Catégories et recollements

Pierre Schapira

Novembre 2002*

Introduction

Ce texte est un hommage à Gilles Châtelet, au mathématicien et au philosophe, mais plus encore à l'ami. Il s'adresse à des gens ouverts aux nouveaux langages et aux idées nouvelles, autant dire à peu de gens, et pas spécialement aux mathématiciens.

Je voudrais aborder ici la question du statut de l'égalité en mathématiques et de ses variantes, isomorphisme, équivalence, etc., autrement dit les notions de n-catégorie et de n-isomorphisme, pour $n = 0, 1, 2, \dots$, et expliquer comment ces questions prennent un sens "opérationnel" dans des problèmes de passage du local au global, recollement et torsion. Il s'agit d'idées assez élémentaires mais qui deviennent vite très compliquées techniquement, et qui traversent une partie des mathématiques d'aujourd'hui.

Ce sujet est surtout un prétexte pour illustrer la thèse que les concepts mathématiques ne diffèrent pas fondamentalement des concepts philosophiques, ni même des idées du quotidien. Dans l'avant-propos de son essai sur "le concept de grandeur négative", Kant ecrit: "L'utilisation que l'on peut faire des mathématiques en philosophie consiste soit dans l'imitation de leurs méthodes, soit dans l'application réelle de leurs propositions aux objets de la philosophie", après quoi il rejette la première possibilité pour ne considérer que la seconde. Je crois effectivement plus sage de ne pas chercher à imiter les mathématiciens dans leurs méthodes, et je voudrais tenter d'inverser cette proposition, en échangeant les rôles mathématiques/-philosophie. Là non plus, je ne pense pas que les mathématiciens aient quelque chose à gagner en imitant les méthodes des philosophes, mais ils ont peut-être à gagner dans l'application ou du moins dans l'évocation de concepts "philosophiques".

On a beaucoup parlé du concept "d'existence" qui se traduit en théorie des ensembles en "appartenir": on n'existe pas de manière abstraite, hors de toute frontières, mais on appartient à un ensemble, ou on n'y appartient pas. D'ailleurs rien n'empêche en mathématiques de créer ce qui n'existe pas, mais le problème se

*Ce texte reprend et développe des idées exposées dans le Colloque d'hommage à Gilles Châtelet 27–29/06/2001 et dans une conférence donnée au Séminaire "Pensée des Sciences" (Ch. Alunni), Ecole Normale Supérieure, 27/11/2002.

pose alors de l'interêt, de la signification géométrique, de la "fonctorialité" de l'objet créé. Si l'on veut résoudre une équation qui n'a pas de solutions dans un ensemble donné, on peut toujours rajouter formellement des solutions à cet ensemble. Ce procédé n'a en général strictement aucun intérêt, mais pas toujours: ajouter aux nombres réels une racine de -1 pour résoudre l'équation $x^2 = -1$ n'est sûrement pas sans intérêt. Mais l'existence n'est pas le thème de cet exposé.

N'importe quel étudiant qui résoud une équation, ou un système d'équations, est confronté à deux problèmes: l'existence et l'unicité de la solution. Pour des raisons psychologiques bizarres, l'existence est privilégiée, on considère intuitivement que c'est plus important. En fait, l'unicité vient avant l'existence (ce "avant" ayant un sens précis, mais que nous ne développerons pas) et il est vrai que dans la pratique, l'unicité est en général plus facile à obtenir que l'existence.

Aujourd'hui je vais donc surtout parler d'unicité, ou plutôt du concept d'identité, et montrer en quoi ce concept est opératoire.

Est-il nécessaire de préciser que ce texte n'est pas un texte mathématique et que la rigueur peut y avoir été sacrifiée au profit de l'intuition ?

1 Ensembles et fonctions / catégories et foncteurs

Les mathématiques sont souvent associées dans le grand public, si ce n'est confondues, avec la théorie des ensembles (Cantor, fin du 19ème siècle), et effectivement, les mathématiques se développent essentiellement dans le cadre de cette théorie, dans l'axiomatique de Zermelo-Frenkel.

Mais le point de vue ensembliste est finalement assez anecdotique et est supplanté depuis bientôt un demi-siècle par le point de vue catégorique. Ce "point de vue" est en fait devenu une manière de penser, et l'influence de Grothendieck dans cette révolution conceptuelle est considérable.

L'idée sous-jacente aux catégories est que les objets mathématiques ne prennent toute leur force que mis en relation avec d'autres objets du même type, et il est peut-être intéressant de remarquer que l'apparition des catégories participe d'un mouvement général de la pensée des années 50, et est plus ou moins concommitante à l'éclosion du structuralisme en sciences humaines (C. Levi-Strauss) et au renouveau de la linguistique (N. Chomsky).

Attention: la théorie des catégories ne se substitue pas à celle des ensembles, dans la pratique (bien que ce ne soit pas indispensable) le langage des catégories utilise l'axiomatique des ensembles.

Un ensemble est une collection d'éléments $x, y, z \ldots$ indifférenciés sans relations entre eux (on peut penser à des points d'un espace géométrique). La seule relation entre x et y est l'égalité ou sa négation, $x = y$ ou bien $x \neq y$.

La notion de catégorie est plus sophistiquée. Une catégorie $\mathcal{C}$ possède des objets $X, Y, Z \ldots$ (comme un ensemble possède des éléments) mais maintenant étant donnés deux objets X et Y de $\mathcal{C}$ on se donne un nouvel ensemble noté $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, l'ensemble des morphismes de X vers Y. On représente un tel morphisme par une flêche

$$f : X \to Y$$

On dit que X est la source de f et Y son but. Si $g : Y \to Z$ est un autre morphisme qui a pour source le but de f, on peut alors composer g et f en une flêche $g \circ f : X \to Z$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z. \end{tikzcd}$$

Enfin chaque objet X est muni d'une flêche $\mathrm{id}_X : X \to X$ qui joue le rôle de l'application identique et l'on suppose que la composition des flêches est *associative*: si on a des flêches $X \underset{f}{\to} Y \underset{g}{\to} Z \underset{h}{\to} W$ alors

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

ce que l'on visualise par un diagrame commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g\circ f"] & Y \arrow[d, "h\circ g"] \\ Z \arrow[r, "h"] & W \end{tikzcd}$$

Ce diagramme est commutatif signifie que les deux manières d'aller de X à W, l'une en passant par Y, l'autre par Z, donnent le même résultat. La commutativité du diagramme traduit donc l'axiome d'associativité de la composition des morphismes.

Exemple 1.1. Le premier exemple de catégories qui vient à l'esprit est la catégorie dont les objets sont les ensembles, et les morphismes les applications ensemblistes. Afin d'éviter les paradoxes classiques de la théorie des ensembles, on se place dans un univers $\mathcal{U}$ donné et l'on obtient ainsi la catégorie $\mathcal{U} - \mathbf{Set}$ des $\mathcal{U}$-ensembles. Une bonne partie de l'école primaire est consacrée (ou en tous cas devrait l'être) à l'étude de la sous-catégorie $\mathbf{Set}^f$ des ensembles finis.

Mais il y a bien d'autres exemples de catégories, et dans la plupart des cas, les objets ne sont pas des ensembles.

Exemple 1.2. Les espaces topologiques (ceux sur lesquels on a une notion "de voisinage" ou de "limite") et les applications continues (celles qui respectent les limites) forment une catégorie.

Exemple 1.3. L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers naturels $\cdots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots$ défini une catégorie dont les objets sont les entiers et les morphismes les flêches $a \to b$ si et seulement si $a \leq b$:

$$\cdots - 2 \to -1 \to 0 \to 1 \to 2 \to \cdots$$

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie on obtient une nouvelle catégorie $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, la catégorie opposée, en inversant le sens des flêches. Ainsi un morphisme $f : X \to Y$ dans $\mathcal{C}$ défini un morphisme $g : Y \to X$ dans $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.

Etant donnés deux ensembles X et Y, on a la notion d'"application" (ou de "fonction") $f : X \to Y$. C'est une correspondance qui à tout élément $x \in X$, fait correspondre un élément $f(x) \in Y$. De même, étant données deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, on a la notion de "foncteur" $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$: F envoie un objet X de $\mathcal{C}$ en un objet $F(X)$ de $\mathcal{C}'$ et un morphisme $f : X \to Y$ en un morphisme $F(f) : F(X) \to F(Y)$, avec les conditions évidentes que F commute aux identités: $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$, et à la composition: $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

On rencontre aussi des foncteurs si renversent le sens des flêches, *i.e.,* qui vérifient $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$. On dit alors que F est contravariant (on peut aussi bien le considérer comme un foncteur usuel de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ dans $\mathcal{C}'$).

Les foncteurs se composent, et l'on obtient ainsi la catégorie $\mathcal{U} - Cat$, mais celle-ci vit dans un plus grand univers. Si l'on veut rester dans l'univers $\mathcal{U}$ il faut se restreindre aux "petites catégories" et l'on obtient ainsi la $\mathcal{U}$-catégorie "small-Cat".

Example 1.4. Etant donné un objet X de $\mathcal{C}$, il définit un foncteur de $\mathcal{C} \to \mathbf{Set}$, $Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ et aussi un foncteur $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$, $Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$. On peut ainsi (c'est le "lemme de Yoneda") considérer $\mathcal{C}$ comme une sous-catégorie d'une catégorie de foncteurs à valeurs dans **Set**, et utiliser les outils de la théorie des ensembles pour étudier les catégories.

Remarque 1.5. L'un des pièges de la catégorie des ensembles est qu'elle n'est pas *équivalente* à sa catégorie opposée. La théorie des ensemble n'est pas "symétrique". Donnons une démonstration (par l'absurde) de ce fait, source de nombreuses erreurs..

L'enemble vide $\varnothing$ est un objet initial dans la catégorie **Set** des ensembles, ce qui veut dire que pour tout ensemble X, il existe une et une seule application de $\varnothing$ vers X. De même, l'ensemble réduit à un élement $\{\mathrm{pt}\}$ est final, ce qui veut dire que pour tout ensemble X, il existe une et une seule application de X vers $\{\mathrm{pt}\}$. Supposons qu'il existe un foncteur $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$ qui soit une équivalence de catégories (terme dont la définition est provisoirement laissée à l'intuition du lecteur). Alors $F(\{\mathrm{pt}\}) = \varnothing$ et $F(\varnothing) = \{\mathrm{pt}\}$. On en déduit

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\{\mathrm{pt}\}, X) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^{\mathrm{op}}}(F(\{\mathrm{pt}\}), F(X)) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(F(X), F(\{\mathrm{pt}\}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(F(X), \varnothing).\end{aligned}$$

Si l'on choisit pour X un ensemble à deux éléments, alors $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\{\mathrm{pt}\}, X)$ a deux éléments contrairement à $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(F(X), \varnothing)$ qui a un élement si $F(X)$ est vide (l'identité du vide) et zéro élement sinon.

2 Egalité et isomorphisme

Dans un ensemble E on a la notion d'égalité. Etant donné x et y, soit ils sont égaux, soit ils sont différents. Ce qui fait la force de la théorie des catégorie est que l'on a une notion beaucoup plus riche, celle d'"isomorphisme". On dit que $f : X \to Y$ est un isomorphisme s'il existe $g : Y \to X$ tel que la composition $g \circ f$ soit id_X et $f \circ g$ soit id_Y.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_X"'] & Y \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_Y"] & \\ & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Deux objets isomorphes dans une catégorie auront alors les mêmes propriétés, sans pour autant être identiques.

Exemple 2.1. Deux ensembles finis sont isomorphes (en tant qu'ensembles) si et seulement si ils ont le même nombre d'éléments, (un isomorphisme d'ensembles finis ést une application bijective, on dit aussi biunivoque, entre ces ensembles). Ainsi les ensembles $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ sont isomorphes, mais il faut noter qu'il existe plusieurs (6 exactement) isomorphismes entre A et B.

On voit d'ailleurs apparaitre la notion de nombre entier: c'est "ce qui reste" quand on a identifié les ensembles finis isomorphes. Un entier est un "ensemble fini à isomorphisme près". L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est la "décatégorification" de la catégorie $\mathbf{Set}^f$ des ensembles finis, décatégorifier voulant dire, oublier les morphismes et identifier des objets isomorphes.

Exemple 2.2. Les intervalles $X = [0, 1]$ et $Y = [0, 2]$ sont isomorphes dans la catégorie Top des espaces topologiques. L'application continue $f : X \to Y, x \mapsto 2x$ admet comme inverse l'application $g : Y \to X, y \mapsto y/2$. De même (en un peu plus compliqué) la droite $\mathbb{R}$ toute entière est isomorphe topologiquement à l'intervalle ouvert $]0, 1[$.

Par contre, le plan réel $\mathbb{R}^2$ est isomorphe à la droite réelle $\mathbb{R}$ comme ensemble, pas comme espace topologique!

3 Fonctions / (pre-)faisceaux

Sur un ensemble (fini pour simplifier) X on est naturellement amené à considérer les fonctions de X à valeurs par exemple, dans les nombres entiers $\mathbb{Z}$. Désignons par $\mathrm{Fct}(X; \mathbb{Z})$ l'espace de ces fonctions. Cet espace est muni d'opérations internes (addition, multiplication). Mais on a aussi des opérations externes: si $f : X \to Y$ est une application ensembliste de X vers Y, f définit deux applications entre les espaces de fonctions:

- "l'image inverse" $f^* : \mathrm{Fct}(Y;\mathbb{Z}) \to \mathrm{Fct}(X;\mathbb{Z})$ qui à $\psi : Y \to \mathbb{Z}$ associe la composition $\psi \circ f : X \to \mathbb{Z}$: $X \underset{f}{\to} Y \underset{\psi}{\to} \mathbb{Z}$,
- "l'image directe" $f_* : \mathrm{Fct}(X;\mathbb{Z}) \to \mathrm{Fct}(Y;\mathbb{Z})$ qui à $\phi : X \to \mathbb{Z}$ associe l'intégrale $(\int_f \phi)(y) = \sum_{\{x; f(x)=y\}} \phi(x)$.

Ces opérations (internes et externes) ont un analogue catégorique. On remplace l'ensemble X par une catégorie $\mathcal{C}_X$, les fonctions sur X à valeurs dans $\mathbb{Z}$ par la catégorie des préfaisceaux, *i.e.,* des foncteurs (contravariants) de $\mathcal{C}_X$ dans la catégorie des $\mathbb{Z}$-modules.

C'est l'analogie "fonctions/faisceaux" mise en évidence et systématisée par Grothendieck, et qui a joué un rôle moteur dans de nombresuses questions de mathématiques.

4 2-catégories

On a vu que les catégories (dans un univers donné) et les foncteurs entre catégories définissent une nouvelle catégorie, la catégorie $\mathcal{U} - Cat$. Mais on a aussi la notion naturelle de morphisme de foncteurs. Si

$$F, G : \mathcal{C} \rightrightarrows \mathcal{C}'$$

sont deux foncteurs, un morphisme $\theta : F \to G$ est la donnée pour tout $X \in \mathcal{C}$ d'un morphisme $\theta_X : F(X) \to G(X)$ tel que pour tout morphisme $f : X \to Y$ dans $\mathcal{C}$, le diagramme ci-dessous commute:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\theta_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\theta_Y"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Ainsi la catégorie $\mathcal{U} - Cat$ n'est-elle pas seulement une catégorie, c'est une 2-catégorie. Grossièrement, une 2-catégorie (stricte) $\mathcal{C}$ est une catégorie (une 1-catégorie) telle que pour toute paire d'objets X, Y de $\mathcal{C}$, l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ est muni d'une structure de catégorie. Pour toutes paire d'objets de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ c'est à dire pour toute paire de morphismes $f, g : X \rightrightarrows Y$, on a un ensemble de morphismes de f dans g. Un tel morphisme de morphismes est visualisé par un diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & Y \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

Il y a maintenant deux types de composition, horizontale et verticale, visualisées par les diagrammes

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & Y \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "k"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & Z \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "h\circ f"] \arrow[r, bend right, "k\circ g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta\circ\alpha"] & Z \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left=60, "f"] \arrow[r, "g"] \arrow[r, bend right=60, "h"'] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=2, "\Downarrow\beta"] & Y \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "h"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta\circ\alpha"] & Y \end{tikzcd} .$$

On peut ainsi penser aux objets des catégories comme 0-dimensionnels, aux morphismes comme 1-dimensionels et aux 2-morphismes comme 2-dimensionnels. Ou encore, on peut penser les ensembles comme des objets 0-dimensionels (des ensembles de points sans relations entre eux), aux catégories comme des objets 1-dimensionels (des points et des flêches entre les points), aux 2-catégories comme des objets 2-dimensionels. On peut imaginer alors diverses notions de n-catégories pour $n \geq 2$.

5 Isomorphismes et 2-isomorphismes

Rappellons que dans une catégorie $\mathcal{C}$ un morphisme $f : X \to Y$ est un isomorphisme s'il existe $g : Y \to X$ tel que $g \circ f = \mathrm{id}_X$ et $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Dans une 2-catégorie on a alors une notion plus faible: on demande à $g \circ f$ d'être isomorphe dans la catégorie $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ à id_X et à $f \circ g$ d'être isomorphe dans la catégorie $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Y)$ à id_Y. On dit alors que X et Y sont équivalents ou 2-isomorphes. Les isomorphismes anciens deviennent des 1-isomorphismes, et les égalités des 0-isomorphismes.

Dans une n-catégorie on aura alors $n+1$ notions d'isomorphismes, 0-isomorphes voulant dire égaux.

Exemple 5.1. Si deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont équivalentes, *i.e.,* 2-isomorphes dans la catégorie $\mathcal{U} - Cat$, alors on pourra traduire les propriétés de $\mathcal{C}$ dans le formalisme de $\mathcal{C}'$ et cela a parfois donné lieu à des découvertes spectaculaires. Un jeu très prisé est de trouver des catégories équivalentes qui à première vue ne se ressemblent pas du tout. Par exemple, une bonne partie du cours d'algèbre linéaire du premier cycle universitaire tourne autour de l'équivalence entre la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie et la catégorie dont les objets sont les entiers (la dimension de l'espace) et les morphismes de n vers m, les matrices (n, m).

6 2-catégories faibles

Dans une catégorie "usuelle" (une 1-catégorie), la composition des morphismes est associative. Si f, g, h sont des morphismes composables, alors $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. Mais si l'on travaille dans une 2-catégorie, les morphismes f, g, h n'appartiennent plus à des ensembles, mais à des catégories, et comme on l'a vu, la notion d'égalité peut être affaiblie par celle d'isomorphisme. On obtient ainsi la notion de 2-catégorie faible.

Un exemple en est donné par un ouvert Ω du plan $\mathbb{R}^2$. Les objets sont les points de Ω, les morphismes $f : x \to y$ les chemins continus allant de x à y, et les 2-morphismes les homotopies de tels chemins, c'est à dire les déformations continues de tels chemins. La composition des chemins n'est ni associative ni unitaire. Elle l'est "à homotopie prés".

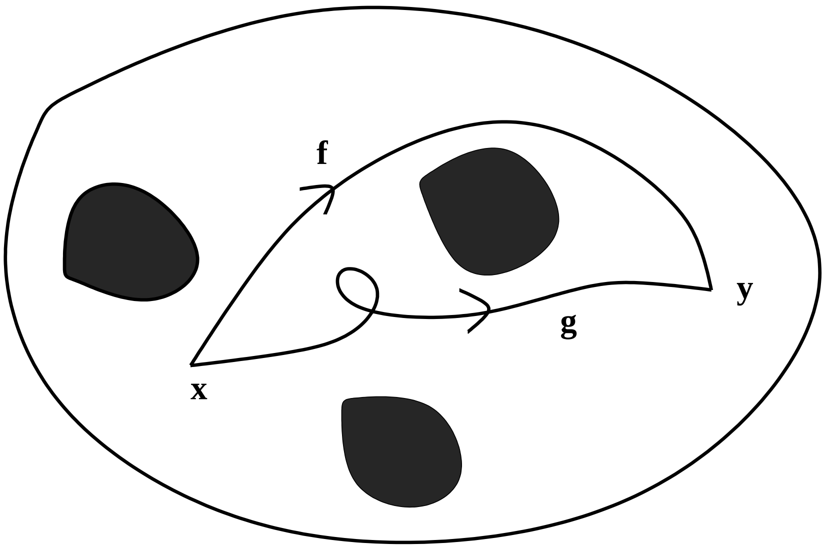

Figure 1: Homotopie

7 Du local au global: recollement et torsion

Les mathématiciens adorent recoller des objets, passer du local au global, et calculer les "obstructions" qui empêchent les recollements. C'est alors que le problème du statut des isomorphismes prend toute sa pertinence, et le "degré" de ces obstructions dépend du type d'isomorphisme que l'on traite (le "n" dans n-isomorphisme). Ces obstructions ayant parfois une interpretation en physique, on voit une fois de plus un exemple où des questions qui apparaissent au départ comme des questions de fondement, se révèlent être en fait des questions concrètes.

On a deux types de problèmes: recollement et torsion. Le premier consiste à construire un objet global à partir de données locales, le second à comparer deux objets localement isomorphes mais pas nécessairement globalement isomorphes.

Pour simplifier, nous considèrons la situation suivante: X est un espace (un ensemble muni de diverses structures, par exemple d'une topologie) réunion de trois morceaux X_1, X_2, X_3. On pose $X_{ij} := X_i \cap X_j$ $(i, j = 1, 2, 3)$ et $X_{123} := X_1 \cap X_2 \cap X_3$.

Exemple 7.1. (Recollement 1.) Supposons que l' on ait un ensemble E et sur chaque X_i une fonction f_i à valeurs dans E. Ces fonctions définissent une fonction f sur X si et seulement si la restriction de f_i à $X_i \cap X_j$ coincide avec la restriction de f_j à $X_i \cap X_j$, ce que l'on écrit:

$$f_i|_{X_{ij}} = f_j|_{X_{ij}}.$$

Cette exemple est très simple, car les fonctions sont à valeurs ensembliste. Si l'on remplace l'ensemble E par une catégorie $\mathcal{C}$, les choses se compliquent.

Exemple 7.2. (Recollement 2.) Supposons que l' on ait une catégorie $\mathcal{C}$ et sur chaque X_i un objet F_i de $\mathcal{C}$. La condition $F_i|_{X_{ij}} = F_j|_{X_{ij}}$ n'a pas beaucoup de sens dans une catégorie (cette condition ne sera jamais vérifée dans la pratique) mais on peut l'affaiblir et demander qu'il existe des isomorphismes θ_{ji} $(1 \leq i < j \leq 3)$ entre les restrictions $F_i|_{X_{ij}}$ et $F_j|_{X_{ij}}$:

$$\theta_{ji} : F_i|_{X_{ij}} \xrightarrow{\sim} F_j|_{X_{ij}}.$$

On a une condition nécessaire "évidente": les θ_{ji} (qui sont définis sur les intersections 2 à 2) doivent se recoller sur les intersections 3 à 3. Autrement dit on doit avoir la "relation de cocycles" sur les X_{ijk}:

$$\theta_{32} \circ \theta_{21} = \theta_{31} \text{ sur } X_{123}, \tag{7.1}$$

condition visualisée par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} F_1|_{X_{123}} \arrow[rr, "\theta_{21}"] \arrow[dr, "\theta_{31}"'] & & F_2|_{X_{123}} \arrow[dl, "\theta_{32}"] \\ & F_3|_{X_{123}} & \end{tikzcd}$$

Si les objets que l'on veut recoller sont de nature locale (des faisceaux) la condition nécessaire (7.1) sera suffisante.

Etudions maintenant sur des exemples la notion de torsion, c'est à dire de propriétés vérifiées localement mais pas globalement.

Exemple 7.3. (Torsion 1.) Soit X l'espace (non connexe) réunion des intervalles $X_1 = [0, 1]$ et $X_2 = [2, 3]$. Les fonctions constantes $f_1 \equiv 1$ sur X_1 et $f_2 \equiv 2$ sur X_2 se recollent en une fonction localement constante sur X, mais pas en une fonction constante. La propriété d'être constant n'est pas une propriété locale.

Exemple 7.4. (Torsion 2.) Considérons la bande de Moebius X que l'on coupe en trois morceaux X_1, X_2 et X_3 si bien qu'il n'y ait pas d'intersections 3 à 3.

On peut considérer chaque X_i $(i = 1, 2, 3)$ comme la copie d'un rectangle X_0 et la bande de Moebius est obtenue en recollant X_1 et X_2 puis X_2 et X_3 et enfin $-X_3$ et X_1 où $-X_3$ désigne le rectangle déduit de X_3 en échangeant “haut et bas”.

Munissons maintenant X_0 d'un angle orienté F_0. Le rectangle $-X_0$ est alors muni de l'angle orienté $-F_0$. Considérons trois copies $(X_1, F_1), (X_2, F_2), (X_3, F_3)$ de (X_0, F_0). On recolle (X_1, F_1) et (X_2, F_2) puis (X_2, F_2) et (X_3, F_3) mais on ne peut pas recoller (X_1, F_1) avec $(-X_3, -F_3)$. La notion d'angle orienté n'a pas de sens sur la bande de Moebius, bien qu'elle ait un sens localement.

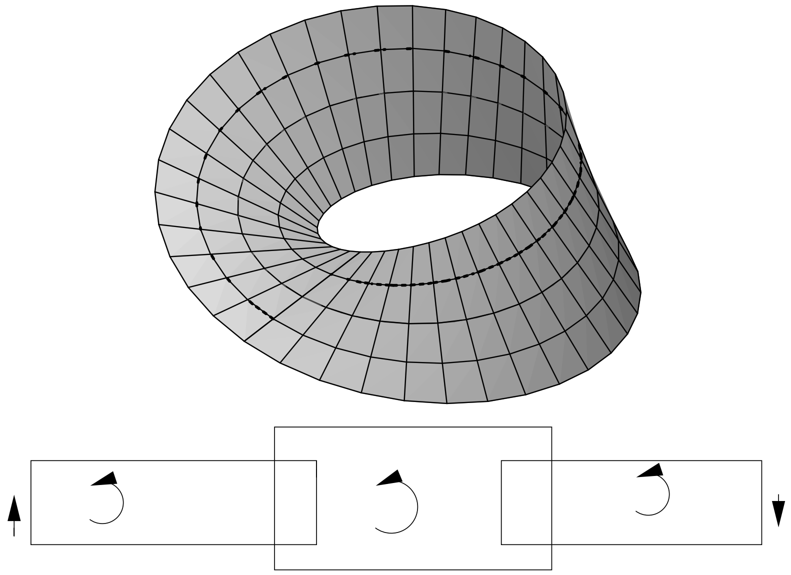

Figure 2: Moebius

L'exemple de la bande de Moebius n'est pas un cas exceptionnel ou pathologique, il est au contraire le prototype de situations extrêmement courantes et variées que l'on rencontre tous les jours en mathématiques. De plus, bien que ces angles orientés ne ne recollent pas, ils appartiennent à un objet mathématique globalement bien défini que l'on appelle le faisceau d'orientation. C'est un “faisceau localement constant” et non constant.

Si l'on remplaçait la catégorie $\mathcal{C}$ par une 2-catégorie, on aurait alors des conditions faisant intervenir les intersections 4 à 4 des X_i (on remplace alors les faisceaux par des "stacks", *i.e.,* des faisceaux de catégories). Là encore, on commence à s'apercevoir que ces problèmes sont "naturels" et conduisent eux aussi à de nouveaux objets mathématiques importants, comme par exemple les " faisceaux tordus". Je n'ai malheureusement pas d'exemples intuitifs à proposer.

On a ainsi:

(i) ensembles, égalité, fonctions: intersections 2 à 2,

(ii) catégories, isomorphisme, faisceaux: intersections 3 à 3,

(iii) 2-catégories, 2-isomorphismes, stacks: intersections 4 à 4.

On peut penser que la liste continue, mais dans la pratique ce n'est pas (encore ?) le cas.

Les 2-catégories existent depuis longtemps, mais leur nécéssité n'est apparue que récemment dans divers champs des mathématiques et de la physique (équations de Yang-Baxter, groupes quantiques, faisceaux tordus, branes, etc.) et cette théorie (ou plutôt ce langage) semble maintenant devoir faire partie du paysage quotidien. Il en va autrement des n-catégories ($n > 2$ et même $n = \infty$) dont le statut n'est pas pour l'instant très clair, d'autant plus que de nombreuses définitions possibles coexistent. Contrairement à ce que l'on pourrait croire, les mathématiciens n'aiment pas beaucoup les généralisations gratuites, et il leur faut des motivations très fortes pour développer une nouvelle théorie.

Université Pierre et Marie Curie, Institut de Mathématiques
175 rue du Chevaleret 75013 Paris, France
schapira@math.jussieu.fr
http://www.math.jussieu.fr/~ schapira/