PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Une propriété des exposants de Kowalevska des systèmes hamiltoniens; critère de Painlevé.* Note de **Pierre Lochak,** présentée par René Thom.

Nous montrons ci-dessous que, sous certaines conditions, les exposants de Kowalevska (ou « résonances ») associés à une singularité d'un système hamiltonien, apparaissent groupés par paires; ceci permet de clarifier l'application du critère de Painlevé aux systèmes hamiltoniens.

MATHEMATICAL PHYSICS. — A property of Kowalevska exponents of Hamiltonians systems: Painlevé property.

We show below that, under certain conditions, the Kowalevska exponents (also called "resonances") attached to a singularity of a hamiltonian system are paired in a certain way; this helps to clarify the applicability of the Painlevé property to hamiltonian systems.

A la suite d'articles [1] où était reconnu le lien entre la propriété de Painlevé et la complète intégrabilité de certaines équations aux dérivées partielles, cette même propriété a été largement employée comme critère dans la recherche de systèmes dynamiques intégrables de dimension finie [2]; c'est d'ailleurs ainsi, qu'il y a près d'un siècle, Sonia Kowalevska avait découvert le cas intégrable du mouvement du corps solide qui porte aujourd'hui son nom [3].

Ce critère heuristique peut s'énoncer ainsi, sous sa forme la plus simple : « un système différentiel à coefficients algébriques ne peut posséder davantage d'intégrales premières algébriques que d'exposants de Kowalevska (encore appelés résonances; voir définition ci-dessous) rationnels ». Des versions plus faibles ont été proposées, sans qu'on puisse donner un énoncé précis. De fait, la situation théorique demeure confuse.

La définition même de « complète intégrabilité » reste discutée; une définition a été proposée par M. Adler et P. Van Moerbecke pour les systèmes hamiltoniens [4], qui s'inspire d'exemples récents de systèmes algébriques linéarisables sur la jacobienne de courbes algébriques. Elle reste ce faisant restrictive. Une seconde définition a été proposée par H. Yoshida [5], dans un article qui a le mérite d'énoncer des propositions précises dans un domaine où elles font défaut; la voici :

« Un système dynamique $\dot{x}_i = F_i(x_1, \ldots, x_n)$ (F_i rationnelles) de dimension n, hamiltonien ou non, sera dit « algébriquement intégrable » s'il existe k $(1 \leq k \leq n-1)$ intégrales premières algébriques $(\Phi_i)_{i=1}^{i=k}$ et $n-k-1$ intégrales premières $(\Omega)_{i=k+1}^{i=n-1}$ multiformes, construites comme les intégrales de formes fermées sur la variété algébrique de dimension $n-k$ définie par $\Phi_i = \alpha_i$ $(i=1, \ldots, k)$:

$$\Omega_i = \sum_{i=1}^{n-k} \int_{x_0}^{x_j} \varphi_{ij}(x_i, \ldots, x_n)\, dx_j, \qquad \Phi_i = \alpha_i\ (=\mathrm{Cte}). \text{ »}$$

Cette définition apparemment artificielle a pour but d'inclure à la fois les systèmes non hamiltoniens et les systèmes hamiltoniens, pour lesquels $k=n/2$ et les Ω_i sont construits à l'aide de la théorie de Hamilton-Jacobi. Mais à part ce cas hamiltonien, on ne connaît pas d'exemple où k soit différent de $n-1$.

Le but de cette Note est de montrer que l'on peut légitimement traiter séparément les cas non hamiltoniens et hamiltoniens, dans la mesure où pour ces derniers, les exposants de Kowalevska apparaissent par paires, sous certaines conditions.

Rappelons enfin que pour les systèmes hamiltoniens à hamiltonien rationnel, la recherche des intégrales algébriques se réduit à celle des intégrales rationnelles ([6], p. 358).

0249-6321/85/03000369 $ 2.00

De plus, si la propriété de Painlevé détecte l'existence de telles intégrales, ou du moins fournit des conditions nécessaires, leur absence n'implique pas forcément une grande complexité; ainsi l'équation à coefficients constants : $\ddot{x}-(\mu_1+\mu_2)\dot{x}+\mu_1\mu_2 x=0$ ne possède-t-elle d'intégrale algébrique que si μ_1 et μ_2 sont rationnellement dépendants.

Soit donc un système hamiltonien autonome :

$$\text{(1)}\qquad \dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p};\qquad \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q};\qquad q=(q_1,\ldots,q_f);\qquad p=(p_1,\ldots,p_f).$$

où H est algébrique en p et q. On suppose l'existence d'une trajectoire singulière telle qu'au voisinage de la singularité :

$$\text{(2)}\qquad q_i\sim\alpha_i t^{-g_i};\qquad p_i\sim\beta_i t^{-g_{i+f}};\qquad g_i>0;\qquad g_{i+f}>0;\qquad i\in\{1,f\}.$$

On notera que les g_k sont nécessairement rationnels.

Enfin on suppose que $H(p,q)$ peut s'écrire : $H(p,q)=H_1(p,q)+H_2(p,q)$ où :

H_1 est homogène de poids h (rationnel positif), c'est-à-dire :

$$\text{(3)}\qquad H_1(\alpha^{g_1}q_1,\ldots,\alpha^{g_f}q_f,\alpha^{g_{f+1}}p_1,\ldots,\alpha^{g_{2f}}p_f)=\alpha^h H(q,p);\qquad \alpha\in\mathbb{R}.$$

H_2 est d'ordre inférieur :

$$|H_2(q_{(t)},p_{(t)})|\leqq o(t^{-h}).$$

Ces hypothèses généralisent la propriété d'« invariance par similarité » de H. Yoshida, et sont assez peu restrictives. On demande que la partie dominante de l'hamiltonien au voisinage de la singularité soit homogène.

Exemple. — L'hamiltonien de Henon-Heiles :

$$\text{(4)}\qquad H(q,p)=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)+q_1^2q_2+\frac{\varepsilon}{3}q_2^3+\frac{1}{2}(A\,q_1^2+B\,q_2^2),$$

vérifie :

$$g_1=g_2=2;\qquad g_3=g_4=3;\qquad h=6;$$

$$H=H_1+H_2;\qquad H_2=\frac{1}{2}(A\,q_1^2+B\,q_2^2).$$

Les hypothèses faites sur H impliquent les égalités suivantes :

$$\text{(5)}\qquad \forall i\in\{1,f\},\quad g_i+g_{i+f}=h-1,$$

que l'on vérifie par inspection des équations du mouvement (1) au voisinage de la singularité.

L'équation aux variations s'écrit par ailleurs :

$$\text{(6)}\qquad \dot{\xi}=\frac{\partial^2 H}{\partial p\,\partial q}\xi+\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\eta;\qquad \dot{\eta}=-\frac{\partial^2 H}{\partial q^2}\xi-\frac{\partial^2 H}{\partial p\,\partial q}\eta\qquad \text{où}\qquad \dot{x}=J.\nabla^2 H\,x,$$

avec $x=(\xi,\eta)$, $J=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ et $\nabla^2 H$ la matrice jacobienne de H.

Elle possède des solutions de la forme :

$$\xi_i\sim t^{\rho-g_i}\xi_{i\,0};\qquad \eta_i\sim t^{\rho-g_{i+f}}\eta_{i\,0},$$

où ρ est valeur propre de la matrice K :

$$\text{(7)}\qquad K=J\nabla^2 H_1(\alpha_1,\ldots,\alpha_f,\beta_1,\ldots,\beta_f)+\Gamma;\qquad \Gamma=\mathrm{diag}(g_1,\ldots,g_{2f}).$$

Les valeurs propres ρ sont appelées *exposants de Kowalevska* (« résonances » dans la littérature sur la propriété de Painlevé) et le polynôme caractéristique $K(\rho)=\det(K-\rho\,\mathbf{1})$ *déterminant de Kowalevska* associé au système (1) et à la singularité (2).

Du fait de la forme de (6), deux solutions quelconques $x_1(t)$ et $x_2(t)$, vérifient :

(8) $$^t x_1\, J\, x_2 = \mathrm{Cte}.$$

x_α vérifie :

$$x_\alpha \sim (\xi_{i\,0}^{(\alpha)}\, t^{\rho_\alpha - g_i},\ \eta_{i\,0}^{(\alpha)}\, t^{\rho_\alpha - g_{i+f}}), \qquad i=\{1, \ldots, n\}, \alpha=1, 2,$$

ce qui permet de réécrire (8) sous la forme :

(8 *bis*) $$t^{\rho_1+\rho_2+1-h}\,{}^t x_{10}\, J\, x_{20} = \mathrm{Cte} \quad \text{où} \quad x_{\alpha\,0} = (\xi_{i\,0}^{(\alpha)}, \eta_{i\,0}^{(\alpha)}), \quad \alpha = 1 \text{ ou } 2,$$

et l'on a utilisé (5).

L'égalité (8 *bis*) implique ${}^t x_{10}\ J\ x_{20}=0$ si $\rho_1+\rho_2 \neq h-1$. Mais si l'on conserve x_1 fixe et que l'on fait varier x_2, parmi les trajectoires de (6), on va montrer que les vecteurs x_2 engendrent l'espace; de là on concluera que $\rho_1+\rho_2=h-1$ pour un certain ρ_2, lorsque ρ_1 est fixé.

Soient donc x_1 et x_2 correspondant aux solutions de (6) d'exposants ρ_1 et ρ_2; on a :

(9) $$J\,.\,\nabla^2 H_1\,.\,x_{\alpha\,0} = \rho_\alpha x_{\alpha\,0} - \Gamma\, x_{\alpha\,0}; \qquad \alpha=1, 2, \qquad \Gamma = \mathrm{diag}(g_i).$$

D'où :

(10) $$\begin{cases} -\rho_2\,{}^t x_{10}\, J\, x_{20} = {}^t x_{10}\,.\,\nabla^2 H_1\,.\,x_{20} - {}^t x_{10}\, J\, \Gamma\, x_{20}, \\ -\rho_1\,{}^t x_{20}\, J\, x_{10} = \rho_1\,{}^t x_{10}\, J\, x_{20} = {}^t x_{20}\, \nabla^2 H_1\,.\,x_{10} - {}^t x_{20}\, J\, \Gamma\, x_{10}. \end{cases}$$

Et en soustrayant, on obtient :

(11) $$(\rho_1+\rho_2)\,{}^t x_{10}\, J\, x_{20} = {}^t x_{10}\,(J\,\Gamma + \Gamma\, J)\, x_{20},$$

où l'on a utilisé ${}^t J = -J = J^{-1}$ et $\nabla^2 H_1$ symétrique. (5) implique d'autre part :

$$J\,\Gamma + \Gamma\, J = (h-1)\, J,$$

ce qui permet de réécrire (11) sous la forme :

(11 *bis*) $$(\rho_1+\rho_2+1-h)\,{}^t x_{10}\, J\, x_{20} = 0.$$

Cette égalité implique que la matrice formée par les $x_{i\,0}$ $(i=1, \ldots, 2f)$ est symplectique, une fois ces vecteurs convenablement normalisés. On a donc montré la propriété suivante :

Proposition. — *Les exposants de Kowalevska du système hamiltonien* (1), *où* H *est algébrique et vérifie les hypothèses énoncées plus haut se répartissent par paires* (ρ, ρ') *telles que :*

(12) $$\rho + \rho' = h - 1.$$

Nous terminons par quelques remarques :

1. Dans son article [5], H. Yoshida montre — pour un système homogène — qu'*à une intégrale première du système* correspond une paire d'exposants vérifiant (12). Nous montrons ici que cette propriété d'accouplement des exposants n'est pas liée à l'existence d'intégrales premières.

2. Dans le cas général, le résultat obtenu ci-dessus apporte deux précisions :

— D'un point de vue théorique, il rend inutile la définition peu naturelle de H. Yoshida et montre comment la structure symplectique influe sur la distribution des exposants de Kowalevska.

— Du point de vue pratique de l'application du critère de Painlevé, cette proposition implique qu'il suffit d'étudier les valeurs d'une *moitié* seulement des exposants de Kowalevska, h étant toujours un nombre rationnel immédiat à calculer.

3. Dans un système autonome, -1 est toujours exposant (et correspond à une translation dans le temps); en particulier, le déterminant de Kowalevska d'un système hamiltonien algébrique autonome à deux degrés de liberté, satisfaisant aux hypothèses ci-dessus, s'écrira :

$$K(\rho)=(\rho+1)(\rho-h)(\rho^2+(1-h)\rho+\gamma), \tag{13}$$

où seul γ est à déterminer pour chaque système et chaque singularité particuliers. Par exemple, avec les notations précédentes, et pour l'hamiltonien de Hénon-Heiles :

$$H=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)+q_1^2 q_2+\frac{\varepsilon}{2}q_2^3+\frac{1}{2}(A\,q_1^2+B\,q_2^2). \tag{14}$$

On a :

$$g_1=g_2=2; \quad g_3=g_4=3; \quad h=6. \tag{15}$$

$$K(\rho)=(\rho+1)(\rho-6)(\rho^2-5\rho+\gamma(\varepsilon)),$$

avec $\gamma(\varepsilon)=6(2-\varepsilon)$ qui seul dépend du paramètre. Ici, la proposition fournit sans calcul le deuxième coefficient du trinôme.

Remise le 18 juin 1984, acceptée le 28 janvier 1984.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] M. J. ABLOWITZ, A. RAMANI et H. SEGUR, *J. Math. Phys.*, 21, (4), 1980, p. 715, et *J. Math. Phys.*, 21, (5), 1980, p. 1006.

[2] T. BOUNTIS, A singularity analysis of integrability and chaos in dynamical systems, in *Singularity and dynamical systems*, North Holland, 1984, S. PNEUMATIKOS éd. (La bibliographie de cet article est très complète sur le sujet traité.)

[3] S. KOWALEVSKA, *Acta. Math.*, 12, 1889, p. 177 et *Acta. Math.*, 14, 1889, p. 81.

[4] M. ADLER et P. VAN MOERBECKE, *Invent. Math.*, 67, 1982, p. 297 et *Comm. in Math. Phys.*, 83, 1982, p. 85.

[5] H. YOSHIDA, Necessary conditions for the existence of algebraic first integrals, parties 1 et 2, *Journal of Celestial Mechanics*, 1984 (à paraître).

[6] E. T. WHITTAKER, *Analytical Dynamics*, Cambridge University Press, 1964.

E.N.S., Centre de Mathématiques, 45, *rue d'Ulm*, 75230 *Paris Cedex* 05.