Tomographie topologique

Pierre Schapira

Le radical "tomo" vient du mot grec *temnein* qui signifie couper, et la tomographie est l'art de reconstituer un objet à partir d'informations sur ses différentes tranches.

Imaginons un objet (un compact) dans l'espace usuel à trois dimensions, et supposons que l'on connaisse le nombre de morceaux (i.e. de composantes connexes) et le nombre de trous de chacune de ses tranches (mais rien de leur géométrie). Alors on peut reconstituer exactement cet objet!

Nous allons décrire ici la technique de cette reconstitution, technique à vrai dire élémentaire et basée sur une notion fondamentale de la topologie algébrique: la caractéristique d'Euler-Poincaré. Commençons par rappeler le cadre mathématique de la tomographie, la dualité projective, et la transformation intégrale associée, la transformation de Radon.

1 Tomographie

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^3$, une tranche est un plan affine. Si l'on repère un point de $\mathbb{R}^3$ par ses coordonnées $x = (x_1, x_2, x_3)$, un plan affine sera l'ensemble des x tels que $y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$. Comme $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ appartient à $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ et que le plan ne change pas si l'on remplace y par λy avec $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, les plans affines de $\mathbb{R}^3$ sont representés par les points de l'espace projectif (dual) à trois dimensions, $\mathbb{P}^{3*} = (\mathbb{R}^4 \setminus \{0\})/(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, le point $[1, 0, 0, 0]$ correspondant au "plan à l'infini" de $\mathbb{R}^3$. On obtient une situation symétrique en plongeant $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{P}^3$ par $(x_1, x_2, x_3) \mapsto [1, x_1, x_2, x_3]$. On a alors une correspondance entre l'espace projectif $\mathbb{P}^3$ et l'espace projectif dual $\mathbb{P}^{3*}$ donnée par la "relation d'incidence" $\mathbb{A} = \{(x, y) \in \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^{3*}; \langle x, y \rangle = 0\}$, où $\langle x, y \rangle = x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. On peut visualiser cette correspondance par le diagramme:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{A} \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ \mathbb{P}^3 & & \mathbb{P}^{3*} \end{tikzcd}$$

Le problème de la tomographie est le suivant. Considérons une fonction $\varphi(x)$ définie sur $\mathbb{R}^3$ et à support compact. Si $\widehat{y}$ est un hyperplan affine de $\mathbb{R}^3$ correspondant au point $y \in \mathbb{P}^{3*}$, la transformée de Radon de φ au point y est l'intégrale de la restriction de φ au plan $\widehat{y}$. Notons $\widehat{\varphi}$ la transformée de Radon de φ. On a donc:

$$\widehat{\varphi}(y) = \int_{\hat{y}} \varphi|_{\hat{y}}. \tag{1}$$

La question est: comment retrouver φ connaissant sa transformée de Radon $\widehat{\varphi}$?

En général, φ est une fonction classique ou une distribution, et l'intégrale est celle de Lebesgue, mais nous allons voir qu'il existe un cadre purement topologique dans lequel on peut aussi traiter cette correspondance. Il s'agit du calcul d'Euler des fonctions constructibles, calcul introduit indépendament par l'auteur [2] dans le cas sous-analytique réel et Viro [4] dans le cas analytique complexe. Signalons aussi que [2] était inspiré par un article de [1].

2 Calcul d'Euler des fonctions constructibles

Une fonction constructible φ sur un espace topologique X est une fonction à valeurs dans $\mathbb{Z}$ qui peut s'écrire:

$$\varphi = \sum_{\alpha} m_\alpha \mathbf{1}_{X_\alpha} \tag{2}$$

où la famille $\{X_\alpha\}$ est un recouvrement localement fini de X, $\mathbf{1}_{X_\alpha}$ désigne la fonction caractéristique de X_α et $m_\alpha \in \mathbb{Z}$. Dans la pratique X aura une structure beaucoup plus riche, c'est par exemple une variété analytique réelle ou complexe ou bien un espace linéaire par morceaux, et la stratification a les propriétés correspondantes. En particulier on supposera toujours que X admet une décomposition simpliciale et que les X_α sont réunions de simplexes.

Notons $FC(X)$ l'espace des fonctions constructibles sur X. C'est un anneau pour les opérations usuelles d'addition et de multiplication, et si $f : Z \to X$ est un morphisme, l'image inverse (la composition par f) d'une fonction constructible sur X est une fonction constructible sur Z. Jusqu'à maintenant, rien de bien spectaculaire. Les choses deviennent plus amusantes avec l'image directe (intégration). Si φ est une fonction constructible à support compact, on peut choisir la décomposition de φ dans (2) telle que la somme soit finie et les X_α soient compacts. On définit alors l'intégrale d'Euler de φ par la formule:

$$\int_X \varphi = \sum_{\alpha} m_\alpha \cdot \chi(X_\alpha),$$

où $\chi(X_\alpha)$ désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré de X_α. (Cette formule ne dépend pas de la décomposition choisie.) Si $f : X \to Y$ est un morphisme propre sur le support de φ, on définit $\int_f \varphi$ par la formule: $(\int_f \varphi)(y) = \int_X (\varphi \cdot \mathbf{1}_{f^{-1}(y)})$ et on démontre que c'est une fonction constructible sur Y.

Rappellons que la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(K)$ d'un compact K (admettant une décomposition simpliciale) possède les propriétés suivantes qui la caractérisent: $\chi(K)$ est un entier (éventuellement négatif), invariant par déformation continue de K, qui vaut 1 si K est un point (donc si l'on peut déformer

K en un point) et tel que si K_1 et K_2 sont deux compacts, alors:

$$\chi(K_1 \cup K_2) = \chi(K_1) + \chi(K_2) - \chi(K_1 \cap K_2).$$

Si par exemple K est un compact du plan $\mathbb{R}^2$, alors $\chi(K)$ est la différence entre le nombre de composantes connexes et le nombre de trous de K.

3 Tomographie des fonctions constructibles

Revenons à la situation géométrique du §1 et notons par $\widehat{\varphi}$ la transformée de Radon d'une fonction constructible φ, l'intégrale étant celle décrite au §2. Le résultat principal (cf. [4], [3]) est la formule d'inversion:

$$\widehat{\widehat{\varphi}} = \varphi. \tag{3}$$

Cette formule est d'ailleurs vraie en toute dimension impaire, et une formule voisine existe en dimension paire. Sa démonstration est presque immédiate à partir de la remarque suivante. Notons p la projection $\mathbb{A} \times_{\mathbb{P}^{3*}} \mathbb{A} \to \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$. Alors $p^{-1}(x, x')$ est l'ensemble des plans de $\mathbb{R}^3$ passant par les points x et x'. C'est un espace projectif de dimension 2 ou 1 (i.e. un cercle) suivant que $x = x'$ ou $x \neq x'$, et par suite $\chi(p^{-1}(x, x'))$ vaut 1 ou 0 suivant que $x = x'$ ou $x \neq x'$.

Considérons maintenant un compact K de $\mathbb{R}^3$. Par définition de l'intégrale d'Euler, on a:

$$\widehat{\mathbf{1}_K}(y) = \chi(K \cap \widehat{y}). \tag{4}$$

Autrement dit, la transformée de Radon en y de la fonction caractéristique de K est égale à la différence: $\#C - \#T$ où $\#C$ désigne le nombre de composantes connexes et $\#T$ le nombre de trous de la tranche $K \cap \widehat{y}$. La formule d'inversion (3) permet de reconstituer exactement le compact K connaissant ce nombre pour toutes les tranches.

References

[1] R. Guibas, L. Ramschaw,and J. Stolfi, *A kinetic framework for Computational Geometry*, Proc. I.E.E.E. Symp. on Foundations of Comput. Sci. (1983) pp.74-123

[2] P. Schapira, *Cycles lagrangiens, fonctions constructibles et applications*, Sem. EDP, Publ. Ecole Polytechnique (1988/89)

[3] ———, *Tomography of constructible functions*, in LN Computer Science **948** Springer (1995) pp. 427-435

[4] O. Viro, *Some integral calculus based on Euler Characteristic*, LN Math. **346** Springer (1988)

Institut de Mathématiques; Analyse Algébrique; Université Pierre et Marie Curie; Case 247; 4, place Jussieu; F-75252 Paris Cedex 05
email: `schapira@math.jussieu.fr`