

Masaki Kashiwara, prix Abel 2025

Pierre Schapira

7 avril 2025

Masaki Kashiwara, mathématicien japonais de 78 ans, vient de recevoir le fameux Prix Abel de mathématiques, un prix décerné tous les ans par le roi de Norvège sur proposition du comité Abel, celui-ci étant nommé par l'Académie norvégienne des Sciences et des Lettres. Ce prix célèbre la mémoire de Niels Henrik Abel (1802–1829), mathématicien norvégien de génie souvent comparé à Évariste Galois, et mort très jeune comme lui. Cette distinction se veut l'équivalent pour les mathématiques du prix Nobel, celui-ci n'existant pas pour les mathématiques pour des raisons qui restent obscures, scientifiques ou sentimentales (la bien-aimée d'Alfred Nobel aurait eu quelques faiblesses pour le mathématicien Mittag-Leffler). Bien sûr, les mathématiciens peuvent être récompensés par la médaille Fields, décernée tous les quatre ans à quatre lauréats qui doivent avoir moins de quarante ans le jour de leur consécration, mais ceci exclut toutes les découvertes tardives, quelle que soit leur importance.

En fait Masaki aurait très bien pu (aurait dû) obtenir la médaille Fields déjà lors du congrès international (ICM) de 1982, et s'il tel n'a pas été le cas, c'est sans doute que ses travaux étaient trop novateurs pour être compris à cette époque. Les travaux de Masaki s'inscrivent dans un vaste mouvement d'idées datant des années 60, qui a vu les mathématiques passer de la théorie des ensembles à la théorie des catégories : on ne s'intéresse plus tellement à un espace constitué de points et muni de diverses structures, mais aux relations entre ces espaces. On a maintenant des objets et des morphismes entre ces objets, des foncteurs entre catégories, etc. Cette théorie a pris toute sa force sous l'impulsion d'Alexander Grothendieck (1928–2014), visionnaire incontesté qui a dominé les mathématiques pendant la deuxième moitié du XX^e siècle. Parallèlement à Grothendieck, Mikio Sato (1928–2023), mathématicien japonais non moins visionnaire, jette les bases (avec sa théorie des hyperfonctions) de ce que l'on appelle maintenant l'Analyse Algébrique : il s'agit de traiter les problèmes d'analyse (l'étude des fonctions, de leurs dérivées, de leurs diverses transformées, etc.) avec les outils de la géométrie algébrique. Il a l'intuition des $\mathcal{D}$ -modules, c'est-à-dire des modules sur l'anneau $\mathcal{D}$ des opérateurs différentiels. Un « module » sur un anneau est une manière de décrire un système linéaire : plusieurs inconnues vérifiant plusieurs équations linéaires à coefficients dans cet anneau. Un $\mathcal{D}$ -module n'est donc rien d'autre qu'un système d'équations aux dérivées partielles (EDP) linéaires. Notons que les idées de Grothendieck comme de Sato irriguent une bonne partie des mathématiques et de la physique mathématique d'aujourd'hui.

Masaki Kashiwara a montré dès son plus jeune âge des talents exceptionnels pour les mathématiques. Dans sa thèse de master de 1970, alors élève de Sato et âgé de 23 ans, il fonde la théorie des $\mathcal{D}$ -modules et généralise en particulier le fameux théorème de Cauchy-Kovalevskaya (qui ne traitait à l'époque que le cas d'une équation à une inconnue). Dans les années 70 Mikio Sato est à l'origine d'une nouvelle révolution, celle de l'analyse microlocale, donnant lieu au fameux article SKK (Sato-Kashiwara-Kawai). Une variété différentiable (un espace sans singularité) admet en chaque point un espace tangent que l'on peut imaginer comme l'espace des rayons lumineux issus de ce point, mais aussi un espace cotangent (l'espace de phase des physiciens), l'espace des murs empêchant la lumière de passer. L'idée de Sato est que beaucoup de phénomènes rencontrés sur une variété sont en fait la projection sur cette variété de phénomènes vivant dans l'espace cotangent où ils sont beaucoup plus faciles à analyser.

Masaki applique ces idées à l'étude des $\mathcal{D}$ -modules et obtient l'essentiel des résultats fondamentaux de cette théorie. Il montre en particulier que les $\mathcal{D}$ -modules permettent de formuler précisément la correspondance de Riemann-Hilbert et prouve cette correspondance en 1980 (après des résultats très importants mais partiels de Pierre Deligne). Il s'agit d'une « équivalence de catégories » entre d'un côté une classe de $\mathcal{D}$ -modules, appelés holonômes réguliers, et de l'autre, une classe de faisceaux, appelés faisceaux constructibles. Il s'agit donc d'un pont entre l'analyse et la topologie, pont d'où jailliront entre autres les fameux « faisceaux pervers ».

Les faisceaux¹ sont un outil mathématique de première importance : ils permettent de traiter la dichotomie local/global, de calculer les obstructions qui bloquent le passage du local au global mais aussi de définir des objets qui existent globalement mais non localement. Ils ont été créés par le mathématicien français Jean Leray (1906–1998) vers 1945 alors qu'il était prisonnier en Autriche. Leray, spécialiste de mécanique des fluides (et aussi précurseur de la théorie des distributions avec ses « solutions faibles ») ne voulait surtout pas faire des mathématiques qui pourraient servir en cette période de guerre. Cette théorie a été rendue plus accessible par Henri Cartan dans les années 50 et a ensuite été profondément généralisée et formulée dans le langage des catégories par Grothendieck.

J'ai rencontré Masaki à Kyoto en 1972, où j'avais été invité par Sato, mais je n'ai commencé à travailler avec lui que vers 1978. Au début des années 80 nous avons alors simultanément eu l'idée de la théorie microlocale des faisceaux, lui dans le cadre complexe via le foncteur « des cycles évanescents », moi dans une perspective purement réelle, motivé par les équations hyperboliques. Notre collaboration sur ce sujet culmine avec la publication du livre *Sheaves on Manifolds* [KS90], publié à plus de 3000 exemplaires, sans compter une traduction en russe et une édition en Chine. L'idée est d'appliquer la vision de Sato aux faisceaux, et l'on définit ainsi le micro-support d'un faisceau comme les directions (dans l'espace cotangent) de non-propagation. Comme la « variété caractéristique » d'un $\mathcal{D}$ -module n'est autre que le micro-support du faisceau de ses solutions (dans le domaine complexe), la théorie des systèmes linéaires d'EDP devient pour une bonne part une sous-branche de la théorie microlocale des faisceaux. Les faisceaux, y compris dans leur version microlocale, sont désormais présents dans de

1. Pour un historique de cette théorie, voir le texte de Christian Houzel dans [KS90].

nombreuses parties des mathématiques, y compris, depuis peu, en « topological data analysis », une branche très appliquée des mathématiques.

Mais l'espace cotangent a une structure très riche (connue depuis le XIX^e siècle), c'est une « variété symplectique » et un certain nombre de mathématiciens (Tamarin, Nadler, Zaslow) ont compris que si la théorie microlocale des faisceaux utilisait la géométrie symplectique, alors, inversement, elle pouvait être un outil extrêmement puissant pour résoudre des problèmes de cette théorie. Cette idée est à l'origine d'un nombre impressionnant de publications.

L'apport de Masaki Kashiwara aux mathématiques ne se limite pas à l'analyse microlocale, à la théorie des $\mathcal{D}$ -modules ou à la théorie microlocale des faisceaux. Il a fait une découverte fondamentale dans un autre domaine, les groupes quantiques. Il s'agit de déformations non commutatives d'algèbres liées aux systèmes intégrables qui sont apparues dans les années 80 avec Vladimir Drinfeld, médaille Fields 1990, né en Ukraine en 1954, et Michio Jimbo, né au Japon en 1951, lui aussi élève de Sato. Dans ce domaine, Kashiwara introduit vers les années 1990 les bases cristallines, des objets essentiellement combinatoires, qui deviennent un outil essentiel dans l'étude des représentations². Il a depuis les années 2000 une liste considérable de publications sur ce sujet avec de nombreux mathématiciens coréens.

Masaki Kashiwara a aussi des contributions très importantes dans bien d'autres branches des mathématiques. Il a montré avec T. Tanisaki et R. Hotta la place centrale des $\mathcal{D}$ -modules en théorie des représentations, il a démontré avec J.-L. Brylinski la conjecture de Kazhdan-Lusztig et l'intérêt de la conjecture de Kashiwara-Vergne (bien que maintenant démontrée) est toujours d'actualité. En physique mathématique, il a étudié avec T. Kawai les intégrales de Feynman à la lumière de l'analyse microlocale.

Masaki Kashiwara a plus de 300 publications à son actif et plus de 70 co-auteurs, et s'il est toujours extrêmement productif, la relève de l'école de Sato est déjà en place. Citons en particulier Takuro Mochizuki qui a débloqué l'immense difficulté que posait l'étude des modules holonomes irréguliers, travaux pour lesquels il a reçu le prestigieux Breakthrough Prize 2021.

Masaki Kashiwara est un savant qui a profondément marqué les mathématiques depuis les années 70. Son empreinte profonde restera.

Références

- [KS90] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira, *Sheaves on manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 292, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [Paj25] Philippe Pajot, *Le Japonais Masaki Kashiwara se voit décerner le prix Abel 2025, le «Nobel de maths»*, La Recherche (2025).

Pierre Schapira
Sorbonne Université, CNRS IMJ-PRG
4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05 France
e-mail : pierre.schapira@imj-prg.fr
<http://webusers.imj-prg.fr/~pierre-schapira/>

2. Voir les propos de Bernard Leclerc dans [Paj25].