Quelques remarques sur l'itinéraire mathématique d'Alexandre Grothendieck

Pierre Lochak

Les mathématiques ont occupé Alexandre Grothendieck à temps plein durant 25 ans, de 1945 à 1970, dont grosso modo 5 années d'apprentissage et 20 années de publications (1950-1970). S'y ajoutent plusieurs manuscrits importants et influents, produits durant environ une décennie (1981-1991). Les vingt années de travail mathématique productif, universitaire, à temps plein, représentent moins d'un quart de la longue vie d'Alexandre Grothendieck, mais durant ce laps de temps on peut dire que les mathématiques l'ont entièrement absorbé, tout comme d'autres activités à d'autres périodes de sa vie: il s'est toujours donné corps et âme, l'expression n'est ici pas vaine, à ce qu'il entreprenait.

Deux singularités toutefois des mathématiques: la première qu'il a peine à reconnaître ou du moins à énoncer, évidente mais qu'il n'en faut pas moins souligner une fois: il s'y est montré génial, et ce de plus d'une manière qui est elle-même pratiquement inédite et dont il n'est pas sûr qu'elle se reproduise avant longtemps; au demeurant l'inédit par définition ne se reproduit pas. Sans cela, et malgré tout ce qu'il a pu faire, montrer, et dire par ailleurs dans une vie si pleine, il y a fort à parier que nous ne nous serions pas réunis pour évoquer sa personne et ses écrits. Deuxième singularité sur laquelle cette fois il insiste lui-même: ce plein investissement dans les mathématiques a été cause de ce qu'il nomme sans ambages une "stagnation spirituelle", tout au long de cette même période d'un quart de siècle; ce n'est toutefois pas mon sujet que d'approfondir ici ce triste sentiment ou cette constatation.

Donner en quelques pages des indications sur l'itinéraire mathématique d'Alexandre Grothendieck, sa spécificité, ses apports énormes et apparemment divers, constitue à l'évidence une impossible gageure, sachant qu'il s'agit, on le sait, des mathématiques les plus "sophistiquées" et les plus "abstraites" qui aient jamais été produites. Mais précisément il convient de placer ces deux adjectifs – sophistiqué et abstrait – entre guillemets et j'aimerais tâcher de donner à apercevoir en quoi d'une part cet itinéraire mathématique, malgré ou avec toute sa singularité, s'inscrit tout de même dans le fil d'une *histoire* (ce qui ne retranche évidemment rien à son originalité mais permet de mieux l'appréhender), d'autre part comment ces mathématiques ne sont pas détachées des *objets* mathématiques, que même elles renouvellent souvent le point de vue sur des objet *classiques*, et que donc elles ne sont pas au fond "abstraites". D'ailleurs "abstrait" est un qualificatif passablement péjoratif, par exemple en philosophie; ainsi Schelling, qui s'y connaissait, pouvait critiquer son ancien ami Hegel en traitant sa philosophie d'abstraite – et vice versa. Quant à "sophistiqué", on conviendra peut-être que c'est là au fond une question d'habitude ou d'accoutumance.

Pour s'introduire aux mathématiques de Grothendieck, rien ne vaut mieux que d'écouter ce que lui-même en dit ou plutôt en écrit, en particulier dans *Récoltes et Semailles* et plus spécifiquement encore dans ce beau texte qui se donne explicitement comme une *Promenade à travers une œuvre*, la sienne bien évidemment. Rien n'est simple avec Grothendieck, jusques et y compris les tables des matières, mais on trouvera ces 65 pages admirables dans la sorte d'introduction ou plutôt de *Prélude en quatre mouvements* à *Récoltes et Semailles.* On ne saurait trop en recommander la lecture: elles constituent sans doute la meilleure des portes d'entrée vers les mathématiques grothendieckiennes. On y consultera entre autres une liste (p.21) établie donc par Grothendieck lui-même, de ce qu'il considère comme les douze thèmes majeurs de son œuvre. Cette liste devenue à son tour presque célèbre a beaucoup fait rêver ou frémir des mathématiciens émerveillés et parfois un peu écrasés par son ampleur. Mais ici je ne voudrais pas me contenter de commenter ou résumer ce qui se présente déjà comme une sorte de guide ou de commentaire. Disons plutôt qu'il s'agit de construire, ou plus modestement de "bricoler" une sorte de caisse de résonance qui puisse amplifier à l'adresse d'une oreille intérieure non prévenue le discours que Grothendieck tient lui-même à propos de son œuvre.

Il m'a semblé qu'une manière de s'y prendre consistait à mettre en place des oppositions pertinentes. On commencera donc par nommer des couples très généraux qu'il conviendra de préciser un peu plus techniquement par la suite. En voici quatre: objets *vs* relations, continu *vs* discret, linéaire *vs* non linéaire, géométrie algébrique *vs* topologie algébrique. Précisons tout de suite qu'en un sens il s'agit moins d'oppositions que de polarités, et que celles-ci ont précisément tendance ou vocation à s'émousser, voire à s'effacer tandis que monte la marée du concept. Elles n'en restent pas moins significatives et peut-être éclairantes. La suite de ce texte va essentiellement se donner pour tâche de les préciser et les commenter brièvement tout en les tressant, sachant qu'elles ne sont nullement indépendantes les unes des autres.

La premier couple, objets/relations, est en un sens le plus évident, celui sur lequel on a énormément glosé sans que cette expression soit en rien de péjorative. Il convient sans doute de commencer par là, à condition de ne pas s'obnubiler sur cette unique polarité comme c'est parfois le cas. On dit souvent que Grothendieck est celui qui a fait passer les mathématiques, une partie de celles-ci du moins, de la théorie des ensembles à la théorie des catégories. Ce n'est évidemment pas faux. Grothendieck a très certainement amorcé une véritable mutation, qui illustre aussi l'incroyable pouvoir d'adaptation du cerveau humain: ce qui était à peine reçu par une poignée d'initiés il y a un demi-siècle est maintenant enseigné et plus ou moins assimilé par des centaines de personnes de par le monde, et cette mutation a été poursuivie et approfondie, pas forcément au goût du précurseur mais c'est là une autre question, celle de l'"enterrement", alias le génie *vs* la ruse de la raison. Il est sûr du moins que la tension objets/relations s'est historiquement transcrite dans la polarité théorie des ensembles *vs* théorie des catégories, et que basculer vers la seconde a consisté d'abord à mettre l'accent sur la relation (voir très brièvement ci-dessous). Bourbaki s'était appuyé sur la théorie des ensembles pour mettre en place une sorte de carte des mathématiques, ou plutôt de nombreuses cartes qui avaient vocation à découper le réel mathématique (de l'existence duquel personne ne doute sérieusement dans le quotidien de la pratique), suivant différentes relations d'équivalence. Structurer un vaste paysage d'objets suivant les strates de diverses *relations d'équivalence*, le tout sous l'égide de la théorie (presque naïve) des ensembles, voilà comme un résumé beaucoup trop général mais peut-être point trop inattentif de la grande entreprise bourbakiste, une description qui au demeurant suggère, presque au détour de la plume, un certain caractère *statique*. Or, dès l'immédiat après-guerre, certains membres de Bourbaki ressentirent le besoin de réécrire le fameux traité suivant une théorie des catégories née durant la guerre et à la naissance de laquelle 'Samy' Eilenberg, devenu entretemps membre de Bourbaki, avait largement contribué. Et pourtant l'idée fut abandonnée, peut-être simplement devant la perspective de tout devoir refonder (et réécrire) à neuf. Ajoutons que cette décision collégiale et qui n'alla pas de soi ne fut sans doute pas étrangère au divorce de Grothendieck d'avec Bourbaki, dont il continuera bien entendu à fréquenter de nombreux membres. D'une classification des objets il s'agissait de passer à une dynamique des relations, étant entendu que de telles formules un peu faciles et souvent colportées à plaisir – voire *ad nauseam* – sous une forme ou une autre, sont toujours un peu courtes autant qu'injustes.

Quoi qu'il en soit il vaut la peine d'illustrer très – beaucoup trop – rapidement, en quoi cet accent mis sur la relation permet de 'comprendre' le passage des topologies 'classiques' aux topologies dites 'de Grothendieck', qui constituent sans doute l'un des apports et des legs les plus caractéristiques de ce dernier, sachant que ces topologies sont elles-mêmes indissociables des notions de site et de topos. Tout ceci constitue aujourd'hui une trousse de ce qu'il appelle des outils "passe-partout", du moins dans un certaine aire mathématique. Les références abondent et je me contenterai donc de quelques lignes allusives mais en principe facilement compréhensibles, éventuellement après une petite recherche (y compris en ligne). Si donc X est un espace (un mot qui en soi ne veut pas dire grand-chose), le munir d'une topologie revient classiquement à se donner un ensemble de sous-espaces dits 'ouverts', vérifiant certaines propriétés ensemblistes très simples qui en font précisément une 'tribu'. Autrement dit on se donne une collection de sous-ensembles U ($U \subset X$) qui sont déclarés ouverts par définition et qui entre autres recouvrent X tout entier (i.e. dont l'union coïncide avec X).

C'est dans ce genre de circonstances que le génie si particulier de Grothendieck fait merveille. Qu'ajouter à cette situation qui est déjà si 'simple', consistant à peine en quelques axiomes, ceux de la topologie générale, eux-mêmes produits d'une assez longue décantation? Eh bien l'on s'intéressera à ce petit signe d'inclusion ($\subset$) passé un peu inaperçu ou qui allait de soi, et ce pour le 'dynamiser'. Et d'abord dans la notation: écrivons $U \hookrightarrow X$ plutôt que $U \subset X$. Rien n'a changé et pourtant cette flèche insiste sur le fait que l'inclusion est bien une relation (et d'ailleurs une relation d'ordre). Mais alors... et c'est exactement à cet endroit, en caricaturant un peu, que se situe le 'génie', mais alors pourquoi ne pas utiliser d'autres relations pour définir de nouvelles 'topologies'? On substitue donc cette fois $U \to X$ à $U \hookrightarrow X$ et... le tour est joué, ou presque. Les 'ouverts' ont cessé d'être des *parties* de X pour devenir des *points de vue* partiels sur ce même objet X. À partir de là on peut – on doit – écrire des milliers, voire aujourd'hui des millions de pages qui explorent quantité de nouvelles possibilités nées de ce que l'on peut nommer un abandon de la méréologie. Il resterait d'ailleurs à tourner les symboles d'un quart de tour, écrivant plutôt U au-dessus de X pour retrouver, avec cette polarité horizontal *vs* vertical, d'autres oppositions plus techniques, comme unions ou limites injectives (alias colimites) *vs* limites projectives (alias limites), sans parler de ce grand slogan grothendickien qui dit que 'tout est relatif'. Mais je laisserai au lecteur curieux le plaisir de s'enfoncer plus avant dans ce monde pratiquement infini.

Un auteur sérieux et autorisé a pu écrire (en anglais) que, pour résumer, Grothendieck et ses élèves avaient "résolu certaines grandes questions de la géométrie algébrique à l'aide d'outils catégoriques". Ce n'est évidemment pas faux mais c'est aussi insuffisant, voire trompeur. Certes Grothendieck a été inspiré par les conjectures de Weil et il en a résolu une partie en les plaçant dans un contexte plus large, que donc elles ont suscité et dans lequel les catégories (abéliennes) jouent un rôle-clef. Mais il semble plus fidèle à son génie d'écrire qu'en un sens il posait sur une partie du monde un 'regard catégorique'. Ce regard lui était si naturel qu'il ne le mentionne guère explicitement dans ses textes. On ajoutera cependant que l'écriture de la *Poursuite des Champs* a naturellement poursuivi ce programme et qu'elle s'inscrit en un sens dans le grand mouvement qui aujourd'hui continue sous la forme d'une floraison de recherches sur les catégorie supérieures, dans lesquelles on peut bien dire que les objets ont disparu, ou du moins peuvent être considérés comme des '0-relations'. Il n'empêche que l'objet de la *Promenade* reste en un sens classique et ressortit à la théorie de l'homotopie, donc d'abord à la topologie algébrique.

En ouvrant la *Promenade* on rencontre, plus immédiatement que les catégories, le couple continu/discret et "l'outil cohomologique". Ce dernier est proprement *linéaire* et la polarité homologie/homotopie s'inscrit dans celle, plus large et déjà mentionnée, du linéaire *vs* non linéaire. Je serai un peu paradoxalement très succinct sur le thème discret *vs* continu, précisément parce qu'il se trouve explicitement au cœur de la *Promenade*, donc aussi de l'œuvre de Grothendieck vu par lui-même. Je me permettrai d'ailleurs de signaler le livre *Mathématiques et finitude*, que j'ai moi-même publié (éds. Kimé, 2015) et dans lequel cette polarité joue également un rôle central, non sans lien avec Grothendieck. Disons simplement l'évidence que, partant des conjectures de Weil que je ne rappellerai pas mais qui elles-mêmes traduisent et résument de géniale façon des questions diophantiennes, autrement dit des questions sur les solutions entières de systèmes polynomiaux à coefficients entiers, partant de ces conjectures donc, Grothendieck met en place une vision nouvelle et des outils afférents qui vont permettre de pratiquer la géométrie sur des espaces discrets plus ou moins comme c'était déjà le cas sur les variétés continues, par exemple réelles ou complexes. Comment cela? En tressant les oppositions ou les pôles qui sont apparus plus hauts: objets/relations, ou encore ensembles/catégories (aujourd'hui catégories supérieures); le passage fournit en particulier ces nouvelles formes de topologies qui permettent d'analyser le discret et de le rendre en un sens homologue au continu, c'est-à-dire localement contractile, ou du moins localement acyclique, tout en conservant une véritable richesse topologique (pas simplement la topologie discrète bien sûr). Pour ce faire, outre les topologies elles-mêmes, c'est l'algèbre homologique (donc linéaire) dans les catégories abéliennes (un mot plus ou moins synonyme ici de 'linéaire') qui va constituer l'outil principal.

De fait, pour étudier ces topologies dites 'de Grothendieck', autrement dit ces 'sites' qui sont issus d'un regard catégorique sur ces 'espaces' discrets, pour les étudier, pour les sonder, on emploie d'abord et surtout le mètre ou plutôt l'éventail *des* mètres cohomologiques (expressions grothendieckiennes à nouveau). C'est là que la linéarité fait son apparition. Ici linéaire et abélien (voire nilpotent, voire pronilpotent) consonnent, et les catégorie abéliennes, mises au point en partie par Grothendieck lui-même (voir en particulier un fascicule que l'on peut bien nommer SGA 0, isssu d'un séminaire antérieur à l'installation de l'IHÉS dans les locaux actuels), constituent comme le milieu naturel de l'algèbre homologique. Ceci dit on soulignera que, plus largement, la linéarité est peut-être la grande 'marque de fabrique' d'un certain vingtième siècle. Il suffit de songer à la mécanique quantique: celle-ci est linéaire, au contraire de la mécanique classique; à y réfléchir un peu (ou beaucoup) il est proprement aberrant que la mécanique quantique soit linéaire; mais de fait elle l'est et elle fonctionne extraordinairement bien; surtout personne n'a su faire autrement. En mathématiques, depuis le Göttingen du début du (vingtième) siècle, voire encore avant, en tous cas avant l'apparition même de la mécanique quantique, la linéarité est bien installée. Néanmoins on se souviendra qu'Émile Borel écrivait déjà à l'époque que classer les théories en linéaires et non linéaires évoque assez un schéma de classification zoologique qui commencerait par distinguer entre la classe des éléphants et celle des non-éléphants. Quiconque a pratiqué un tant soit peu la mécanique classique, ou plus généralement les systèmes dynamiques, ne saurait que l'approuver. Cette classification elle-même pointe en direction de nos pauvres limites... Toujours est-il que la mécanique quantique et les motifs encadrent le vingtième siècle, respectivement comme une immense surprise ('La microphysique peut s'approcher linéairement!') et comme un gigantesque programme de linéarisation de la géométrie auquel le vingt-et-unième siècle est en ce sens en train de se montrer infidèle, de très productive et malgré tout grothendieckienne façon. On songe ici à l'introduction récente de l'homotopie (stable) en théorie des motifs.

Dans le monde mathématique grothendieckien, l'opposition linéaire/non linéaire se monnaie plus concrètement en des couples comme: complétions profinies *vs* complétions prounipotentes, (co)homologie *vs* homotopie (groupe fondamental), ou encore groupes arithmétiques (e.g. $SL_n(\mathbb{Z})$) *vs* groupes de tresses et de Teichmüller (mapping class groups) ou enfin, dans un contexte plus large, topos & motifs *vs* géométrie anabélienne & théorie de Grothendieck-Teichmüller. Notons que cette dernière opposition, rapportée à l'itinéraire mathématique personnel de Grothendieck, peut d'ailleurs aussi se transcrire en: ante-70 (le multiplodoque, les tâches interminables) *vs* post-70 (les expéditions dans la jungle, les coups de sonde dans l'inconnu).

Je n'ai évidemment pas les moyens de développer ici en détail ces oppositions ou alternatives qui pointent chacune vers de vastes théories, mais on peut avancer que l'objet 'groupe fondamental' est doué d'une certaine centralité. D'une part il s'agit pratiquement du seul invariant non abélien (voire 'anabélien') en topologie algébrique 'élémentaire'. (On se souviendra que les groupes d'homotopie supérieurs sont abéliens, ce qui se montre par un petit dessin, lequel pointe aussi vers l'opérade des petits disques et donc les tresses...) Toujours est-il que c'est le groupe fondamental qui fournit le fil qui relie, pas si secrètement que cela, [SGA1] à la période 'post-70'. S'efforcer de rendre le groupe fondamental abélien, ou du moins unipotent, conduit d'ailleurs droit à l'homotopie rationnelle et à la connection entre groupe fondamental et cohomologie. C'est encore le groupe fondamental qui se relie à la monodromie et à une forme élargie de la théorie de Galois, voire à Galois lui-même, seul mathématicien dont Grothendieck aime à se voir comme un successeur, non sans d'excellentes raisons qui plongent dans la substance même de son œuvre et en fournissent parmi les plus solides fils conducteurs. En quelques mots qui là encore appellent de très amples développements, on pourrait dire que la théorie de Galois, que l'on aime à présenter – à juste titre – comme une théorie de l'*ambiguité*, a pris un tour nouveau avec Grothendieck et le geste de la *monodromie* directement issu de la notion de groupe fondamental. Quant aux théories post-70 que sont la géométrie anabélienne et la théorie de Grothendieck-Teichmüller, elles tournent toutes entières autour de cette notion de groupe fondamental.

Enfin le couple géométrie algébrique *vs* topologie algébrique nous fournira une conclusion abrupte, provisoire et prudente. Disons qu'il n'est pas absurde d'avancer qu'Alexandre Grothendieck se montra au moins autant (génial) topologue algébrique que (non moins génial) géomètre algébriste et on songera à nouveau au destin de la théorie des motifs et à sa reprise (partielle) en termes de topologie algébrique, y compris l'utilisation de notions héritées de ce que Daniel Quillen avait construit à l'ombre des SGA, à l'usage premier des topologues, pans de non linéarité qui ont attendu leur heure pour reparaître avec force dans l'horizon de la géométrie algébrique et s'y implanter vigoureusement.