs de renormalisation donnés en [5] (voir §§2,3). Richard Pink ([27]) a par la suite suggéré la définition élégante et transparente suivante : soit K/\mathbb{Q} une extension quadratique réelle, σ_i , $i = 1, 2$, les deux plongements de K dans \mathbb{R} . On fixe σ_1 en identifiant K avec $\sigma_1(K)$. Soit

$$A_{\sigma_1} = \{\alpha \in \mathcal{O}_K \mid |\alpha'| \leq 1\}, \quad \alpha' = \sigma_2(\alpha).$$

Si l'on écrit $K = \mathbb{Q}(\theta)$ où θ est une unité fondamentale et que l'on définit les semigroupes multiplicatifs

$$\mathfrak{a}_x = \{\alpha \in \mathcal{O}_K \mid |\alpha'| < \theta^{-x}\} \subset \mathfrak{a}_x^+ = \{\alpha \in \mathcal{O}_K \mid |\alpha'| \leq \theta^{-x}\},$$

Pink a démontré que

$$j^{\text{qt}}(\theta) = \bigcup_{x \in [0,1)} \{j(\mathfrak{a}_x), j(\mathfrak{a}_x^+)\},$$

où j est un analogue de l'invariant modulaire (voir §5). Cette formule est l'analogue exacte de (1): en fait, les idéaux \mathfrak{a}_i qui apparaissent dans (1) s'écrivent explicitement

$$\mathfrak{a}_i = \{g \in \mathbf{K} \mid |g'|_{\infty_1} < q^{-i}\}.$$

Pink a observé également que les semigroupes \mathfrak{a}_x sont des *quasicristaux* (et même des *ensembles modèles*). Cependant il leur manque pour constituer de véritables idéaux d'être stables par rapport à la somme. Dans cet article, partant de l'observation de R. Pink, nous explorons la possibilité de développer une théorie de Drinfeld-Hayes basée sur l'anneau quasicristallin A_{σ_1} .

Nous commençons au §1 avec une récapitulation de la théorie de Drinfeld-Hayes. Au §2 nous donnons la définition générale d'un anneau quasicristallin arithmétique puis discutons au §3 le monoïde des classes d'idéaux $\text{Cl}_{A_{\sigma_1}}^{\text{qc}}$. Nous définissons ensuite (§4) la fonction zêta $\zeta_{\mathfrak{a}}$ associé à un idéal quasicristallin et démontrons l'existence d'un prolongement méromorphe à tout le plan complexe. Au §5 on utilise la fonction zêta $\zeta_{\mathfrak{a}}$ pour définir l'invariante modulaire $j : \text{Cl}_{A_{\sigma_1}}^{\text{qc}} \rightarrow \mathbb{R}$ et montrer sa continuité par rapport à la topologie cantorienne de $\text{Cl}_{A_{\sigma_1}}^{\text{qc}}$. Nous commençons ensuite (§6) un développement plus géométrique en introduisant pour chaque idéal quasicristallin un solénoïde associé qui représente essentiellement une définition analytique d'un module de Drinfeld quasicristallin. Enfin au §7 on introduit les fonctions trigonométriques quasicristallines qui découlent de formules du produit, ainsi que l'exponentielle associée, dans le cadre de ces modules quasicristallins.

Remerciements. Le premier auteur voudrait exprimer sa gratitude à 1) La Fondation des Sciences Mathématiques de Paris pour le financement de son séjour à Paris à l'automne 2017 ainsi que l'équipe d'algèbres d'opérateurs de l'Institut de Mathématiques de Jussieu – Paris Rive Gauche pour son hospitalité et ses encouragements et 2) Boris Zilber et Merton College de l'Université de Oxford pour le financement de son séjour à Oxford au printemps 2018. Il a également bénéficié de conversations avec Paul Nelson, Ryszard Nest, Richard Pink, Georges Skandalis et Boris Zilber.

1. BREF RÉSUMÉ DE LA THÉORIE DE DRINFELD-HAYES

La théorie quasicristalline développée ici est basée sur la théorie des modules de Drinfeld-Hayes de rang 1, présentée par exemple dans [17], [16], [34] et que nous résumons ci-dessous.

Soient $\mathbf{Q} = \mathbb{F}_q(T) \supset \mathbf{Z} := \mathbb{F}_q[T]$ le corps des fonctions rationnelles à coefficients dans le corps fini \mathbb{F}_q ($q = p^k$, p un nombre premier) avec son sous-anneau des polynômes. Alors \mathbf{Q} est le corps de fonctions de la droite projective $\mathbb{P}^1 = \overline{\mathbf{Q}} \cup \{\infty\}$ et \mathbf{Z} l'anneau des fonctions régulières sur $\mathbb{P}^1 - \{\infty\}$. Soit $\mathbf{R} := \mathbf{Q}_\infty$ le complété de \mathbf{Q} à la place v_∞ : $v_\infty(f) = \deg_{T^{-1}}(f) = -\deg_T(f)$ et $|f| = q^{-v_\infty(f)}$. On identifie \mathbf{R} à $\mathbb{F}_q[[T^{-1}]]$, le corps des séries de Laurent en la variable T^{-1} . On note enfin $\mathbf{C} = (\overline{\mathbf{R}})_\infty$, qui est un corps complet et algébriquement clos.

On dit qu'une extension \mathbf{K}/\mathbf{Q} est *géométrique* si le corps des constantes $\mathbf{K} \cap \overline{\mathbb{F}_q}$ de \mathbf{K} est aussi \mathbb{F}_q . Dans ce cas il existe un morphisme $\pi : \Sigma_{\mathbf{K}} \rightarrow \mathbb{P}^1$ de courbes définies sur \mathbb{F}_q qui induit cette extension. Toutes les extensions considérées ici sont géométriques. À une telle extension on associe la clôture intégrale $\mathbf{O}_{\mathbf{K}}$ de \mathbf{Z} dans \mathbf{K} ; on a

$$\mathbf{O}_{\mathbf{K}} = \text{Reg}(\Sigma_{\mathbf{K}} \setminus \pi^{-1}(\infty)),$$

où Reg dénote les fonctions régulières. Si $\infty_1 \in \pi^{-1}(\infty)$ on peut définir

$$\mathbf{A}_{\infty_1} = \text{Reg}(\Sigma_{\mathbf{K}} \setminus \{\infty_1\}) \subset \mathbf{O}_{\mathbf{K}},$$

qui est un anneau de Dedekind ; \mathbf{A}_{∞_1} est "petit" au sens que $\mathbf{A}_{\infty_1}^\times$ est fini, ce qui implique l'existence des places $\mathbf{A}_{\infty_1} \hookrightarrow \mathbf{C}$ d'images *discrètes*. À ces deux anneaux de Dedekind $\mathbf{O}_{\mathbf{K}}$ et \mathbf{A}_{∞_1} on peut associer les corps de classes de Hilbert au sens de Rosen ([29])

$$\begin{array}{c} \mathbf{H}_{\mathbf{A}_{\infty_1}} \\ | \\ \mathbf{H}_{\mathbf{O}_{\mathbf{K}}} \\ | \\ \mathbf{K} \end{array}$$

dont les groupes de Galois sont isomorphes aux groupe des classes idéaux correspondants:

$$\text{Gal}(\mathbf{H}_{\mathbf{A}_{\infty_1}}/\mathbf{K}) \cong \text{Cl}_{\mathbf{A}_{\infty_1}} \quad \text{et} \quad \text{Gal}(\mathbf{H}_{\mathbf{O}_{\mathbf{K}}}/\mathbf{K}) \cong \text{Cl}_{\mathbf{O}_{\mathbf{K}}}.$$

Exemple 1. Le cas de $\mathbf{K} \subset \mathbf{R}$ extension de degré 2 sur \mathbf{Q} , induite par le morphisme de degré 2 $\pi : \Sigma_{\mathbf{K}} \rightarrow \mathbb{P}^1$, est particulièrement intéressant. On a deux préimages de $\infty \in \mathbb{P}^1$, soit $\pi^{-1}(\infty) = \{\infty_1, \infty_2\}$. Dans ce contexte

$$\mathbf{A}_{\infty_1} = \{g \in \mathbf{K} \mid |g'|_{\infty_1} \leq 1\},$$

où g' est la conjuguée de Galois de g et $|g'|_{\infty_1} = q^{-v_{\infty_1}(g')}$. Fixons une unité fondamentale $f \in \mathbf{O}_{\mathbf{K}}^\times$ tel que $|f|_{\infty_1} = q^d > 1$. Suivant [10] on a l'identification

$$\mathbf{A}_{\infty_1} = \mathbb{F}_q[f, fT, \dots, fT^{d-1}] \subset \mathbf{O}_{\mathbf{K}} = \mathbb{F}_q[f, T].$$

Dans cette même référence on a également démontré (cf. Theorem 4 de [10]) que :

$$\text{Gal}(\mathbf{H}_{\mathbf{A}_{\infty_1}}/\mathbf{H}_{\mathbf{O}_{\mathbf{K}}}) \cong Z := \{\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_{d-1}\} \subset \text{Cl}_{\mathbf{A}_{\infty_1}}$$

où

$$\mathfrak{a}_i = (f, fT, \dots, fT^i) = \{g \in \mathbf{A}_{\infty_1} \mid |g'|_{\infty_1} \leq q^{i-d}\} \subset \mathbf{A}_{\infty_1}.$$

À tout idéal fractionnaire de \mathbf{A}_{∞_1} on associe un \mathbf{A}_{∞_1} -module de rang 1 comme suit. On définit d'abord l'exponentielle associée à \mathfrak{a}

$$\exp_{\mathfrak{a}}(z) = z \prod_{0 \neq \alpha \in \mathfrak{a}} \left(1 - \frac{z}{\alpha}\right) :$$

qui est un épimorphisme *additif* $(\mathbf{C}, +) \rightarrow (\mathbf{C}, +)$ de noyau \mathfrak{a} . Pour tout $\alpha \in \mathbf{A}_{\infty_1}$ il existe alors ([16]) un polynôme *additif*¹ $\rho_{\alpha}(X)$ tel que le diagramme ci-dessous soit commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}/\mathfrak{a} & \xrightarrow{\alpha \cdot} & \mathbf{C}/\mathfrak{a} \\ \exp_{\mathfrak{a}} \downarrow \cong & & \cong \downarrow \exp_{\mathfrak{a}} \\ \mathbf{C} & \xrightarrow{\rho_{\alpha}} & \mathbf{C} \end{array}$$

Le *module de Drinfeld* (de rang 1) associé à \mathfrak{a} , soit $\mathbb{D}_{\mathfrak{a}} = (\mathbf{C}, \rho)$, est défini alors comme \mathbf{C} muni de la structure de \mathbf{A}_{∞_1} -module définie par les ρ_{α} . En tant que \mathbf{A}_{∞_1} -module, on a

$$\mathbb{D}_{\mathfrak{a}} \cong \mathbf{C}/\mathfrak{a}.$$

Il existe une normalisation naturelle de $\mathbb{D}_{\mathfrak{a}}$ par $\xi_{\mathfrak{a}} \in \mathbf{C}$ qui joue un rôle analogue à la normalisation de \mathbb{Z} par $\pi i \in \mathbf{C}$ dans la théorie de l'exponentielle classique. On remplace le réseau $\mathfrak{a} \subset \mathbf{C}$ par $\Lambda_{\mathfrak{a}} := \xi_{\mathfrak{a}}\mathfrak{a}$ et on considère l'exponentielle correspondante

$$e_{\mathfrak{a}}(z) := \exp_{\Lambda_{\mathfrak{a}}}(z) = \xi_{\mathfrak{a}} \exp_{\mathfrak{a}}(\xi_{\mathfrak{a}}^{-1}z).$$

On choisit $\xi_{\mathfrak{a}}$ de manière à obtenir un module de Drinfeld $\tilde{\mathbb{D}}_{\mathfrak{a}} = (\mathbf{C}, \tilde{\rho})$ conjugué à $\mathbb{D}_{\mathfrak{a}}$ et *normalisé par rapport au signe* (voir au §12 de [17]). Dans ce cas, pour chaque $\alpha \in \mathbf{A}_{\infty_1}$ les coefficients de $\tilde{\rho}_{\alpha}$ appartiennent au corps de classes de Hilbert $\mathbf{H}_{\mathbf{A}_{\infty_1}}$ et de plus (voir [17] et [34] Theorem 3.4.2) Hayes a montré qu'ils engendrent ce corps :

$$\mathbf{H}_{\mathbf{A}_{\infty_1}} = \mathbf{K}(\text{coefficients de } \tilde{\rho}_{\alpha}).$$

Le module $\tilde{\mathbb{D}}_{\mathfrak{a}}$ s'appelle *module de Hayes*. Il a permis à ce dernier de développer une théorie explicite du corps de classes basée sur le "petit" anneau de Dedekind \mathbf{A}_{∞_1} en utilisant les modules $\tilde{\mathbb{D}}_{\mathfrak{a}}$.

Le but de cet article est de proposer un candidat pour représenter un analogue des modules de Hayes pour les anneaux d'entiers des corps de nombres. En particulier, on définira les analogues des objets suivants :

- le petit anneau \mathbf{A}_{∞_1} : ce sera un *anneau quasicristallin PVS* (*Pisot-Vijayaraghavan et Salem*), voir §2 ;
- un idéal \mathfrak{a} de \mathbf{A}_{∞_1} , appelé ci-dessous *idéal quasicristallin*, voir §2 ;
- le groupe de classes d'idéaux $\mathbf{C}_{\mathbf{A}_{\infty_1}}$, ici le *monoïde des classes des idéaux quasicristallins*, voir §3 ;
- le quotient \mathbf{C}/\mathfrak{a} , noté $\tilde{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}$, alias ici le *solénoïde quasicristallin* associé à \mathfrak{a} , voir §6 ;
- l'exponentielle $\exp_{\mathfrak{a}}$, voir §7 ;

¹C'est-à-dire de la forme $f(X) = \sum c_i \tau^i$ où $\tau(X) = X^q$ est le morphisme de Frobenius.

- le module de Drinfeld $\mathbb{D}_{\mathfrak{a}}$, devenu le *module de Drinfeld quasicristallin* et noté

$$\mathbb{E}_{\mathfrak{a}} \subset \mathbb{C}^*.$$

Sa structure de “module” provient d’applications multivaluées

$$\rho_{\alpha} : \mathbb{D}_{\mathfrak{a}} \longrightarrow \mathbb{D}_{\mathfrak{a}},$$

induisant des fonctions bien définies sur le cercle $\mathbb{S}^1 = \mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+^*$.

2. ANNEAUX ET IDÉAUX QUASICRISTALLINS

Un *quasicristal* (au sens d’Yves Meyer [23]) est un ensemble de Delaunay $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$, autrement dit un ensemble uniformément discret et relativement dense, qui est un *presque réseau* : il existe un ensemble fini $F \subset V$ tel que

$$\Lambda - \Lambda \subset \Lambda + F.$$

Exemple 2. Soit $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2$ une décomposition en somme directe de deux sous-espaces vectoriels, π_i les projections sur V_i , $i = 1, 2$. Soient $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ un réseau et $D \subset V_2$ un ensemble relativement compact (appelé *fenêtre*). L’ensemble modèle associé est défini par

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(\Gamma, D) = \mathcal{M}(V_1, V_2, \Gamma, D) = \{\pi_1(v) \mid v \in \Gamma, \pi_2(v) \in D\}.$$

Plus généralement, on peut remplacer \mathbb{R}^n par $\mathbb{R}^k \oplus H$ où H est un groupe localement compact. En prenant $\Gamma \subset \mathbb{R}^k \oplus H$ un réseau et $D \subset H$ relativement compact, on définit de même $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathbb{R}^k, H, \Gamma, D)$. Dans les deux cas, il en résulte que \mathcal{M} est un quasicristal ([23], [25]). Tout quasicristal est contenu dans un ensemble modèle, mais il existe des quasicristaux qui ne sont pas des ensembles modèles ([25]).

Definition 1. Un *anneau quasicristallin* (euclidien de rang n) est un quasicristal $A \subset \mathbb{R}^n$ qui est un monoïde multiplicatif contenant $\{0, \pm 1\}$. Un sous-monoïde $\mathfrak{a} \subset A$ satisfaisant $A \cdot \mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$ est appelé *idéal quasicristallin* (entier)². Plus généralement, un idéal quasicristallin fractionnaire est un quasicristal $\mathfrak{a} \subset \mathbb{R}^n$ tel que $A \cdot \mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$.

Dans la suite on se concentre sur le cas des idéaux quasicristallins associés aux sous monoïdes multiplicatifs d’un corps de nombres K/\mathbb{Q} de degré d . On note les d plongements $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ ainsi que l’espace de Minkowski

$$K \hookrightarrow K_{\infty} = \{\mathbf{z} = (z_{\sigma}) \in \mathbb{C}^d \mid \bar{z}_{\sigma} = z_{\bar{\sigma}}\} \cong \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s,$$

où r = le nombre de plongements réels, s = le nombre des paires de plongements complexes et $d = r + 2s$. On fixe un sous ensemble

$$\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}, \quad \sigma_i : K \hookrightarrow K_{\sigma_i} = \begin{cases} \mathbb{R} \\ \text{ou} \\ \mathbb{C} \end{cases}$$

de plongements tel que si $\sigma \in \Sigma$ est complexe, $\bar{\sigma} \in \Sigma$. L’ensemble Σ définit un sous-espace $K_{\Sigma} \subset K_{\infty}$ de façon évidente et un plongement

$$\Sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_k) : K \hookrightarrow K_{\Sigma}.$$

Si Σ' est le complément de Σ , on a $K_{\infty} = K_{\Sigma} \oplus K_{\Sigma'}$. On dit que $A \subset K$ est un *anneau quasicristallin* s’il existe $\Sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ comme ci-dessus et tel que l’image $\Sigma(A) \subset K_{\Sigma}$ est un anneau quasicristallin de K_{Σ} . On identifiera alors A avec son image $\Sigma(A) \subset K_{\Sigma}$.

²On note (voir [25]) qu’un idéal quasicristallin entier est aussi un quasicristal.

Exemple 3. Fixons Σ comme ci-dessus. On peut associer à chaque $\sigma \in \Sigma'$ la fenêtre $D_\sigma = \{x \in K_\sigma \mid |x| \leq 1\}$. Alors l'ensemble modèle

$$A_\Sigma = \mathcal{M}(K_\Sigma, K_{\Sigma'}, \mathcal{O}_K, D_\Sigma),$$

où $D_\Sigma = \prod_{\sigma \in \Sigma} D_\sigma$, définit un anneau quasicristallin $A_\Sigma \subset K_\Sigma$. Si $\Sigma = \{\sigma\}$ on note

$$A_\sigma \subset \begin{cases} \mathbb{R} \\ \text{ou} \\ \mathbb{C} \end{cases}$$

l'anneau quasicristallin associé, qu'on dira de *rang* 1, réel ou complexe selon la nature du plongement σ .

Si par exemple $K = \mathbb{Q}(\theta) \subset \mathbb{R}$ est une extension quadratique réelle de \mathbb{Q} , alors on a deux plongements $\sigma_1 = \text{id}$ et σ_2 de sorte que

$$A_{\sigma_1} = \{\alpha \in \mathcal{O}_K \mid |\alpha'| \leq 1\}, \quad A_{\sigma_2} = \{\alpha' \in \mathcal{O}_K \mid |\alpha| \leq 1\},$$

où α' dénote le conjuguée sous Galois. Dans ce cas, on a

$$A_{\sigma_1} \cap A_{\sigma_2} = \pm 1, \quad \langle A_{\sigma_1} \cup A_{\sigma_2} \rangle = \mathcal{O}_K,$$

où $\langle X \rangle$ est l'anneau engendré par X . Si $K = \mathbb{Q}(\omega)$ quadratique complexe, il n'y a qu'une paire de places conjuguées (σ et $\bar{\sigma}$) avec $A_\sigma = \mathcal{O}_K$. Si Σ comprend tous les plongements de K , on obtient $A_\Sigma = \mathcal{O}_K$.

Soient θ un entier algébrique réel tel que $\theta > 1$, θ^{σ_i} ses conjuguées, $\sigma_i \neq \text{id}$. On rappelle que θ est un *nombre de Pisot-Vijayaraghavan (PV)* si pour tout i , $|\theta^{\sigma_i}| < 1$, voir [28], [4]. Si $|\theta^{\sigma_i}| \leq 1$ pour tout i , avec égalité pour au moins une valeur de i , on dit que θ est un *nombre de Salem (S)* ([30]).

De même un entier algébrique complexe ω avec $|\omega| > 1$ est un *nombre de PV complexe* ([3]) si tous ses conjuguées $\omega^{\sigma_i} \neq \bar{\omega}$ satisfont $|\omega^{\sigma_i}| < 1$; c'est un *nombre de S complexe* si tous ses conjuguées $\omega_i \neq \bar{\omega}$ satisfont $|\omega^{\sigma_i}| \leq 1$ avec de nouveau égalité pour au moins un i . On note PV l'ensemble de tous les nombres de PV complexes, S celui des nombres de Salem complexes et PVS l'union de ces deux ensembles ($PVS = PV \cup S$). Les intersections $PV_{\mathbb{R}} = PV \cap \mathbb{R}$, $S_{\mathbb{R}} = S \cap \mathbb{R}$, $PVS_{\mathbb{R}} = PVS \cap \mathbb{R}$, consistent en les nombres PV, S et PVS classiques ainsi que leurs opposés. Si K/\mathbb{Q} est finie, on note $PV_K = PV \cap K$ et de même pour S et PVS . On alors l'énoncé suivant :

Proposition 1. *Soit $A_\sigma \subset K$ comme dans l'exemple 3. Alors on a l'égalité*

$$A_\sigma = PVS_K \cup \mu_K$$

où $\mu_K \subset \mathcal{O}_K^\times$ est le sous-groupe multiplicatif des racines de l'unité.

Preuve. On identifie A_σ à son plongement complexe en utilisant la place σ . Pour tout $\alpha \in A_\sigma$, $|\alpha^\tau| \leq 1$ pour tout $\tau \neq \sigma, \bar{\sigma}$. Si $|\alpha| > 1$ alors $\alpha \in PVS_K$ et sinon $|\alpha| = 1$ et donc $\alpha \in \mu_K$. □

Un tel A_σ sera appelé *anneau quasicristallin PVS* associé à K et σ ; dans ce que suit nous nous concentrerons sur l'étude de tels anneaux quasicristallins de rang 1. L'ensemble des (paires de) places (complexes) $\sigma_i \neq \sigma$ contient $r + s - 1$ éléments : fixons $\sigma_1, \dots, \sigma_{r+s-1}$ distinct, tels que $\sigma_i \neq \bar{\sigma}_j$ pour tous i, j . Notons

$$\pi' : K_\infty \longrightarrow K_{\sigma'}$$

la projection sur $K_{\sigma'}$. Soient $\mathbf{z} \in K_{\sigma'}$ et $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_{r+s-1}) > 0$. On écrira

$$|\mathbf{z}| < \boldsymbol{\delta}^{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{r+s-1},$$

si et seulement si $|z_i| < \delta_i^{x_i}$ pour tout i . Si

$$u \in U_K := \mathcal{O}_K^\times / \mu_K \cong \mathbb{Z}^{r+s-1}$$

est une unité d'ordre infini, on définit pour chaque $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{r+s-1}$

$$\mathfrak{a}_{\mathbf{x}}(u) := \{\alpha \in \mathcal{O}_K \mid |\pi'(\alpha)| < |\pi'(u)|^{\mathbf{x}}\}.$$

Il est clair que $\mathfrak{a}_{\mathbf{x}}(u)$ est un ensemble modèle et un monoïde multiplicatif, donc un idéal quasicristallin fractionnaire puisque A_σ agit dessus par multiplication. Pour $u_1, u_2, u \in U_K$, on a les inclusions

$$\mathfrak{a}_{\mathbf{x}}(u_1) \cdot \mathfrak{a}_{\mathbf{x}}(u_2) \subset \mathfrak{a}_{\mathbf{x}}(u_1 u_2), \quad \mathfrak{a}_{\mathbf{x}}(u) \cdot \mathfrak{a}_{\mathbf{y}}(u) \subset \mathfrak{a}_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}(u),$$

ainsi que les égalités

$$\mathfrak{a}_{-\mathbf{x}}(u) = \mathfrak{a}_{\mathbf{x}}(u^{-1}), \quad u \cdot \mathfrak{a}_{\mathbf{x}}(u) = \mathfrak{a}_{\mathbf{x}+\mathbf{1}}(u)$$

où $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$. Pour tout $u \in U_K$, on a

$$\mathfrak{a}_{\mathbf{0}} := PV_K \cap A_\sigma = \mathfrak{a}_{\mathbf{0}}(u),$$

l'ensemble de nombres de PV de A_σ , qui est un idéal quasicristallin entier maximal de A_σ ; son complémentaire est donné par

$$A_\sigma \setminus \mathfrak{a}_{\mathbf{0}} = S_K \cup \mu_K.$$

Dans la suite on fixe u une *unité de PV*³, c'est-à-dire une unité u d'ordre infini tel que $|\pi'(u)| < 1$. Nous omettrons parfois u dans la notation, écrivant simplement $\mathfrak{a}_{\mathbf{x}}$. Outre les quasicristaux $\mathfrak{a}_{\mathbf{x}}$, il sera commode de disposer des quasicristaux associés à un vecteur $+$ $= (+_1, \dots, +_{d-1}) \in \{0, 1\}^{d-1}$: si l'on note

$$\langle +_i \rangle = \begin{cases} < & \text{si } +_i = 0, \\ \leq & \text{si } +_i = 1 \end{cases},$$

on définit

$$\mathfrak{a}_{\mathbf{x}}^+ = \{\alpha \in \mathcal{O}_K \mid |\pi'(\alpha)| \langle +_i \rangle |\pi'(u)|^{\mathbf{x}}\} \supset \mathfrak{a}_{\mathbf{x}}.$$

Lorsque $+$ $= (1, \dots, 1)$, on note

$$\bar{\mathfrak{a}} := \mathfrak{a}^+,$$

de sorte que $A_\sigma = \bar{\mathfrak{a}}_{\mathbf{0}}$ et $\mathfrak{a}_{\mathbf{x}}^+ = \mathfrak{a}_{\mathbf{x}}$ quand $+$ $= (0, \dots, 0)$.

Les quasicristaux $\mathfrak{a}_{\mathbf{x}} \subseteq \mathfrak{a}_{\mathbf{x}}^+$ sont des idéaux quasicristallins entiers si $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ (parce que u est PV), et autrement des idéaux quasicristallins fractionnaires. Clairement,

$$\mathfrak{a}_{\mathbf{x}} \subsetneq \mathfrak{a}_{\mathbf{x}}^+ \implies \exists i \text{ tel que } \sigma_i(u)^{x_i} \in \mathcal{O}_K.$$

Par exemple, si $K = \mathbb{Q}(\theta)$ est une extension quadratique réelle et $\theta > 1$ une unité fondamentale, alors pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathfrak{a}_x(\theta) \subsetneq \mathfrak{a}_x^+(\theta) \Leftrightarrow \theta^x \in \mathcal{O}_K,$$

et dans ce cas

$$\mathfrak{a}_x^+(\theta) = \mathfrak{a}_x(\theta) \cup \{\pm \theta^x\}.$$

³Il en existe toujours; voir par exemple la preuve du Théorème 3.26 de Narkiewicz [26].

Note 1. Le choix de l'unité u est sans conséquence. Plus précisément la famille

$$Z := \bigcup_{+, \mathbf{x}} \mathfrak{a}_{\mathbf{x}}^+(u)$$

est indépendante du choix de u .

Note 2. On peut considérer les analogues des quasicristaux et des ensembles modèles dans le cas de caractéristique positive (voir §1 ci-dessus pour les notations). En remplaçant \mathbb{R} par \mathbf{R} on peut définir pareillement les notions de quasicristal et d'ensemble modèle. On a alors

$$\mathbf{A}_{\infty_1} = \mathbf{A}_{\sigma} = \mathfrak{a}_0^+ = \{g \in \mathbf{O}_{\mathbf{K}} \mid |\pi'(g)|_{\infty_1} \leq 1\}$$

qui est un anneau au sens usuel. Dans ce contexte les $\mathfrak{a}_{\mathbf{x}}(u)$ s'identifient à

$$\mathfrak{a}_{\mathbf{n}} := \{g \in \mathbf{O}_{\mathbf{K}} \mid |\pi'(g)|_{\infty_1} \leq q^{-\mathbf{n}}\}, \quad \mathbf{n} = (n_1, \dots, n_{r+s-1}) \in \mathbb{Z}^{d-1}.$$

où $\mathfrak{a}_{\mathbf{n}}$ est un idéal fractionnaire au sens usuel. Plus généralement tout idéal quasicristallin fractionnaire qui est un ensemble modèle est un idéal fractionnaire au sens usuel de l'anneau \mathbf{A}_{∞_1} . On en conclut que les analogues en caractéristique nulle des "petits" anneaux \mathbf{A}_{∞_1} sont les anneaux quasicristallins PV de type A_{σ} .

Note 3. Notons enfin que les constructions faites ci-dessus en rang 1 ont des équivalents dans le cas où A_{Σ} est un anneau quasicristallin modèle de rang k , $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$. On définit en ce cas l'ensemble PV_{Σ} des nombres de PV associés à Σ comme

$$PV_{\Sigma} = \{\alpha \in \mathcal{O}_K \mid |\sigma_1(\alpha) \cdots \sigma_k(\alpha)| > 1\}.$$

On a donc toujours $A_{\Sigma} = PV_{\Sigma} \cup \mu_K$ et l'analogue des idéaux modèles $\mathfrak{a}_{\mathbf{x}}(u)$ se définit par l'intermédiaire d'un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d-k}$.

3. MONOÏDES DES CLASSES D'IDÉAUX QUASICRISTALLINS

Dans ce qui suit on étudie l'arithmétique des idéaux quasicristallins. On montre tout d'abord l'existence d'un produit monoïdal :

Proposition 2. *Soient $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset A \subset \mathbb{R}^n$ deux idéaux quasicristallins contenus dans un anneau quasicristallin A . Alors, le produit monoïdal*

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} := \{\alpha\beta \mid \alpha \in \mathfrak{a}, \beta \in \mathfrak{b}\} \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$$

est aussi un quasicristal.

Démonstration. On note tout d'abord que $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ est relativement dense car

$$\alpha \cdot \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}\mathfrak{b}$$

pour n'importe quel $\alpha \in \mathfrak{a}$, et $\alpha \cdot \mathfrak{b}$ est relativement dense. On rappelle ensuite qu'un ensemble relativement dense est un quasicristal si et seulement si il est contenu dans un ensemble modèle (général) \mathcal{M} (voir [25], Theorem 9.1.i). En particulier, $A \subset \mathcal{M}$ pour un certain ensemble modèle \mathcal{M} . Mais alors $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \subset A \subset \mathcal{M}$, de sorte que $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ est bien un quasicristal. □

Soit $A = A_{\sigma} \subset K$ un anneau quasicristallin avec les notations de l'exemple 3 ci-dessus. Il est clair que si \mathfrak{a} est un idéal quasicristallin fractionnaire, il en est de même de $\gamma\mathfrak{a}$ pour tout $\gamma \in K$. La classe projective

$$[\mathfrak{a}] = \{\gamma\mathfrak{a} \mid \gamma \in K\}$$

s'appelle la *classe de l'idéal quasicristallin*. L'ensemble des classes d'idéaux quasicristallins de A s'écrit

$$\text{Cl}(A) = \{[\mathfrak{a}] \mid \mathfrak{a} \text{ un idéal quasicristallin fractionnaire de } A\}.$$

Proposition 3. $\text{Cl}(A)$ est un monoïde multiplicatif avec élément identité $1 = [A]$. Cependant ce monoïde n'est pas un groupe. En particulier :

1. les $\mathfrak{a}_{\mathbf{x}}$ ne sont pas inversibles pour tout $\mathbf{x} \in K_{\sigma'}$;
2. Supposons qu'il existe $\alpha \in \bar{\mathfrak{a}}_{\mathbf{x}}$ tel que $\pi'(\alpha) = \pi'(u)^{\mathbf{x}} \in \mathcal{O}_K$ pour tout i ; alors $\bar{\mathfrak{a}}_{\mathbf{x}}$ est inversible d'inverse $\bar{\mathfrak{a}}_{-\mathbf{x}}$.

Démonstration. 1. Si \mathfrak{b} est un inverse pour \mathfrak{a} , il existe $\alpha \in \mathfrak{a}$ tel que $\alpha^{-1} \in \mathfrak{b}$, puisque le produit $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = A$ contient 1. Soit $\beta \in \mathfrak{a}$ tel que $|\alpha'_i| < |\beta'_i| < u_i^{-x_i}$ pour tout i ; un tel élément existe parce que $\mathcal{O}_K \subset K'_{\sigma'}$ est dense. Alors $\beta/\alpha \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ mais n'est pas élément de A ; contradiction. 2. On a $1 = \alpha \cdot \alpha^{-1} \in \bar{\mathfrak{a}}_{\mathbf{x}} \cdot \bar{\mathfrak{a}}_{-\mathbf{x}}$, ce qui implique que $\bar{\mathfrak{a}}_{\mathbf{x}} \cdot \bar{\mathfrak{a}}_{-\mathbf{x}} = A$. \square

Soit \mathfrak{a} un idéal quasicristallin et soit

$$\mathfrak{A} := \mathfrak{a}\mathcal{O}_K$$

son *extension* en un \mathcal{O}_K -idéal. On note que $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathcal{O}_K = (\mathfrak{a}\mathcal{O}_K) \cdot (\mathfrak{b}\mathcal{O}_K)$, d'où le fait que cette opération d'extension induit un morphisme de monoïdes

$$\Phi : \text{Cl}(A) \longrightarrow \text{Cl}(K).$$

Proposition 4. L'application Φ est un épimorphisme de monoïdes. Son noyau contient l'ensemble

$$Z := \bigcup_{\mathbf{x}, +} \mathfrak{a}_{\mathbf{x}}^+.$$

Démonstration. Choisissons $u \in A$ une unité PV. Si $\mathfrak{B} = (\alpha, \beta) \subset \mathcal{O}_K$ est un idéal, on peut supposer après multiplication par $\gamma = u^n \in \mathcal{O}_K^{\times}$, que α, β satisfont $|\pi'(\alpha)|, |\pi'(\beta)| < 1$, i.e. $\alpha, \beta \in A$. Alors $\mathfrak{b} := \mathfrak{B} \cap A$ définit un élément de $\text{Cl}(A)$ tel que $\Phi(\mathfrak{b}) = \mathfrak{B}$. Puisque tout $\mathfrak{a} \in Z$ contient une unité de la forme $\gamma = u^n$, Z est bien contenu dans le noyau de Φ . \square

On note que le produit monoïdal est "incomplet" dans le sens qu'il ne coïncide pas avec le produit des idéaux quand $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ en sont. Par exemple, on peut faire toutes les constructions ci-dessus en caractéristique positive, en considérant les extensions finies \mathbf{K} du corps de fonctions $\mathbf{Q} = \mathbb{F}_q(T)$. En ce cas les ensembles modèles sont des idéaux d'anneaux du type \mathbf{A}_{∞_1} (voir au §1 et la note 2 ci-dessus) mais le produit introduit ici n'est pas le produit de ces idéaux : il manque ici l'opération d'addition qui n'est pas assez bien contrôlée en caractéristique nulle, dans le cadre de quasicristaux. Cependant si l'on se restreint aux idéaux quasicristallins qui sont des ensembles modèles, il est possible de définir un produit qui incorpore la somme d'une manière satisfaisante, et tel qu'il coïncide avec le produit des idéaux lorsque $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ en sont. Dans ce qui suit, nous développons la définition d'un tel produit.

Soient \mathfrak{A} un \mathcal{O}_K -idéal fractionnaire (réalisé comme un réseau de K_{∞}) et $D \subset K_{\sigma'}$ une fenêtre qui est un produit d'intervalles de la forme

$$D_{\mathbf{x}}^+(u) := \prod (-u^{x_i}, u^{x_i})_{+i}, \quad (-u^{x_i}, u^{x_i})_{+i} = \begin{cases} (-u^{x_i}, u^{x_i}) & \text{si } +i = 0 \\ [-u^{x_i}, u^{x_i}] & \text{si } +i = 1 \end{cases}.$$

Soit

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{A}, \mathbf{x}}^+(u) = \mathcal{M}(\mathfrak{A}, D)$$

l'ensemble modèle associé. On observe que le choix de la fenêtre D n'est pas forcément unique : par exemple, il est possible (en fait probable) qu'on ait l'égalité

$$\mathcal{M}(\mathfrak{A}, D_{\mathbf{x}}^+(u)) = \mathcal{M}(\mathfrak{A}, D_{\mathbf{x}}(u))$$

pour tout $+$, où $D_{\mathbf{x}}(u)$ correspond à $+$ = $(0, \dots, 0)$. Dans ce cas, on dit que l'ensemble modèle est *générique* et on le spécifie comme ensemble modèle, en privilégiant la fenêtre la plus petite, c'est-à-dire $D_{\mathbf{x}}(u)$, plutôt que les autres $D_{\mathbf{x}}^+(u)$. De cette façon, en général, chaque ensemble modèle de ce type est déterminé et se détermine par sa fenêtre et son réseau idéal. Dans le cas générique on note simplement \mathfrak{a} pour

$$\mathfrak{a}_{\mathfrak{A}, \mathbf{x}}(u) = \mathcal{M}(\mathfrak{A}, D_{\mathbf{x}}^+(u)) = \mathcal{M}(\mathfrak{A}, D_{\mathbf{x}}(u));$$

dans les autres cas on précisera la distinction

$$\mathfrak{a}^+ = \mathfrak{a}_{\mathfrak{A}, \mathbf{x}}^+(u) \supsetneq \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{A}, \mathbf{x}}(u).$$

On dit que l'ensemble modèle non générique $\bar{\mathfrak{a}}$ est *fermé*. Dans tous les cas on appelle \mathfrak{a} un *idéal quasicristallin modèle* : c'est bien un idéal quasicristallin de A au sens précédent.

Soient maintenant $\mathfrak{a} = \mathcal{M}(\mathfrak{A}, D)$, $\mathfrak{b} = \mathcal{M}(\mathfrak{B}, D')$ deux idéaux quasicristallins modèles. On peut alors définir un produit qui se restreint au produit usuel des idéaux fractionnaires quand \mathfrak{a} , \mathfrak{b} en sont :

$$\mathfrak{a} * \mathfrak{b} := \mathcal{M}(\mathfrak{A} * \mathfrak{B}, D \cdot D') \supset \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b},$$

où $\mathfrak{A} * \mathfrak{B}$ est le produit usuel d'idéaux fractionnaires et

$$D \cdot D' = \{\mathbf{x} = \mathbf{t}\mathbf{t}' \mid \mathbf{t} \in D, \mathbf{t}' \in D'\}.$$

En raison de notre convention pour le choix de fenêtre, le produit $\mathfrak{a} * \mathfrak{b}$ est bien défini et c'est aussi un idéal quasicristallin modèle. L'ensemble des idéaux quasicristallins modèles, soit

$$\mathfrak{I}^{\text{mod}}(A),$$

constitue un monoïde lorsqu'il est muni du produit $*$ dont l'élément neutre est $1 := A = \mathcal{M}(\mathcal{O}_K, D_0)$. On note que l'ensemble

$$\mathfrak{I}_0^{\text{mod}}(A) := \{\text{idéaux quasicristallins modèles non génériques et fermés}\} \subset \mathfrak{I}^{\text{mod}}(A)$$

forme un sous-groupe : l'élément $\mathfrak{a}_{\mathfrak{A}, \mathbf{x}}^+$ a pour inverse $\mathfrak{a}_{\mathfrak{A}^{-1}, -\mathbf{x}}^+$ et le produit

$$\mathfrak{a}_{\mathfrak{A}, \mathbf{x}}^+ * \mathfrak{b}_{\mathfrak{B}, \mathbf{y}}^+ = \mathfrak{a}_{\mathfrak{A} * \mathfrak{B}, \mathbf{x} + \mathbf{y}}^+$$

est évidemment non générique et fermé.

On appellera *principal* l'idéal quasicristallin

$$\alpha A := \mathcal{M}(\alpha \mathcal{O}_K, D_\alpha)$$

où

$$D_\alpha = [-\sigma_1(\alpha), \sigma_1(\alpha)] \times \cdots \times [-\sigma_{r+s-1}(\alpha), \sigma_{r+s-1}(\alpha)].$$

De manière équivalente, si l'on note

(2)

$$\mathbf{x}(\alpha) := \log_{|\pi'(u)|}(|\pi'(\alpha)|) = \left(\log_{|\sigma_1(u)|} |\sigma_1(\alpha)|, \dots, \log_{|\sigma_{r+s-1}(u)|} |\sigma_{r+s-1}(\alpha)| \right),$$

alors

$$\alpha A = \bar{\mathfrak{a}}_{(\alpha), \mathbf{x}(\alpha)}.$$

On remarque que pour tout $\alpha \in A$, $\alpha A \subset A$, autrement dit αA est un idéal quasicristallin entier. En général les idéaux quasicristallins principaux sont tous non génériques et fermés et pour cela forment un sous-groupe

$$\mathbf{P}^{\text{mod}}(A) = \{\alpha A : \alpha \in K^\times\} \subset \mathbf{I}_0^{\text{mod}}(A) \subset \mathbf{I}^{\text{mod}}(A).$$

On note le quotient

$$\mathbf{CI}^{\text{mod}}(A) := \mathbf{I}^{\text{mod}}(A) / \mathbf{P}^{\text{mod}}(A);$$

c'est le *monoïde des classes d'idéaux quasicristallins modèles*. Il contient

$$(3) \quad \mathbf{CI}_0^{\text{mod}}(A),$$

le sous-groupe des classes d'éléments de $\mathbf{I}_0^{\text{mod}}(A)$.

Soient u_1, \dots, u_{r+s-1} un choix de système d'unités fondamentales. Les vecteurs

$$\mathbf{x}(u_1), \dots, \mathbf{x}(u_{r+s-1}),$$

de \mathbb{R}^{r+s-1} (voir (2) ci-dessus) sont linéairement indépendants ; on note Ω le groupe additif qu'ils engendrent.

Lemme 1. $\Omega \subset \mathbb{R}^{r+s-1}$ est un réseau.

Démonstration. Le rang de Ω comme groupe abélien est $r+s-1$; reste à montrer que Ω est discret. Considérons le cube centrée à l'origine

$$C = \{\mathbf{x} : |x_i| \leq R\} \subset \mathbb{R}^{r+s-1}$$

avec $R > 0$: il suffit de vérifier que $\Omega \cap C$ est fini. La préimage $D \subset \mathbb{R}_+^{r+s-1}$ de C par l'inverse du logarithme est un produit :

$$D = \{\mathbf{y} \mid r_1 \leq |y_i| \leq r_2\}$$

et donc la préimage \tilde{D} de D dans $K_{\sigma'}$ pour la valeur absolue

$$|\cdot| : K_{\sigma'} \rightarrow \mathbb{R}_+^{r+s-1}$$

est un produit d'anneaux de dimensions 1 ou 2, uniformément éloignés de l'origine comme de l'infini. On en conclut que tout élément $\pi'(\delta) \in \pi'(\mathcal{O}_K^\times) \cap \tilde{D}$ satisfait des inégalités

$$0 < c_1 < |\delta| < c_2$$

avec c_1, c_2 des constants qui ne dépendent que de C (parce que $\delta \cdot \prod \sigma_i(\delta) = \pm 1$). En particulier, la préimage de $\pi'(\mathcal{O}_K^\times) \cap \tilde{D}$ par π' est contenue dans un compact et contient donc un nombre fini d'éléments de $\mathcal{O}_K^\times \subset \mathcal{O}_K$. Ainsi $\Omega \cap C$ est bien un ensemble fini. \square

On note le tore quotient

$$\mathbb{T}_\Omega := \mathbb{R}^{r+s-1} / \Omega.$$

Du fait de l'identité

$$u_i \cdot \mathbf{a}_{\mathcal{O}_K, \mathbf{x}}^+ = \mathbf{a}_{\mathcal{O}_K, \mathbf{x} + \mathbf{x}(u_i)}^+, \quad i = 1, \dots, r+s-1,$$

l'ensemble

$$(4) \quad Z := \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbb{T}_\Omega, +} \mathbf{a}_{\mathcal{O}_K, \mathbf{x}}^+ \quad \text{mod } \mathbf{P}^{\text{mod}}(A)$$

est un sous-monoïde de $\mathbf{CI}^{\text{mod}}(A)$.

Théorème 1. *L'application*

$$\mathrm{Cl}^{\mathrm{mod}}(A) \longrightarrow \mathrm{Cl}_K, \quad \mathfrak{a} \longmapsto \mathfrak{a}\mathcal{O}_K = \text{le } \mathcal{O}_K\text{-idéal engendré par } \mathfrak{a},$$

est surjective, de noyau le sous-monoïde Z .

Démonstration. On commence pour montrer que l'application est bien un homomorphisme. Soient $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ deux idéaux quasicristallins modèles : il faut montrer que

$$(5) \quad (\mathfrak{a} * \mathfrak{b})\mathcal{O}_K = (\mathfrak{a}\mathcal{O}_K * \mathfrak{b}\mathcal{O}_K) \pmod{\mathcal{P}(K)},$$

où $\mathcal{P}(K)$ désigne l'ensemble des idéaux fractionnaires principaux de \mathcal{O}_K . En multipliant par des éléments appropriés de \mathcal{O}_K , on peut supposer sans perte de généralité que $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ sont des quasicristaux entiers i.e. des ensembles modèles basés sur les idéaux entiers $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset \mathcal{O}_K$ avec des fenêtres paramétrées par $\mathbf{x}, \mathbf{y} > 0$. Supposons pour plus de clarté que \mathfrak{a} et \mathfrak{b} sont tous deux génériques ; la preuve dans les autres cas est identique. Soient alors $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ resp. β_1, β_2, \dots , resp. $\omega_1, \omega_2, \dots$ une liste de tous les éléments positifs de \mathfrak{a} , resp. \mathfrak{b} , resp. $\mathfrak{a} * \mathfrak{b}$. Un élément de $(\mathfrak{a} * \mathfrak{b})\mathcal{O}_K$ est donc de la forme

$$\eta = \sum_I \gamma_I \omega_I, \quad \omega_I := \prod_{i \in I} \omega_i,$$

où $I \subset \mathbb{N}$ est fini et $\gamma_I \in \mathcal{O}_K$ est nul pour presque tout $I \subset \mathbb{N}$. Par définition de $\mathfrak{a} * \mathfrak{b}$ comme ensemble modèle basé sur le réseau $\mathfrak{A} * \mathfrak{B}$, on a

$$\omega_i = \sum_j \alpha_{ij} \beta_{ij}, \quad \alpha_{ij} \in \mathfrak{A}, \quad \beta_{ij} \in \mathfrak{B}, \quad |\pi'(\omega_i)| < |\pi'(u)|^{-(\mathbf{x}+\mathbf{y})}.$$

On note que $\alpha_{ij} \in \mathfrak{A}$, resp. $\beta_{ij} \in \mathfrak{B}$ n'est pas forcément un élément de \mathfrak{a} , resp. \mathfrak{b} ; il est possible par exemple que $|\pi'(\alpha_{ij})| \not\leq |\pi'(u)|^{-\mathbf{x}}$. Néanmoins, en multipliant η par $1 = u^{-2MN} u^{2MN}$, $M \geq |I|$ pour tout I où $\gamma_I \neq 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \eta &= \sum_I u^{-2NM} \gamma_I u^{2NM} \prod_{i \in I} \left(\sum_j \alpha_{ij} \beta_{ij} \right) \\ &= \sum_I u^{-2N|I|} \gamma_I \prod_{i \in I} \left(\sum_j (u^N \alpha_{ij})(u^N \beta_{ij}) \right) \end{aligned}$$

et pour N suffisamment grand, $u^N \alpha_{ij} \in \mathfrak{a}$ et $u^N \beta_{ij} \in \mathfrak{b}$. On peut donc supposer sans perte de généralité que $\alpha_{ij} \in \mathfrak{a}$, $\beta_{ij} \in \mathfrak{b}$. Puis

$$(6) \quad \eta = \sum_I \gamma_I \prod_{i \in I} \left(\sum_j \alpha_{ij} \beta_{ij} \right)$$

$$(7) \quad = \sum_I \gamma_I \sum (\prod \alpha_{ij} \prod \beta_{ij})$$

où les sommes de produits qui apparaissent à la ligne (7) proviennent du développement des produits de sommes de la ligne (6). Il est alors clair que l'expression (7) appartient au produit d'idéaux $\mathfrak{a}\mathcal{O}_K * \mathfrak{b}\mathcal{O}_K$. Autrement dit

$$(\mathfrak{a} * \mathfrak{b})\mathcal{O}_K \subset (\mathfrak{a}\mathcal{O}_K * \mathfrak{b}\mathcal{O}_K) \pmod{\mathcal{P}(K)}.$$

Inversement soit $\eta \in \mathfrak{a}\mathcal{O}_K * \mathfrak{b}\mathcal{O}_K$; on peut écrire

$$\eta = \sum_k \left[\left(\sum_I \gamma_{I,k} \alpha_I \right) \cdot \left(\sum_J \gamma_{J,k} \beta_J \right) \right], \quad \sum \gamma_{I,k} \alpha_I \in \mathfrak{a}\mathcal{O}_K, \quad \sum \gamma_{J,k} \beta_J \in \mathfrak{b}\mathcal{O}_K,$$

où $I, J \subset \mathbb{N}$ sont finis et α_I, β_J sont des produits d'éléments de $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, $\gamma_{I,k}, \gamma_{J,k} \in \mathcal{O}_K$. En développant les produits, on obtient des \mathcal{O}_K combinaisons linéaires d'expressions de la forme $\alpha_I \beta_J \in (\mathfrak{a} * \mathfrak{b})\mathcal{O}_K$. Alors, $\eta \in (\mathfrak{a} * \mathfrak{b})\mathcal{O}_K$ et on a prouvé l'égalité (5) i.e. que l'application du théorème est un homomorphisme. Si $\mathfrak{A} = (\alpha, \beta)$ est un \mathcal{O}_K -idéal, l'idéal quasicristallin modèle

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{A}, \mathbf{x}}, \quad |\pi'(\alpha)|, |\pi'(\beta)| < |\pi'(u)|^{-\mathbf{x}}$$

satisfait $\mathfrak{A} = \mathfrak{a}\mathcal{O}_K$, et donc l'application est également surjective. Tout élément de \mathbb{Z} est entier et contient une unité (une puissance de u), d'où le fait que \mathbb{Z} est contenu dans le noyau. Inversement si $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{A}, \mathbf{x}}$ est dans le noyau, $\mathfrak{A} \in \mathcal{P}_K$ et il existe $\gamma \in K$ tel que $\gamma \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\mathcal{O}_K, \mathbf{y}}$. \square

Dans ce qui suit nous munirons $\text{Cl}^{\text{mod}}(A)$ d'une topologie d'ensemble de Cantor. Soit $\text{I}_{\mathfrak{A}}^{\text{mod}}(A)$ l'ensemble des idéaux quasicristallins de A basés sur $\mathfrak{A} \subset K$, \mathcal{O}_K -idéal fractionnaire :

$$\text{I}_{\mathfrak{A}}^{\text{mod}}(A) = \{\mathfrak{a} = \mathcal{M}(\mathfrak{A}, D)\} \subset \text{I}^{\text{mod}}(A).$$

On peut identifier chaque élément \mathfrak{a} de $\text{I}_{\mathfrak{A}}^{\text{mod}}(A)$ avec sa fonction caractéristique

$$\chi_{\mathfrak{a}} : \mathfrak{A} \longrightarrow \{0, 1\}, \quad \chi_{\mathfrak{a}}(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \alpha \in \mathfrak{a}.$$

On munit $\text{I}_{\mathfrak{A}}^{\text{mod}}(A)$ de la topologie induite du plongement $\text{I}_{\mathfrak{A}}^{\text{mod}}(A) \hookrightarrow 2^{\mathfrak{A}}$. Chaque inclusion $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ induit un plongement continu $2^{\mathfrak{A}} \hookrightarrow 2^{\mathfrak{B}}$, et $\text{I}^{\text{mod}}(A)$ est topologisé par la topologie inductive définie par l'union $\bigcup \text{I}_{\mathfrak{A}}^{\text{mod}}(A)$. L'action de K^\times est propre et discontinue et $\text{Cl}^{\text{mod}}(A)$ hérite de la topologie quotient, dont on note qu'elle est de Hausdorff.

Note 4. Lorsque $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{A}, \mathbf{x}}^+$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ et $\mathfrak{A} \subset \mathcal{O}_K$, on peut identifier canoniquement $\chi_{\mathfrak{a}}$ avec une *fonction de codage*

$$\bar{\chi}_{\mathfrak{a}} : \mathbb{N} \longrightarrow \{0, 1\},$$

la projection $\alpha = a\theta + b \rightarrow a$ étant injective sur \mathfrak{a} . Plus précisément, $\bar{\chi}_{\mathfrak{a}}(a) = 1$ si et seulement si il existe $b \in \mathbb{N}$ tel que $\chi_{\mathfrak{a}}(a\theta + b) = 1$.

Soit maintenant

$$\mathbb{Z}_0 := \mathbb{Z} \cap \text{Cl}_0^{\text{mod}}(A),$$

où $\text{Cl}_0^{\text{mod}}(A)$ est défini dans (3). On a alors le résultat suivant :

Théorème 2. $\text{Cl}^{\text{mod}}(A)$ est un monoïde de Cantor et $\text{Cl}_0^{\text{mod}}(A)$ est dense dans $\text{Cl}^{\text{mod}}(A)$. De plus le sous-groupe \mathbb{Z}_0 est dense dans \mathbb{Z} et de rang (topologique) au plus $r + s - 1$.

Démonstration. Par le Théorème 1, pour prouver que $\text{Cl}^{\text{mod}}(A)$ est de Cantor, il suffit de montrer que c'est le cas de \mathbb{Z} . Mais on note que \mathbb{Z} s'identifie homeomorphiquement avec le sous espace de $2^{\mathbb{N}}$ défini par les codages $\bar{\chi}_{\mathfrak{a}}$ (voir la *Note 4*) et qu'il est donc de Hausdorff. Il est aussi parfait : si $\mathfrak{a}_{\mathbf{x}} = \mathfrak{a}_{\mathcal{O}_K, \mathbf{x}} \in \mathbb{Z}$ est générique, alors \mathbf{x} est une limite à gauche :

$$\lim_{\mathbf{y} > \mathbf{x}} \mathfrak{a}_{\mathbf{y}} = \mathfrak{a}_{\mathbf{x}}.$$

En effet, si $\mathbf{y} > \mathbf{x}$, $\mathfrak{a}_{\mathbf{y}} \subset \mathfrak{a}_{\mathbf{x}}$ et par généricité, tout $\alpha \in \mathfrak{a}_{\mathbf{x}}$ appartient à $\mathfrak{a}_{\mathbf{y}}$ si \mathbf{y} est assez proche à \mathbf{x} , ce qui implique que $\bar{\chi}_{\mathfrak{a}_{\mathbf{y}}} \rightarrow \bar{\chi}_{\mathfrak{a}_{\mathbf{x}}}$. Inversement, si $\bar{\mathfrak{a}}_{\mathbf{x}}$ est fermé, on a $\mathfrak{a}_{\mathbf{y}} \supset \bar{\mathfrak{a}}_{\mathbf{x}}$ pour tout $\mathbf{y} < \mathbf{x}$ et

$$\lim_{\mathbf{y} < \mathbf{x}} \mathfrak{a}_{\mathbf{y}} = \bar{\mathfrak{a}}_{\mathbf{x}}.$$

Pour $\mathfrak{a}_{\mathbf{x}}^+$ non générique général, on considère $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}$ tel que $y_i > x_i$ si $+_i = 0$ et $y_i < x_i$ si $+_i = 1$ puis $\lim \mathfrak{a}_{\mathbf{y}} = \mathfrak{a}_{\mathbf{x}}^+$. L'ensemble Z étant parfait dans un ensemble de Cantor, il est lui aussi de Cantor. L'ensemble Z_0 est dense parce que l'ensemble des paramètres \mathbf{x} tels que $\pi'(u)^{\mathbf{x}} \in \mathcal{O}_K$ est dense en $K_{\sigma'}$ et d'après ce qui précède on peut trouver une suite d'éléments de Z_0 qui converge vers n'importe quel élément de Z . Soient $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{r+s-1} \in \mathbb{T}_{\Omega}$ tels que

$$\pi'(u)^{\mathbf{x}_i} =: \pi'(\alpha_i) \in \pi'(\mathcal{O}_K \setminus (\mathcal{O}_K^{\times} \cup \mathbb{Q})), i = 1, \dots, r + s - 1,$$

et tels que $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{r+s-1}$ sont independants dans le sens qu'il existe un choix de préimages $\tilde{\mathbf{x}}_i$ dans \mathbb{R}^{r+s-1} qui forment une base ; c'est possible, parce que l'ensemble $\pi'(\mathcal{O}_K \setminus (\mathcal{O}_K^{\times} \cup \mathbb{Q}))$ est dense en $K_{\sigma'}$. Observons qu'il n'existe *pas* de combinaison entière non triviale nulle

$$n_1 \mathbf{x}_1 + \dots + n_{r+s-1} \mathbf{x}_{r+s-1} = 0 ;$$

en effet l'existence d'une telle relation impliquerait que $\prod \alpha_i \in \mathcal{O}_K^{\times}$. De plus, puisque il existe des préimages qui forment une base de \mathbb{R}^{r+s-1} , il suit que le groupe $T := \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{r+s-1} \rangle \subset \mathbb{T}_{\Omega}$ est dense. Soient $\bar{\mathfrak{a}}_{\mathbf{x}_1}, \dots, \bar{\mathfrak{a}}_{\mathbf{x}_{r+s-1}} \in Z_0$ les idéaux quasicristallins fermés associés à $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{r+s-1}$. Alors, d'après la densité du groupe T des paramètres et l'analyse de la convergence dans Z en termes du paramètre \mathbf{x} il suit que le groupe engendré par les $\bar{\mathfrak{a}}_{\mathbf{x}_i}$ est bien dense dans Z . \square

4. LA FONCTION ZÊTA D'UN IDÉAL QUASICRISTALLIN

Soit $\mathfrak{a} \subset \mathbb{R}$ un idéal quasicristallin de dimension 1; lorsque \mathfrak{a} est un idéal modèle nous le distinguerons en utilisant la notation

$$\mathfrak{m} = \mathcal{M}(\mathfrak{A}, D) = \mathcal{M}(K_{\sigma}, K_{\sigma'}, \mathfrak{A}, D) \subset \mathbb{R},$$

où $D = D_{\mathbf{x}}^+(u) \subset K_{\sigma'}$ (voir   2, 3 pour des précisions). La *fonction zêta* associée s'écrit

$$\zeta_{\mathfrak{a}}(s) = \sum_{0 < \alpha \in \mathfrak{a}} \alpha^{-s}.$$

Dans cette section nous montrons l'existence d'un prolongement méromorphe de $\zeta_{\mathfrak{a}}$ au plan tout entier. Nous donnons également, lorsque $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}$ est un idéal quasicristallin modèle, une équation fonctionnelle généralisée pour $\zeta_{\mathfrak{m}}$. En vue de ce dernier objectif on considère plus généralement la situation suivante. Soit $f \in \mathcal{S}(K_{\sigma'})$, l'espace de Schwartz de $K_{\sigma'}$, avec f paire i.e. telle que $f(-x) = f(x)$. On définit les *f-poids* sur \mathfrak{m} (plus bas la dépendance par rapport à f sera omise de la notation) selon

$$\chi(\alpha) = \chi_f(\alpha) := f(\alpha'), \quad \alpha \in \mathfrak{m}, \quad \alpha' := \pi'(\alpha) \in D.$$

La *fonction L quasicristalline* associée à \mathfrak{m} et χ est alors définie par

$$L(\mathfrak{m}, \chi, s) := \sum_{0 < \alpha \in \mathfrak{m}} \frac{\chi(\alpha)}{\alpha^s}.$$

Proposition 5. *Soient \mathfrak{a} un idéal quasicristallin de rang 1 et $\mathfrak{m} = \mathcal{M}(\mathfrak{A}, D) \subset \mathbb{R}$ un idéal quasicristallin modèle avec poids $\chi = \chi_f$. Les fonctions $\zeta_{\mathfrak{a}}(s)$, $L(\mathfrak{m}, \chi, s)$ convergent uniformément sur tout compact du demi-plan ouvert $\operatorname{Re}(s) > 1$.*

Démonstration. Soient $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots$ les éléments positifs de \mathfrak{m} . Comme celui-ci est uniformément discret, il existe $r > 0$ tel que $B_r(\alpha_n) \cap \mathfrak{m} = \{\alpha_n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Remplaçant \mathfrak{m} par

$$\tilde{\mathfrak{m}} = r^{-1}(\mathfrak{m} - \alpha_1) + 1,$$

on obtient un autre quasicristal dont les éléments positifs sont les

$$\tilde{\alpha}_n := r^{-1}(\alpha_n - \alpha_1) + 1$$

où $\tilde{\alpha}_1 = 1$ et $\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{\alpha}_n > 1$ pour tout n . Alors il existe une constante $C > 0$ tel que, pour tout s tel que $\operatorname{Re}(s) \geq \sigma > 1$,

$$|L(\mathfrak{m}, \chi, s)| \leq C \sum \frac{f(\alpha'_n)}{\tilde{\alpha}_n^{\operatorname{Re}(s)}} \leq C \sum \frac{f(\alpha'_n)}{n^{\operatorname{Re}(s)}} \leq C \max |f(\alpha'_n)| \cdot |\zeta(s)|.$$

On trouve bien que $L(\mathfrak{m}, \chi, s)$ converge uniformément sur tout demi-plan de la forme $\operatorname{Re}(s) \geq \sigma > 1$, d'où le résultat. \square

Note 5. Il faut noter que $\zeta_{\mathfrak{a}}$ n'est pas une *fonction zêta au sens de Beurling*. Voir [7] où on introduit formellement les multiplicités qui correspondent aux factorisations distinctes d'éléments, pour avoir un produit eulérien. Du fait de l'absence de factorisation unique pour \mathfrak{m} , les fonctions zêta et L considérées ici ne s'écrivent pas en général comme produits eulériens.

Proposition 6. $\zeta_{\mathfrak{a}}(s)$ possède une extension méromorphe (unique) sur tout \mathbb{C} , avec un seul pôle simple en $s = 1$.

Démonstration. On utilise la méthode usuelle de l'intégrale de Riemann-Stieltjes (voir par exemple [24], Theorem 1.12). Écrivant

$$\mathfrak{a} = \{\dots, \alpha_{-2} = -\alpha_2, \alpha_{-1} = -\alpha_1, 0, \alpha_1, \alpha_2, \dots\},$$

on définit la \mathfrak{a} -partie entière comme $[x]_{\mathfrak{a}} := \alpha_m$ si $\alpha_m \leq x \leq \alpha_{m+1}$ et la \mathfrak{a} -partie fractionnaire comme $\{x\}_{\mathfrak{a}} := x - [x]_{\mathfrak{a}} \in [0, R]$ où \mathfrak{a} est relativement dense par rapport à $R > 0$. Alors

$$\begin{aligned} \zeta_{\mathfrak{a}}(s) &= \sum_{0 < \alpha \leq x} \alpha^{-s} + \sum_{\alpha > x} \alpha^{-s} = \sum_{0 < \alpha \leq x} \alpha^{-s} + \int_x^{\infty} u^{-s} d[u]_{\mathfrak{a}} \\ &= \sum_{0 < \alpha \leq x} \alpha^{-s} + \int_x^{\infty} u^{-s} du - \int_x^{\infty} u^{-s} d\{u\}_{\mathfrak{a}} \\ (8) \quad &= \sum_{0 < \alpha \leq x} \alpha^{-s} + \frac{x^{1-s}}{s-1} + \{x\}_{\mathfrak{a}} x^{-s} + \int_x^{\infty} \{u\}_{\mathfrak{a}} du^{-s} \\ (9) \quad &= \sum_{0 < \alpha \leq x} \alpha^{-s} + \frac{x^{1-s}}{s-1} + \{x\}_{\mathfrak{a}} x^{-s} - s \int_x^{\infty} \{u\}_{\mathfrak{a}} u^{-s-1} du, \end{aligned}$$

où l'égalité (8) provient d'une intégration par parties. La dernière expression (9) est méromorphe pour $\operatorname{Re}(s) > 0$, avec un seul pôle simple en $s = 1$. En intégrant par parties de façon répétée, on obtient le prolongement souhaité. \square

Note 6. Grâce à la Proposition 6 on peut définir les \mathfrak{a} -nombres de Bernoulli par

$$B_{\mathfrak{a},n} = \zeta_{\mathfrak{a}}(-n), \quad n \text{ impair.}$$

On suppose maintenant que $\mathfrak{a} = \mathfrak{m} = \mathcal{M}(\mathfrak{A}, D) \subset \mathbb{R}$ est un idéal quasicristallin modèle ; le reste de cette section s'est consacré à la démonstration d'une équation fonctionnelle pour $\zeta_{\mathfrak{m}}$, ce pourquoi il est nécessaire d'introduire un peu de terminologie supplémentaire.

L'idéal quasicristallin modèle dual ([23]) est l'idéal modèle fractionnaire

$$\mathfrak{m}^{\vee} = \mathcal{M}[\mathfrak{A}^{\vee}, D^{\vee}]$$

associé au réseau dual

$$\mathfrak{A}^{\vee} = \{\alpha \in K \mid \text{Tr}(\alpha\mathfrak{A}) \subset \mathbb{Z}\}$$

et à la fenêtre

$$D^{\vee} := (\pi/3) \cdot D.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on aura besoin de considérer aussi les idéaux modèles

$$\mathfrak{m}_n^{\vee} := \mathcal{M}(\mathfrak{A}^{\vee}, n \cdot D^{\vee})$$

de sorte que

$$\mathfrak{m}^{\vee} = \mathfrak{m}_1^{\vee} \subset \mathfrak{m}_2^{\vee} \subset \dots \quad \text{et} \quad \bigcup \mathfrak{m}_n^{\vee} = \mathfrak{A}^{\vee}.$$

Soit maintenant $\delta(x)$ la distribution de Dirac ($\delta(f) = f(0)$) pour une fonction f lisse au voisinage de l'origine) et considérons le *peigne de Dirac*

$$(10) \quad \mu_{\mathfrak{m}}(x) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{m}} \delta(x - \alpha).$$

De plus, soit

$$\mu_{\mathfrak{m},\chi}(x) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{m}} \chi(\alpha)\delta(x - \alpha)$$

le peigne pondéré associé à χ . Le résultat suivant (*formule de Poisson-Meyer*) est formulé dans [23] avec référence à [21], [22] pour les preuves. Pour plus de clarté nous en donnons ci-dessous une démonstration dans notre contexte.

Théorème 3 (Meyer). *La transformation de Fourier de $\mu = \mu_{\mathfrak{m},\chi}$ au sens des distributions est donnée par le peigne de Dirac généralisé*

$$(11) \quad \mu^{\vee}(x) = \sum_{\xi \in \mathfrak{A}^{\vee}} \chi^{\vee}(\xi)\delta(x - \xi) := \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n(x)$$

où

a. la fonction χ^{\vee} est définie par

$$\chi^{\vee}(\xi) := \frac{2\pi}{\sqrt{|\text{disc}(\mathfrak{A})|}} \cdot f^{\vee}(\xi'),$$

avec f^{\vee} le dual de Fourier de f et $\text{disc}(\mathfrak{A})$ le discriminant de \mathfrak{A} ;

b. pour chaque $n \in \mathbb{N}$, ν_n est un peigne pondéré

$$\nu_n(x) = \sum_{\xi \in \Delta \mathfrak{m}_n^{\vee}} \chi^{\vee}(\xi)\delta(x - \xi)$$

avec support $\Delta \mathfrak{m}_1^{\vee} := \mathfrak{m}^{\vee}$ quand $n = 1$ et

$$\Delta \mathfrak{m}_n^{\vee} := \mathfrak{m}_n^{\vee} - \mathfrak{m}_{n-1}^{\vee} = \mathcal{M}(\mathfrak{A}^{\vee}, nD^{\vee} - (n-1)D^{\vee})$$

pour $n \geq 2$;

c. la convergence de la deuxième série dans (11) est très rapide : pour tous $N \in \mathbb{N}$ et $R \in \mathbb{R}_+$

$$(12) \quad \int_{a-R}^{a+R} d|\mathbf{v}_n|(x) = O(n^{-N}) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty,$$

indépendamment de a .

Démonstration. Le poids χ se prolonge à tout \mathcal{O}_K par $\chi(\alpha) = f(\alpha')$. Alors, pour toute fonction test $g \in \mathcal{S}(K_\sigma)$, on peut écrire

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) d\mu(x) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{m}} f(\alpha')g(\alpha).$$

La fonction en K_∞

$$G(x, y) = f(y)g(x)$$

décroit rapidement à l'infini et sa transformée de Fourier $G^\vee(\xi, \eta) = f^\vee(\xi)g^\vee(\eta)$ est également à décroissance rapide à l'infini. Appliquant à G la formule de Poisson classique par rapport au réseau $\mathfrak{A} \subset K_\infty$ on obtient :

$$\sum_{\alpha \in \mathfrak{m}} f(\alpha')g(\alpha) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} f(\alpha')g(\alpha) = \frac{2\pi}{\sqrt{\text{disc}(\mathfrak{A})}} \sum_{\xi \in \mathfrak{A}^\vee} f^\vee(\xi')g^\vee(\xi),$$

qui fournit la première égalité dans (11). La fonction f^\vee étant aussi de la classe de Schwartz, l'assertion c) est immédiate, sauf l'indépendance par rapport à a . Mais les ensembles modèles $\Delta \mathfrak{m}_n^\vee$, utilisés dans la définition des \mathbf{v}_n , font intervenir des fenêtres du même volume. Ceci implique (voir [23], [18]) qu'en tant qu'ensembles de Delaunay ils sont uniformément discrets avec une constante $r > 0$ qui ne dépend pas de n . En particulier, on peut choisir la constante implicite dans (12) indépendamment de a . \square

Nous nous proposons d'appliquer le Théorème 3 à l'étude des fonctions L associées à $\Delta \mathfrak{m}_n^\vee$ et χ^\vee :

$$L_n^\vee(\mathfrak{m}, \chi, s) := L(\Delta \mathfrak{m}_n^\vee, \chi^\vee, s) = \sum_{0 < \beta \in \Delta \mathfrak{m}_n^\vee} \frac{\chi^\vee(\beta)}{\beta^s}.$$

Proposition 7. *La suite de fonctions $L_n^\vee(\mathfrak{m}, \chi, s)$ converge uniformément vers zéro sur tout compact du demi-plan $\text{Re}(s) > 1$. De plus la somme*

$$(13) \quad \sum_{n=1}^{\infty} L_n^\vee(\mathfrak{m}, \chi, s)$$

converge uniformément sur un domaine du même type et définit donc une fonction holomorphe pour $\text{Re}(s) > 1$.

Démonstration. Comme déjà observé dans la preuve du Théorème 3, les ensembles modèles $\Delta \mathfrak{m}_n^\vee$ sont uniformément discrets avec une constante $r > 0$ indépendante de n . Alors, pour $[c, C] \subset \mathbb{R}$, $c > 1$,

$$|L_n^\vee(\mathfrak{m}, \chi, s)| \leq A \cdot \max_{\beta \in \Delta \mathfrak{m}_n^\vee} |f^\vee(\beta')|, \quad \text{Re}(s) \in [c, C],$$

où A est de nouveau une constante indépendante de n . Ainsi puisque la transformée de Fourier f^\vee de f est dans l'espace de Schwartz, $L_n^\vee(\mathfrak{m}, \chi, s)$ converge uniformément

vers 0 sur les compacts pour $\operatorname{Re}(s) > 1$. À cause de la décroissance rapide de f^\vee à l'infini, la somme (13) converge de même. \square

On note

$$L^\vee(\mathbf{m}, \chi, s) := \sum_{n=1}^{\infty} L_n^\vee(\mathbf{m}, \chi, s),$$

qu'on appelle *fonction L généralisée*. Les fonctions normalisés

$$\Lambda(\mathbf{m}, \chi, s), \quad \Lambda_n^\vee(\mathbf{m}, \chi, s), \quad \Lambda^\vee(\mathbf{m}, \chi, s)$$

se définissent en multipliant chacune de $L(\mathbf{m}, \chi, s)$, $L_n^\vee(\mathbf{m}, \chi, s)$ et $L^\vee(\mathbf{m}, \chi, s)$ par le facteur classique $\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$.

La *fonction thêta quasicristalline* associée à \mathbf{m}, χ s'écrit

$$\theta_{\mathbf{m}, \chi}(t) := \frac{1}{2}\chi(0) + \sum_{0 < \alpha \in \mathbf{m}} \chi(\alpha) e^{-\pi\alpha^2 t},$$

et les *fonctions thêta duales* de niveaux $n = 1, 2, \dots$ sont définies par

$$\theta_{\mathbf{m}, \chi, 1}^\vee(t) := \frac{1}{2}\chi^\vee(0) + \sum_{0 < \beta \in \mathbf{m}^\vee} \chi^\vee(\beta) e^{-\pi\beta^2 t}$$

pour $n = 1$ et

$$\theta_{\mathbf{m}, \chi, n}^\vee(t) := \sum_{0 < \beta \in \Delta\mathbf{m}_n^\vee} \chi^\vee(\beta) e^{-\pi\beta^2 t}$$

pour $n \geq 2$. Les quasicristaux $\Delta\mathbf{m}_n^\vee$, étant uniformément discrets avec une constante r que l'on peut choisir indépendamment de n , ils définissent une suite $\{\theta_{\mathbf{m}, \chi, n}^\vee(t)\}$ qui converge uniformément sur tout compact de $(0, \infty)$. Comme la restriction de χ^\vee à $\Delta\mathbf{m}_n^\vee$ tend rapidement à zéro, la limite de cette suite est nulle. De la même façon qu'à la Proposition 7, la somme

$$\theta_{\mathbf{m}, \chi}^\vee(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{\mathbf{m}, \chi, n}^\vee(t)$$

converge et définit une fonction lisse.

Lemme 2. *La fonction*

$$\theta_{\mathbf{m}, \chi}^\vee(t) - \frac{\chi^\vee(0)}{2}$$

est à décroissance rapide à l'infini.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des faits suivants : 1) les $\Delta\mathbf{m}_n$ sont uniformément discrets de constante $r > 0$ indépendante de n et 2) la fonction χ^\vee est elle-même à décroissance rapide à l'infini. \square

Appliquons maintenant la formule sommatoire distributionnelle de Poisson-Meyer à la fonction

$$f_t(x) := e^{-\pi t x^2}, \quad f_t^\vee = t^{-1/2} f_{t^{-1}}.$$

En utilisant l'identité $T^\vee(f) = T(f^\vee)$, où T est une distribution tempérée, et le fait que f_t est paire, on obtient l'équation fonctionnelle :

$$(14) \quad \theta_{\mathbf{m}, \chi}(t) = \frac{2\pi}{\sqrt{|\operatorname{disc}(\mathfrak{Q})|}} t^{-1/2} \theta_{\mathbf{m}, \chi}^\vee(t^{-1}).$$

Théorème 4. *On a l'équation fonctionnelle :*

$$\Lambda(\mathbf{m}, \chi, s) = \frac{2\pi}{\sqrt{|\text{disc}(\mathfrak{Q})|}} \Lambda^\vee(\mathbf{m}, \chi, 1-s).$$

En particulier, $\Lambda(\mathbf{m}, \chi, s)$ possède un prolongement méromorphe à \mathbb{C} tout entier, avec deux pôles simples en $s = 0$ et $s = 1$, et des résidus $\chi(0)$ et $2\pi\chi^\vee(0)/\sqrt{|\text{disc}(\mathfrak{Q})|}$.

Preuve. En suivant la preuve classique, l'équation fonctionnelle (14) implique que la transformée de Mellin

$$M\left(\theta_{\mathbf{m}, \chi} - \frac{1}{2}\chi(0)\right)(s) := \int_0^\infty \left(\theta_{\mathbf{m}, \chi}(t) - \frac{1}{2}\chi(0)\right) t^{s/2} \frac{dt}{t}$$

converge pour tout s . Si $\text{Re}(s) > 1$ on a

$$\int_0^\infty e^{-\pi t \alpha^2} t^{s/2} \frac{dt}{t} = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \alpha^{-s},$$

ce qui donne

$$M\left(\theta_{\mathbf{m}, \chi} - \frac{1}{2}\chi(0)\right)(s) = \Lambda(\mathbf{m}, \chi, s).$$

Puis

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathbf{m}, \chi, s) &= \int_0^1 \left[\frac{2\pi}{\text{disc}(\mathfrak{Q})} \theta_{\mathbf{m}, \chi}^\vee(t^{-1}) - \frac{\chi(0)}{2} \right] t^{s/2} \frac{dt}{t} + \int_1^\infty \left[\theta_{\mathbf{m}, \chi}(t) - \frac{\chi(0)}{2} \right] t^{s/2} \frac{dt}{t} \\ (15) \quad &= \frac{2\pi}{\text{disc}(\mathfrak{Q})} \int_1^\infty \left[\theta_{\mathbf{m}, \chi}^\vee(t) - \frac{\chi^\vee(0)}{2} \right] t^{(1-s)/2} \frac{dt}{t} + \int_1^\infty \left[\theta_{\mathbf{m}, \chi}(t) - \frac{\chi(0)}{2} \right] t^{s/2} \frac{dt}{t} \\ &\quad + \frac{\chi(0)}{s} + \frac{2\pi}{\sqrt{|\text{disc}(\mathfrak{Q})|}} \cdot \frac{\chi^\vee(0)}{s-1}. \end{aligned}$$

Il reste à observer que les intégrales apparaissant dans (15) sont holomorphes en s sur \mathbb{C} tout entier du fait de la décroissance rapide à l'infini des intégrands (voir le Lemme 2). L'équation fonctionnelle annoncée est alors conséquence de l'équation pour les fonctions thêta correspondantes. \square

Revenons à la fonction zêta, $\zeta_{\mathbf{m}}(s)$. On aurait envie de prendre $f = f_D$, fonction indicatrice de la fenêtre D , dans la formule sommatoire de Poisson-Meyer. Toutefois celle-ci n'est valable que pour f lisse et f_D ne l'est pas. Néanmoins, on va voir qu'en prenant une suite de fonctions lisses à supports compacts qui converge vers f_D , la limite correspondante du côté droit de (15) est uniforme sur les compacts de $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

Soient donc $f_\varepsilon \rightarrow f_D$ une suite de fonctions lisses telles que

- (1) $\text{supp}(f_\varepsilon) = D_\varepsilon \supset D$ est un ε -voisinage de D ;
- (2) $f_\varepsilon|_D \equiv 1$;
- (3) $f_\varepsilon \geq 0$ et $f_\varepsilon(-x) = f_\varepsilon(x)$ pour tout $x \in K_{\sigma'}$.

Soit $\mathbf{m}_\varepsilon = \mathcal{M}(\mathfrak{Q}, D_\varepsilon) = \text{supp}(\chi_\varepsilon)$. On note d'abord que $\Lambda(\mathbf{m}_\varepsilon, \chi_\varepsilon, s)$ converge pour $\text{Re}(s) > 1$ vers

$$\Lambda(\mathbf{m}, s) := \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta_{\mathbf{m}}(s).$$

Cette convergence a lieu parce que :

1. Tout $\alpha \in \mathbf{m}_\varepsilon \setminus \mathbf{m}$ satisfait $x_i <_{+i} |\sigma_i(\alpha)| < x_i + \varepsilon$. Alors (à l'exception de α "limite" e.g. $|\sigma_i(\alpha)| = x_i$ pour tout i), la dernière inégalité implique que pour tout $M > 0$ il existe N tel que $|\alpha| > M$ quand $\varepsilon^{-1} \geq N$;

$$2. |\chi_\varepsilon(\alpha)| \leq 1.$$

Pour les mêmes raisons on a convergence uniforme sur les compacts des fonctions $\theta_{\mathbf{m}_\varepsilon, \chi_\varepsilon}(t)$ vers $\theta_{\mathbf{m}}(t)$, donc convergence des intégrales

$$\int_1^\infty \left[\theta_{\mathbf{m}_\varepsilon, \chi_\varepsilon}(t) - \frac{\chi(0)}{2} \right] t^{s/2} \frac{dt}{t} \longrightarrow \int_1^\infty \left[\theta_{\mathbf{m}}(t) - \frac{\chi(0)}{2} \right] t^{s/2} \frac{dt}{t}.$$

Alors, d'après (15), les intégrales

$$(16) \quad \frac{2\pi}{\text{disc}(\mathfrak{A})} \int_1^\infty \left[\theta_{\mathbf{m}_\varepsilon, \chi_\varepsilon}^\vee(t) - \frac{\chi_\varepsilon^\vee(0)}{2} \right] t^{(1-s)/2} \frac{dt}{t}$$

convergent aussi uniformément sur les compacts, toujours pour $\text{Re}(s) > 1$. En utilisant la symétrie $s \mapsto 1-s$, $\Lambda(\mathbf{m}, s)$ est aussi la limite des analogues du côté droit de (15) pour les $\Lambda(\mathbf{m}_\varepsilon, \chi_\varepsilon, s)$. Donc, la limite

$$\Lambda^\vee(\mathbf{m}, s) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Lambda^\vee(\mathbf{m}_\varepsilon, \chi_\varepsilon, s)$$

vaut sur tout $\mathbb{C} - \{0, 1\}$ et on obtient l'équation fonctionnelle :

Théorème 5. $\Lambda(\mathbf{m}, s) = \frac{2\pi}{\sqrt{|\text{disc}(\mathfrak{A})|}} \Lambda^\vee(\mathbf{m}, 1-s)$ pour tout $s \in \mathbb{C}$.

5. L'INVARIANT MODULAIRE QUANTIQUE ET UN RÉSULTAT DE R. PINK

Nous développons ici la relation avec les quasicristaux et l'invariant modulaire quantique découverte par Richard Pink ([27]) ; voir le Théorème 7 ci-dessous. Cette section, aussi brève soit-elle, revêt néanmoins une importance centrale, l'observation de Pink ayant en grande partie motivé le présent travail.

Soient $A = A_\sigma \subset \mathbb{R}$ un anneau quasicristallin de rang 1 et $\mathfrak{a} \subset \mathbb{R}$ un idéal quasicristallin fractionnaire de A . En utilisant la fonction zêta $\zeta_{\mathfrak{a}}$ (voir §4) on peut définir l'*invariant modulaire quasicristallin*, à savoir

$$j(\mathfrak{a}) := \frac{12^3}{1 - \frac{49}{40} J(\mathfrak{a})}, \quad J(\mathfrak{a}) := \frac{\zeta_{\mathfrak{a}}(6)^2}{\zeta_{\mathfrak{a}}(4)^3}.$$

Il y a évidemment invariance par rapport à la multiplication par les éléments de K^\times . On obtient ainsi une fonction bien définie

$$j : \text{Cl}^{\text{mod}}(A) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Théorème 6. *L'invariant modulaire quasicristallin j est continu.*

Démonstration. Il suffit de montrer que la restriction au monoïde $Z \subset \text{Cl}^{\text{mod}}(A)$ est continue. Si $\mathfrak{a}_i \rightarrow \mathfrak{a}$, alors \mathfrak{a}_i converge vers \mathfrak{a} dans la topologie de Hausdorff (uniformément sur tout compact) et donc pour tout s fixé, $\zeta_{\mathfrak{a}_i}(s) \rightarrow \zeta_{\mathfrak{a}}(s)$. La continuité de j est une conséquence immédiate. \square

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour $\varepsilon > 0$ on définit

$$\Lambda_\varepsilon(\theta) := \{n \in \mathbb{Z} \mid \|n\theta\| < \varepsilon\}$$

où $\|x\|$ est la distance de x à l'entier le plus proche. On introduit la fonction zêta

$$\zeta_{\theta, \varepsilon}(s) = \sum_{0 < n \in \Lambda_\varepsilon(\theta)} n^{-s}$$

qui converge pour $\Re(s) > 1$, en tant qu'une sous-somme de celle qui définit la fonction zêta classique. On définit de plus

$$j_\varepsilon : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

pour

$$j_\varepsilon(\theta) := \frac{12}{1 - J_\varepsilon(\theta)}, \quad J_\varepsilon(\theta) := \frac{49 \zeta_{\theta, \varepsilon}(6)^2}{40 \zeta_{\theta, \varepsilon}(4)^3}.$$

L'invariant modulaire quantique ([5]) est la fonction multivaluée

$$j^{\text{qt}} : \text{Mod}^{\text{qt}} := \mathbb{R}/\text{GL}_2(\mathbb{Z}) \dashrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad j^{\text{qt}}(\theta) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} j_\varepsilon(\theta),$$

où la limite est définie comme l'ensemble des points d'adhérence lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Soit maintenant u une unité fondamentale quadratique réelle de $K = \mathbb{Q}(u)$ avec $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[u]$ l'anneau des entiers. Lors d'une conversation privée ([27]), Richard Pink a dégagé la formule suivante pour $j^{\text{qt}}(u)$. Revenant au monoïde Z défini dans la formule (4) du §3, celui-ci s'écrit dans le cas quadratique sous la forme

$$Z = \bigcup_{x \in [0,1)} \{\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_x^+\} \subset \text{Cl}^{\text{mod}}(A).$$

Théorème 7 (R.Pink). *Soit u une unité fondamentale quadratique réelle. Alors*

$$j^{\text{qt}}(u) = \{j(\mathbf{a}) \mid \mathbf{a} \in Z\}.$$

Démonstration. On peut supposer que $u > 1$, étant donné que $j^{\text{qt}}(x) = j^{\text{qt}}(x^{-1})$. Notons $\Lambda_x := \Lambda_{u^{-x}}(u)$ et $\Delta := u - u'$. Pour $n \in \Lambda_x$, il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $|nu + m| < u^{-x}$. En particulier, en écrivant $\alpha = nu + m$, on a

$$\Lambda_x = \left\{ \frac{\alpha - \alpha'}{\Delta} \mid \alpha \in \mathcal{O}_K, |\alpha| < u^{-x} \right\},$$

où α' est le conjugué de α . D'où

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{u^m} \Lambda_{x+m} &= \left\{ \frac{\alpha - \alpha'}{u^m} \mid \alpha \in \mathcal{O}_K, |\alpha| < u^{-x-m} \right\} \\ &\quad (\text{change de variable } \alpha \rightsquigarrow -\beta' u'^m) \\ &= \left\{ \frac{-\beta' u'^m + \beta u^m}{u^m} \mid \beta \in \mathcal{O}_K, |\beta'| < u^{-x} \right\} \\ &= \left\{ \beta - \frac{\beta'}{(-u^2)^m} \mid \beta \in \mathcal{O}_K, |\beta'| < u^{-x} \right\}. \end{aligned}$$

En particulier

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\Delta}{u^m} \Lambda_{x+m} = \mathbf{a}_x$$

et

$$\lim_{m \rightarrow \infty} j_{u^{-x-m}}(u) = j(\mathbf{a}_x).$$

On en déduit que

$$\{j(\mathbf{a}_x) \mid x \in [0, 1)\} = \{j(\mathbf{a}_x) \mid x \geq 0\} \subset j^{\text{qt}}(\theta)$$

et donc tout point d'adhérence de $j_\varepsilon(u)$ l'est aussi des $j(\mathbf{a}_x)$, ce qui fournit le résultat. \square

Corollaire 1. *Soit $u \in \mathbb{R}$ une unité fondamentale quadratique. Alors $j^{\text{qt}}(u)$ est l'image continue d'un ensemble de Cantor.*

Note 7. Pour démontrer que $j^{\text{qt}}(\theta)$ est de Cantor, il serait suffisant établir que j est *injective*, propriété qui est conjecturée.

Note 8. Le Théorème de Pink constitue l’analogie exact du Theorem 4 de [10]. Plus précisément (pour la notation voir au §1 ci-dessus) soit $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(f)$ où f est une unité fondamentale. Si l’on note

$$j^{\text{qt}} : \text{GL}_2(\mathbf{Z}) \backslash \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\}$$

l’invariant modulaire quantique en caractéristique positive associé au corps de fonctions $\mathbf{R} = \mathbf{Q}_\infty$ ([8], [9]), on a

$$j^{\text{qt}}(f) = \{j(\mathfrak{a}) \mid \mathfrak{a} \in Z\}$$

où maintenant $Z = \{\mathfrak{a}_0, \dots, \mathfrak{a}_{d-1}\} \cong \text{Gal}(\mathbf{H}_{\mathbf{A}_{\infty_1}}/\mathbf{H}_{\mathbf{O}_{\mathbf{K}}})$ est le sous groupe de $\text{Cl}_{\mathbf{A}_{\infty_1}}$ décrit au §1.

6. LE SOLÉNOÏDE ASSOCIÉ À UN QUASICRISTAL

D’après la *Note 8* ci-dessus les quasicristaux dans le Théorème 7 jouent le même rôle que les idéaux $\mathfrak{a} \subset A_{\sigma_1}$, et donc les quasicristaux de rang 1 devraient fournir un analogue des modules de Drinfeld en caractéristique nulle. Dans cette section on développe l’analogie de la notion *analytique* de module Drinfeld, c’est-à-dire l’analogie du module quotient \mathbf{R}/\mathfrak{a} .

L’ensemble des quasicristaux de \mathbb{R}^n est muni d’une topologie de la manière suivante : à un quasicristal $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on associe la mesure de Radon μ_Ω qui est le peigne de Dirac de Ω (voir la formule (10)) et on met la topologie faible sur l’espace des mesures μ_Ω . Si on fixe Ω , on note la clôture

$$\hat{\mathbb{S}}_\Omega := \overline{\{v + \Omega\}_{v \in \mathbb{R}^n}}$$

(voir par exemple [2]). De manière équivalente $\hat{\mathbb{S}}_\Omega$ peut être défini en utilisant le pavage de Voronoï P_Ω associé à Ω , où maintenant $\hat{\mathbb{S}}_\Omega$ est la clôture de l’ensemble $\{v + P_\Omega\}_{v \in \mathbb{R}^n}$ des translatés de P_Ω . Dans [2] les auteurs montrent que $\hat{\mathbb{S}}_\Omega$ est homéomorphe à la limite inverse d’un système de variétés ramifiées plates (“branched flat manifolds”) de dimension n . Si Ω est un réseau, $\hat{\mathbb{S}}_\Omega \approx \mathbb{R}^n/\Omega$ et on récupère la notion classique de tore quotient. Un point de $\hat{\mathbb{S}}_\Omega$ est représenté par un pavage construit avec les mêmes mailles que Ω et qui possède des sous-pavages arbitrairement grands qui coïncident avec des sous-pavages de Ω à une translation près.

Proposition 8. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un quasicristal. Alors $\hat{\mathbb{S}}_\Omega$ est un solénoïde compact de dimension n . Si $\Omega = \mathcal{M}$ est un ensemble modèle générique, $\hat{\mathbb{S}}_\Omega$ est minimal.*

Proof. Étant limite inverse de variétés ramifiées de dimension n , $\hat{\mathbb{S}}_\Omega$ est par définition un solénoïde. Puisque Ω est de Delaunay, $\hat{\mathbb{S}}_\Omega$ est compact. Enfin si Ω est générique, il est répétitif, ce qui implique que $\hat{\mathbb{S}}_\Omega$ est minimal (voir par exemple [1]). \square

Il est instructif de rappeler le cas du solénoïde classique

$$\hat{\mathbb{S}}^1 = \varprojlim \mathbb{S}^1,$$

où la limite est définie par rapport à tous les épimorphismes de $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Le complété profini $\hat{\mathbb{Z}}$ de \mathbb{Z} s’identifie au noyau de l’épimorphisme $\hat{\mathbb{S}}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, $\hat{\mathbb{S}}^1/\hat{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{S}^1$, et définit un sous-groupe de $\hat{\mathbb{S}}^1$ qui est une transversale canonique. De manière

équivalente $\hat{\mathbb{Z}} = \overline{\mathbb{Z}}$ est la clôture topologique de $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \subset \hat{\mathbb{S}}^1$, où le plongement $\mathbb{R} \hookrightarrow \hat{\mathbb{S}}^1$ est induit par $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$.

Un épimorphisme $\rho : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ induit un *homéomorphisme* $\hat{\rho} : \hat{\mathbb{S}}^1 \rightarrow \hat{\mathbb{S}}^1$, de la même manière que ρ induit un homéomorphisme $\tilde{\rho} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ du revêtement universel \mathbb{R} de \mathbb{S}^1 . Mais si on considère plutôt comme objet principal la paire $(\hat{\mathbb{S}}^1, \hat{\mathbb{Z}})$, alors $\hat{\rho}$ est un morphisme de telles paires, $\hat{\rho}(\hat{\mathbb{Z}}) \subset \hat{\mathbb{Z}}$, et

$$\hat{\rho}^{-1}(\hat{\mathbb{Z}}) = \bigsqcup_{i=1}^{\deg(\rho)} (r_i + \hat{\mathbb{Z}}).$$

On peut ainsi considérer $\hat{\rho}$ comme un *revêtement de paires* de degré égal à $\deg(\rho)$. Intuitivement, on peut voir $\hat{\mathbb{Z}}$ comme un élargissement de l'élément neutre du cercle \mathbb{S}^1 et, en conservant la transversale $\hat{\mathbb{Z}}$, on récupère les propriétés de \mathbb{S}^1 en travaillant avec $\hat{\mathbb{S}}^1$.

Revenant au solénoïde $\hat{\mathbb{S}}_\Omega$, le rôle de $\hat{\mathbb{Z}}$ est joué par l'ensemble

$$\hat{\Omega} = \overline{\{\omega + \Omega\}_{\omega \in \Omega}} \subset \hat{\mathbb{S}}_\Omega,$$

transversale complète⁴ passant par 0, la *complétée pro-quasicristalline* de Ω . Si Ω est un réseau $\hat{\Omega} = \{0\}$; on peut donc voir en général $\hat{\Omega}$ comme un élargissement de l'élément neutre. Par contre, si l'on identifie deux points de $\hat{\mathbb{S}}_\Omega$ qui appartiennent à la même $\hat{\Omega}$ transversale, $x \sim y$ si et seulement si $x, y \in z + \hat{\Omega}$, qui donne le *quotient transversal topologique* défini par $\hat{\Omega}$. On obtient ainsi en général une variété ramifiée plate. Nous adopterons dans la suite une position intermédiaire, considérant parfois des notions comme “fonction”, “torsion” modulo $\hat{\Omega}$, mais sans identifier ce dernier ensemble à un point. Autrement dit on regardera $\hat{\Omega}$ comme la *transversale neutre* en développant une théorie qui n'oublie pas ce fait en passant au quotient.

Considérons maintenant l'analogie d'une isogénie entre deux solénoïdes quasicristallins. On dit que deux quasicristaux $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ sont *équivalents* ([25], [23]) s'il existe un couple d'ensembles finis $F, F' \subset \mathbb{R}^n$ telle que

$$\Omega \subset \Omega' + F' \quad \text{et} \quad \Omega' \subset \Omega + F.$$

Exemple 4. i) Si Ω, Ω' sont deux réseaux isogènes alors Ω, Ω' sont équivalents; cette relation d'équivalence est donc une généralisation de la relation d'isogénie.

ii) Si $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ sont deux ensembles modèles définis par rapport au même réseau $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n+k}$, alors Ω, Ω' sont toujours équivalents ([25]).

On rappelle qu'un ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$ est *apériodique* si le groupe de ses périodes

$$\text{Per}(X) := \{v \in \mathbb{R}^n \mid v + X = X\}$$

est réduit à 0. Si un quasicristal $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est apériodique, on appelle

$$L_\Omega := \mathbb{R}^n + \Omega \subset \hat{\mathbb{S}}_\Omega$$

la *feuille canonique*; elle est clairement homéomorphe à \mathbb{R}^n et dense dans $\hat{\mathbb{S}}_\Omega$.

Théorème 8. *Soient*

$$\Omega \subset \Omega' \subset \mathbb{R}^n$$

⁴Une *transversale (complète)* d'une lamination \mathcal{L} est un sous-ensemble $T \subset \mathcal{L}$ tel que $T \cap L$ est discret (non vide) pour la topologie de L , pour toute feuille $L \subset \mathcal{L}$.

deux quasicristaux modèles définis par le même réseau. Alors, la correspondance $x + \Omega \mapsto x + \Omega'$, $x \in \mathbb{R}^n$, définit un morphisme de paires (revêtement) canonique

$$\rho : (\hat{\mathbb{S}}_\Omega, \hat{\Omega}) \longrightarrow (\hat{\mathbb{S}}_{\Omega'}, \hat{\Omega}')$$

qui est surjectif. Plus précisément, $\rho : \hat{\mathbb{S}}_\Omega \rightarrow \hat{\mathbb{S}}_{\Omega'}$ est un homéomorphisme local surjectif de solénoïdes telle que $\rho(\hat{\Omega}) \subset \hat{\Omega}'$ et

$$(17) \quad \rho^{-1}(\hat{\Omega}') \subset \bigcup_{i=1}^d (x_i + \hat{\Omega}), \quad x_i \in \mathbb{R}^n,$$

où l'union n'est pas forcément disjointe. Si Ω, Ω' sont tous les deux apériodiques, $\rho : \hat{\mathbb{S}}_\Omega \rightarrow \hat{\mathbb{S}}_{\Omega'}$ est un homéomorphisme.

Démonstration. D'après l'Exemple 4, ii), il existe F fini tel que $\Omega' \subset \Omega + F$. Si la suite $x_i + \Omega$ converge dans $\hat{\mathbb{S}}_\Omega$, $x_i + \Omega + F$ converge aussi dans $\hat{\mathbb{S}}_{\Omega + F}$, ce qui implique que $x_i + \Omega' \subset x_i + \Omega + F$ converge dans $\hat{\mathbb{S}}_{\Omega'}$. Donc ρ est continue. Inversement, supposant que $x_i + \Omega'$ converge dans $\hat{\mathbb{S}}_{\Omega'}$, le même argument montre que $x_i + \Omega \subset x_i + \Omega'$ converge dans $\hat{\mathbb{S}}_\Omega$, ce qui signifie que ρ est surjective. On affirme que $\rho|_{\hat{\Omega}}$ est injective. Supposons au contraire que $\hat{\gamma} = \lim \gamma_i + \Omega \neq \hat{\eta} = \lim \eta_i + \Omega$ sont des points distincts de $\hat{\Omega}$ tels que $\rho(\hat{\gamma}) = \rho(\hat{\eta})$. On observe alors que, par définition de la topologie, la limite $\hat{\gamma} = \lim \gamma_i + \Omega$ existe si γ'_i est de Cauchy et $\hat{\gamma} \neq \hat{\eta}$ si et seulement si $(\gamma_i - \eta_i)' \not\rightarrow 0$. La même chose est vraie en échangeant Ω et Ω' , d'où il suit que $\rho(\hat{\gamma}) = \lim \gamma_i + \Omega' \neq \lim \eta_i + \Omega' = \rho(\hat{\eta})$, contradiction. Comme Ω, Ω' sont relativement denses l'injectivité de ρ en $\hat{\Omega}$ se prolonge à un voisinage feuilleté et ρ est donc bijective et bicontinue dans un voisinage de 0. On montre de même l'injectivité sur chaque transversale $x + \hat{\Omega}$, ce qui prouve que ρ est un homéomorphisme local. La préimage $\rho^{-1}(\hat{\Omega}')$ est égale à la clôture de

$$\bigcup_{x \in \Omega'} (x + \Omega) \subset \bigcup_{y \in \Omega, f \in F} (y + f + \Omega) \subset \bigcup_{f \in F} (f + \hat{\Omega}),$$

qui fournit bien (17).

Enfin si Ω, Ω' sont apériodiques, ρ induit un homéomorphisme $L_\Omega \approx L_{\Omega'}$ des feuilles canoniques denses ce qui, joint au fait que ρ est un homéomorphisme local, implique qu'il s'agit bien d'un homéomorphisme. \square

La propriété d'être un presque réseau implique que

$$\Sigma^n \Omega := \Omega + \cdots + \Omega \quad (n \text{ fois})$$

est aussi un quasicristal (et un idéal quasicristallin dans le cas où Ω en est un). De plus, $\Sigma^n \Omega$ est équivalent à Ω . Le Théorème 8 implique qu'il existe une surjection continue

$$+ : (\hat{\mathbb{S}}_\Omega, \hat{\Omega}) \times (\hat{\mathbb{S}}_\Omega, \hat{\Omega}) \longrightarrow (\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^2 \Omega}, \Sigma^2 \hat{\Omega}), \quad (x + \Omega, y + \Omega) \longmapsto x + y + \Sigma^2 \Omega,$$

où l'on a identifié $\Sigma^n \hat{\Omega} = \widehat{\Sigma^n \Omega}$. En général, pour $\vec{m} \in \mathbb{N}^k$ où $m_1 + \cdots + m_k = n$, il y a une application

$$(18) \quad + = +_{\vec{m}, n} : (\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^{m_1} \Omega}, \Sigma^{m_1} \hat{\Omega}) \times \cdots \times (\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^{m_k} \Omega}, \Sigma^{m_k} \hat{\Omega}) \longrightarrow (\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^n \Omega}, \Sigma^n \hat{\Omega}),$$

induite par

$$(x_1 + \Omega, \dots, x_k + \Omega) \longmapsto x_1 + \cdots + x_k + \Sigma^n \Omega.$$

Si l'on note $+_3 = +_{\vec{1},3}$, $\vec{1} = (1, 1, 1)$, l'égalité des compositions

$$+_3(x + \Omega, y + \Omega, z + \Omega) = +((x + \Omega, y + \Omega), z + \Omega) = +(x + \Omega, +(y + \Omega, z + \Omega)),$$

ainsi que des version plus générales nous donnent l'analogie de la loi de l'associativité. On peut donc considérer $\hat{\mathbb{S}}_\Omega$ comme une généralisation de la notion de tore, ou mieux la collection de solénoïdes

$$\{(\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^n \Omega}, \Sigma^n \hat{\Omega})\}_{n \geq 1},$$

munie des applications (18).

Proposition 9. *La somme $+_{\vec{m},n}$ est continue.*

Démonstration. On suppose d'abord que Ω est un quasicristal modèle. Il suffit alors d'observer que l'inclusion $\hat{\Omega} \hookrightarrow \Sigma \hat{\Omega}$ est continue (et même ouverte). Mais $\alpha_i \rightarrow 0$ dans $\hat{\Omega}$ si et seulement si $\alpha_i \rightarrow 0$ dans $\hat{\Omega} + F$ pour F fini, si et seulement si $\alpha_i \rightarrow 0$ dans $\Sigma \hat{\Omega}$. \square

Étant donnée une suite d'applications de paires

$$f_n : (\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^n \Omega}, \Sigma^n \hat{\Omega}) \longrightarrow (\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^n \Omega}, \Sigma^n \hat{\Omega})$$

on dira qu'elle définit un *endomorphisme quasicristallin* si on a des carrés commutatifs

$$(19) \quad \begin{array}{ccc} \hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^{m_1} \Omega} \times \cdots \times \hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^{m_k} \Omega} & \xrightarrow{f_{m_1} \times \cdots \times f_{m_k}} & \hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^{m_1} \Omega} \times \cdots \times \hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^{m_k} \Omega} \\ \downarrow +_{\vec{m},n} & & \downarrow +_{\vec{m},n} \\ \hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^n \Omega} & \xrightarrow{f_n} & \hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^n \Omega}, \end{array}$$

pour $m_1 + \cdots + m_k = n$. Un endomorphisme quasicristallin inversible est un *isomorphisme quasicristallin*. On notera

$$\text{End}(\hat{\mathbb{S}}_\Omega, \hat{\Omega})$$

le monoïde multiplicatif des endomorphismes, le produit étant défini par la composition. Les opérations de somme induisent des opérations correspondantes sur les endomorphismes ; ainsi on a une opération de somme

$$\text{End}(\hat{\mathbb{S}}_\Omega, \hat{\Omega}) \times \text{End}(\hat{\mathbb{S}}_\Omega, \hat{\Omega}) \xrightarrow{+} \text{End}(\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma \Omega}, \Sigma \hat{\Omega})$$

définie par

$$f_n, g_n \mapsto f_n + g_n : \hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^n(\Sigma \Omega)} \longrightarrow \hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^n(\Sigma \Omega)}.$$

Autrement dit la collection

$$\{\text{End}(\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^n \Omega}, \Sigma^n \hat{\Omega})\}$$

possède la structure d'un *presque anneau* c'est-à-dire une collection de monoïdes (pour un certain produit) avec des applications commutatives

$$\text{End}(\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^{m_1} \Omega}, \Sigma^{m_1} \hat{\Omega}) \times \cdots \times \text{End}(\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^{m_k} \Omega}, \Sigma^{m_k} \hat{\Omega}) \xrightarrow{+} \text{End}(\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^n \Omega}, \Sigma^n \hat{\Omega}),$$

où $m_1 + \cdots + m_k = n$; ces opérations sont distributives par rapport au produit.

Note 9. Par opposition au cas des réseaux, il n'est pas nécessairement vrai que $N \in \mathbb{Z}$ définit un élément de $\text{End}(\hat{\mathbb{S}}_\Omega)$. On a seulement le "quasiendomorphisme" :

$$N : \hat{\mathbb{S}}_\Omega \longrightarrow \hat{\mathbb{S}}_{N\Omega}, \quad x + \Omega \mapsto Nx + N\Omega$$

où $N\Omega := \{Nx \mid x \in \Omega\} \subset \Sigma^N \Omega$.

Considérons le cas de $\mathfrak{a} \subset K \subset \mathbb{R}$ un idéal quasicristallin modèle par rapport à l'anneau quasicristallin $A = A_\sigma$ de rang 1. La proposition suivante identifie les sommes quasicristallines d'un tel idéal quasicristallin modèle.

Proposition 10. *Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{r+s-1}$, $u \in \mathcal{O}_K^\times$, $\mathfrak{a}_\mathbf{x} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{a}, \mathbf{x}}(u)$. Alors*

$$\Sigma^n \mathfrak{a}_\mathbf{x} = \mathfrak{a}_\mathbf{y}, \quad \text{où } \mathbf{y} = -\log_{|\pi'(u)|} n + \mathbf{x}.$$

En général, $\mathfrak{a}_{\mathbf{x}_1} + \mathfrak{a}_{\mathbf{x}_2} = \mathfrak{a}_\mathbf{y}$, où $\mathbf{y} = -\log_{\pi'(u)}(\pi'(u)^{\mathbf{x}_1} + \pi'(u)^{\mathbf{x}_2})$.

Démonstration. On donne la preuve dans le cas de K/\mathbb{Q} quadratique réelle ; le cas général est tout à fait analogue. Par définition, $\mathfrak{a}_x + \mathfrak{a}_x \subset \mathfrak{a}_{-\log_{\pi'(u)} 2 + x}$. Soit alors $\gamma \in \mathfrak{a}_{x - \log_{\theta} 2}$; on peut supposer que $\gamma' > 0$ sans perte de généralité. On a donc $\gamma' < 2\theta^{-x}$. Soit $\alpha \in \mathfrak{a}_x$ tel que $\alpha' > 0$ et soit $\beta = \gamma - \alpha$ avec $0 < \beta'$. On peut choisir α tel que $\beta' < \theta^{-x}$, parce que l'ensemble de α' , $\alpha \in \mathfrak{a}_x$, est dense dans la fenêtre D_x . Alors $\gamma = \alpha + \beta \in \mathfrak{a} + \mathfrak{a}$. \square

La pertinence de la Proposition 10 tient à ce que si l'on suppose l'injectivité (conjecturale) de l'invariant modulaire j dans $\text{Cl}^{\text{mod}}(A)$, alors $j(\mathfrak{a}) \neq j(\Sigma^n \mathfrak{a})$ pour tout $n \neq 1$. Ceci implique que la structure que l'on développe ici en partant des collections de sommes de solénoïdes $\{(\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^n \mathfrak{a}} \Sigma^n \hat{\mathfrak{a}})\}$ (ou de manière équivalente les sommes $\{\Sigma^n \mathfrak{a}\}$), cette structure ne produit pas un, mais un ensemble d'invariants modulaires, tout comme l'invariant modulaire quantique de la Section 5.

Notons maintenant qu'il existe une action de A sur $(\hat{\mathbb{S}}_\mathfrak{a}, \hat{\mathfrak{a}})$ donnée par

$$\alpha : (\hat{\mathbb{S}}_\mathfrak{a}, \hat{\mathfrak{a}}) \longrightarrow (\hat{\mathbb{S}}_\mathfrak{a}, \hat{\mathfrak{a}}), \quad x + \mathfrak{a} \longmapsto \alpha x + \alpha \mathfrak{a} \longmapsto \alpha x + \mathfrak{a}$$

où l'on utilise l'inclusion $\alpha \mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$ pour définir la deuxième application ⁵. Cette action s'étend à tous les $\Sigma^n \mathfrak{a}$ et on a le carré commutatif suivant :

$$(20) \quad \begin{array}{ccc} (\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^{m_1} \mathfrak{a}}, \Sigma^{m_1} \hat{\mathfrak{a}}) \times \cdots \times (\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^{m_k} \mathfrak{a}}, \Sigma^{m_k} \hat{\mathfrak{a}}) & \xrightarrow{\alpha \times \cdots \times \alpha} & (\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^{m_1} \mathfrak{a}}, \Sigma^{m_1} \hat{\mathfrak{a}}) \times \cdots \times (\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^{m_k} \mathfrak{a}}, \Sigma^{m_k} \hat{\mathfrak{a}}) \\ \downarrow + & & \downarrow + \\ (\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^n \mathfrak{a}}, \Sigma^n \hat{\mathfrak{a}}) & \xrightarrow{\alpha} & (\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^n \mathfrak{a}}, \Sigma^n \hat{\mathfrak{a}}). \end{array}$$

Autrement dit chaque $\alpha \in A$ définit un élément de $\text{End}(\hat{\mathbb{S}}_\mathfrak{a})$, d'où l'on tire une injection $A \hookrightarrow \text{End}(\hat{\mathbb{S}}_\mathfrak{a})$ de (presque) anneaux. De plus pour tout $f = \{f_n\} \in \text{End}(\hat{\mathbb{S}}_\mathfrak{a})$, les restrictions de f_n à la feuille canonique $L_{\Sigma^n \mathfrak{a}} \approx \mathbb{R} \subset \hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^n \mathfrak{a}}$ définissent des endomorphismes de \mathbb{R} et c'est ainsi que l'on peut identifier $A \subset \text{End}(\hat{\mathbb{S}}_\mathfrak{a}) \subset \mathbb{R}$. Cependant pour que $r \in \mathbb{R}$ représente une telle restriction on doit avoir $r\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$, qui implique que $r \in \mathcal{O}_K$. Mais ce sont précisément les éléments de $A \subset \mathcal{O}_K$ qui préservent \mathfrak{a} (à cause de sa propriété caractéristique $|\gamma'| \leq 1$). Nous avons ainsi démontré le

Théorème 9. $\text{End}(\hat{\mathbb{S}}_\mathfrak{a}, \hat{\mathfrak{a}}) = A$.

Par analogie avec la théorie classique des courbes elliptiques on dira que $\hat{\mathbb{S}}_\mathfrak{a}$ est à *multiplication quasicristalline* par rapport à A et que $\hat{\mathbb{S}}_\mathfrak{a}$ est un A -*module quasicristallin*.

⁵Ici il faut remarquer que pour $\alpha \neq 0$, $\alpha \mathfrak{a}$ et \mathfrak{a} sont équivalents : dans le cas où $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_x$, ceci est conséquence du fait que *tous* les ensembles modèles définis à l'aide d'un même réseau sont équivalents (voir [23], [25]).

Si $\mathfrak{m} \subset A$ est un idéal quasicristallin entier, on dit que $x \in \hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}$ est un point de \mathfrak{m} -torsion si pour tout $\alpha \in \mathfrak{m}$

$$\alpha x \in \hat{\mathfrak{a}}.$$

On note $(\hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}, \hat{\mathfrak{a}})[\mathfrak{m}]$ l'ensemble des points de \mathfrak{m} -torsion.

Remarquons que pour $\mathfrak{m} = A$, on a $(\hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}, \hat{\mathfrak{a}})[A] = \hat{\mathfrak{a}}$; c'est l'analogie du fait que, pour un tore $\mathbb{T} = \mathbb{C}/\Lambda$ à Multiplication Complexe par rapport à l'anneau de entiers \mathcal{O}_K , l'ensemble $\mathbb{T}[\mathcal{O}_K]$ des points de \mathcal{O}_K -torsion est réduit à $\{0\}$.

La torsion est clairement compatible avec la somme, induisant une application

$$+ : (\hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}, \hat{\mathfrak{a}})[\mathfrak{m}] \times (\hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}, \hat{\mathfrak{a}})[\mathfrak{m}] \longrightarrow (\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma\mathfrak{a}}, \Sigma\hat{\mathfrak{a}})[\mathfrak{m}]$$

qui est distributive par rapport à l'action de A : autrement dit la collection des paires $\{(\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^n\mathfrak{a}}, \Sigma^n\hat{\mathfrak{a}})[\mathfrak{m}]\}_{n \geq 1}$ constitue un *presque A-module*.

Nous terminerons avec une discussion de constructions associées au solénoïde d'un quasicristal, lesquelles constituent une tentative de complétion dudit solénoïde par rapport à la somme. Ces constructions sont motivées par l'envie de pouvoir travailler avec de "vrais" anneaux ou idéaux, par exemple l'anneau $\langle A \rangle$ ou l'idéal $\langle \mathfrak{a} \rangle$ engendré par l'anneau quasicristallin A ou un A -idéal \mathfrak{a} : malheureusement, comme nous l'avons vu, ils sont tous deux égaux à l'anneau \mathcal{O}_K lui-même, le problème étant que ce dernier anneau n'est pas suffisamment grand pour distinguer les anneaux engendrés par A et les \mathfrak{a} .

La première construction est la plus évidente : il s'agit de prendre la limite du système direct des *projections* entre les solénoïdes sommes :

$$\check{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}} := \varinjlim \left(\hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}} \rightarrow \hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^2\mathfrak{a}} \rightarrow \dots \right).$$

D'après la Proposition 10,

$$(21) \quad \bigcup \Sigma^n \mathfrak{a} = \mathcal{O}_K,$$

et donc la limite des transversales

$$\check{\mathfrak{a}} := \varinjlim \Sigma^n \hat{\mathfrak{a}}$$

contient l'image de $\mathcal{O}_K \subset \mathbb{R} \approx L_{\mathfrak{a}} \subset \hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}$ dans $\check{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}$, où $L_{\mathfrak{a}}$ est la feuille canonique. En particulier, $\check{\mathfrak{a}} \subset \check{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}$ est dense ; par contre, $\check{\mathfrak{a}} \neq \check{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}$ parce que l'image $L_{\check{\mathfrak{a}}}$ de $L_{\mathfrak{a}}$ en $\check{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}$ satisfait $L_{\check{\mathfrak{a}}} \cap \check{\mathfrak{a}} = \mathcal{O}_K$. En particulier $\check{\mathfrak{a}}$ ne définit pas un solénoïde transverse. Néanmoins on considèrera la paire $(\check{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}, \check{\mathfrak{a}})$ comme un cas limite ou singulier.

Théorème 10. $(\check{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}, \check{\mathfrak{a}})$ est une paire de \mathcal{O}_K -modules. Le quotient $\check{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}/\check{\mathfrak{a}}$ est isomorphe au tore quantique $\mathbb{T}(\theta) := \mathbb{R}/\mathcal{O}_K$, où $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\theta]$.

Démonstration. Il est clair que $\check{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}$ est un groupe : si $x \in \hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^m\mathfrak{a}}, y \in \hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^n\mathfrak{a}}, m \leq n$, la somme $x+y$ est définie dans $\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^n\mathfrak{a}}$ en envoyant x par l'application $\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^m\mathfrak{a}} \rightarrow \hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^n\mathfrak{a}}$ ce qui donne un élément de $\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^{2m}\mathfrak{a}}$. Cette définition est consistante dans la mesure où elle est compatible avec toutes les applications qui définissent la limite. La somme fournit donc une opération binaire qui est commutative et inversible dans $\check{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}$. Il est clair que la limite $\check{\mathfrak{a}}$ est fermée par rapport à la somme. À cause de (21), l'action naturel de \mathcal{O}_K sur $\check{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}$ est continue et respecte le sous-groupe $\check{\mathfrak{a}}$. De plus il y a un système compatible d'épimorphismes vers le tore quantique

$$\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^n\mathfrak{a}} \longrightarrow \mathbb{T}(\theta) := \mathbb{R}/\mathcal{O}_K$$

induit par $x + \Sigma^n \mathfrak{a} \mapsto x + \mathcal{O}_K$, où l'on observe que cette application identifie la transversale $x + \Sigma^n \hat{\mathfrak{a}}$ passant par x au point $x + \mathcal{O}_K \in \mathbb{T}(\theta)$. Ce système induit à son tour un épimorphisme $\check{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}} \rightarrow \mathbb{T}(\theta)$ de noyau $\check{\mathfrak{a}}$. \square

Le deuxième construction est une variante de celle-ci dans le contexte de l'analyse non standard, le point étant qu'il est possible de résoudre le problème de distinguer $\langle A \rangle$ de \mathcal{O}_K en travaillant dans un modèle non standard de ce dernier anneau. Pour un ensemble infini X on note *X l'ultrapuissance de X par rapport à un ultrafiltre non principal $\mathfrak{u} \subset 2^{\mathbb{N}}$ fixé. Par définition on a donc

$${}^*X := X^{\mathbb{N}} / \sim_{\mathfrak{u}}$$

où

$$\{x_i\} \sim_{\mathfrak{u}} \{x'_i\} \iff \{i \mid x_i = x'_i\} \in \mathfrak{u}.$$

Alors l'ultrapuissance ${}^*\mathcal{O}_K$ est un anneau et une *extension élémentaire* de \mathcal{O}_K ([19]), ce qui implique que ${}^*\mathcal{O}_K$ et \mathcal{O}_K sont indistinguables par les propositions de la logique du premier ordre.

Soit ${}^*A \subset {}^*\mathcal{O}_K$ l'ultrapuissance de A et considérons l'anneau engendré par *A :

$$\langle {}^*A \rangle := \bigcup_{n \geq 1} \Sigma^n {}^*A.$$

Proposition 11. $\text{Frac}(\langle {}^*A \rangle) = {}^*K$.

Démonstration. On sait par le travail de Salem que $K = \mathbb{Q}(\theta)$ où θ est de PV, donc ${}^*K = {}^*\mathbb{Q}(\theta)$. Soit $\mathcal{K} := \text{Frac}(\langle {}^*A \rangle)$. Puisque A consiste en tous les nombres PVS (complexes),

$$\mathcal{K} \supset \mathbb{Q}\{\theta^{*n} \mid *n \in {}^*\mathbb{Z}\}.$$

Reste à montrer que ${}^*\mathbb{Q} \subset \mathcal{K}$. Mais si $*a \in \mathbb{Z}$ est arbitraire, $*a\theta^{*n} \in {}^*A$ si $*n$ est assez grand, parce que $(*a\theta^{*n})' = *a(\theta')^{*n}$ est la classe d'une suite ayant des valeurs absolues ≤ 1 . Donc $*a \in \mathcal{K}$. D'où ${}^*\mathbb{Z} \subset \mathcal{K}$, puis ${}^*\mathbb{Q} \subset \mathcal{K}$. \square

De même, pour tout A -idéal quasicristallin \mathfrak{a} , on définit le $\langle {}^*A \rangle$ -idéal

$$\langle {}^*\mathfrak{a} \rangle := \bigcup_{n \geq 1} \Sigma^n {}^*\mathfrak{a}.$$

Les intersections ou unions d'ensembles dénombrables qui sont triviales dans le modèle standard \mathcal{O}_K peuvent devenir non triviales dans ${}^*\mathcal{O}_K$. En effet :

Proposition 12. $\langle {}^*A \rangle \subsetneq {}^*\mathcal{O}_K$. Si $\mathbf{x} < \mathbf{y}$, alors $\langle \mathfrak{a}_{\mathbf{y}} \rangle \supsetneq \langle \mathfrak{a}_{\mathbf{x}} \rangle$.

Démonstration. Soit

$${}^*\alpha = \{*\alpha_i\} \in {}^*\mathcal{O}_K \text{ tel que } \alpha_i \notin \Sigma^i A \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}.$$

Comme $\Sigma^n A \subsetneq \Sigma^{n+1} A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_j \notin \Sigma^i A$ pour tout $j \geq i$ et donc

$${}^*\alpha = \{*\alpha_i\} \notin {}^*(\Sigma^n A) = \Sigma^n {}^*A$$

pour tout n . La preuve de la seconde affirmation est identique. \square

Considérons maintenant ${}^*\mathbb{R}$ comme un corps topologique muni de la topologie ordonnée, ce qui en fait un ensemble totalement discontinu.

Proposition 13. $(\langle {}^*\mathfrak{a} \rangle, +)$ est un sous-groupe de Delaunay de ${}^*\mathbb{R}$.

Démonstration. Il est clair que $\langle *a \rangle$ est relativement dense dans $*\mathbb{R}$. Soit r_n tel que $\Sigma^n a$ est uniformément discret par rapport à r_n . Alors $\Sigma^n *a$ est aussi uniformément discret par rapport à r_n . Si $*\varepsilon > 0$ est infinitésimal, $*\varepsilon < r_n$ pour tout n , donc $\langle *a \rangle$ est $*\varepsilon$ -uniformément discret. \square

Pour tout a idéal quasicristallin de A , le quotient de Hausdorff

$$*T_a := *\mathbb{R}/\langle *a \rangle$$

est un *tore quasicristallin non standard*. On note que $*T_a$ n'est pas compact au sens usuel parce que la topologie ordonnée sur $*\mathbb{R}$ n'est pas 2-dénombrable.

Si l'on note $*\mathbb{R}_\varepsilon \subset *\mathbb{R}$ le sous espace vectoriel des infinitésimaux, le quotient

$$\bullet\mathbb{R} := *\mathbb{R}/*\mathbb{R}_\varepsilon$$

joue le rôle de revêtement universel de certaines laminations de dimension 1; en particulier

$$\mathcal{F}(\theta) = \{\text{le feuilletage de Kronecker de pente } \theta\} = \bullet\mathbb{R}/*\mathbb{Z}(\theta),$$

où $*\mathbb{Z}(\theta) \subset *\mathbb{Z}$ est le *groupe des approximations diophantiennes* (voir [5]). Dans le cas présent, $\langle *A \rangle$ étant $*\varepsilon$ -uniformément discret pour tout $*\varepsilon \in *\mathbb{R}_\varepsilon$, on a

$$*\mathbb{R}_\varepsilon \cap \langle *A \rangle = \{0\}$$

ce qui implique qu'il existe un plongement

$$\langle *A \rangle \hookrightarrow \bullet\mathbb{R}.$$

Mais l'image de $\langle *A \rangle$ dans $\bullet\mathbb{R}$ est dense : en fait $\langle *A \rangle \cap \mathbb{R} = \mathcal{O}_K$ qui est dense en \mathbb{R} . Donc $*T_a$ est un objet véritablement non standard : on perd la propriété de Hausdorff en annulant les infinitésimaux. Le résultat suivant est l'analogie du Théorème 10.

Théorème 11. $\bullet\mathbb{R}/\langle *A \rangle$ est isomorphe au tore quantique \mathbb{R}/\mathcal{O}_K .

Démonstration. On note que $\langle *A \rangle \supset \langle A \rangle = \mathcal{O}_K$ et que l'intersection des ensembles $\langle *A \rangle, \mathbb{R} \subset \bullet\mathbb{R}$ est $\langle A \rangle \cap \mathbb{R} = \mathcal{O}_K$. De plus chaque "feuille" $\bullet r + \bullet\mathbb{R}$ possède une intersection non nulle avec $\langle *A \rangle$, d'où $\bullet\mathbb{R}/\langle *A \rangle = \mathbb{R}/\langle A \rangle = \mathbb{R}/\mathcal{O}_K$. \square

7. FONCTION EXPONENTIELLE ET MODULES DE DRINFELD QUASICRISTALLINS

Dans cette section finale on développe une trigonométrie quasicristalline que l'on l'utilise pour définir entre autres une exponentielle, laquelle fournit un analogue des modules de Drinfeld en caractéristique nulle.

Rappelons d'abord quelques formules de trigonométrie ordinaire dans la représentation en produits infinis. Dans ce qui suit on utilise les fonctions *sinus* et *cosinus* "absolues", c'est-à-dire *non normalisées* par rapport à π , définies par les formules suivantes :

$$s(x) := x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right), \quad c(x) = s'(x) := \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{(n-1/2)^2}\right).$$

On rappelle également la formule de Wallis :

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n-1/2)(n+1/2)}.$$

Notons que le n -ième terme du produit est le quotient du carré de la racine, n , de $\mathbf{s}(x)$, divisée par le produit $(n - 1/2)(n + 1/2)$ des racines de $\mathbf{c}(x)$ voisines de n . Donc, si l'on écrit $\alpha_n = n$, $\alpha'_n = n - 1/2$, les ensembles $\mathbb{Z}_+ = \{\alpha_n\}$, $\mathbb{Z}'_+ = \{\alpha'_n\}$ sont les racines positives de $\mathbf{s}(x)$, $\mathbf{c}(x)$ et on a⁶ :

$$(22) \quad \pi = \frac{1}{\alpha'_1} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\alpha'_n \cdot \alpha'_{n+1}}.$$

Supposons que l'on remplace les fonctions absolues en multipliant le réseau \mathbb{Z} par une constante $\xi : \mathbb{Z} \rightarrow \xi\mathbb{Z}$. Notons \mathbf{s}_ξ la fonction sinus associée :

$$\mathbf{s}_\xi(x) = x \prod \left(1 - \frac{x^2}{\xi^2 n^2} \right).$$

Puis

$$\mathbf{s}_\xi = \xi \circ \mathbf{s} \circ \xi^{-1}, \quad \mathbf{c}_\xi(x) := \mathbf{s}'_\xi(x) = \mathbf{c}(\xi^{-1}x)$$

et les ensembles de zéros de $\mathbf{s}_\xi(x)$, $\mathbf{c}_\xi(x)$ sont $\xi\mathbb{Z}$, $\xi\mathbb{Z}'$. Si l'on définit π_ξ en utilisant (22), avec les ensembles de zéros $\xi\mathbb{Z}$, $\xi\mathbb{Z}'$ au lieu de \mathbb{Z} , \mathbb{Z}' , nous voyons que

$$\pi_\xi = \pi/\xi,$$

et les réseaux normalisés coïncident :

$$\pi\mathbb{Z} = \pi_\xi \xi\mathbb{Z}.$$

On en conclut que les fonctions sinus et cosinus classiques, s'écrivent dans cette notation

$$\sin(x) = \mathbf{s}_\pi(x) = \mathbf{s}(\pi x),$$

(idem pour le cosinus). Elles proviennent donc d'une construction canonique qui ne dépend que la classe projective de \mathbb{Z} : si en guise de notion "absolue" du sinus nous avons utilisé $\xi\mathbb{Z}$ au lieu de \mathbb{Z} , nous aurions obtenu

$$\sin_\xi(x) = (\mathbf{s}_\xi)_{\pi_\xi}(x) = \mathbf{s}_\xi(\pi_\xi x) = \mathbf{s}(\pi x) = \sin(x).$$

Donc, le réseau $\pi\mathbb{Z}$, de même que les fonctions classiques $\sin(x)$ et $\cos(x)$, sont des invariants projectifs du réseau \mathbb{Z} .

Soit $\mathfrak{a} \subset K \subset \mathbb{R}$ un idéal quasicristallin fractionnaire de rang 1. On commence par définir le sinus et cosinus "absolus"

$$\mathbf{s}_\mathfrak{a}(x) := x \prod_{0 < \alpha \in \mathfrak{a}} \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2} \right), \quad \mathbf{c}_\mathfrak{a}(x) := \mathbf{s}'_\mathfrak{a}(x).$$

On observe immédiatement que les deux fonctions sont lisses, $\mathbf{s}_\mathfrak{a}(x)$ est impaire et $\mathbf{c}_\mathfrak{a}(x)$ est paire.

Proposition 14. *L'ensemble des zéros*

$$\mathfrak{a}' := \{\alpha' \in \mathbb{R} \mid \mathbf{c}_\mathfrak{a}(\alpha') = 0\}$$

est un quasicristal et on a la représentation en produit :

$$(23) \quad \mathbf{c}_\mathfrak{a}(x) = \prod_{0 < \alpha' \in \mathfrak{a}'} \left(1 - \frac{x^2}{\alpha'^2} \right).$$

⁶N.B. Il n'est pas possible de réintégrer le facteur $1/\alpha'_1$ dans le produit, en écrivant plutôt $\prod (\alpha_n/\alpha'_n)^2$: le résultat ne converge pas.

Démonstration. En effet, écrivons

$$c_{\mathbf{a}} = \prod_{0 < \alpha \in \mathbf{a}} \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right) - \sum_{0 < \alpha \in \mathbf{a}} \left(\frac{2x}{\alpha^2}\right) \prod_{0 < \beta \neq \alpha, \beta \in \mathbf{a}} \left(1 - \frac{x^2}{\beta^2}\right).$$

On constate qu'entre chaque paire de zéros consécutifs de \mathbf{a} , $c_{\mathbf{a}}$ change de signe précisément un fois. Autrement dit il y a un et un seul élément de \mathbf{a}' entre chaque paire de zéros consécutifs de \mathbf{a} et on peut énumérer les éléments de \mathbf{a}, \mathbf{a}' :

$$\cdots - \alpha_2 < -\alpha'_2 < -\alpha_1 < -\alpha'_1 < 0 < \alpha'_1 < \alpha_1 < \alpha'_2 < \alpha_2 < \cdots.$$

Donc, \mathbf{a}' est un ensemble de Delaunay. Afin de conclure que \mathbf{a}' est un quasicristal il suffit de montrer que $\mathbf{a}' - \mathbf{a}'$ est uniformément discret (voir [25], Théorème 9.1). Mais chaque paire d'éléments de $\mathbf{a}' - \mathbf{a}'$ est séparée par un élément de $\mathbf{a} - \mathbf{a}$ et donc $\mathbf{a}' - \mathbf{a}'$ est uniformément discret puisque $\mathbf{a} - \mathbf{a}$ en est. De ce que \mathbf{a} est uniformément discret il suit que le produit au membre de droite de (23) converge et a les mêmes racines que $c_{\mathbf{a}}(x)$. Puisque les deux expressions prennent la valeur 1 en $z = 0$, elles sont égales. \square

Comme dans la preuve de la Proposition 14, notons les éléments positifs de \mathbf{a}, \mathbf{a}' sous la forme $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots, 0 < \alpha'_1 < \alpha'_2 < \cdots$. En suivant à nouveau (22) on définit

$$\pi_{\mathbf{a}} := \frac{1}{\alpha'_1} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{\alpha'_n \cdot \alpha'_{n+1}}.$$

Les fonctions trigonometriques *normalisées* de la variable complexe z sont alors définies par

$$(24) \quad \sin_{\mathbf{a}}(\pi_{\mathbf{a}} z) := (\mathbf{s}_{\mathbf{a}})_{\pi_{\mathbf{a}}}(z) = \pi_{\mathbf{a}} z \prod_{0 < \alpha \in \mathbf{a}} \left(1 - \frac{z^2}{\alpha^2}\right)$$

et

$$\cos_{\mathbf{a}}(\pi_{\mathbf{a}} z) := (\mathbf{c}_{\mathbf{a}})_{\pi_{\mathbf{a}}}(z) = \prod_{0 < \alpha' \in \mathbf{a}'} \left(1 - \frac{z^2}{\alpha'^2}\right).$$

Enfin l'*exponentielle quasicristalline* associée à \mathbf{a} est donnée par

$$\exp_{\mathbf{a}}(\pi_{\mathbf{a}} iz) := \mathbf{e}_{\pi_{\mathbf{a}}}(z) := \cos_{\mathbf{a}}(\pi_{\mathbf{a}} z) + i \sin_{\mathbf{a}}(\pi_{\mathbf{a}} z).$$

Considérons à présent le solénoïde complexifié

$$\hat{\mathbb{S}}_{\mathbf{a}}^{\mathbb{C}} := \hat{\mathbb{S}}_{\mathbf{a}} \times i\mathbb{R},$$

solénoïde non compact dont toutes les feuilles sont isomorphes à \mathbb{C} . On observe que l'image de $\exp_{\mathbf{a}}(z)$ est contenue dans $\mathbb{C}^* \subset \mathbb{C}$: c'est une conséquence immédiate des formules de produits qui définissent $\sin_{\mathbf{a}}, \cos_{\mathbf{a}}$. La Figure 1 montre l'image par $\exp_{\mathbf{a}}$ d'un segment (compact) de $\mathbb{R} \subset \hat{\mathbb{S}}_{\mathbf{a}}^{\mathbb{C}}$, où $\mathbf{a} = A$, l'anneau quasicristallin associé à $K = \mathbb{Q}(\varphi)$, avec φ le nombre d'or. On observe la formation d'une suite de cardioïdes autosimilaires, manifestation expérimentale du théorème suivant :

Théorème 12 (\mathbf{a} -periodicité). *Soit \mathbf{a} un idéal quasicristallin modèle de rang 1. La fonction de variable complexe $z \mapsto \exp_{\mathbf{a}}(z)$ est continue par rapport à la topologie transversale de $\hat{\mathbb{S}}_{\mathbf{a}}^{\mathbb{C}}$ et s'étend donc en une fonction continue*

$$\exp_{\mathbf{a}} : \hat{\mathbb{S}}_{\mathbf{a}}^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

holomorphe le long des feuilles de $\hat{\mathbb{S}}_{\mathbf{a}}^{\mathbb{C}}$. L'image de $\hat{\mathbf{a}} \subset \hat{\mathbb{S}}_{\mathbf{a}}^{\mathbb{C}}$ est $\exp_{\mathbf{a}}(\hat{\mathbb{S}}_{\mathbf{a}}) \cap \mathbb{R}$. Si \mathbf{a} est répétitif, la restriction de $\exp_{\mathbf{a}}$ à $\hat{\mathbb{S}}_{\mathbf{a}}^{\mathbb{C}}$ n'est pas injective.

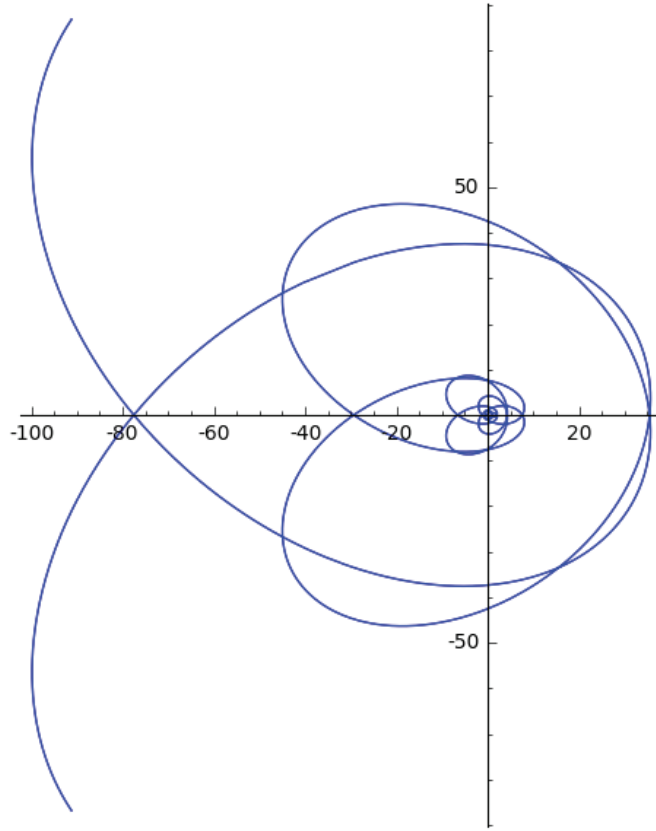


FIGURE 1. Une feuille d'un solénoïde quasicristallin associé au nombre d'or

Démonstration. Il suffit de démontrer l'existence d'une extension à \mathbb{S}_a . On rappelle que $\beta_i \rightarrow 0$ en \hat{a} si et seulement si pour tout $R > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $a - \beta_i$ et a coïncide sur l'intervalle $[-R, R]$ pour tout $i \geq M$. Par conséquent, de par sa définition comme produit infini, la fonction $\sin_a(\pi_a x)$, dans chaque intervalle $[-R, R]$, est uniformément proche de $\sin_a(\pi_a(x - \beta_i))$, $i \geq M$. Autrement dit, $\sin_a(\pi_a x)$ est transversalement continue en 0, uniformément sur les compacts. De la même manière $\sin_a(\pi_a x)$ possède la même propriété de convergence en chaque point du complété $\hat{a} \subset \hat{\mathbb{S}}_a$, d'où l'on déduit l'existence d'une extension à ce dernier. La convergence, transversalement et uniformément sur les compacts, de la fonction lisse $\sin_a(\pi_a x)$ implique la même propriété pour ses dérivées. En particulier, $\cos_a(\pi_a x)$ possède également une extension à $\hat{\mathbb{S}}_a$.

Il est clair que si $\exp_a(\pi_a i \hat{x}) = 1$, $\sin_a(\pi_a \hat{x}) = 0$, puis $\hat{x} \in \hat{a}$. Si a est répétitif, $\hat{\mathbb{S}}_a$ est un solénoïde compact minimal. En particulier, l'image de la feuille canonique $L_a \approx \mathbb{R}$ est dense dans l'image de $\hat{\mathbb{S}}_a$, ce qui implique qu'elle possède des auto-intersections.

□

Par contre, l'exponentielle usuelle ne s'étend pas à $\hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}$. Notons

$$\hat{\mathbb{C}}_{\mathfrak{a}} := \exp_{\mathfrak{a}}(\pi_{\mathfrak{a}} i \hat{\mathfrak{a}}) \subset \hat{\mathbb{E}}_{\mathfrak{a}} := \exp_{\mathfrak{a}}(\pi_{\mathfrak{a}} i \hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}) \subset \mathbb{C}^*.$$

Ci-dessous nous utiliserons les notations suivantes :

$$s_{\mathfrak{a}}(x) := \sin(\pi_{\mathfrak{a}} x), \quad c_{\mathfrak{a}}(x) := \cos(\pi_{\mathfrak{a}} x), \quad e_{\mathfrak{a}}(x) := \exp(\pi_{\mathfrak{a}} i x).$$

Observons que, puisque $s_{\mathfrak{a}}(\hat{\mathfrak{a}}) \equiv 0$,

$$1 \in \hat{\mathbb{C}}_{\mathfrak{a}} = c_{\mathfrak{a}}(\hat{\mathfrak{a}}) = \hat{\mathbb{E}}_{\mathfrak{a}} \cap \mathbb{R}$$

est l'image continue d'un ensemble de Cantor, donc est elle-même un ensemble de Cantor, ou bien finie. On regarde $\hat{\mathbb{C}}_{\mathfrak{a}}$ comme un "élargissement" de 1, de la même façon que l'on a regardé $\hat{\mathfrak{a}} \subset \hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}$ comme un élargissement de 0. La paire $(\hat{\mathbb{E}}_{\mathfrak{a}}, \hat{\mathbb{C}}_{\mathfrak{a}})$ est l'objet que l'on voudrait considérer comme un analogue d'un module de Drinfeld de rang 1 en caractéristique zéro.

Comme on le verra, ceci se complique du fait du défaut d'injectivité de $e_{\mathfrak{a}}$. Ce serait trop espérer que de vouloir faire de $e_{\mathfrak{a}}$ un homomorphisme dans le sens usuel entre la structure sommatoire dans la suite des solénoïdes $\{\hat{\mathbb{S}}_{\Sigma^n \mathfrak{a}}\}$ et la structure de groupe de \mathbb{C}^* . Plus précisément, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}} \times \hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}} & \xrightarrow{+} & \hat{\mathbb{S}}_{\Sigma \mathfrak{a}} \\ e_{\mathfrak{a}} \times e_{\mathfrak{a}} \downarrow & \text{non } \circlearrowleft & \downarrow e_{\Sigma \mathfrak{a}} \\ \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* & \xrightarrow{\times} & \mathbb{C}^* \end{array}$$

ne commute pas. Nous allons traiter de cet état de fait comme suit. En adoptant le point de vue de la théorie des courbes elliptiques on définira un (quasi) produit sur la famille $\{\mathbb{E}_{\Sigma^n \mathfrak{a}}\}$ en transférant la somme $+$ à $\{\mathbb{E}_{\Sigma^n \mathfrak{a}}\}$ grâce aux exponentielles, produit qui est en théorie à valeurs multiples puisque les $e_{\Sigma^n \mathfrak{a}}$ ne sont pas injectives. Précisément, pour $x, y \in \mathbb{E}_{\mathfrak{a}}$,

$$x \otimes_{\mathfrak{a}} y := \{z = e_{\mathfrak{a}}(\hat{z}) \mid \exists \hat{x} \in e_{\mathfrak{a}}^{-1}(x), \hat{y} \in e_{\mathfrak{a}}^{-1}(y) \text{ tels que } \hat{x} + \hat{y} = \hat{z}\}.$$

Si l'on considère l'application (éventuellement multivoque)

$$i_{\Sigma} : \mathbb{E}_{\mathfrak{a}} \longrightarrow \mathbb{E}_{\Sigma \mathfrak{a}}, \quad i_{\Sigma}(x) = \{e_{\Sigma \mathfrak{a}}(\hat{x}) \mid \hat{x} \in e_{\mathfrak{a}}^{-1}(x)\},$$

on voit immédiatement que

$$x \otimes_{\mathfrak{a}} 1 = i_{\Sigma}(x).$$

L'action de A sur $\hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}$ induit aussi une action (éventuellement multivoque)

$$(25) \quad x \mapsto x^{\alpha} := \{y = e_{\mathfrak{a}}(\alpha \hat{x}) \mid \hat{x} \in e_{\mathfrak{a}}^{-1}(x)\}$$

qui respecte le produit:

$$(x \otimes_{\mathfrak{a}} y)^{\alpha} = x^{\alpha} \otimes_{\mathfrak{a}} y^{\alpha},$$

où le côté gauche est l'ensemble des z^α , $z \in x \otimes_a y$. Plus précisément nous obtenons le cube commutatif ci-dessous, où α est l'application multivoque définie en (25) :

$$\begin{array}{ccccc}
 \hat{S}_a \times \hat{S}_a & \xrightarrow{+} & \hat{S}_{\Sigma a} & & \\
 \downarrow \alpha \times \alpha & \searrow e_a \times e_a & \downarrow \alpha & \searrow e_{\Sigma a} & \\
 & \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* & \xrightarrow{\otimes_a} & \mathbb{C}^* & \\
 & \downarrow \alpha \times \alpha & \downarrow & \downarrow \alpha & \\
 \hat{S}_a \times \hat{S}_a & \xrightarrow{+} & \hat{S}_{\Sigma a} & & \\
 \searrow e_a \times e_a & \downarrow \alpha \times \alpha & \searrow e_{\Sigma a} & \downarrow \alpha & \\
 & \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* & \xrightarrow{\otimes_a} & \mathbb{C}^* &
 \end{array}$$

On appelle la structure

$$(\mathbb{D}_a, \otimes_a)$$

avec son A -action *module de Drinfeld quasicristallin* sur A . Insistons sur le fait que les opérations algébriques mentionnées sont peut-être multivoques. Nous ignorons à l'heure actuelle si les définitions de i_Σ , \otimes_a , ainsi que l'action de A sont, en fait, univoques.

Néanmoins le théorème qui suit montre que l'action de A est univoque modulo changement d'échelle : elle est bien définie en tant qu'action sur les *phases*. On note d'abord que l'exponentielle définit une surjection canonique

$$[e_a] : \hat{S}_a \longrightarrow U(1) = \mathbb{C}^* / \mathbb{R}_+^\times$$

en composant avec la projection $\mathbb{C}^* \rightarrow U(1)$.

Théorème 13. *Soit $\gamma \in A$. Alors, il existe une fonction bien définie et continue*

$$\gamma : U(1) \longrightarrow U(1), \quad [x] := x \pmod{\mathbb{R}_+^\times} \longmapsto [x^\gamma] := x^\gamma \pmod{\mathbb{R}_+^\times}$$

telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \hat{S}_a & \xrightarrow{\gamma} & \hat{S}_a \\
 [e_a] \downarrow & & \downarrow [e_a] \\
 U(1) & \xrightarrow{\gamma} & U(1)
 \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. Définissons la fonction tangente de la façon habituelle :

$$t_a(z) := \tan_a(\pi_a z) = \frac{s_a(z)}{c_a(z)}.$$

Soient $x, y \in \mathbb{C}$. Alors $[e_a](x) = [e_a](y)$ si et seulement si $t_a(x) = t_a(y)$, si et seulement si

$$\begin{aligned}
\frac{x}{y} &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_n^2 - y^2}{\alpha_n^2 - x^2} \cdot \frac{(\alpha'_n)^2 - x^2}{(\alpha'_n)^2 - y^2} \right) \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_n^2 - (\gamma y)^2}{\alpha_n^2 - (\gamma x)^2} \cdot \frac{(\alpha'_n)^2 - (\gamma x)^2}{(\alpha'_n)^2 - (\gamma y)^2} \right) \\
&= \frac{\gamma x}{\gamma y}.
\end{aligned}$$

De la formule ci-dessus on déduit que $t_{\mathfrak{a}}(\gamma x) = t_{\mathfrak{a}}(\gamma y)$. Mais ceci implique que la fonction

$$U(1) \longrightarrow U(1), \quad [e_{\mathfrak{a}}](x) \longmapsto [e_{\mathfrak{a}}](\gamma x)$$

est bien définie et continue. □

En accord avec la notation on appelle l'application (multivoque) $\alpha : \mathbb{E}_{\mathfrak{a}} \rightarrow \mathbb{E}_{\mathfrak{a}}$, *racine α -ième quasicristalline* (par rapport à \mathfrak{a}). Notons que la racine α -ième habituelle n'est bien définie que sur \mathbb{C}^* privé d'un rayon et ne fournit donc pas une fonction bien définie sur le cercle $U(1)$.

Comme indiqué dessus la question reste ouverte de savoir si la racine α -ième quasicristalline est à valeurs multiples ou non. Quoi qu'il en soit, dans le cadre de cette théorie d' \mathfrak{a} -periodicité, il est tout à fait naturel que la racine α -ième quasicristalline soit multivoque, avec un ensemble de valeurs qui est typiquement un ensemble de Cantor, c'est-à-dire que $x \mapsto x^{\alpha}$ est une fonction bien définie à un ensemble de Cantor près. Dans cet esprit on peut définir la notion de racine α -ième de 1, à savoir un $z \in \mathbb{D}_{\mathfrak{a}}$ tel que $z^{\gamma} \subset C_{\mathfrak{a}}$. Plus généralement, pour chaque idéal quasicristallin entier $\mathfrak{m} \subset A$, on parlera d'une racine \mathfrak{m} -ième de 1, autrement dit un $z \in \mathbb{D}_{\mathfrak{a}}$ tel que $z^{\gamma} \subset C_{\mathfrak{a}}$ pour tout $\alpha \in \mathfrak{m}$. L'ensemble de toutes les racines \mathfrak{m} -ièmes de 1 coïncide évidemment avec l'image

$$e_{\mathfrak{a}} \left((\hat{\mathbb{S}}_{\mathfrak{a}}, \hat{\mathfrak{a}})[\mathfrak{m}] \right).$$

REFERENCES

- [1] Baake, Michael & Grimm Uwe, *Aperiodic Order. Volume 1: A Mathematical Invitation*. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications **149**. Cambridge University Press, Cambridge, 2013.
- [2] Bellissard, Jean; Benedetti, Ricardo & Gambaudo, Jean-Marc. Spaces of tilings, finite telescopic approximations and gap-labeling. *Commun. Math. Phys.* **261** 1–41 (2006).
- [3] Bertin, Marie José & Zaïmi, Toufik, Complex Pisot numbers in algebraic number fields. *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **353** (2015), 965–967.
- [4] Cassels, J.W.S., *An Introduction to Diophantine Approximation*. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, **45**. Cambridge University Press, New York, 1957.
- [5] Castaño Bernard, C. & Gendron, T.M., Modular invariant of quantum tori. *Proc. Lond. Math. Soc.* **109** (2014), Issue 4, 1014–1049.
- [6] Connes, A., An essay on the Riemann hypothesis, arXiv 1509.05576.
- [7] Diamond, Harold G. & Zhang, Wen-Bin (Cheung Man Ping), *Beurling Generalized Numbers*, Mathematical Surveys and Monographs **213**, AMS, Providence, 2016.
- [8] Demangos, L. & Gendron, T.M., Quantum j -Invariant in Positive Characteristic I: Definitions and Convergence. *Arch. Math.* **107** (1), 23–35 (2016).
- [9] Demangos, L. & Gendron, T.M., Quantum j -Invariant in Positive Characteristic II: Formulas and Values at the Quadratics. *Arch. Math.* **107** (2), 159–166 (2016).
- [10] Demangos, L. & Gendron, T.M., Quantum Drinfeld Modules I: (2017) arXiv:1607.03027.

- [11] Demangos, L. & Gendron, T.M., Quantum Drinfeld Modules II: Ray Class Fields. (2017) arXiv:1709.05337
- [12] Deninger, C., Some analogies between number theory and dynamical systems on foliated spaces. *Documenta Mathematica*, Extra Volume ICM I (1998), 163–186.
- [13] Drinfeld, V.G., Elliptic modules. *Math Sbornik* **94** (1974), 594–627.
- [14] Drinfeld, V.G., Langlands conjecture for $GL(2)$ over function field. *Proc. of Int. Congress of Math. (Helsinki, 1978)*, Acad. Sci. Fennica (1988), 28–43.
- [15] Gekeler, E.-U., Zur Arithmetik von Drinfeld Moduln, *Math. Ann.* **262** (1983), 167–182.
- [16] Goss, D., *Basic structures of Function Field Arithmetic*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [17] Hayes, D., A brief introduction to Drinfeld modules, in *The Arithmetic of Function Fields* (ed. D. Goss, D.R. Hayes & M.I. Rosen), Ohio State U. Mathematical Research Institute Publications **2**, pp. 313–402, Walter de Gruyter, Berlin, 1992.
- [18] Hof, Uniform distribution and the projection method. in *Quasicrystals and Discrete Geometry* (J. Patera, ed.), Fields Institute Monographs **10**, AMS, Providence, 1998.
- [19] Lascar, Daniel, *La Théorie des Modèles en Peu de Maux*, Cassini, Paris, 2009.
- [20] Manin, Yu., Real multiplication and noncommutative geometry, in *The Legacy of Niels Henrik Abel*, pp. 685–727, Springer-Verlag, New York, 2004.
- [21] Meyer, Yves, *Nombres de Pisot, Nombres de Salem et Analyse Harmonique*, LNM **117**, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
- [22] Meyer, Yves, *Algebraic Numbers and Harmonic Analysis*, North-Holland, 1972.
- [23] Meyer, Yves, Quasicrystals, Diophantine approximation and algebraic numbers. dans *Beyond Quasicrystals*, pages 3–16, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [24] Montgomery, Hugh L. & Vaughan, Robert C., *Multiplicative Number Theory I. Classical Theory*. Cambridge studies in advanced mathematics **97**. Cambridge U. Press, Cambridge, 2007.
- [25] Moody, R., Meyer sets and their duals. in “The Mathematics of Long-Range Order (Waterloo, ON, 1995)”. NATO Advanced Science Institutes Series C: Mathematical and Physical Sciences, **489**, pp. 403–441, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.
- [26] Narkiewicz, W., *Elementary and Analytic Theory of Algebraic Numbers*, 3rd Edition. Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [27] Pink, R., discussion privée avec le premier auteur, le 21 octobre 2017.
- [28] Pisot, Charles, La répartition modulo 1 et nombres algébriques. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa*, II, Ser. 7 (1938), 205–248.
- [29] Rosen, M.I., The Hilbert class field in function fields. *Expo. Math* **5** (1987), 365–378.
- [30] Salem, Raphaël, *Algebraic numbers and Fourier analysis*. Heath mathematical monographs, Boston, 1963.
- [31] Schappacher, N., On the history of Hilbert’s 12th problem. A comedy of errors. *Séminaires et Congrès* **3**, Société Mathématique de France, 1998, 243–273.
- [32] Serre, J.-P., Complex multiplication, in *Algebraic Number Theory* (ed. J.W.S. Cassels and A. Fröhlich), 2nd edition, pp. 293–296, London Mathematical Society, 2010.
- [33] Silverman, *Advanced Topics in the Arithmetic of Elliptic Curves*. Graduate Texts in Mathematics **151**. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [34] Thakur, D.S., *Function Field Arithmetic*, World Scientific, Singapore, 2004.
- [35] Weil, A., *Basic Number Theory*, Springer-Verlag, Berlin.
- [36] Weil, A., On the Riemann hypothesis in function-fields. *Oeuvres Scientifiques*, Volumes I, II & III, 2nd Edition, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [37] Weil, Numbers of solutions of equations in finite fields. *Oeuvres Scientifiques*, Volumes I, II & III, 2nd Edition, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNIDAD CUERNAVACA, UNAM, AV. UNIVERSIDAD s/n, LOMAS DE CHAMILPA, CUERNAVACA, MORELOS, CP62180, MÉXICO

E-mail address: `tim@matcuer.unam.mx`

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE JUSSIEU ET CNRS, UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT, BÂTIMENT SOPHIE GERMAIN, 8 PLACE AURÉLIE NEMOURS, PARIS 75013, FRANCE

E-mail address: `eric.leichtnam@imj-prg.fr`

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE JUSSIEU ET CNRS, UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE, 4 PLACE JUSSIEU, PARIS 75005, FRANCE

E-mail address: `pierre.lochak@imj-prg.fr`