SOLUTIONS HYPERFONCTIONS DU PROBLEME DE CAUCHY

par Jean-Michel BONY et Pierre SCHAPIRA

0. Introduction

Soit $P(x, \frac{\partial}{\partial x})$ un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients analytiques, défini sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et dont la partie principale est hyperbolique dans une direction N (nous ne faisons aucune hypothèse sur les caractéristiques de P). Nous montrons que l'on peut résoudre le problème de Cauchy $Pu = v$, $\gamma(u) = (w)$ dans l'espace des hyperfonctions, si (w) est un m-uple d'hyperfonctions sur l'hypersurface $\langle x, N \rangle = 0$ et v une hyperfonction définie au voisinage de cette hypersurface, et "analytique" dans la direction N.

La méthode consiste à représenter les hyperfonctions comme somme de valeurs au bord de fonctions holomorphes, à résoudre le problème de Cauchy dans le domaine complexe, et à montrer que la solution obtenue admet une valeur au bord. Les deux outils essentiels sont alors, d'une part un théorème de prolongement des solutions holomorphes d'une équation aux dérivées partielles, d'autre part une inégalité hyperbolique, qui se déduit d'un théorème de MM. Komatsu et Kashiwara, version locale du théorème des tubes de Bochner.

Nous étudions en même temps les solutions analytiques d'une équation hyperbolique, et montrons en particulier que les solutions de l'équation homogène se prolongent à travers la frontière d'un ouvert de classe C^1 dès que la direction normale est hyperbolique.

L'étude des opérateurs hyperboliques à caractéristiques simples a été faite dans le cadre des hyperfonctions par T. Kawai [7].

Le prolongement des solutions d'une équation à coefficients constants a été étudiée par C. -O. Kiselman [8] par une méthode entièrement différente.

Les résultats exposés ici sont extraits d'articles à paraître (cf. [1] [2] [3] [4]).

1. Notations et rappels

Dans tout cet article on désignera par $P = P(x, \frac{\partial}{\partial x})$ un opérateur différentiel à coefficients analytiques dans un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et dont les coefficients se prolongent en fonctions holomorphes sur un ouvert $\tilde{U}$ de $\mathbb{C}^n$. On désignera par $P(z, \frac{\partial}{\partial z})$ le complexifié de P défini sur $\tilde{U}$. On identifiera $\mathbb{C}^n$ pour le produit hermitien $\langle z, \zeta \rangle = \sum_i z_i \bar{\zeta}_i$ à l'espace euclidien $\mathbb{R}^{2n}$ muni du produit scalaire $\mathrm{Re} \langle z, \zeta \rangle$. Le mot hyperplan signifiera, sauf mention du contraire, hyperplan réel de $\mathbb{R}^{2n}$. On écrira $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$.

Un hyperplan d'équation $\mathrm{Re} \langle z - z_0, \zeta \rangle = 0$ sera caractéristique en z_0 si $p(z_0, \zeta) = 0$, où p désigne le symbole principal de P, défini sur $\tilde{U} \times (\mathbb{C}^n - \{0\})$. On dira aussi que c'est le vecteur ζ qui est caractéristique en z_0.

On désignera par S^{n-1} (resp. S^{2n-1}) la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^{2n}$). Si I est une partie de S^{n-1} nous dirons que I est convexe (resp. propre) si le cône engendré par I est convexe (resp. ne contient aucune droite). Le polaire de I sera le cône fermé intersection des demi-espaces passant par l'origine dont la normale extérieure appartient à I. On notera souvent Γ l'intérieur du polaire de I. Inversement si Γ est un cône convexe de $\mathbb{R}^n$, son polaire $I \subset S^{n-1}$ sera l'ensemble (fermé) des normales à Γ à l'origine.

Rappelons un théorème de [3] dont nous aurons besoin.

<u>Théorème 1.1</u>. Soit $\tilde{\omega}$ et $\tilde{\Omega}$ deux convexes de $\mathbb{C}^n$, $\tilde{\omega}$ étant localement compact, $\tilde{\Omega}$ ouvert, avec $\tilde{\omega} \subset \tilde{\Omega}$. Considérons les hyper-

plans dont la normale est limite de directions caractéristiques en un point (au moins) de $\tilde{\Omega}$, et supposons que tout hyperplan de ce type qui coupe $\tilde{\Omega}$ coupe $\tilde{\omega}$. Alors si f est une fonction holomorphe au voisinage de $\tilde{\omega}$ et si Pf se prolonge en fonction holomorphe sur $\tilde{\Omega}$, la fonction f se prolonge en fonction holomorphe sur $\tilde{\Omega}$.

Remarque. Ce théorème se démontre à partir d'un théorème de M. Zerner [15] par un argument géométrique dû à L. Hörmander (cf. [5], théorème 5.3.3.). On retrouvera au paragraphe 4 une situation analogue. Signalons aussi que ce théorème s'énonce pour les solutions f d'un système d'équations $P_i f = g_i$.

Ce théorème avait été démontré pour les opérateurs à coefficients constants par C. -O. Kiselman [8].

2. Inégalité hyperbolique

Théorème 2.1. Soit $Q(z, \tau)$ un polynôme de degré m en τ à coefficients holomorphes dans un ouvert $\tilde{V}$ de $\mathbb{C}^p$. On suppose que le coefficient de τ^m est 1 et que l'équation $Q(z, \tau) = 0$ n'a que des racines en τ réelles pour z réel $(z \in V = \tilde{V} \cap \mathbb{R}^p)$.

Alors pour tout compact K de $\tilde{V} \cap \mathbb{R}^p$ il existe $\varepsilon > 0$, $C > 0$ tels que

$$Q(z, \tau) = 0, \quad \mathrm{Re}\, z \in K, \quad |\mathrm{Im}\, z| < \varepsilon \implies |\mathrm{Im}\, \tau| \leq C|\mathrm{Im}\, z|.$$

Ce théorème résulte immédiatement comme nous l'a signalé M. Kashiwara de la version ci-dessous du théorème des tubes de Bochner (Kashiwara [6], Komatsu [8 bis]).

Théorème 2.2. Soit L la partie de $\mathbb{C}^{p+1}$ définie par:

$$L = \{x + iy \mid |x| < r, \ y_1 = \cdots = y_p = 0, \ 0 < y_{p+1} \leq b\}.$$

Si f est une fonction holomorphe au voisinage de L, pour tout $a < r$ il existe une constante $C > 0$ telle que f est holomorphe dans l'ouvert

$$\tilde{L} = \{x+iy \mid |x| < a, \ |y_1| + \cdots + |y_p| < C|y_{p+1}|, \ 0 < y_{p+1} < b\}.$$

A partir de maintenant nous désignerons par N le vecteur $(0, \cdots, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^n$ et nous écrirons $z = (z', z_n)$ et $\zeta = (\zeta', \zeta_n)$.

Rappelons qu'un opérateur $P(x, \frac{\partial}{\partial x})$ a sa partie principale hyperbolique dans la direction N au point x_0 si l'équation $p(x_0, \xi', \zeta_n) = 0$ n'a que des racines ζ_n réelles $(\xi' \in \mathbb{R}^{n-1})$. En particulier la direction N est non caractéristique.

Théorème 2.3. Supposons la partie principale de P hyperbolique dans la direction N en tous points d'un voisinage de x_0. Il existe une constante $C > 0$ et un nombre $\varepsilon > 0$ tels que

$$|z - x_0| < \varepsilon, \quad \zeta \in \mathbb{C}^n, \quad p(z, \zeta + \tau N) = 0$$
$$\Longrightarrow |\mathrm{Im}\, \tau| \leqslant C[\,|\xi'|\,|y| + |\eta|\,] .$$

Démonstration. Les solutions de l'équation $p(z, \zeta', \tau) = 0$ vérifient d'après le théorème 2.1

$$|\mathrm{Im}\, \tau| \leqslant C_1 [\,|y| + |\eta'|\,]$$

pourvu que $x \in K$, $|y| < \varepsilon$, $|\xi'| = 1$, $|\eta'| < \varepsilon$. On en déduit par homogénéité

$$|\mathrm{Im}\, \tau| \leqslant C_1[\,|y|\,|\xi'| + |\eta'|\,]$$

pourvu que $|\eta'| \leqslant \varepsilon |\xi'|$.

D'autre part N étant non caractéristique au voisinage de x_0, on a une majoration

$$|\tau + \zeta_n| \leqslant C_2 |\zeta'|$$

des solutions de $p(z, \zeta + \tau N) = 0$, et donc

$$|\mathrm{Im}\, \tau| \leqslant C_3[\,|\zeta'| + |\eta_n|\,]$$

ce qui entraîne

$$|\mathrm{Im}\, \tau| \leqslant C_4 |\eta|$$

pour $|\eta'| > \alpha |\xi'|$.

3. Deux lemmes de prolongement

On désigne par $B(0, a)$ la boule ouverte de centre 0 de rayon a, par $\overline{B(0, a)}$ son adhérence, et par $B'(0, a)$ son intersection avec l'hyperplan $\langle x, N\rangle = 0$.

On désignera par $K(a, \delta)$ l'intérieur de l'enveloppe convexe de $B'(0, a)$ et du point $\delta a N$ (de coordonnées $(0, \cdots, 0, \delta a)$).

Lemme 3.1. Soit P un opérateur de partie principale hyperbolique dans la direction N en tout point de la boule $\overline{B(0, r)}$. Il existe une constante $\delta > 0$ telle que pour tout $a < r$, toute fonction f holomorphe au voisinage de $\overline{B'(0, a)}$ ayant la propriété que Pf se prolonge analytiquement dans $K(a, \delta)$, se prolonge elle-même analytiquement à cet ouvert.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Désignons par A_ε l'ensemble (fermé) des directions $\zeta \in S^{2n-1}$ caractéristiques pour l'opérateur $P(z, \frac{\partial}{\partial z})$ en un point $z = x + iy$ avec $|x| \leq r$, $|y| \leq \varepsilon$.

D'après le théorème 1.1 il suffit de vérifier que si $\zeta \in A_\varepsilon$ l'hyperplan de normale ζ passant par le point $\delta a N$ rencontre l'ouvert $|x'| < a$, $|y'| < \varepsilon$ de l'hyperplan $\{z_n = 0\}$.

Il faut donc vérifier que le système d'équations

$$\mathrm{Re}\langle z - \delta a N, \zeta\rangle = 0, \quad z_n = 0, \quad |x'| < a, \quad |y'| < \varepsilon$$

a une solution, sachant d'après le théorème 2.3 appliqué au vecteur $i\zeta$ que :

$$|\xi_n| \leq C[\varepsilon|\eta'| + |\xi'|].$$

On peut par exemple supposer $\xi_n \geq 0$, et d'après la convexité des inégalités il suffit de trouver x' et y' avec $|x'| < a$, $|y'| < \varepsilon$ et

$$\langle x', \xi'\rangle - \langle y', \eta'\rangle \geqslant \delta a \xi_n .$$

Or on peut trouver x' et y' tels que $\langle x', \xi'\rangle = \frac{a}{2}|\xi'|$, $\langle y', \eta'\rangle = -\frac{\varepsilon}{2}|\eta'|$, d'où l'inégalité

$$\frac{1}{2}[a|\xi'| + \varepsilon|\eta'|] \geqslant \delta a \xi_n$$

inégalité qui sera vérifiée pourvu que l'on ait $\delta \leqslant \frac{1}{2(r+1)C}$.

Si Γ est un cône de $\mathbb{R}^n$ on désigne par Γ_ε son intersection avec la boule $B(0, \varepsilon)$.

<u>Lemme 3.2</u>. Soit P un opérateur de partie principale hyperbolique dans la direction N en tout point de la boule $\overline{B(0, r)}$. Soit Γ' un cône ouvert convexe non vide de l'hyperplan $\langle y, N\rangle = 0$. Il existe une constante $\delta' > 0$ telle que pour tout $a < r$, toute fonction f holomorphe au voisinage de $B'(0, a) + i\Gamma'_\varepsilon$, pour un $\varepsilon > 0$, ayant la propriété que Pf se prolonge en fonction holomorphe dans l'ouvert $K(a, \delta') + i\Gamma_{1,\varepsilon}$, où Γ_1 est un cône ouvert convexe (de $\mathbb{R}^n$) contenant Γ', se prolonge elle-même dans un ouvert du type $K(a, \delta') + i\Gamma_{2,\varepsilon'}$, avec $\varepsilon' > 0$, et où Γ_2 est un cône ouvert convexe contenant Γ'.

<u>Démonstration</u>. Il résulte du théorème de Cauchy-Kowalevski précisé (ou du théorème 1.1) que f est holomorphe dans un ouvert convexe contenant $B'(0, a) + i\Gamma_{\varepsilon/2}$, où Γ est un cône ouvert convexe contenant Γ'.

Soit $\gamma \in \Gamma'$ un vecteur de norme 1. On a vu dans la démonstration du lemme 3.1 que si l'on désignait par A_ε l'ensemble des directions caractéristiques en un point du compact $|x| \leqslant r$, $|y| \leqslant \varepsilon$, tout hyperplan de normale $\zeta \in A_\varepsilon$ passant par le point $\delta a N$ recontre $B'(0, a)$

$+ i(|y'| < \varepsilon)$. On en déduit qu'il existe un nombre $\alpha > 0$ (ne dépendant que de γ et Γ') tel que tout hyperplan de normale $\zeta \in A_\varepsilon$ passant par le point $\alpha \delta a N + i \frac{\varepsilon}{4} \gamma$ rencontre $B'(0, a) + i \Gamma'_{\varepsilon/2}$. Soit $M_{\gamma,\varepsilon}$ l'intérieur de l'enveloppe convexe du point $\alpha \delta a N + i \frac{\varepsilon}{4} \gamma$ et de $B'(0, a) + i \Gamma_{\varepsilon/2}$.

Il résulte du théorème 1.1 que f est holomorphe dans $M_{\gamma,\varepsilon}$ s'il en est ainsi de Pf.

La réunion des $M_{\gamma,\varepsilon}$ pour $\varepsilon > 0$ contient pour tout $\delta' < \alpha \delta$ un ouvert du type $K(a, \delta') + i \Gamma_{2,\varepsilon'}$ pour un cône ouvert convexe Γ_2.

4. Solutions analytiques

Théorème 4.1. Soit Ω un ouvert de classe C^1, x_0 un point de $\partial\Omega$, N la normale à $\partial\Omega$ en x_0. Soit P un opérateur de partie principale hyperbolique dans la direction N au voisinage de x_0. Alors si f est une fonction analytique dans Ω et si Pf se prolonge en fonction analytique au voisinage de x_0, la fonction f se prolonge en fonction analytique au voisinage de x_0.

Démonstration. Soit H_ε l'hyperplan d'équation $\langle x - x_0, N \rangle = -\varepsilon$. L'intersection de H_ε et de Ω contient une boule (dans H_ε) B'_a, centrée au point $x_0 - \varepsilon N$ et dont le rayon a est infiniment grand par rapport à ε lorsque ε tend vers 0.

L'intérieur $K(a, \delta)$ de l'enveloppe convexe de B'_a et du point $(x_0 - \varepsilon N) + \delta a N$ sera un voisinage de x_0 pour ε assez petit.

Il suffit alors d'appliquer le lemme 3.1. La fonction f et le prolongement obtenu coïncident au voisinage de x_0 car x_0 admet un système fondamental de voisinages dont l'intersection avec Ω est connexe.

Théorème 4.2. Soit ω et Ω deux convexes de $\mathbb{R}^n$, ω étant localement compact, Ω ouvert, avec $\omega \subset \Omega$. Considérons les hyperplans dont la normale N est limite de directions pour lesquelles la partie principale de P n'est pas hyperbolique en un point au moins de Ω , et supposons que tout hyperplan de ce type qui coupe Ω coupe ω. Alors si f est une fonction analytique au voisinage de ω et si Pf se prolonge en fonction analytique dans Ω , la fonction f se prolonge en fonction analytique dans Ω .

<u>Démonstration</u>. Nous allons reprendre la démonstration du théorème 5.3.3 du [5]. Soit A l'adhérence dans S^{n-1} des directions dans lesquelles la partie principale de P n'est pas hyperbolique en un point au moins de Ω . Soit $x_0 \in \omega$, $\widetilde{\omega}$ un voisinage (connexe) de ω dans lequel f est analytique. Soit $x_1 \in \Omega$, $\alpha > 0$, avec $\overline{B(x_1, \alpha)} \subset \Omega$.

Il existe un compact K convexe de ω tel que tout hyperplan dont la normale appartient à A qui coupe $B(x_1, \alpha)$ coupe K (car A est compact). Soit K_ε l'ensemble des points à une distance inférieure à ε de K, et choisissons ε tel que K_ε soit contenu dans $\widetilde{\omega}$ avec $0 < \varepsilon \leqslant \alpha$. Soit $0 \leqslant t \leqslant 1$, $x_t = x_0 + t(x_1 - x_0)$ et désignons par K_ε^t l'enveloppe convexe de K_ε et de $B(x_t, \varepsilon)$. La frontière de K_ε^t est de classe C^1 et ses normales en un point hors de $\widetilde{\omega}$ n'appartiennent pas à A.

Il résulte alors du théorème 4.1 que le plus petit t_0 tel que f ne se prolonge pas à K_t pour $t > t_0$ est 1.

Pour tout $x \in \Omega$ on a donc obtenu un prolongement analytique de f dans un ouvert étoilé en x_0, contenant x, ce qui définit le prolongement cherché de f.

<u>Remarque</u>. Le théorème 1.1 se démontre exactement comme le théorème

4.2 à partir d'un théorème de Zerner [15] analogue complexe du théorème 4.1, le théorème de Zerner se démontrant lui aussi par le même argument géométrique que le théorème 4.1, le lemme 3.1 étant alors remplacé par le théorème de Cauchy-Kowalewski précisé.

5. Rappels sur les hyperfonctions

Nous ne redonnerons pas ici la définition des hyperfonctions de M. Sato (cf. [11] ou [10], [14]) mais nous rappellerons par contre les propriétés du support singulier dont nous aurons besoin, propriétés incluses dans la théorie du faisceau C de Sato et Kashiwara ([12], [6], [10 bis]).

Définition 5.1. Soit u une hyperfonction sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'un point (x, η) de $\Omega \times S^{n-1}$ n'appartient pas au support singulier de u (en abrégé $S.S(u)$) si, au voisinage de x, u est somme finie de valeurs au bord de fonctions holomorphes f_α, définies dans des ouverts $(\omega + i\Gamma_\alpha) \cap \tilde{\omega}$, où $\tilde{\omega}$ est un voisinage complexe de x, $\tilde{\omega} = \omega \cap \mathbb{R}^n$, et Γ_α est un cône ouvert convexe dont le polaire ne rencontre pas le point η .

Le support singulier de u est donc un fermé de $\Omega \times S^{n-1}$.

Si $(x, \eta) \notin S.S(u)$ on dira aussi que u est analytique dans la direction η au voisinage de x.

Théorème 5.1. Soit u une hyperfonction sur Ω .

1) Si I est une partie convexe propre fermée de S^{n-1} et si $S.S(u) \subset \Omega \times I$, u est valeur au bord d'une fonction holomorphe f, définie dans un ouvert $\tilde{V}$ qui pour tout voisinage I' de I contient l'intersection de $\Omega + i\Gamma'$ et d'un voisinage complexe $\tilde{\Omega}'$ de Ω, en désignant par Γ' l'intérieur du polaire de I'. En particulier si $S.S(u)$ est vide, u est analytique.

2) Si $F_1, \cdots, F_p$ sont des fermés de $\Omega \times S^{n-1}$ de réunion F, et si $S.S(u)$ est contenu dans F, il existe des hyperfonctions $u_1, \cdots, u_p$, sur Ω avec

$$u = \sum_i u_i \ , \quad S.S(u_i) \subset F_i \quad (i = 1, \cdots, p).$$

Le premier théorème fondamental de Sato peut alors s'énoncer.

Théorème 5.2. Soit $P(x, \frac{\partial}{\partial x})$ un opérateur différentiel à coefficients analytiques sur Ω .

1) $S.S(Pu) \subset S.S(u) \cup \{(x, \eta) \mid p(x, \eta) = 0\}$.

2) Soit (x, η) un point de $\Omega \times S^{n-1}$ où $p(x, \eta) \neq 0$. Pour toute hyperfonction v sur Ω , il existe une hyperfonction u sur Ω avec

$$(x, \eta) \notin S.S(Pu - v).$$

(On trouvera dans [3] une démonstration élémentaire de ce théorème).

Soit maintenant S l'hypersurface $\langle x, N \rangle = 0$ de Ω , avec $N = (0, \cdots, 0, 1)$. Si u est une hyperfonction sur Ω dont le support singulier ne rencontre pas $\Omega \times (\{N\} \cup \{-N\})$ (on dit que u est analytique dans la direction $\pm N$), on peut définir la restriction de u à S de la manière suivante.

Soit $(I_\alpha)_\alpha$ un recouvrement fini du complémentaire d'un voisinage de $\{N\} \cup \{-N\}$ par des parties convexes fermées propres, f_α des fonctions holomorphes dans un ouvert $(\Omega + i\Gamma_\alpha) \cap \tilde{\Omega}$ tels que u soit somme des valeurs au bord des f_α (de tels I_α, f_α existent au moins sur tout ouvert relativement compact de Ω d'après le théorème 5.1).

L'hyperplan complexe $\langle z, N \rangle = 0$ rencontre tous les ouverts $\Omega + i\Gamma_\alpha$ et on pose

$$u\big|_{\langle x,N\rangle=0} = \sum_\alpha b(f_\alpha\big|_{\langle z,N\rangle=0}).$$

(b désigne alors la "valeur au bord" dans l'espace $\langle z, N \rangle = 0$).

On vérifie que cette définition est indépendante de la représentation choisie.

L'hyperfonction u peut alors être considérée comme une hyperfonction de $n-1$ variables "dépendant analytiquement" de x_n, et on peut alors démontrer que si u est nulle pour $x_n < 0$, u est nulle sur les composantes connexes de Ω recontrant l'ouvert $\{x_n < 0\} \cap \Omega$. On en déduit donc (voir [7 bis]), grâce au théorème 5.2 l'extension aux hyperfonctions du théorème de Holmgren. Signalons que ce théorème peut également se démontrer de manière élémentaire [14] grâce à la représentation des hyperfonctions comme sommes localement finies de fonctionnelles analytiques.

Théorème 5.3. Soit S une hypersurface analytique de Ω non caractéristique pour l'opérateur différentiel $P(x, \frac{\partial}{\partial x})$. Soit u une hyperfonction sur Ω solution de $Pu = 0$. Supposons que S sépare Ω en deux régions et que u soit nulle sur l'une d'elles. Alors u est nulle au voisinage de S.

La méthode utilisée pour déduire le théorème 4.2 du théorème 4.1 permet également d'énoncer :

Théorème 5.4. Soit ω et Ω deux convexes de $\mathbb{R}^n$, ω étant localement compact, Ω ouvert avec $\omega \subset \Omega$. Considérons les hyperplans dont la normale est limite de directions caractéristiques en un point au moins de Ω, et supposons que tout hyperplan de ce type qui coupe Ω coupe ω. Alors si u est une hyperfonction sur Ω solution de $Pu = 0$, et si u est nulle au voisinage de ω, u est nulle sur Ω.

6. Solutions hyperfonctions du problème de Cauchy

On supposera l'opérateur $P(x, \frac{\partial}{\partial x})$ d'ordre m. On désignera alors par γ l'application qui à une hyperfonction u, analytique dans la direction $\pm N$, définie au voisinage de $\langle x, N\rangle = 0$, associe le m-uple d'hyperfonctions de l'hyperplan $\langle x, N\rangle = 0$ défini par

$$\gamma(u) = \left(u\big|_{\langle x,N\rangle=0}, \left(\frac{\partial}{\partial N} u\right)\Big|_{\langle x,N\rangle=0}, \ldots, \left(\frac{\partial^{m-1}}{\partial N^{m-1}} u\right)\Big|_{\langle x,N\rangle=0}\right).$$

Théorème 6.1. On suppose la partie principale de P hyperbolique dans la direction N en tout point de $\overline{B(0, r)}$. Il existe une constante $\delta'' > 0$ telle que, $\forall a < r$, si v est une hyperfonction analytique dans la direction $\pm N$, définie au voisinage de $\overline{B'(0, a)} \cup K(a, \delta'')$, et si (w) est un m-uple d'hyperfonctions de $\langle x, N\rangle = 0$ défini au voisinage de $\overline{B'(0, a)}$, il existe une hyperfonction et une seule, u, analytique dans la direction $\pm N$, définie dans un voisinage de $\overline{B'(0, a)} \cup K(a, \delta'')$, solution du problème de Cauchy $Pu = v$, $\gamma(u) = (w)$.

Démonstration. L'unicité de u résulte du théorème de Holmgren.

Soit $(I'_\alpha)_\alpha$ un recouvrement fini de la sphère unité S^{n-2} de $\langle y, N\rangle = 0$, Γ'_α l'intérieur du polaire de I'_α dans cet espace, γ_α un vecteur unitaire de Γ'_α. Soit δ_α la constante du lemme 3.2 déterminée par le couple $(\Gamma'_\alpha, \gamma_\alpha)$. On prendra $\delta'' \leq \delta_\alpha$ pour tout α.

Il existe un recouvrement $(I_\alpha)_\alpha$ du complémentaire d'un voisinage de $\{N\} \cup \{-N\}$ par des parties convexes fermées propres, des fonctions g_α holomorphes dans $V + i\Gamma_{\alpha,\varepsilon}$, où V est un voisinage de $\overline{B'(0, a)} \cup K(a, \delta'')$ tels que v soit somme des valeurs au bord des g_α, et tels que $\Gamma_\alpha \cap \langle y, N\rangle = 0$ soit le polaire Γ'_α de I'_α dans l'hyperplan $\langle y, N\rangle = 0$. Il existe donc des m-uples (h_α) de fonctions holomorphes dans $V' + i\Gamma'_{\alpha,\varepsilon'}$, où $V' = V \cap \langle x, N\rangle = 0$ et $\varepsilon' > 0$, tels que (w) soit somme des valeurs au bord des (h_α).

Soit f_α la solution holomorphe du problème de Cauchy $Pf_\alpha = g_\alpha$, $\gamma(f_\alpha) = (h_\alpha)$. Il résulte du lemme 3.2 que la fonction f_α aura une valeur au bord u_α, hyperfonction définie sur un voisinage $\overline{B'(0, a)} \cup K(a, \delta)$. On posera $u = \sum_\alpha u_\alpha$.

Remarque. Nous ne faisons aucune hypothèses sur les caractéristiques de p. Dans le cas où on suppose celles-ci de multiplicités constantes, Leray et Ohya [9] ont montré que l'on pouvait résoudre le problème de Cauchy dans des classes non quasi-analytiques.

7. Existence et prolongement des solutions hyperfonctions

Théorème 7.1. Soit $P(x, \frac{\partial}{\partial x})$ un opérateur dont la partie principale est hyperbolique dans une direction N au voisinage du point x_0. Pour toute hyperfonction v définie au voisinage de x_0, il existe u, hyperfonction au voisinage de x_0, solution de $Pu = v$.

Démonstration. On peut, d'après le théorème 5.2, trouver u_1 et u_2, hyperfonctions définies au voisinage de x_0, avec

$$S.S(Pu_1 - v) \not\ni (x_0, N)$$

$$S.S(Pu_2 - v) \not\ni (x_0, -N).$$

En utilisant le théorème 5.1 on peut aussi supposer que

$$(x_0, -N) \notin S.S(u_1), \quad (x_0, N) \notin S.S(u_2).$$

Il résulte alors du théorème 6.1 qu'il existe u_3 solution de

$$Pu_3 = v - Pu_1 - Pu_2 .$$

On pose $u = u_1 + u_2 + u_3$.

Remarque. On pourrait en fait démontrer, par une étude plus précise, qu'il existe un voisinage ω de x_0 tel que désignant par $B(\omega)$ l'espace des hyperfonctions sur ω on ait $PB(\omega) = B(\omega)$.

On pourrait aussi déduire ce dernier résultat du théorème 7.1 par des arguments d'analyse fonctionnelle.

Théorème 7.2. Soit Ω un ouvert convexe dont la frontière $\partial\Omega$ est de class C^1. Soit $x_0 \in \partial\Omega$, N la normale à $\partial\Omega$ en x_0. Supposons la partie principale de P hyperbolique dans la direction N au voisinage de x_0.

Soit v une hyperfonction définie sur un voisinage V de x_0, et u une hyperfonction sur $\Omega \cap V$ solution de $Pu = v$. On peut alors prolonger u en une hyperfonction $\bar{u}$ définie sur un voisinage de x_0, solution de $P\bar{u} = v$.

Démonstration. On peut supposer d'après le théorème 7.1 que $Pu = 0$.

Reprenons les notations de la démonstration du théorème 4.1.

Il résulte alors du théorème 6.1 que la restriction de u à un voisinage de la boule B'_a centrée en $x_0 - \varepsilon N$, se prolonge en $\bar{u}$, hyperfonction définie au voisinage de x_0 et solution de $P\bar{u} = 0$. La restriction de $\bar{u}$ à Ω coïncidera alors avec u d'après le théorème de Holmgren.

Théorème 7.3. Soit ω et Ω deux ouverts convexes de $\mathbb{R}^n$ avec $\omega \subset \Omega$. Considérons les hyperplans dont la normale est limite de directions pour lesquelles la partie principale de P n'est pas hyperbolique en un point au moins de Ω, et supposons que tout hyperplan de ce type qui coupe Ω coupe ω. Alors si v est une hyperfonction sur Ω, u une hyperfonction sur ω solution de $Pu = v$, u se prolonge de manière unique en $\bar{u}$, hyperfonction sur Ω solution de $P\bar{u} = v$.

Démonstration. Nous allons adapter l'argument de la démonstration du théorème 4.2. Soit A l'adhérence dans S^{n-1} des directions pour lesquelles la partie principale de P n'est pas hyperbolique en un point de Ω .

Soit $x \in \Omega$. Il résulte de la démonstration du théorème 4.2 (le théorème 7.2 remplaçant le théorème 4.1) que si ω_0 est un ouvert relativement compact de ω , u se prolonge à un voisinage de l'enveloppe convexe de x et de $\overline{\omega}_0$.

Soit alors ω_t $(0 \leq t < 1)$ une famille d'ouverts convexes relativement compacts dans ω , tels que $\bigcup_{t<t_0} \omega_t = \omega_{t_0}$, tels que $(\omega_t)_{t>t_0}$ soit un système fondamental de voisinages de $\overline{\omega}_{t_0}$, et tels que $\bigcup_{t<1} \omega_t = \omega$.

Soit L_t l'intérieur de l'enveloppe convexe de ω_t et de x. Soit t_0 le plus petit t tel que u ne se prolonge pas à L_t pour $t > t_0$.

Il résulte du théorème 7.2 que $t_0 = 1$ car les normales à L_t hors de ω et de x n'appartiennent pas à A.

Pour tout x de Ω, u se prolonge donc en solution hyperfonction de $Pu = v$ dans l'intérieur de l'enveloppe convexe de ω et de x.

Les différents prolongements se recollent d'après le théorème de Holmgren (théorème 5.4).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bony, J. -M. et Schapira, P.: Existence et prolongement des solutions analytiques des systèmes hyperboliques non stricts. C. R. Acad. Sci. Paris, 274 (1972), 86-89.

[2] Bony, J. -M. et Schapira, P.: Problème de Cauchy, existence et prolongement pour les hyperfonctions solutions d'équations hyper-

boliques non strictes. C. R. Acad. Sci. Paris, 274 (1972), 188-191.

[3] Bony, J. -M. et Schapira, P.: Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles. Article à paraître aux Inventiones Mathematicae.

[4] Bony, J. -M. et Schapira, P.: Solutions analytiques et solutions hyperfonctions des équations hyperboliques non strictes. Article à paraître.

[5] Hörmander, L.: Linear Partial Differential Operators. Springer, 1963.

[6] Kashiwara, M.: On the structure of hyperfunctions (after M. Sato). Sugaku no Ayumi, 15 (1970), 19-72 (en Japonais).

[7] Kawai, T.: Construction of elementary solutions of I-hyperbolic operators and solutions with small singularities. Proc. Japan Acad., 46 (1970), 912-915.

[7 bis] Kawai, T.: On the theory of Fourier transform in the theory of hyperfunctions and its applications, Surikaiseki Kenkyusho Kokyuroku, RIMS, Kyoto Univ., 108 (1969), 84-288 (en Japonais).

[8] Kiselman, C. -O.: Prolongement des solutions d'une équation aux dérivées partielles à coefficients constants. Bull. Soc. Math. France, 97 (1969), 329-356.

[8 bis] Komatsu, H.: A local version of Bochner's tube theorem. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA (à paraître).

[9] Leray, J. et Ohya, Y.: Systèmes linéaires hyperboliques non stricts. Colloque sur l'Analyse Fonctionnelle, Liège,1964, C.B.R.M., pp.105-144.

[10] Martineau, A.: Distributions et valeurs au bord des fonctions

holomorphes. Proc. of the Intern. Summer Inst. Lisbon, 1964, pp.193-326.

[10 bis] Morimoto, M.: Sur la décomposition du faisceau des germes de singularités d'hyperfonctions, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, 17 (1970), 215-239.

[11] Sato, M.: Theory of hyperfunctions, I et II. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I, 8 (1959-60), 139-193 et 398-437.

[12] Sato, M.: Regularity of hyperfunction solutions of partial differential equations. Intern. Congress of Math., Nice, 1970.

[13] Schapira, P.: Theorie des Hyperfonctions. Lecture Notes in Math. Springer, No.126, 1970.

[14] Schapira, P.: Théorème d'unicité de Holmgren et opérateurs hyperboliques dans l'espace des hyperfonctions. Anaïs Acad. Brasil Sc., 43 (1971), 38-44.

[15] Zerner, M.: Domaine d'holomorphie des fonctions vérifiant une équation aux dérivées partielles. C. R. Acad. Sci. Paris, 272 (1971), 1646-1648.

J.-M. Bony (Université de Paris VI)
66, rue Gay-Lussac PARIS (V°)

P. Schapira (Université de Tours)
57, rue Boissonade PARIS (XIV°)