Inventiones math. 17, 95–105 (1972)

Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles

Jean-Michel Bony (Paris) et Pierre Schapira (Paris)

Etant donné une famille finie (P_i) d'opérateurs différentiels à coéfficients holomorphes dans $\mathbb{C}^n$, nous posons les deux questions suivantes. D'une part, le problème du prolongement à travers la frontière: si f est holomorphe dans un ouvert Ω et si les $P_i f$ se prolongent au voisinage d'un point frontière z_0, la frontière f se prolonge-t-elle au voisinage de z_0. D'autre part, dans le cas d'un seul opérateur P, le problème de l'existence au bord: si g est holomorphe au voisinage de z_0 dans Ω, existe-t-il f, holomorphe au voisinage de z_0 dans Ω, solution de $Pf=g$.

Nous donnons au paragraphe 4 une réponse positive à ces questions lorsque le bord de l'ouvert est non caractéristique, les résultats étant valables pour des ouverts convexes, ou de classe C^1, ou plus généralement pour une classe d'ouverts, invariante par C^1-difféomorphismes, satisfaisant à une «condition de cône».

Ces théorèmes nous permettent de résoudre un problème posé par B. Malgrange. Si Ω est un ouvert relativement compact à frontière partout non-caractéristique, vérifiant $H^1(\bar{\Omega}, \mathcal{O})=0$, l'opérateur P considéré comme application de $\mathcal{O}(\Omega)$ (espace des fonctions holomorphes dans Ω) dans lui-même est d'indice fini.

Nous montrons enfin comment les théorèmes d'existence et de prolongement permettent de retrouver naturellement le théorème fondamental de M. Sato: dans le fibré cotangent de $\mathbb{R}^n$, le support singulier d'un hyperfonction solution de $Pu=v$ est contenu dans la réunion du support singulier de v et de l'ensemble des (x, η) vérifiant $p(x, \eta)=0$.

Dans un prochain article (voir [1] et [2]), nous appliquerons les résultats précédents à la résolution d'équations hyperboliques non strictes dans le cadre des fonctions analytiques et des hyperfonctions.

1. Notations

Nous identifierons $\mathbb{C}^n$, muni du produit hermitien $\langle z, \zeta\rangle = \Sigma z_i \bar{\zeta}_i$ à l'espace euclidien $\mathbb{R}^{2n}$ muni du produit scalaire $\operatorname{Re}\langle z, \zeta\rangle$. Sauf mention explicite du contraire, le mot hyperplan signifiera hyperplan réel de $\mathbb{R}^{2n}$.

Nous noterons S^{2n-1} la sphère unité. Nous dirons qu'une partie I de S^{2n-1} est convexe (resp. propre) si le cône engendré par I est convexe (resp. ne contient aucune droite). Le polaire de I est le cône convexe défini par $\mathrm{Re}\langle z, \zeta\rangle \leqq 0$ pour ζ appartenant à I. Lorsque $I, I', \ldots$ désigneront des parties convexes propres de S^{2n-1}, nous noterons $\Gamma, \Gamma', \ldots$ l'intérieur de leurs polaires respectifs.

Nous considérerons des opérateurs différentiels $P\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ de la forme suivante:

$$P\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \sum_{|\alpha| \leqq m} a_\alpha(z) \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^\alpha$$

avec $\frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}\right)$, où les coefficients $a_\alpha(z)$ sont holomorphes dans un ouvert U de $\mathbb{C}^n$. Nous désignerons par

$$p(z, \zeta) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(z) \cdot \zeta^\alpha$$

le symbole principal de l'opérateur P.

Un hyperplan d'équation $\mathrm{Re}\langle z - z_0, \zeta\rangle = 0$ est caractéristique en z_0 si $p(z_0, \zeta) = 0$. De même nous dirons que cet hyperplan est caractéristique en z_0 relativement à une famille (P_i) d'opérateurs de ce type si on a $P_i(z_0, \zeta) = 0$ quel que soit i. Nous dirons également que le vecteur ζ est caractéristique en z_0.

Définition 1.1. Si Ω est un ouvert de U, nous noterons. $\mathrm{Car}(\Omega)$ l'adhérence de l'ensemble des directions qui sont caractéristiques (relativement au système (P_i)) en au moins un point de Ω.

Un vecteur non nul ζ appartient à $\mathrm{Car}(\Omega)$ s'il existe une suite (z_n, ζ_n) avec $z_n \in \Omega$; $\zeta_n \to \zeta$; $p_i(z_n, \zeta_n) = 0$.

2. Théorèmes de prolongement

Le résultat suivant est un cas particulier d'un théorème de Zerner [13] sur lequel nous reviendrons au paragraphe 4.

Lemme 2.1. *Soit Ω un ouvert convexe dont la frontière est de classe C^1. Supposons que le normale ζ à $\partial\Omega$ en un de ses points z_0 soit non caractéristique pour l'opérateur P. Alors, si f est holomorphe dans Ω et si Pf se prolonge en fonction holomorphe au voisinage de z_0, la fonction f se prolonge holomorphiquement au voisinage de z_0.*

On peut se ramener, grace au théorème de Cauchy-Kowalewski au cas où $Pf = 0$. Nous prendrons d'autre part le vecteur ζ unitaire et dirigé vers l'extérieur de Ω.

Soit alors $\tilde{H}_\varepsilon$ l'hyperplan complexe d'équation $\langle z - z_0, \zeta\rangle = -\varepsilon$. La frontière étant de classe C^1, la plus grande boule de $\tilde{H}_\varepsilon$ centrée en

$z_0 - \varepsilon\zeta$ et contenue dans $\Omega \cap \tilde{H}_\varepsilon$ a un rayon a qui est infiniment grand par rapport à ε lorsque ε tend vers 0.

D'après le théorème de Cauchy-Kowalewski précisé [7], il existe un nombre $\delta > 0$, indépendant de a et de ε, tel que tout germe de solution holomorphe de $Pf = 0$ au voisinage de B'_a se prolonge en fonction holomorphe dans la boule (de $\mathbb{C}^n$) $B_{\delta a}$ de même centre et de rayon δa. Cette boule contiendra z_0 pour ε assez petit et f se prolonge holomorphiquement dans $\Omega \cup B_{\delta a}$.

Théorème 2.1. *Soit (P_i) une famille d'opérateurs différentiels dans U et soient ω et Ω deux convexes de U, où ω est localement compact, Ω est ouvert et $\omega \subset \Omega$. Supposons que tout hyperplan de normale appartenant à* $\mathrm{Car}(\Omega)$ *qui coupe Ω coupe également ω. Alors, si f est holomorphe au voisinage de ω, et si $P_i f$ se prolonge holomorphiquement dans Ω, la fonction f se prolonge holomorphiquement dans Ω.*

Nous reprenons ici un argument géométrique dû à Hörmander ([4] théorème 5.3.3). Soit z_0 appartenant à ω. Pour tout point z_1 de Ω, nous allons trouver un prolongement de f dans un voisinage du segment joignant z_0 à z_1.

Soit $\eta > 0$ tel que la boule fermée $\overline{B(z_1, \eta)}$ de centre z_1 et de rayon η soit contenue dans Ω. L'ensemble $\mathrm{Car}(\Omega)$ étant fermé, il existe un compact K de ω tel que tout hyperplan de normale appartenant à $\mathrm{Car}(\Omega)$ qui coupe $\overline{B(z_1, \eta)}$ coupe K. On peut évidemment supposer que K est convexe et contient z_0.

Soit $0 < \varepsilon < \eta$ tel que f soit holomorphe dans l'ouvert $K_{2\varepsilon}$ (ensemble des points dont la distance à K est inférieure à 2ε). Pour $0 \leqq t \leqq 1$, posons $z_t = z_0 + t(z_1 - z_0)$ et soit M_t l'enveloppe convexe de K_ε et de la boule ouverte $B(z_t, \varepsilon)$.

La frontière de M_t est de classe C^1 (c'est l'ensemble des points dont la distance à un ensemble convexe est constante), et en un point frontière de M_t n'apparenant pas à K_ε, la normale n'appartient pas à $\mathrm{Car}(\Omega)$. Soit t_0 le plus grand t tel que f se prolonge holomorphiquement à M_t, il résulte du lemme 2.1 que l'on ne peut avoir $t_0 < 1$.

Pour tout z_1 appartenant à Ω, nous avons donc obtenu un prolongement de f dans un ouvert étoilé en z_0 contenant z_1, ce qui définit un prolongement de f à Ω tout entier.

Remarque. Dans le cas d'un opérateur à coefficients constants, ce théorème a été démontré par Kiselman par une méthode entièrement différente [6].

Le résultat précédent permet de donner une forme plus précise du théorème de Cauchy-Kowalewski. Signalons que ce corollaire a été retrouvé par C. Wagschal qui utilise la méthode des séries majorantes.

Corollaire. *Soit $P\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ un opérateur différentiel d'ordre m dans U. Supposons que l'hypersurface $\{z_n=0\}$ soit non caractéristique dans U. Il existe alors un système fondamental de voisinages V de $\{z_n=0\} \cap U$ tels que si g est holomorphe dans V et si (h) est un m-uple de fonctions holomorphes sur $\{z_n=0\} \cap U$, il existe une et une seule fonction f holomorphe dans V, telle que $Pf=g$ et que m premières traces de f soient égales à (h).*

Soit W un voisinage de $\{z_n=0\} \cap U$. Soit ω un ouvert convexe relativement compact de $\{z_n=0\} \cap U$. Il est facile de construire un ouvert convexe Ω contenu dans W, contenant ω, et tel que les hypothèses du théorème 2.1 soient satisfaites pour le couple (ω, Ω). Il en résulte que la solution f fournie par le théorème de Cauchy-Kowalewski sera holomorphe dans Ω s'il en est ainsi de g. La réunion des Ω correspondant à un recouvrement ω_i de $\{z_n=0\} \cap U$ fournit l'ouvert cherché.

3. Cas d'un cône convexe

Dans ce paragraphe, Γ désignera un cône ouvert convexe non vide dont le sommet appartient à U. Nous supposerons que ce sommet est l'origine, et nous désignerons par I l'intersection de S^{2n-1} avec le polaire de Γ.

Si ζ appartient à I, si I_1 et I_2 sont deux parties convexes fermées propres de S^{2n-1}, où I_1 est un voisinage de I et I_2 un voisinage de I_1, et si Γ_1 et Γ_2 désignent les intérieurs de leurs polaires respectifs, les deux propriétés suivantes sont immédiates:

Pour $\varepsilon>0$, l'intersection K de $\bar{\Gamma}_1$ avec l'hyperplan d'équation $\mathrm{Re}\langle z, \zeta\rangle = -\varepsilon$ est une base compacte de $\bar{\Gamma}_1$.

L'intersection des demi-espaces contenant K et dont la normale n'appartient pas à I_2 est un voisinage de 0.

Lemme 3.1. *Soit (P_i) une famille finie d'opérateurs différentiels dans U. Supposons que les directions de I soient non caractéristiques en 0. Alors, si f est holomorphe dans Γ au voisinage de 0, et si les $P_i f$ se prolongent holomorphiquement au voisinage de 0, la fonction f se prolonge holomorphiquement au voisinage de 0.*

Soit W un voisinage convexe de 0 dans lequel les $P_i f$ sont holomorphes et tel que $\mathrm{Car}(W)$ ne rencontre pas I. Choisissons I_1 et I_2 comme ci-dessus, avec $I_2 \cap \mathrm{Car}(W) = \emptyset$. Choisissons enfin ε tel que K soit contenu dans W. D'après le théorème 2.1, si V est un voisinage ouvert convexe de 0 contenu dans l'intersection des demi-espaces contenant K et dont la normale n'appartient pas à I_2, la fonction f se prolonge dans V.

Lemme 3.2. *Soit* $P\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ *un opérateur différentiel dans* U *et supposons que les directions de* I *soient non caractéristiques en* 0. *Pour tout voisinage* V *de* 0, *il existe un voisinage* V' *de* 0 *tel que, si* g *est holomorphe dans* $\Gamma \cap V$, *il existe une solution* f *de* $Pf = g$ *holomorphe dans* $\Gamma \cap V'$.

a) Nous allons d'abord démontrer le lemme dans le cas où il existe ζ_0 appartenant à I et $\alpha > 0$ tels que:

Pour tout vecteur ζ de I, on a $|\zeta - \zeta_0| \leqq \alpha$.

Tout vecteur ζ vérifiant $|\zeta - \zeta_0| \leqq \alpha$ est non caractéristique en 0.

Soit alors W voisinage de 0 tel que $\mathrm{Car}(W) \cap I = \emptyset$. Soit $\tilde{H}_\varepsilon$ l'hyperplan complexe d'équation $\langle z, \zeta_0 \rangle = -\varepsilon$ en choisissant ε assez petit pour que $\Gamma \cap \tilde{H}_\varepsilon$ soit contenu dans $V \cap W$. Nous allons montrer que, pour ζ appartenant à $\mathrm{Car}(W)$, l'hyperplan d'équation $\mathrm{Re}\langle z, \zeta \rangle = 0$ coupe $\tilde{H}_\varepsilon \cap \Gamma$. En effet, dans l'hypothèse contraire, les équations

$$\mathrm{Re}\langle z, \zeta \rangle = 0$$

et

$$\mathrm{Im}\langle z, \zeta_0 \rangle = \mathrm{Re}\langle z, i\zeta_0 \rangle = 0$$

n'auraient pas de solutions non nulles dans Γ. Il en résulterait l'existence de deux réels λ et μ tels que. $\lambda\zeta + i\mu\zeta_0$ soit dans I. On aurait donc

$$\lambda\zeta + i\mu\zeta_0 = \zeta_0 + \theta \qquad \text{avec } |\theta| \leqq \alpha$$

d'où

$$\frac{\lambda(1 - i\mu)}{1 + \mu^2}\zeta = \zeta_0 + \frac{1 - i\mu}{1 + \mu^2}\theta \qquad \text{avec } \left|\frac{1 - i\mu}{1 + \mu^2}\theta\right| \leqq \alpha,$$

ce qui contredit le fait que $\frac{\lambda(1 - i\mu)}{1 + \mu^2}\zeta$ est caractéristique.

L'intersection de tous les demi-espaces contenant $\Gamma \cap \tilde{H}_\varepsilon$ dont la normale appartient à $\mathrm{Car}(W)$ est donc un voisinage V' de 0. Le théorème de Cauchy-Kowalewski permet de résoudre l'équation $Pf = g$ au voisinage de $\Gamma \cap \tilde{H}_\varepsilon$ et le théorème 2.1 permet de prolonger cette solution dans $\Gamma \cap V'$.

Pour démontrer le résultat dans le cas général, nous aurons besoin du lemme suivant:

Lemme 3.3. *Pour tout nombre* $\alpha > 0$, *il existe un nombre fini de cônes ouverts* Γ_p, *avec* $\Gamma = \cap \Gamma_p$, *tels que le diamètre de* I_p *(intersection du polaire de* Γ_p *avec* S^{2n-1}*) soit inférieur à* α, *et tels que pour toute fonction* g *holomorphe dans l'intersection de* Γ *et d'une boule centrée en* 0, *il existe des fonctions* g_p, *holomorphes dans l'intersection de* Γ_p *et de cette même boule, avec* $g = \Sigma g_p$ *dans* Γ.

Soit en effet z un vecteur unitaire de $\mathbb{C}^n$ et posons

$$I_1 = I \cap \{\zeta \mid \operatorname{Re}\langle z, \zeta\rangle \geqq 0\} \quad \text{et} \quad I_2 = I \cap \{\zeta \mid \operatorname{Re}\langle z, \zeta\rangle \leqq 0\}.$$

Soient Γ_1 et Γ_2 l'intérieur de leurs polaires respectifs. L'ouvert $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ est égal à l'enveloppe convexe de Γ et de la droite réelle passant par z. L'intersection de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ et de la boule B donnée est donc un ouvert d'holomorphie et d'après la solution du premier problème de Cousin (voir par exemple [5]) il existe des fonctions g_1 et g_2 respectivement holomorphes dans $\Gamma_1 \cap B$ et $\Gamma_2 \cap B$ telles que $g = g_1 + g_2$. L'itération du procédé conduit au résultat voulu.

b) *Fin de la démonstration du lemme* 3.2:

Dans le cas général où I est formé de directions non-caractéristiques, désignons par α la distance de I à l'ensemble des directions caractéristiques. Soient (Γ_p) les cônes fournis par le lemme 3.3. Nous pouvons décomposer g en somme de fonctions g_p holomorphes au voisinage de 0 dans Γ_p. D'après la première partie de la démonstration, nous pouvons résoudre $Pf_p = g_p$ et poser $f = \Sigma f_p$.

4. Théorèmes d'existence et de prolongement

Nous allons généraliser les résultats du paragraphe précédent à une classe d'ouverts invariante par C^1-difféomorphisme, contenant comme cas particuliers les ouverts convexes et les ouverts de classe C^1.

Si Γ est un cône ouvert convexe de sommet 0 nous noterons Γ_ε l'intersection de Γ et de la boule de rayon ε centrée en 0.

Définition 4.1. Soit I une partie convexe fermée propre de S^{2n-1}. Nous dirons que l'ouvert Ω vérifie la condition de cône $C(z_0, I)$ en un de ses points frontière z_0, si pour tout voisinage I' de I, il existe un voisinage V de z_0 et $\varepsilon > 0$ tels que, pour tout z appartenant à $V \cap \Omega$, on ait $z + \Gamma'_\varepsilon \subset \Omega$, où Γ' désigne l'intérieur du polaire de I'.

Remarques. La propriété précédente est invariante par C^1-difféomorphismes, et s'étend naturellement aux variétés, I étant alors une partie de la sphère cotangente en z_0.

Si Ω est un ouvert convexe, il vérifie la condition $C(z_0, I)$ en désignant par I l'ensemble des normales extérieures à $\bar{\Omega}$ en z_0.

Si Ω a une frontière de classe C^1 et est situé localement du même côté de $\partial\Omega$, il vérifie $C(z_0, \{\eta\})$ où η est la normale extérieure à $\partial\Omega$ en z_0.

Lemme 4.1. *Si Ω vérifie la condition de cône $C(z_0, I)$, il existe un système fondamental de voisinages V de z_0 tels que $V \cap \Omega$ soit connexe.*

Soit I' voisinage fermé propre de I, l'intérieur Γ' de son polaire est donc non vide. Il est clair qu'il existe une constante C telle que:

$$|z_1 - z_2| \leqq \alpha \quad \text{implique} \quad (z_1 + \Gamma'_{C\alpha}) \cap (z_2 + \Gamma'_{C\alpha}) \neq \emptyset.$$

En désignant par $B(z_0, \alpha/2)$ la boule ouverte de centre z_0, et de rayon $\alpha/2$, on peut prendre comme ouvert V la réunion de $B(z_0, \alpha/2)$ et des cônes $z + \Gamma'_{C\alpha}$ où z parcourt $\Omega \cap B(z_0, \alpha/2)$.

Théorème 4.1. *Soit $P_i\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ une famille finie d'opérateurs différentiels dans U. Supposons que Ω vérifie la condition $C(z_0, I)$ en un point frontière z_0 appartenant à U, et que les directions de I soient non caractéristiques en z_0. Alors, si f est holomorphe dans Ω, et si les $P_i f$ se prolongent holomorphiquement au voisinage de z_0, la fonction f se prolonge holomorphiquement au voisinage de z_0.*

Soit en effet Γ' l'intérieur du polaire d'un voisinage I' suffisamment petit de I. D'après le lemme 3.1, la restriction de f à $z_0 + \Gamma'_\varepsilon$ se prolonge à un voisinage V de z_0. On peut supposer, grâce au lemme précédent, que $\Omega \cap V$ est connexe. La fonction f et le prolongement construit coincident dans un ouvert non vide de $\Omega \cap V$ et donc définissent une solution holomorphe dans $\Omega \cup V$.

Théorème 4.2. *Soit $P\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ un opérateur différentiel dans U. Supposons que Ω vérifie la condition $C(z_0, I)$ en un point frontière z_0 appartenant à U, et que les directions de I soient non caractéristiques en z_0. Pour tout voisinage V de z_0, il existe un voisinage V' de z_0 tel que, si g est holomorphe dans $\Omega \cap V$, il existe une solution f de $Pf = g$ holomorphe dans $\Omega \cap V'$.*

Soit W un voisinage de z_0 et I' un voisinage de I tels que $I' \cap \mathrm{Car}(W) = \emptyset$. Soit Γ' l'intérieur du polaire de I'. Le lemme 3.2 permet de résoudre l'équation $Pf = g$ dans le cône $z_0 + \Gamma'$, au voisinage de z_0. Soit K une base de Γ' contenue dans ce voisinage (ainsi que dans W).

Il est clair que si z_1 appartient à un voisinage V_1 suffisamment petit de z_0, l'intérieur $M(z_1, K)$ de l'enveloppe convexe de z_1 et de K est contenu dans le cône $z_1 + \Gamma$. D'après le théorème 2.1 la solution f définie au voisinage de K se prolonge à $M(z_1, K)$. La réunion de V_1 et des ouverts $M(z_1, K)$ où z_1 parcourt $V_1 \cap \Omega$ définit l'ouvert V' cherché.

Corollaire. *Soit Ω un ouvert de classe C^1 dont la frontière est non caractéristique en z_0 pour l'opérateur $P\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right)$. Alors*

Si f est holomorphe dans Ω et si Pf se prolonge holomorphiquement au voisinage de z_0, la fonction f se prolonge de même au voisinage de z_0.

Si g est holomorphe dans Ω au voisinage de z_0, il existe une solution f de $Pf = g$, holomorphe au voisinage de z_0 dans Ω.

La partie «prolongement» de ce théorème est due à Zerner [13]. On peut énoncer un corollaire analogue pour un ouvert convexe dont tous les hyperplans d'appui en z_0 sont non caractéristiques en ce point.

5. Indice des opérateurs différentiels

Nous supposerons dans ce paragraphe que U est une variété analytique complexe dénombrable à l'infini, et que $P\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ est un opérateur défini sur U.

Nous désignerons par $\mathcal{O}$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur U. Si ω est un ouvert, nous désignerons par $\mathcal{O}(\omega)$ ou par $H^0(\omega, \mathcal{O})$ l'espace des fonctions holomorphes dans ω. De même, si K est compact, nous noterons $\mathcal{O}(K)$ ou $H^0(K, \mathcal{O})$ l'espace des germes de fonctions holomorphes au voisinage de K.

Théorème 5.1. *Soit Ω un ouvert relativement compact de U. Supposons qu'en chaque point z_0 de sa frontière, Ω vérifie une condition de cône $C(z_0, I)$ où les directions de I sont non caractéristiques pour P en z_0. Supposons d'autre part que $H^1(\bar{\Omega}, \mathcal{O})=0$.*

Alors l'opérateur P, de $\mathcal{O}(\Omega)$ dans $\mathcal{O}(\Omega)$ est d'indice fini.

Corollaire 5.1. *Soit Ω un ouvert borné convexe de $\mathbb{C}^n$, tel que tout hyperplan d'appui de Ω soit non caractéristique en ses points d'appui. Alors l'opérateur P de $\mathcal{O}(\Omega)$ dans $\mathcal{O}(\Omega)$ est d'indice fini.*

Corollaire 5.2. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}^n$, de classe C^1 et dont la frontière est non caractéristique. Si de plus $H^1(\bar{\Omega}, \mathcal{O})=0$, l'opérateur P est d'indice fini de $\mathcal{O}(\Omega)$ dans $\mathcal{O}(\Omega)$.*

Démonstration du théorème 5.1. Considérons le préfaisceau défini par: $\omega \rightsquigarrow \mathcal{O}(\Omega \cap \omega)$. C'est évidemment un faisceau que nous noterons $\mathcal{O}^+$. Nous désignerons d'autre part par $\mathcal{O}_P$ le faisceau des germes de solutions holomorphes de l'équation $Pf=0$.

Il résulte du théorème de Cauchy-Kowalewski que la suite

$$0 \to \mathcal{O}_P \to \mathcal{O} \xrightarrow{P} \mathcal{O} \to 0$$

est exacte en chaque point de $\partial\Omega$.

D'autre part, les théorèmes 4.1 et 4.2 expriment que la suite:

$$0 \to \mathcal{O}_P \to \mathcal{O}^+ \xrightarrow{P} \mathcal{O}^+ \to 0$$

est aussi exacte en chaque point de $\partial\Omega$.

On en conclut que la suite

$$0 \to \mathcal{O}^+/\mathcal{O} \xrightarrow{P} \mathcal{O}^+/\mathcal{O} \to 0$$

est exacte en tout point de U, le faisceau $\mathcal{O}^+/\mathcal{O}$ étant porté par $\partial\Omega$.

De la suite exacte $0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}^+ \to \mathcal{O}^+/\mathcal{O} \to 0$, on déduit la suite exacte:

$$0 \to H^0(\bar{\Omega}, \mathcal{O}) \to H^0(\bar{\Omega}, \mathcal{O}^+) \to H^0(\bar{\Omega}, \mathcal{O}^+/\mathcal{O}) \to H^1(\bar{\Omega}, \mathcal{O}) = 0$$

d'où

$$H^0(\bar{\Omega}, \mathcal{O}^+/\mathcal{O}) = \mathcal{O}(\Omega)/\mathcal{O}(\bar{\Omega}).$$

L'opérateur P définit donc un isomorphisme de $\mathcal{O}(\Omega)/\mathcal{O}(\bar{\Omega})$ sur lui-même. Rappelons que les espaces $\mathcal{O}(\Omega)$ et $\mathcal{O}(\bar{\Omega})$ sont respectivement munis de topologies naturelles du type Frechet-Schwartz et dual de Frechet-Schwartz. Sur l'espace $\mathcal{O}_P(\Omega) = \mathcal{O}_P(\bar{\Omega})$, ces deux topologies coïncident d'après le théorème du graphe fermé, et cet espace est donc de dimension finie.

Considérons d'autre part l'application de $\mathcal{O}(\Omega) \times \mathcal{O}(\bar{\Omega})$ dans $\mathcal{O}(\Omega)$ définie par $(f, g) \rightsquigarrow Pf + g$. Elle est surjective. L'espace $\mathcal{O}(\bar{\Omega})$ étant limite inductive dénombrable des espaces de Frechet $\mathcal{O}(\Omega')$ pour Ω' voisinage de $\bar{\Omega}$, il existe un de ces voisinages Ω' tel que la restriction de l'application à $\mathcal{O}(\Omega) \times \mathcal{O}(\Omega')$ soit surjective [3]. Soit maintenant l'application de $\mathcal{O}(\Omega) \times \mathcal{O}(\Omega')$ dans $\mathcal{O}(\Omega)$ définie par $(f, g) \to -g$. C'est une application compacte et un théorème classique de Schwartz [12] assure que la somme des deux applications précédentes a une image fermée de codimension finie, ce qui achève la démonstration.

Remarque. On a en fait démontré que P, considéré comme opérateur de $\mathcal{O}(\Omega)$ dans lui-même ou considéré comme opérateur de $\mathcal{O}(\bar{\Omega})$ dans lui-même, avait mêmes noyaux et conoyaux, et que ces espaces étaient de dimension finie.

Exemple. Dans $\mathbb{C}^2$, l'opérateur $z_1 \dfrac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \dfrac{\partial}{\partial z_2}$ vérifie les hypothèses du théorème en prenant pour Ω une boule centrée à l'origine.

6. Application au support singulier des hyperfonctions

Nous allons dans ce paragraphe donner une démonstration élémentaire d'un théorème fondamental de Sato.

Nous renvoyons à [9] et [11] pour la définition des hyperfonctions et des valeurs au bord des fonction holomorphes. Si f est une fonction holomorphe définie dans $\omega + i\Gamma$ au voisinage de ω, ou ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et Γ un cône ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, nous noterons $b(f)$ sa valeur au bord, hyperfonction sur ω.

Nous dirons avec Sato [10] que l'hyperfonction u est analytique au point (x, η) de $\omega \times S^{n-1}$ s'il existe des cônes Γ_α ouverts convexes de $\mathbb{R}^n$, dont les polaires Γ_α° ne contiennent pas η et des fonctions f_α holomorphes dans $\omega + i\Gamma_\alpha$ au voisinage de x avec $u = \Sigma\, b(f_\alpha)$. Nous désignerons par $SE(u)$ (support essentiel de u) l'ensemble fermé de $\omega \times S^{n-1}$ complémentaire de l'ensemble des (x, η) où u est analytique.

Nous noterons B_x l'espace des germes d'hyperfonctions au voisinage de x et $B_{x,\eta}$ le sous-espace constitué des germes qui sont analytiques au point x, η. Sans redéfinir le faisceau C de Sato, rappelons [10] que la fibre de ce faisceau au point x, η est:

$$C_{(x,\eta)} = B_x / B_{(x,\eta)}.$$

Théorème 6.1 (Sato). *Soit* $P\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ *un opérateur différentiel à coefficients analytiques dans un ouvert de* $\mathbb{R}^n$. *Alors* P *définit un isomorphisme de* C *dans* C *au dessus des points* (x, η) *vérifiant* $p(x, \eta) \neq 0$. *En particulier:*

$$SE(u) \subset SE(Pu) \cup \{(x, \eta) \mid p(x, \eta) = 0\}.$$

a) *Existence.* Soit donc (x, η) tel que $p(x, \eta) \neq 0$, et v une hyperfonction définie au voisinage de x. Nous allons montrer que l'on peut résoudre $Pu = v$ modulo $B_{x,\eta}$.

Soit I_0 un voisinage convexe propre fermé de η et V un voisinage de x tels que l'on ait $p(x', \eta') = 0$ pour x' dans V et η' dans I_0. Si Γ_0 est l'intérieur du polaire de I_0, l'ouvert $V + i\Gamma_0$ satisfait aux hypothèses du théorème 4.2 au point x.

Soit (I_α) une famille finie de parties convexes propres fermées de S^{n-1} ne remontrant pas η et telles que I_0 et les I_α recouvrent S^{n-1}. On peut alors trouver des fonctions g_0 et g_α holomorphes dans $V + i\Gamma_0$ et $V + i\Gamma_\alpha$ telles que:

$$v = b(g_0) + \sum b(g_\alpha).$$

D'après le théorème 4.2 on peut trouver f_0 holomorphe au voisinage de x dans $V + i\Gamma_0$ solution de $P\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right) f_0 = g_0$. L'hyperfonction $u = b(f_0)$ vérifie bien $Pu \equiv v$ (mod $B_{x,\eta}$).

b) *Unicité.* Soit u une hyperfonction définie au voisinage de x telle que Pu appartienne à $B_{x,\eta}$. Soient V un voisinage de x, I_0, (I_α) comme ci-dessus tels que l'on puisse écrire

$$Pu = \sum_\alpha b(g_\alpha)$$

où g_α est holomorphe dans $V + i\Gamma_\alpha$ au voisinage de x. On a également

$$u = b(f_0) + \sum b(f_\alpha)$$

et on en déduit

$$b(Pf_0) = \sum_\alpha b(g_\alpha - Pf_\alpha).$$

Il résulte alors du "théorème du Edge of the Wedge" de Martineau [8] qu'il existe des fonctions $g_{0,\alpha}$, holomorphes dans $V + i\Gamma_{0,\alpha}$ au voisinage de x telles que

$$Pf_0 = \sum_\alpha g_{0,\alpha}$$

où $\Gamma_{0,\alpha}$ désigne l'intérieur du polaire d'un voisinage arbitrairement petit de $I_0 \cap I_\alpha$.

D'après le théorème 4.2 il existe des fonctions $f_{0,\alpha}$ holomorphes au voisinage de x dans $V+i\Gamma_{0,\alpha}$, solutions de $Pf_{0,\alpha}=g_{0,\alpha}$. On a donc $P(f_0-\sum_\alpha f_{0,\alpha})=0$. Cela entraine, grâce au théorème 4.1 que $f_0-\sum_\alpha f_{0,\alpha}$ est holomorphe au voisinage de x.

On a donc finalement:

$$u=\sum b(f_\alpha)+\sum b(f_{0,\alpha})+b(f_0-\sum_\alpha f_{0,\alpha})$$

et u appartient à $B_{x,\eta}$ ce qui achève la démonstration.

Bibliographie

1. Bony, J.-M., Schapira, P.: Existence et prolongement des solutions analytiques des systèmes hyperboliques non stricts. C.R. Acad. Sc. Paris **274**, 86–89 (1972).
2. Bony, J.-M., Schapira, P.: Problème de Cauchy, existence et prolongement pour les hyperfonctions solutions des équations hyperboliques non strictes. C.R. Acad. Sc. Paris **274**, 188–191 (1972).
3. Grothendieck, A.: Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Memoirs of Amer. Math. Soc., Providence, 1955.
4. Hörmander, L.: Linear partial differential operators. Berlin-Heidelberg-Göttingen: Springer 1963.
5. Hörmander, L.: An introduction to complex analysis in several variables. Princeton: Van Nostrand 1966.
6. Kiselman, C.O.: Prolongement des solutions d'une équation aux dérivées partielles à coefficients constants. Bull. Soc. Math. Fr. **97**, 329–356 (1969).
7. Leray, J.: Uniformisation de la solution du problème linéaire analytique de Cauchy près de la variété qui porte les données de Cauchy. Bull. Soc. Math. Fr, **85**, 389–429 (1957).
8. Martineau, A.: Le "Edge of the Wedge theorem" en théorie des hyperfonctions de Sato, Proc. Intern. Conf. on Functional Analysis, Tokyo 1969, Tokyo Univ. Press. 95–106 (1970).
9. Sato, M.: Theory of hyperfunctions I et II. Journ. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **8**, 139–193; 387–437 (1959–60).
10. Sato, M.: Regularity of hyperfunctions solutions of partial differential equations. Actes Congrès Intern. Math. Nice, T. 2, 1970.
11. Schapira, P.: Théorie des hyperfonctions, Lecture Notes in Mathematics, **126**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970.
12. Schwartz, L.: Homomorphismes et applications complètement continues. C.R. Acad. Sc. Paris **236**, 2472 (1953).
13. Zerner, M.: Domaine d'holomorphie des fonctions vérifiant une équation aux dérivées partielles C.R. Acad. Sci. Paris **272**, 1646 (1971).

J.-M. Bony
Département de Mathematiques
Université de Paris 6
11 quai Saint-Bernard
F-75 Paris 5e/France

P. Schapira
Département de Mathematiques
Université de Paris 7
2 place Jussieu
F-75 Paris 5e/France

(Reçu le 21 février 1972)